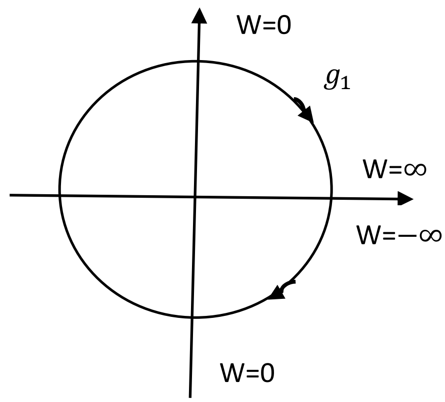
مثال:

$$G=\begin{pmatrix} 0 & \frac{s-1}{s+2} \\ \frac{s+2}{s+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|gI-G|=0 \quad\rightarrow\quad g^2-\frac{s-1}{s+1}=0 \quad\rightarrow\quad g=\pm\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}$$

$$g_1=\sqrt{\frac{s-1}{s+1}} \qquad\qquad g_2=\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}$$

؟؟ خط می شود که روی هم یک منحنی بسته می دهند.



****

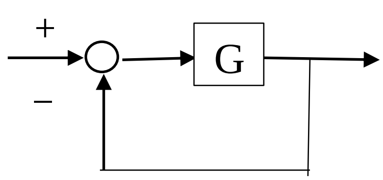
«طراحی»

Steady state

e_{ss}

s.s.interaction

فرض کنید $G=W\Delta V$ و هم چنین $R=w((I+\Delta)^{-1}\Delta)V$ (تابع تبدیل حلقه بسته)



$$\rho_i=\frac{g_i}{1+g_i}$$

مثال می خواهیم ببینیم در چه حالتی در steady state هم e_{ss} و هم s.s.In. کمتر شود؟برای این کار بایستی $R \simeq I$ و y=R.r و $y \simeq r$:این مستلزم آن است که $g_{i \gg 1}$ (برای تمام i ها و برای فرکانس های پایین)

$\leftarrow g_{i \gg 1}$ No ss error

No ss Intezaction

Dynamic intezaction:

فرض کنید $w_0(s_0)=\rho_i$ (این در حالتی است که $w_0(s_0) \| e_i$)

درجهت هم

$$e_i \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

المان i ام

آن گاه

$$R(s_0)w_i(s_0)=\rho_{i(s_0)}w_i(s_0)$$

$$R(s0_0)e_i=\rho_i(s_0)e_i$$ فقط خروجی در جهت i ام داریم

پس اگر بردار های ویژه ای در یک فرکانس خاص،بردار های یک موازی باشند در آن فرکانس خاص Intezaction نخواهیم داشت.پس باید بدانیم بردار های یک،بردار های ویژه چه زاویه ای دارند که هر چه زاویه کمتر باشد Inetezaction کمتر است و برعکس و اگر صفر باشد Intezaction داریم.

بنا بر این اندازه گیری Intezaction توسط زاویه بین $w_i(s_0)$ و e_i انجام می گیرد.

MIS Aligment Angle (زاویه انحراف)

عنصر iام w_i

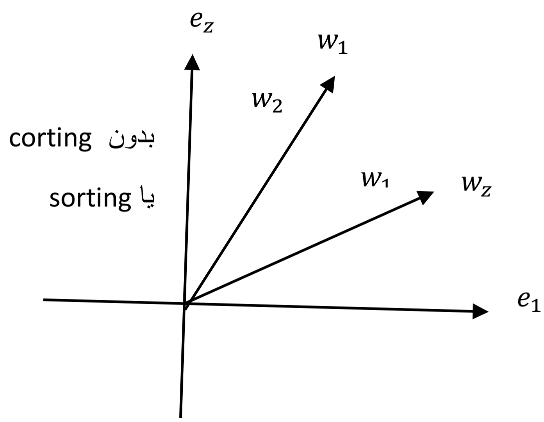
$$\mathrm{Cos}\,\theta_i = \frac{w_i^t e_i}{\|w_i\|_2 \ \|e_i\|} = \frac{|w_i(i)|}{\sqrt{w_i^* w_i}}$$

Comjurate trompose

همچنان که گفته شد در فرکانس های پائین اصلاً MIS A.A نداریم و ss.error و ss Interaction هم نخواهیم داشت.

