

بیان مسئله

فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از فضای متریک (X, d) باشند. نگاشت $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ را دوری^۱ می‌گویند هر گاه $T(A) \subseteq B$ و $T(B) \subseteq A$.

در سال ۲۰۰۳ کرک^۲ و همکاران در [۵] تعمیم جالبی از قضیه نقطه ثابت باناخ را برای نگاشت‌های دوری به شرح زیر ثابت کردند.

قضیه ۱. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ناتهی و بسته از فضای متریک کامل (X, d) باشند. اگر $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ یک نگاشت دوری باشد به گونه‌ای که

$$d(Tx, Ty) \leq r d(x, y); \quad \forall (x, y) \in A \times B$$

به ازای یک $r \in (0, 1)$ ، آنگاه $A \cap B \neq \emptyset$ و اینکه T دارای یک نقطه ثابت یکتا در $A \cap B$ خواهد بود.

حال این سؤال پیش می‌آید که اگر $A \cap B = \emptyset$ در این صورت چه جایگزین مناسبی می‌توان برای مفهوم نقطه ثابت نگاشت دوری $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ ارائه داد؟

در واقع توجه داریم که چون به ازای هر $x \in A \cup B$ داریم:

$$d(x, Tx) \geq \text{dist}(A, B);$$

که در آن $\text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b); (a, b) \in A \times B\}$ ، لذا در چنین وضعیتی معادله نقطه ثابت $u = Tu$ فاقد جواب می‌باشد. از این رو مفهوم بهترین نقاط تقریبی برای نگاشت‌های دوری که می‌توان آن را به عنوان تعمیمی از مفهوم نقطه ثابت در نظر گرفت را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از فضای متریک (X, d) و $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ یک نگاشت دوری باشد. نقطه $p \in A \cup B$ را یک بهترین نقطه نزدینی^۳ نگاشت T گوئیم هر گاه $d(p, Tp) = \text{dist}(A, B)$.

توجه شود که اگر p یک بهترین نقطه تقریبی نگاشت دوری T باشد، در این صورت نقطه p را می‌توان جواب مسئله کمینه‌سازی

$$\min_{x \in A \cup B} d(x, Tx) \quad (1)$$

در نظر گرفت.

حال فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک X و $T : A \rightarrow X$ یک نگاشت باشد. در این صورت نقطه $x^* \in A$

¹Cyclic

²Kirk

³Best proximity point

را یک بهترین تقریب نگاشت T گویند هرگاه:

$$d(x^*, Tx^*) = D(Tx^*, A)$$

که در آن

$$D(u, A) = \inf\{d(u, a); a \in A\}$$

در این پایان نامه به بررسی وجود، یکتایی و همگرایی بهترین نقاط تقریب برای گروه خاصی از نگاشت های دوری تحت عنوان نگاشت های تقریباً انقباضی دوری خواهیم پرداخت. همانطور که ملاحظه خواهد شد، یکی از ابزار اصلی این هدف بهره گیری مناسب از ویژگی های هندسی فضا های باناخ به طور یکنواخت محدب است.

پیشینه موضوع

یکی از خواص مهم هندسی فضا های باناخ عبارت است از مفهوم به طور یکنواخت محدب بودن. یادآور می شویم که فضای باناخ X را به طور یکنواخت محدب گویند هرگاه برای هر $\varepsilon \in (0, 2]$ عدد مثبت $\delta = \delta(\varepsilon)$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in B_X$ با $\|x - y\| \geq \varepsilon$ داشته باشیم $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$. به عبارتی دیگر فضای باناخ X اکیداً محدب است هرگاه برای هر دو نقطه واقع در گوی یک به $\|x - y\| \geq \varepsilon$ آنگاه نقطه میانی پاره خط واصل دو نقطه x و y درون گوی یک و به فاصله حداقل δ از مرز گوی یعنی S_X قرار می گیرد.

