که به ازای y ثابت محاسبه می‌شود (در صورت وجود حد) و مشتق جزئی نسبت به y عبارت است از:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to ۰} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \tag{۳۸}$$

که به ازای x ثابت محاسبه می‌شود (در صورت وجود حد)

توجه: مشتق جزئی را با نمادهای دیگر هم نمایش می‌دهند.

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}, f_x, f_y, z_x, z_y, D_x f, D_y f$$

دیفرانسیل کل تابع $z = f(x,y)$ را با فرمول زیر حساب می‌کنیم.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{۳۹}$$

و دیفرانسیل کل تابع سه متغیره $u = f(x,y,z)$ عبارت است از:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{۴۰}$$

مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $z = f(x,y)$ مشتقات جزئی مشتقاب مرتبه اول آن هستند و به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = z_{xx} = f_{xx} \tag{۴۱}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial \partial t} = \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = z_{xy} = f_{xy} \tag{۴۲}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = z_{yy} = f_{yy} \tag{۴۳}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^۲ z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = z_{yx} = f_{yx} \tag{۴۴}$$

و به طور مشابه، مشتقات مرتبه سوم و بالاتر تعریف می‌شوند.

قاعده زنجیره‌ای فرضه کنید $z = f(x,y)$ و $y = h(t)$ و $x = g(t)$، همچنین فرض کنید توابع $h(t)$ و $g(t)$ و $f(x,y)$ مشتق‌پذیر باشند. آنگاه مشتق تابع مرکب $z = f\big(g(t), h(t)\big)$ از فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{۴۵}$$

اگر $z = f(x,y)$ و $y = h(x)$، آنگاه مشتق کل z نسبت به x را می‌توان از فرمول زیر حساب کرد.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dx} \qquad (۴۶)$$

اگر $z = f(x,y)$ وو $x = x(r,s)$ و $y = y(r,s)$، آنگاه مشتقات جزئی به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad (۴۷)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad (۴۸)$$

مسئله ۳-۲- اگر $f(x,y,z) = x^{۳}e^{y+z}$، حاصل $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{x^{۳}e^{y+z}}{x^{۳}e^{y+z}} = -۱$$

مسئله ۴-۲- یک ضلع مثلثی ۲/۴ متر است و با سرعت ۱۰ سانتیمتر بر ثانیه در حال افزایش است. یک ضلع دیگر این مثلث ۱/۶ متر و با سرعت ۵ سانتیمتر بر ثانیه در حال افزایش می‌باشد. زاویه بین دو ضلع $\frac{\pi}{۶}$ ثابت است. مساحلت مثلث با چه سرعتی در حال افزایش است.

حل: می‌دانیم $S = \frac{۱}{۲}absinC$ و b,a توابعی از t (زمان) هستند. با استفاده از فرمول (۴۵) داریم.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial a}.\frac{da}{dt} + \frac{\partial S}{\partial b}.\frac{db}{dt}\\ &= \tfrac{۱}{۲}b\sin C\frac{da}{dt} + \tfrac{۱}{۲}a\sin C.\frac{db}{dt}\\ &= \frac{۱}{۲}\times ۱۶۰\times\frac{۱}{۲}\times ۱۰ + \frac{۱}{۲}\times ۲۴۰\times\frac{۱}{۲}\times ۵ = \frac{۷۰۰\ cm^{۲}}{s}\end{aligned}$$

مسئله ۵-۲- اگر $f(u,v) = \frac{u}{v}$، $u = \sqrt{x^{۲} - ۳y + ۴z}$ و $v = xyz$، مقدار $\frac{\partial f}{\partial z}$ در $z = ۲$، $y = ۱$، $x = ۱$ کدام است؟

حل: زیرا

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z}\\ &= \frac{۱}{v}\frac{۲}{\sqrt{x^{۲} - ۳y + ۴z}} = \frac{u}{v^{۲}}, xy\end{aligned}$$

$$= \frac{۲}{xyz\sqrt{x^{۲} - ۳y + ۴z}} - \frac{\sqrt{x^{۲} - ۳y + ۴z}}{xyz^{۲}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(۱،۱،۲) = \frac{۲}{۲\sqrt{۱ - ۳ + ۸}} - \frac{\sqrt{۱ - ۳ + ۸}}{۴} = \frac{\sqrt{۶}}{۶} - \frac{\sqrt{۶}}{۴} = \frac{-\sqrt{۶}}{۱۲}$$