نکات MA

۱. زاویه بین دو بردار را می دهد.
۲. θ_i فقط متعلق به حلقه i ام است(یعنی هیچ رابطه ای بین θ_i و θ_{i+1} و یا سایر θ_j ها وجود ندارد)
۳. مسئله مرتب کردن(sorting)را داریم.



مثال:

$$G_{(s)}=\begin{pmatrix} \frac{10s+9}{9s(s+1)} & -\frac{10}{9}\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ \frac{1}{9(s+1)} & \frac{9-s}{9s(s+1)} \end{pmatrix}$$

می خواهیم بدانیم پاسخ سیستم چگونه است؟

حتماً سؤال می آید که n قسمت دارد.

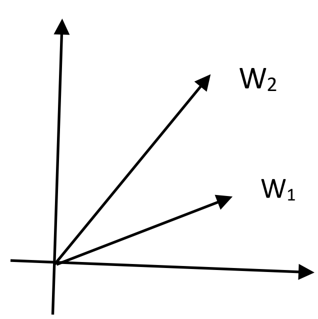
مثال:

$$|gI-G|=0$$

$$g_1=\frac{1}{s} \qquad g_2=\frac{1}{s(s+1)} \rightarrow w_1=\binom{1}{0.1}\ .w_2=\binom{1}{1}$$

معولاً w_1 و w_2 تابعی از s هستند.

Sorting را بررسی می کنیم

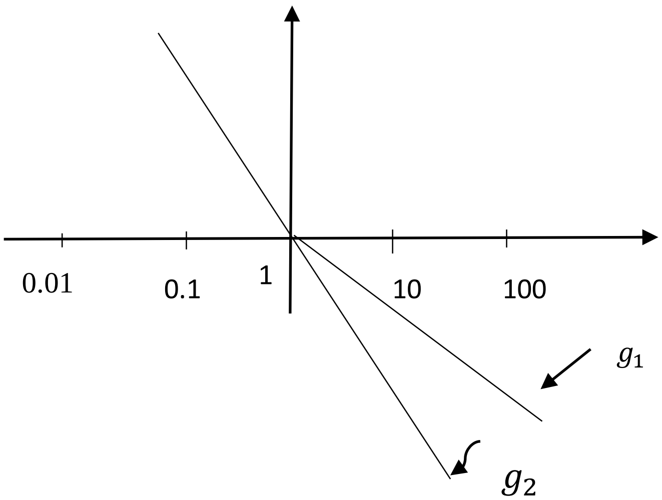


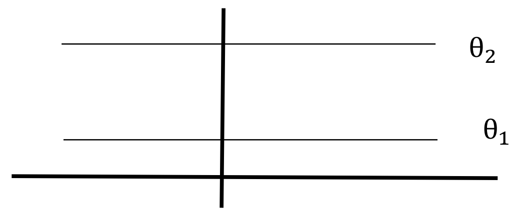
که درست است

$$\text{Cos } \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1.01}} \Longrightarrow \theta_1 = 5.7°$$

$$\text{Cos } \theta_2 = \quad \longrightarrow \quad \theta_2 = 45°$$

g_1و g_2 را مثل ؟؟؟ رسم می کنیم

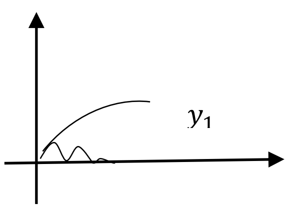


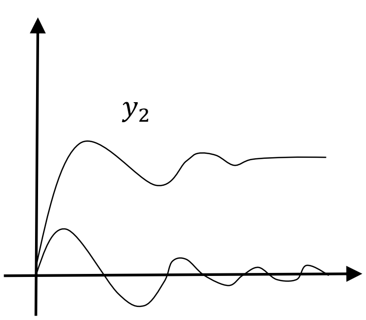


$1 \ll g_1$ و g_2 در فرکانس های پائین بزرگ هستند پس ss.error و ss.interzaction در فرکانس های پائین نداریم.