به عنوان مثال فضا های هیلبرت و L_p و l_p به ازای $1 < p < \infty$ فضاهایی به طور یکنواخت محدب می باشند.

یادآور می شویم که از ویژگی های مهم فضا های باناخ به طور یکنواخت محدب، انعکاسی بودن آن ها می باشد.

در سال ۲۰۰۶ الدرد و ویرامانی^۴ نگاشت های انقباضی دوری^۵ را برای مطالعه وجود، یکتایی و همگرایی بهترین نقاط نزدینی به شرح زیر معرفی کردند:

تعریف ۲. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی از زیرمجموعه های فضای برداری نرم دار X باشند. در این صورت نگاشت $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ را انقباضی دوری گویند هرگاه ثابت $r \in (0, 1)$ موجود باشد به گونه ای که

$$\|Tx - Ty\| \leq r\|x - y\| + (1 - r) \text{dist}(A, B)$$

برای هر $(x, y) \in A \times B$.

قضیه بعد که ایده اصلی شکل گیری این پایان نامه می باشد، یکی از نتایج اصلی مقاله [] می باشد.

⁴Eldred and Vireamani

⁵Cyclic contraction

قضیه ۲. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی، بسته و محدب از فضای باناخ به طور یکنواخت محدب X و $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ یک نگاشت انقباضی دوری باشد. در این صورت نگاشت T دارای یک بهترین نقطه نزدینی یکتا مانند $p \in A$ خواهد بود. در ضمن برای هر $x_0 \in A$ اگر تعریف کنیم $x_{n+1} = Tx_n$ آنگاه دنباله $\{x_{2n}\}$ در A به نقطه p به طور قوی همگراست.

شایان ذکر است که این قضیه در سال ۲۰۱۱ توسط آبکار و گابله^۶ به فضاهای متریک مجهز به یک ترتیب جزئی با استفاده از یک مفهوم هندسی گرفته شده است. فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب تحت عنوان خاصیت UC تعمیم داده شده است. همان طور که در بخش بیان مسئله اشاره شد یکی از اهداف اصلی این پایان نامه ارائه تعمیمی از نگاشت های انقباضی دوری و همچنین بررسی وجود، یکتایی و همگرایی بهترین نقاط تقریب می باشد.

برای کسب اطلاعات بیشتر در خصوص نقاط نزدینی رده های مختلفی از نگاشت های دوری، به منابع [۴] و [۵] و [۶] اشاره می شود.

اهداف تحقیق

اخیراً در سال ۲۰۲۱ صدیق باشا^۷ توسیعی از نگاشت های انقباضی دوری به شرح زیر ارائه داد:

تعریف ۳. فرض کنید (A, B) یک زوج ناتهی از زیرمجموعه های فضای متریک (X, d) باشد. در این صورت $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ یک نگاشت تقریباً انقباضی دوری نامیده می شود هرگاه:

۱. T بر $A \cup B$ دوری باشد؛

۲. عدد حقیقی $r \in (0, 1)$ موجود باشد به طوریکه:

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) + (1 - r)D(y, A)$$

همان طور که از تعریف مشهود است، نگاشت های تقریباً انقباضی دوری نسخه ضعیف شده نگاشت های انقباضی دوری است. در ضمن می توان بررسی کرد که این نگاشت ها لزوماً پیوسته نیستند.

یکی دیگر از ویژگی های مهم نگاشت های تقریباً انقباضی دوری عبارت است از پایایی مجموعه های پراکسیمال A_0 و B_0 ؛ یعنی

$$T(B_0) \subseteq A_0 \text{ و } T(A_0) \subseteq B_0 \text{ که در آن:}$$

$$A_0 := \{x \in A; d(x, y) = \text{dist}(A, B) \quad y \in B \text{ یک ازای یک}\}$$

$$B_0 := \{y \in B; d(x, y) = \text{dist}(A, B) \quad x \in A \text{ یک ازای یک}\}$$