مسئله ۶-۲- اگر $z = x^{۲} = xy + ۲y^{۲}$ و $x = \frac{۱}{t+۱}$ و $y = ۱ + \sqrt{t}$ مقدار $\frac{dz}{dt}$ به ازای $t = ۱$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$=(۲x - y)\frac{-۱}{(t+۱)^{۲}} + (-x + ۴y)\frac{۱}{۲\sqrt{t}}$$

$$x(۱) = \frac{۱}{۱ + ۱} = \frac{۱}{۲}, y(۱) = ۱ + \sqrt{۱} = ۲$$

بنابراین

$$\left.\frac{dz}{dt}\right| t = ۱ = \left(۲ \times \frac{۱}{۲} - ۲\right)\frac{-۱}{(۱ + ۲)^{۲}} + \left(-\frac{۱}{۲} + ۸\right)\frac{۱}{۲\sqrt{۱}} = ۴$$

مسئله ۷-۲- تابع $w = f(y - z, z - x, x - y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی است؟

۱) $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = ۱$

۲) $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}$

۳) هیچکدام

۴) $\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = ۰$

حل: گزینه (۴) صحیح است. با فرض $u = y - z$ و $v = z - x$ و $t = x - y$ داریم $w = (u, v, t)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x} = ۰ - \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} + ۰ - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} + ۰$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\text{۰}-$$

مسئله ۸-۲- یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی که جواب آن در رابطه $xyz=\emptyset(x+y+z)$ صدق کند عبارت است از:

۱) $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=z$ ۲) $x\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\text{۲}z$

۳) $xy\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z(x-y)$ ۴) $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\text{۰}$

حل: گزینه (۳) صحیح است. با توجه به جوابهای داده شده، می‌بایست مشتق عبارت را نسبت به x و نسبت به y محاسبه نمود: با فرض اینکه z تابعی از y, x است داریم

$$\begin{cases} yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=\emptyset'(x+y+z) \\ xz+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=\emptyset'(x+y+z) \end{cases} \Rightarrow z(y-x)+xy\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\text{۰}$$

$$\Rightarrow xy\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z(x-y)$$

مسئله ۹-۲- با تغییر متغیر $v=x$ و $z=x+y$ معادله $u_{xx}-\text{۲}u_{yy}=\text{۰}$ به چه صورت تبدیل می‌شود.

حل: u تابعی از z, v می‌باشد و z, v توابعی از y, x هستند. با توجه به فرمولهای (۴۷) و (۴۸) داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial x^{\text{۲}}}=\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial v^{\text{۲}}}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial v\partial z}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial v\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial z^{\text{۲}}}.\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial v^{\text{۲}}}+\text{۲}\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial z^{\text{۲}}}$$

$$\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial v^{\text{۲}}}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial v\partial z}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial v\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial z^{\text{۲}}}.\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^{\text{۲}} v}{\partial z^{\text{۲}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=\frac{\partial^۲ u}{\partial v\partial z}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}.\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}-۲\frac{\partial^۲ u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=\frac{\partial^۲ u}{\partial v^۲}=۰\Rightarrow u_{vv}=۰$$

مسئله ۱۰-۲- معادله $u_{tt}-u_{xx}=۰$ با تغییر متغیر $r=x+t$ و $s=x-t$ به کدامیک از صورتهای زیر تبدیل می‌شود:

۱) $u_{rr}=۰$ ۲) $u_{rs}=۰$

۳) $u_{rs}+u_r=۰$ ۴) $u_{ss}=۰$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$u_t=u_r r_t+u_s s_t=u_r-u_s$$
$$u_{tt}=(u_r-u_s)_r r_t+(u_r-u_s)_s s_t$$
$$=u_{rr}-۲u_{rs}+u_{ss}$$
$$u_x=u_r r_x+u_s s_x=u_r+u_s$$
$$u_{xx}=(u_r+u_s)_r r_x+(u_r+u_s)_s s_r$$
$$=u_{rr}+۲u_{rs}+u_{ss}$$
$$u_{tt}-u_{ss}=-۴u_{rs}=۰\Rightarrow u_{rs}=۰$$

مسئله ۱۱-۲- اگر $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=۰$ آنگاه $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

حل: فرض می‌کنیم $z=z(x,y)$ و $u=\frac{x}{z}$ و $v=\frac{y}{z}$ بنابراین $F(u,v)=۰$ حال از F یکبار نسبت به x و یکبار نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$$\begin{cases}F_u u_r+F_v v_r=۰\\ F_u u_y+F_v v_y=۰\end{cases}$$

چون F تابعی از v, u است، بنابراین دستگاه بالا دارای جواب بدیهی $F_u=F_v=۰$ نیست و داریم

$$\begin{vmatrix}u_r & v_x\\ u_y & v_y\end{vmatrix}=۰\Rightarrow u_r v_y=v u_y \qquad (۱)$$

از طرفی

$$u_x = \frac{z - xz_x}{z^۲} \quad , \quad v_x = \frac{-yz_r}{z^۲}$$
$$u_y = \frac{-xz_y}{z^۲} \quad , \quad v_y = \frac{-yz_y}{z^۲}$$

با جایگذاری مقادیر بالا در (۱) داریم

$$\frac{z - xz_x}{z^۲} \times \frac{z - yz_y}{z^۲} = \frac{-yz_x}{z^۲} \times \frac{-xz_y}{z^۲} \Rightarrow xz_x + yz_y = z$$

مسئله ۱۲-۲- هرگاه $z = F(x^۲ - y^۲)$ مطلوبست محاسبه $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}$

حل: با فرض $u = x^۲ - y^۲$ داریم $z = F(u)$ و

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u} . \dfrac{\partial u}{\partial x} = ۲x\dfrac{\partial F}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial F}{\partial u} . \dfrac{\partial u}{\partial y} = -۲y\dfrac{\partial F}{\partial u} \end{cases} \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

مسئله ۱۳-۲- تابع $Z = yf\left(\frac{x}{y}\right) + F(\frac{x}{y})$ در کدام یک از معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کند.

۱) $Z_{xx} + ۲Z_{xy} + Z_{yy} = ۰$

۲) $Z_{xx} - ۲Z_{xy} + Z_{yy} = ۰$

۳) $x^۲Z_{xx} + ۲xyZ_{xy} + y^۲Z_{yy} = ۰$

۴) $x^۲Z_{xx} - ۲xyZ_{xy} + y^۲Z_{yy} = ۰$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$Z_x = \frac{y}{y}f'(\frac{x}{y}) + \frac{۱}{y}F'(\frac{x}{y})$$

$$Z_{xx} = \frac{۱}{y}f''(\frac{x}{y}) + \frac{۱}{y^۲}F''(\frac{x}{y})$$

$$Z_{xy} = -\frac{x}{y^۲}f''(\frac{x}{y}) - \frac{۱}{y^۲}F'(\frac{x}{y}) - \frac{x}{y^۳}F''(\frac{x}{y})$$

$$Z_y = f(\frac{x}{y}) - \frac{x}{y}f'(\frac{x}{y}) - \frac{x}{y^۲}F'(\frac{x}{y})$$

$$Z_{yy} = -\frac{x}{y^۲}f'(\frac{x}{y}) + \frac{x}{y^۲}f'(\frac{x}{y}) + \frac{x^۲}{y^۳}f''(\frac{x}{y}) + \frac{۲x}{y^۳}F'(\frac{x}{y}) + \frac{x^۲}{y^۴}F''(\frac{x}{y})$$

$x^۲Z_{xx}+۲xyZ_{xy}+y^۲Z_{yy}=۰$

مشتقات ضمنی اگر z بوسیله معادله $F(x,y,z)=۰$ به صورت تابعی ضمنی از (x,y) تعریف شود، آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z} \tag{۴۹}$$