برای dynamic interzaction:

اگر-ورودی





تکلیف ۲:مسئله فوق را با artLab حل کنید.

ورودی یک به اولیه و دومی

MFD toolbox

«مراحل طراحی»به وسیله ی .C.L

۱)در فرکانس های بالا فیدبک از دست می دهیم.به شرطی که در فرکانس های بالا اندازد C.L کوچک باشد.

الف)SISO

$r(s)=\frac{g(s)}{I+g(s)} \quad |g| \ll 1 \quad .r \simeq g$

ب)MIMO

$R=(I+G)^{-1}G$

$\|G\| \ll 1 \ \rightarrow I+G \approx I \rightarrow R \simeq G$

در فرکانس های بالا $|g_i| \ll 1$ برای تمام i ها $\rho_{i=g_i}$

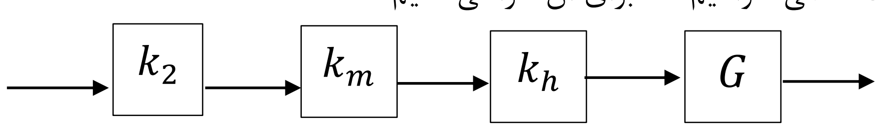
$$R=W\begin{pmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_n \end{pmatrix} v \simeq G$$

بنا بر این در فرکانس های بالا بهر طراحی R بایستی ماتریس تابع تبدیل حلقه باز را در نظر گرفت.و همچنین در فرکانس های بالا باید g_i ها کوچک و .M.A نیز باید کوچک باشد.

۲)در فرکانس پائین $|g_i| \gg 1$ ← sse وSSI

طراحی:معمولاً ۲ یا ۳ قدم دارد.

؟؟؟ G را در نظر بگیرید که می خواهیم ؟؟؟ برای آن طراحی کنیم.



معمولا k_h یک بهره ثابت است.ولی k_2 و k_m دینامیک هستند.توجه شود که کنترل کننده هایی که طراحی می شود ماتریس هستند.

قدم اول:تقسیم.M.Aدر فرکانس های بالا با استفاده از K_h.

این یک پیشنهاد است نه یک اجبار.بصارتی

قدم دوم:تنظیم حاشیه ی فاز و بهره در فرکانس های متوسط با استفاده از K_m.

لزوما در این مرحله Lead،Lag و... استفاده می شود.عموما از Lead استفاده می شود.

قدم سوم:افزایش بهره در فرکانس های پائین،با استفاده از K_L (معمولا قطری است)

که معمولا توسط یک انتگرالگیر(PI)انجام می گیرد. $$k_\ell = (\frac{a}{s} k_L + I)$$

$$Q = GK_hK_mK_\ell$$

اولین قدم $Q_1 = GK_h$

$$Q_2 = GK_hK_m \xrightarrow[s\to \text{فرکانس بالا}]{} GK_m$$

در قدم دوم K_m نباید در فرکانس های بالا تأثیری بر Q_1 داشته باشد.البته تأثیر زیادی در M.A ندارد.

$$Q_3 = GK_hK_mK_\ell \xrightarrow[s\to \text{میانی}]{} GK_hK_m$$

طراحی K_h:

در حالت ایده آل $GK_h=I$ (قطری)

در این حالت دو مشکل: ✓تابعی از فرکانس است←در تمام فرکانس ها امکان I شدن وجود ندارد.

✓لذا در یک فرکانس بالا خاص K_h را مشخص می کنیم

فرکانس بالا

$G(S_0)K_h=I$

✓$G(S_0)$مختلط است←K_hمختلط به دست می آید.در صورتیکه K_h بایستی حقیقی باشد.