قضیه بعد که ماحصل چندین گزاره و لم می باشد یکی از نتایج اصلی این پژوهش محسوب می شود:

^۶Abkar and Gabeleh

^۷Sadiq Basha

قضیه ۳. فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی بسته و محدب و B یک زیرمجموعه ناتهی و محدب از فضای به طور یکنواخت محدب X باشند. همچنین فرض کنید $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ یک نگاشت تقریباً انقباضی دوری باشد. در این صورت T در A و در B دارای بهترین نقاط تقریب یکتا خواهد بود. به بیان دیگر نقطه یکتای $x^* \in A$ و $y^* \in B$ موجودند به گونه‌ای که:

$$d(x^*, Tx^*) = D(Tx^*, A)$$

$$d(y^*, Ty^*) = D(Ty^*, B)$$

یکی دیگر از اهدافی که در این پایان‌نامه مورد توجه است، در نظر گرفتن نسخه نادوری قضیه قبل می‌باشد. متذکر می‌شویم که نگاشت $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ تقریباً انقباضی نادوری نامیده می‌شود هرگاه:

۱. T نادوری باشد. یعنی $T(A) \subseteq A$ و $T(B) \subseteq B$ ؛

۲. عدد حقیقی $r \in (0, 1)$ موجود باشد که

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, y) + (1 - r)dist(A, B) \quad \forall x, y \in A, B$$

برای این رده از نگاشت‌ها وجود و یکتایی نقطه ثابت می‌تواند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار باشد زیرا این قبیل نگاشت‌ها لزوماً پیوسته نیستند و همان طور که می‌دانیم یکی از مفروضات اصلی قضایای کلاسیک نقطه ثابت، پیوستگی خود-نگاشت مورد بحث می‌باشد. بر این اساس یکی دیگر از نتایج اصلی این پایان‌نامه به صورت زیر که مبتنی بر پیش نیازها و گزاره‌های متنوعی می‌باشد بیان می‌شود:

قضیه ۴. فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی، بسته و محدب و B یک مجموعه ناتهی از فضای باناخ به طور یکنواخت محدب X باشند. اگر $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ یک نگاشت تقریباً انقباضی نادوری^۸ باشد آنگاه T در A دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد خواهد بود.

در پایان متذکر می‌شود که می‌توان کاربردهایی از قضیه نقطه ثابت اخیر در حل‌پذیری رده‌های جدیدی از معادلات دیفرانسیل، انتگرال و ماتریسی ارائه داد.

مباحث و نتایج این تحقیق مبتنی بر مقالات (۳ مقاله‌ای که قرار هست کارکنیم) است.

References

- [1] Al- Thagafi, M. A., Shahzad, N.: Convergence and existence results for best proximity points. Nonlinear Anal. 70, 3665- 3671 (2009)

⁸Almost acyclic contraction

- [2] Abkar, A., Gabeleh, M.: Best proximity points for asymptotic cyclic contraction mappings. *Nonlinear Anal.* 74, 7261- 7268 (2011).
- [3] Anthony Eldred, A., Veeramani, P.: Existence and convergence of best proximity points. *J. Math. Anal. Appl.* 323, 1001- 1006 (2006)
- [4] *I Optim Theory Appl* (2011) 150: 188- 193.
- [5] Kirk, W. A., Srinivasan, P. S., Veeramani, P.: Fixed points for mappings satisfying cyclic contractive conditions. *Fixed Point Theory* 4 (1), 79- 86 (2003)
- [6] Suzuki, T., Kikkawa, M., Vetro, C.: The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC: *Nonlinear Anal.* 71, 2918- 2926 (2009)
- [7] Włodarczyk, K., Plebaniak, R., Banach, A.: Best proximity points for cyclic and noncyclic set-valued relatively quasi- asymptotic contractions in uniform spaces. *Nonlinear Anal.* 70, 3332- 3341 (2009)