مسئله ۱۴-۲- فرض کنید $z=(x,y)$ بصورت زیر بیان شده است.

$$x+y+z=e^{-(x+y+z)}$$

مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}$

حل: با توجه به فرمول (۴۹) داریم

$$F(x,y,z)=x+y+z-e^{-(x+y+z)}=۰$$

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{۱+e^{-(x+y+z)}}{۱+e^{-(x+y+z)}}=۱\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{۱+e^{-(x+y+z)}}{۱+e^{-(x+y+z)}}=۱\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=۰$$

اگر v,u توابعی ا متغیرهای مستقل y,x باشند و داشته باشیم.

$$f(x,y,u,v)=۰\quad,\quad g(x,y,u,v)=۰$$

آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\quad,\quad\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}\Big/\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$$

که در آن

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}$$

تعریف تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه α گوئیم اگر به ازای هر $(x,y)\in D_f$ و نیز هر عدد مثبت λ که $(\lambda x,\lambda y)\in D_f$ داشته باشیم

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y)$$

قضیه اولر: اگر تابع $f(x, y)$ همگن از درجه α و در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x, y) \qquad (۵۰)$$

قضیه: اگر $F(u) = f(x, y, z)$ و f تابعی همگن از درجه α باشد، آنگاه

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha \frac{F(u)}{F'(u)} \qquad (۵۱)$$

مسئله ۱۵-۲- اگر $f(x, y) = sin\frac{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}{x+y}$ آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

حل: زیرا $f(x, y)$ همگن از درجه صفر می‌باشد، لذا با استفاده از فرمول (۵۰) داریم

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = ۰ \Rightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{y}{x}$$

صفحه مماس بر یک سطح در نقطه $p(x., y., z.)$ عبارت است از صفحه‌ای که شامل تمام مماسهای مرسوم بر منحنیهای روی سطح که از نقطه p می‌گذارند باشد، اگر سطح با معادله $F(x, y, z) = ۰$ مشخص شده باشد، معادله صفحه مماس و خط قائم بر سطح در نقطه p توسط فرمول زیر بیان می‌شود.

(۵۲)

$$(x - x.)F_x(x., y., z.) + (y - y.)F_y(x., y., z.) + (z - z.)F_z(x., y., z.) = ۰$$

معادله خط قائم به سطح در نقطه p از فرمول زیربدست می‌آید.

$$\frac{x - x.}{F_x(x., y., z.)} = \frac{y - y.}{F_y(x., y., z.)} = \frac{z - z.}{F_z(x., y., z.)} \qquad (۵۳)$$

مسئله ۱۶-۲- خط عمود بر رویه $x^{۳} + y^{۳} + z^{۳} + xyz = ۴$ در نقطه $(a ، ۱ ، ۱)$ واقع بر رویه، را بدست آورید.

حل: ابتدا F_z, F_y, F_x را در نقطه $(a ، ۱ ، ۱)$ حساب می‌کنیم.

$$F_x = ۳x^{۲} + yz, F_X(۱,۱, a) = ۳ + a$$
$$F_y = ۳y^{۲} + xz, F_y(۱,۱, a) = ۳ + a$$
$$F_z = ۳z^{۲} + xz, F_z(۱,۱, a) = ۳ + a$$

از طرفی نقطه $(a\text{،}۱\text{،}۱)$ روی رویه می‌باشد و در معادله آن صدق می‌کند.

$$۱+۱+a^{۳}+a=۴ \Rightarrow a^{۳}+a-۲=۰ \Rightarrow a=۱$$

با استفاده از فرمول (۵۳) داریم

$$\frac{x-۱}{۴}=\frac{y-۱}{۴}=\frac{z-۱}{۴} \Rightarrow x-۱=y-۱=z-۱$$

مسئله ۱۷-۲- معادله مماس بر سطح به معادله $z=\frac{۱۸x^{۲}}{۲۵}+\frac{۸y^{۲}}{۲۵}$ در نقطه را (۲، ۲، ۱) را به دست آورید.