برای حل این مشکل باید بهترین ماتریس حقیقی را به دست آوریم که تقریبا $G^{-1}_{(jw_h)}$ باشد.لذا

بایستی $G^{-1}_{(jw_h)}$ را بهینه کنیم یا (Align Algoritm)

Unknown matrix

$$ZX \simeq I$$

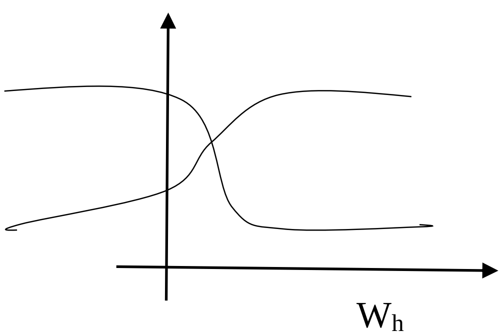
Complex matrix

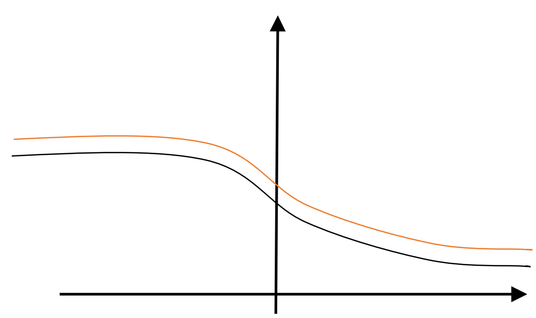
$$X=[x_1|x_2|\dots|x_i|\dots|x_n]$$

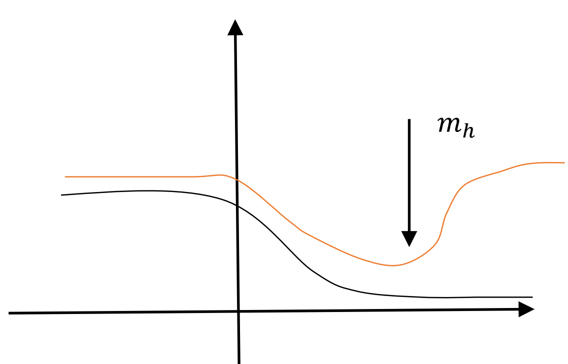
$$zx_i = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_i \\ \dots \\ \epsilon_n \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \epsilon_i \approx 1 \\ \epsilon_i \ll 1 \end{matrix} \qquad j \neq i$$

perf.Index را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\phi_i = \frac{\sum_{j\neq i} |\epsilon_j|^2}{|\epsilon_i|^2}$$







اگر نتیجه مطلوب نباشد با تغییر W_h می توان طراحی را بهتر کرد.

قدم بعدی طراحی K_m است.در این حالت باید فرکانسی میانی را یافت که معمولا فرکانسی است که در آن نویز اجازه ی عبور ندارد و پهنای باند

پس باید سعی کنیم یک مصالحه ای بین نویز و سرعت سیستم برقرار کنیم.

در این حالت باید حاشیه ی فاز و بهره را برای GK_mتنظیم کرد.برای این کار C.L. سیستم GK_m را رسم می کنیم.جهت تنظیم GM و PM روی g_i ها تصمیم گیری می کنیم.با داشتن مقادیر ویژه ی $Q_1(jw_m)$ باید جبران کننده ی$Q_1(jw_m)K_m$ برابر مقادیر قابل قبولی بشود.

مسئله را به صورت زیر ساده می کنیم:با داشتن ماتریس $\mathcal{A}$ $(Q_1(jw_m))$ پیدا کردن ماتریس B (K_m) به طوری که مقادیر ویژه $\mathcal{AB}$ مطلوب باشد.

$eig(AB) =$ مطلوب

$$eig(AB) = eig(A) \cdot eig(B)$$

رابطه ی بالایی در صورتی برقرار است که A و B ،Commute باشند.(بردار های ویژه ی یکسان داشته باشند)

لذا B را طوری انتخاب می کنیم که اولا Commute با A باشد،ثانیاً

$$eig(B) = \frac{eig(AB)}{eig(B)}$$

The Commute Controller

مرحله ی ۱: $Q_1(jw_m)$ را به دست می آوریم.

$$Q_1(jw_m) = w_1(jw_m) \cdot \Lambda_1(jw_m) \cdot V_1(jw_m)$$

باید K_m را طوری طراحی کنیم که

$$K_m = w_1(jw_m) \cdot \underbrace{\Lambda_k(s)}_{\text{Lead}} \cdot V_1(jw_m)$$

v_1 و w_1 لزوماً مختلط هستند ولی K_m حقیقی است.

ضرب v_1 و w_1 بایستی I را به دست دهد.برای این کار از الگوریتم$A.C.C.$ استفاده می کنیم.

$\Lambda_k(s)$که در اصل قطری است معمولا $Lead$ یا Lag است.

$$K_m = \hat{w}\Lambda_k(s)\hat{v}$$

با استفاده از الگوریتم $Align$ به طوری که

$$V_1\widehat{W} \approx I$$

$$\widehat{V}W_1 \approx I$$

خلاصه قدم دوم طراحی K_m:

۱. $C.L.$ Q_1 را رسم
۲. انتخاب W_m
۳. محاسبه ی $Q_1(jw_m)$

سپس $w_1(jw_m)$ و $V_1(jw_m)$ آن گاه توسط الگوریتم $ALIGN$ $\widehat{W}$ و $\widehat{V}$

۴. تصمیم گیری بر روی $\Lambda_k(s)$ با استفاده از $C.L.$ Q
۵. بدست آوردن $K_m = \widehat{w}\Lambda_k(s)\widehat{v}$
۶. رسم $C.L.$ برای $Q(s)K_m(s)$ و مطمئن شدن از شرایط پایداری.

بهتر است که چند W_m بررسی شود.

****

قدم سوم:بالا بردن گین در فرکانس های پائین با گذاشتن P+I+D

معمولا PI است

بدلیل Ss int

$$K_\ell = \left(\frac{a}{s}K_L + I\right)$$

بعد این کار:

۱. رسم C.L برای Q_1K_m
۲. بدست آوردن $K_L = \widehat{W}\Lambda_L\widehat{V}$ به روش A.C.C. در این مرحله احتمالا Log مورد نیاز باشد.

نکته:الگوریتم ACC از الگوریتم Align استفاده می کنند.

پروژه:اکنون می توان اولین پروژه ی درسی را انجام داد. (تحویل اوایل خرداد)

روش طراحی توسط .C.L

۱. محاسبه ی $K_h \simeq G^{-1}(jw_k)$
۲. طراحی K_m توسط ACC $. W_m < W_h$. باید اثر K_h با وجود K_m از بین نرود.

به طور ایده آل

$$K_m(jw_m) \longrightarrow I$$

یا $W \to W_h$ اثر K_m تقریبا وجود نداشته باشد.

اما این یک هدف نمایی نیست.

۳. طراحی K_ℓ به طوری که

$$\underset{W \to W_m}{K_\ell(jw) \rightleftarrows I}$$

۴. $K(s) = K_h \cdot K_m \cdot K_\lambda(s)$

سپس باید طراحی تست شود با دادن ورودی و تست پاسخ از نظر o.s. و inter و ...

نکته ی عملی:

در یک سیستم مثلاً با دو کانال ممکن است فرکانس میانی یکی از سیستم ها برای سیستم دیگر فرکانس بالا باشد و مشکلاتی از این قبیل.

در این حالت طراحی دو مرحله است:

ابتدا طراحی را بر روی سیستم با فرکانس میانی بالا(سیستم سریع)انجام داده سپس آن فرکانس را برای فرکانس میانی سیستم کند فرکانس پائین در نظر می گیریم.

این در حالی است که کانال ها فاصله ی W_m زیاد با هم داشته باشند.

INA

برای سیستم های مربعی معکوس پذیر

DNA

قضیه اگر K(s) مربعی و معکوس پذیر بوده و تمام صفر ها و قطب های آن سمت چپ باشند می توان آن را به سه جبرانگر

$$K(s) = \acute{K}_c\, \acute{K}_b\, \acute{K}_a(s) \quad \text{یا} \quad K(s) = K_a K_b K_c(s)$$

$\acute{K}_a$ و K_a ماتریس premultipliation (عدد ثابت)←ماتریس را نرمالیزه می کند.