حل: با فرض $F=\frac{۱۸x^{۲}}{۲۵}+\frac{۸y^{۲}}{۲۵}-z$ داریم

$$F_x=\frac{۳۶}{۲۵}x \ \ , \ \ F_x(۱,۲,۲)=\frac{۳۶}{۲۵}$$

$$F_y=\frac{۳۶}{۲۵}y \ \ , \ \ F_y(۱,۲,۲)=\frac{۳۶}{۲۵} \ \ , F_z=-۱$$

معادله صفحه مماس به صورت زیر بیان می‌شود

$$(x-۱)\frac{۳۶}{۲۵}+(y-۲)\frac{۳۲}{۲۵}-(z-۲)=۰$$

$$۳۶x+۳۲y-۲۵z-۵۰=۰$$

مسئله ۱۸-۲- معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $x^{۲}+y^{۲}+xz^{۲}=۲$ در نقطه (۱، ۰، ۱) را بدست آورید.

حل:

$$F_x=۲x+z^{۲} \ , F_x(۱,۰,۱)=۳$$

$$F_y=۲y \ , F_y(۱,۰,۱)=۰$$

$$F_z=۲xz \ , F_z(۱,۰,۱)=۲$$

معادله صفحه مماس به صورت زیر بیان می‌شود.

$$۳(z-۱)+۲(z-۱)=۰ \Rightarrow ۳x+۲z=۵$$

۳ اکسترمم توابع دو متغیره

فرض کنید تابع $z = f(x, y)$ در یک همسایگی از $p.(x., y.)$ تعریف شده باشد، می‌گوئیم f در $p.$ دارای یک مقدار **مینیمم نسبی** (**ماکسیمم نسبی**) است اگر یک همسایگی از $p.$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر (x, y) در آن همسایگی داشته باشیم.

$(f(x, y) \leq f(x., y.)$ یا $f(x, y) \geq f(x., y.))$ نقطه $p.$ که تابع در آن اکسترمم دارد را یک **نقطه اکسترمم** می‌نامیم.

قضیه ۱: اگر تابع $z = f(x, y)$ در نقطه $p.(x., y.)$ به اکسترمم خود برسد، آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول آن در نقطه $p.(x., y.)$ برابر صفر هستند یا وجود ندارند.

توجه: اگر تابع $f(x, y)$ در نقطه $(x., y.)$ مشتق‌پذیر باشد و $(x., y.)$ یک نقطه اکسترمم برای f باشد، آنگاه

$$f_x(x., y.) = ۰ \ , f_y(x., y.) = ۰ \qquad (۵۴)$$

تعریف: نقطه $(x., y.)$ را یک **نقطه بحرانی** تابع f می‌نامیم، اگر f در $(x., y.)$ مشتق‌پذیر نباشد و یا رابطه (۵۴) برقرار باشد.

نقاط بحرانی را که منجر به مقادیر اکسترمم نسبی نمی‌شوند **نقاط زینی** می‌نامیم.

قضیه ۲: فرض کنید $(x., y.)$ یک نقطه بحرانی تابع $f(x, y)$ بوده و تمام مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم f در یک همسایگی از $(x., y.)$ پیوسته باشند و فرض کنید

$$A = f_{xx}(x., y.), B = f_{xy}(x., y.), C = f_{yy}(x., y.)$$

مبین $D = B^۲ - AC$ را تشکیل می‌دهیم.

الف: اگر $D > ۰$، $(x., y.)$ یک نقطه زینی است.

ب: اگر $D = ۰$، از این روش نتیجه‌ای بدست نمی‌آید.

پ: اگر $D < ۰$ و $A > ۰$، تابع در $(x., y.)$ دارای یک مقدار مینیمم نسبی است.

ت: اگر $D < ۰$ و $A < ۰$، تابع در $(x_۰, y_۰)$ دارای یک مقدار ماکسیمم نسبی است.