$\acute{K}_b$ و K_b ماتریس مقدماتی با ؟؟؟ عملیات مقدماتی←مقادیر ویژه را تغییر می دهند_با این ماتریس سعی می کنیم سیستم را DD کنیم.

$\acute{K}_c$ و K_c ماتریس قطری_

توجه داشته باشید که هر ماتریس مربعی معکوس پذیر را می توان به این شکل نوشت.

****

طراحی جبرانگر

در دو مرحله صورت می گیرد:

1. با انتخاب صحیح K_a و K_b سعی می کنیم سیستم را DD کنیم.←یک روش سعی و خطاست.ممکن است DD نشود ولی دلیل بر این نیست که سیستم جبران پذیر نمی باشد.
2. بدلیل *decoupled* شدن با انتخاب صحیح $K_c^{\text{قطری}}$ عملکرد هر کانال را مطلوب می کنیم.

مرحله ی دوم وقتی شروع می شود که سیستم در مرحله ی اول DD گردد.

پایداری حلقه با بدست آوردن محدوده ی *Gershgorin* و استفاده از تکنیک های *SISO* بدست می آید.

به طوریکه محدوده ی نقطه $-1 + 0j$ را شامل نشود.در ضمن تعداد دوران بر طبق تئوری نایکوئیست بدست می آید.

در عمل، $Q_0(s)$ G_k شامل K_a و ... K) را DD می کنیم.اما در واقع $I+G_0(s)$ باید DD شود.

و اگر درجه بالایی از DD شدن برای $G_0(s)$ را در نظر بگیریم آن گاه $I+G_0(s)$ نیز DD است.

طراحی توسط این روش یا DNA است که K_aوK_bوK_c با $G(s)$ را در نظر می گیرد و یا این که INA است که $\acute{K_a}^{-1}$ و $\acute{K_b}^{-1}$ و $\acute{K_c}^{-1}$ با $G^{-1}(s)$ را در نظر می گیرد.در هر حالت پایداری توسط قضیه تعمیم یافته ی نایکوئیست و یا $Gershgorin$ بررسی می شود.

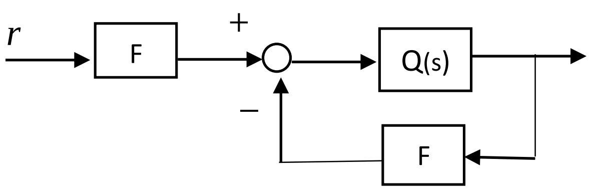
چون $K_c(s)$ یک $postmultiplier$ است $Q_0(s) = G(s)K_a(s)K_b(s)K_c(s)$ در نتیجه اثر هر یک از عناصر آن ضرب کردن یک ستون از ماتریس $G(s)K_aK_b(s)$ در یک تابع تبدیل است.بنا بر این بهتر CDD است داشته باشیم.ولی ممکن است RDD تغییر کند ولی CDD تغییر نمی کند.

پس اگر DNAبه کار می بریم←بهتر استCDD داشته باشیم.

در INA داریم $\acute{Q_0}^{-1}(s) = \acute{K_c}^{-1}(s)\ \acute{K_b}^{-1}(s)\ \acute{K_c}^{-1}(s)G^{-1}(s)$ لذا $\acute{K_c}^{-1}(s)$یک $premultiplier$ است.پس عمل $\acute{K_c}^{-1}(s)$ ضرب کردن هر سطر در یک تابع تبدیل است.پس بهتر است RDD داشته باشیم.زیرا CDD ممکن است تغییر بکند.