ماکسیمم و مینیمم مشروط (بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع در یک ناحیه بسته)

می‌خواهیم اکسترمم تابع $z = f(x, y)$ را با شرط $g(x, y) = ۰$ تعیین کنیم. اینکار را می‌توان به یک آزمون اکسترمم معمولی، موسوم به **تابع لاگرانژ**

$$u = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

تحویل کرد که در آن λ ضریب ثابت موسوم به ضریب لاگرانژ است. شرایط لازم برای اکسترمم تابع لاگرانژ عبارت است از:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = ۰ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = ۰ \\ g(x, y) = ۰ \end{cases}$$

برای پیدا کردن بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع در یک ناحیه بسته، لازم است

الف: مقادیر تابع در نقاط بحرانی را حساب کنیم.

ب: بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع را بر منحنیهای مرزی پیدا کنیم.

پ: بزرگترین و کوچکترین مقدار از بین تمام مقادیر بدست آمده در "الف" و "ب" را اختیار کنیم.

مسئله ۱-۳- حداقل (مینیمم) نسبی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x, y) = ۳x^۲ + ۲xy + ۲x + y^۲ + y + ۴$$

حل: ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} f_x(x, y) = ۶x + ۲x + ۲ = ۰ \\ f_y(x, y) = ۲x + ۲y + ۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{۱}{۴}, y = -\frac{۱}{۴}$$

حالا مبین را تشکیل می‌دهیم.

$$f_{xx}(x, y) = ۶ \Rightarrow A = ۶ , f_{xy}(x, y) = ۲ \Rightarrow B = ۲$$

$$f_{yy}(x, y) = ۲ \Rightarrow C = ۲ , D = B^۲ - AC = ۴ - ۱۲ < ۰$$

با توجه ب تست پ قضیه () نقطه $\left(-\frac{۱}{۴}, -\frac{۱}{۴}\right)$ جواب صحیح است.

مسئله ۲-۳- مینیمم نسبی عبارت $x^۳ + y^۳ - ۶xy$ را محاسبه کنید.

حل:

$f(x,y) = x^۳ + y^۳ - ۶xy \quad , \quad f_x = ۳x^۲ - ۶y$

$f_y = ۳y^۲ - ۶x$

ابتدا نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم

$$\begin{cases} f_x = ۳x^۲ - ۶y = ۰ \\ f_y = ۳y^۲ - ۶x = ۰ \end{cases} \Rightarrow (۰,۰)\,,(۲,۲)$$

$f_{xx} = ۶x\,, f_{yy} = ۶y\,\,, f_{xy} = -۶$

$(۰,۰) \Rightarrow A = f_{xx}(۰,۰) = ۰\,, B = f_{xy}(۰,۰) = -۶\,, C = f_{yy}(۰,۰) = ۰$

$D = B^۲ - AC = ۳۶ > ۰$ ((۰,۰) نقطه زینی است)

$(۲,۲) \Rightarrow A = f_{xx}(۲,۲) = ۱۲\,, B = f_{xy}(۲,۲) = -۶\,, C = f_{yy}(۲,۲) = ۱۲$

$D = B^۲ - AC = ۳۶ - ۱۲ \times ۱۲ < ۰\,, A => ۰$

بنابراین تابع در نقطه (۲,۲) دارای می‌نیمم نسبی به اندازه $۸ + ۸ - ۲۴ = -۸$

مسئله ۳-۳- سطحی با معادله $z = x^۳ + y^۳ - ۳xy$ مفروض است. نوع نقاط ایستای سطح را به ترتیب در نقاط (۰,۰) , (۱,۱) مشخص کنید.

حل: مبین را برای هر یک از نقاط تعیین کرده و از قضیه (۲) استفاده می‌کنیم.

$z_x = ۳x^۲\text{-}۳y \quad, z_{xx} = ۶x \quad, z_{xy} = -۳ \quad, z_{yy} = ۶y$

$(۰,۰) \Rightarrow A = ۰ \quad, B = -۳ \quad, C = ۰ \Rightarrow D = ۹ - ۰ = ۹ > ۰$

بنابراین (۰,۰) یک نقطه زینی است.

$(۱,۱) \Rightarrow A = ۶ \quad, B = -۳ \quad, C = ۶ \Rightarrow D = ۹ - ۳۶ < ۰$