❋❋❋❋❋❋❋❋❋

INA Method



$\mathrm{Q}(s) = G(s)K_a(s)K_b(s)K_c(s)$

$Q_0(s) = Q(s)F$

$H(s)=[I + Q(s)F]^{-1}$ و $T(s)=H(s)F$ تابع تبدیل حلقه بسته

اگر F را داشته باشیم

H^{-1} $\qquad \hat{H} = \hat{Q} + F$

F را دیاگونال می کنیم

$F=\mathrm{diag}\{\not{f}_1\ \ \not{f}_2\ \ldots\ldots\ldots\ \ \not{f}_n\}$

اگر f=0 (یعنی لانال i ام در ؟؟؟ یک باز است (قطع است))

$$\hat{H}(s)|_{f_i=0} = \begin{vmatrix} \hat{q}_n + F_1 & \hat{q}_{12} & \hat{q}_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots \hat{q}_{1n} \\ \hat{q}_{21} & \hat{q}_{21} + F_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \hat{q}_{2n} \\ \hat{q}_{i1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \hat{q}_{il} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \hat{q}_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \hat{q}_{nn} + F_n \end{vmatrix}$$

حال فرض کنید Z بردار سیگنال در ورودی $H_{(s)}$باشد.بنا بر این تابع تبدیل z_i به y_i وقتی که هنوز حلقه i ام باز است برابر است با:

$$\ell_i(s) = \left[(\hat{H}(s)|_{q_i=0})^{-1} \right]_{ii}$$

$$= \frac{det[\hat{H}_{(s)}|_{ti=0}^{ii}]}{det[\hat{H}_{(s)}]}$$

$$\hat{H}_{(s)} = \hat{Q} + F$$

اگر $t_i \longrightarrow 0$ آن گاه

$j \neq i$

$$\det\left[\hat{H}_{(s)}|_{t_i=0}\right] \longrightarrow \hat{q}_{ii} \det\left[\hat{H}_{(s)}|_{fi}^{ii}\right]$$

تکلیف:رابطه فوق اثبات شود.

$$\longrightarrow \ell_i(s) = \frac{1}{\hat{q}_{ii}}$$

این نشان می دهد که اگر بهره ی حلقه ها به غیر از i ام بسیار بزرگ باشد آن گاه $\hat{q}_{ii}$ شامل فقط اطلاعات حلقه ی باز حلقه ی i ام است.بنا بر این نشانه ای خوب از معکوس تابع تبدیل حلقه i ام است.

****

ثابتComplexو n*n

<u>قضیه استروسکی</u>:ماتریس $A \epsilon \not\subset^{n \times n}$ در نظر بگیرید و فرض کنید که RDD است.

$$\left| a_{ii} - \frac{1}{\hat{a}_{ii}} \right| \leq \sum_{k \neq i} a_{ik} max(\sum_{k \neq j} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|})$$

نظیر این رابطه را می توان برای A که CDD است نوشت.

$$\left|a_{ii}-\frac{1}{\hat{a}_{ii}}\right| \leq \sum_{k\neq i} a_{ki}\max(\frac{\sum\left|a_{xj}\right|}{\left|a_{jj}\right|})$$

حال اگر $\widehat{H}_{(jw)}$،RDD باشد،آن گاه

$$|\widehat{h}_{(jw)}-\frac{1}{\widehat{h}_{(ii)}(jw)}| \leq p_i(w)\phi_i(w)$$

$$\phi_i(w)=max\frac{\sum_{k\neq j}|\widehat{h}_{jk}(jw)|}{|\widehat{h}_{jj}(jw)}$$

$$\widehat{h}_{ii}(jw)=\hat{q}_{ii}(jw)+\cancel{f}_i$$

و داریم

$$\frac{1}{h_{ii}(jw)}=\frac{1}{\ell_i(w)}+f_i$$

لذا خواهیم داشت:

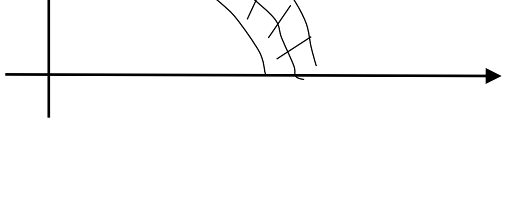
$$\left|\hat{q}_{ii}-\frac{1}{\ell_i(w)}\right| \leq p_i(w)\phi_i(w)$$

چون$\widehat{h}_{ik}(jw)=\hat{q}_{ik}(jw)$ بنا بر این $p_i(w)$ همان شعاع گرشگورین $\hat{Q}_{(jw)}$ است و چون فرض کردیم

$\widehat{H}_{(jw)}$ ،RDD است لذا $\phi_i(w)<1$

بنا بر این $\frac{1}{\ell_i(w)}$ داخل دایره ای است به مرکز دوایر گرشگورین $\hat{Q}(s)$ و شعاع کوچک تر از شعاع گرشگورین$\hat{Q}(s)$ با فاکتور $\phi_i(w)$.

این دوایر را دوایر استروسکی و باند تشکیل شده را باند استروسکی گویند.



نتیجه اصلی که از این قضیه می گیریم این است که می توان باند استروسکی را به عنوان تخمین$\frac{1}{\ell_i(s)}$ به کار برده و لذا می توان با در نظر گرفتن DD بودن و سیستم را به صورت SISO در نظر گرفت و $K_i(s)$ را طراحی کرد.

توجه داشته باشید که Q_i به K_i بستگی دارد $j \neq i$.

شنبه تحویل power point برای نایکوئیست معکوس

فصل ۴ ماچوفسکی ص ۱۷۵

طراحی به روش INA

۱. برای این که RDDشود$\hat{K}_b(s)\hat{K}_a(s)G^{-1}$

در این روش هیچ تضمینی بر RDD شدن نداریم.(یکی از اشکالات روش)

۲. سپس طراحی جبران کننده $\hat{K}_c(s)$ برای هر کانال سیستم به صورت SISO با در نظر گرفتن باند استروسکی ؟؟؟ طراحی$\hat{K}_c\hat{K}_b\hat{K}_a \xrightarrow{\text{معکوس}} K_aK_b\ (s)K_c(s)$

ممکن است معکوس نداشته باشد←لذا هیچ تضمینی وجود ندارد.

یک مشکل دیگر این است که اگر برخی از کانال ها را می دانیم که در جبرانگر باید صفر بگذاریم،اگر معکوس استفاده کنیم معلوم نیست که آن کانال بعد از معکوس کردن صفر باقی می ماند یا نه.به عبارتی روی کانال ها را نمی توان اعمال کرد.

نکته:چگونه می توان قطری کرد؟

Ackieving D.D.

چه INA و چه DNA وقتی قابل قبول است و کار می کند که بتوانیم DD کنیم.

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{-s}{3s+2} & \frac{s+1}{3s+2} \\ \frac{s+2}{3s+2} & \frac{-s}{3s+2} \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} s & s+1 \\ s+2 & s \end{pmatrix}$$

$\hat{G}$ نه RDD است و نه CDD . $\hat{G}$ را سعی می کنیم که RDD کنیم اگر $\hat{G}$ را در ماتریس زیر ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\hat{K}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad K_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(s)K_a = \begin{pmatrix} \frac{-s}{3s+2} & \frac{s+1}{3s+2} \\ \frac{s+2}{3s+2} & \frac{-s}{3s+2} \end{pmatrix}$$

معمولاً این عمل(ضرب ماتریس K_a $\hat{K}_a$)باعث تغییر ورودی و نرمال کردن آن ها می شود.

$$\hat{K}\hat{G}(s) = \begin{pmatrix} s+2 & s \\ s & s+1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \text{شد } RDD$$

هرچه درجه DD بودن بیشتر باشد،اطمینان پایداری هم بیشتر است.چون می خواهیم I+GK را DD کنیم.

DD کردن یک الزام جهت روش نیست؛در واقع شرط کافی برای پایداری است ولی شرط لازم نیست.

می توان از $K_b(s)$ برای افزایش درجه DD بودن استفاده کرد.

اما پیدا کردن K_a راحت نیست.یک روش سر انگشتی به صورت زیر است:

اگرG(0) را بتوان محاسبه کرد (یعنی∞نشود)داریم$K=G^{-1}(0)$.در این حالت حداقل در صفر DD می شود.

اگر در صفر جواب داشت،به عنوان اولین تلاش می توان w_0 دیگری در نظر گرفت.تنها مشکل اینجا این است که$G(jw_0)$ و معکوس آن معمولاً حقیقی نیست.لذا

$$K = ALIGN\left(G^{-1}(jw_0)\right)$$

****

Peron_Ferbenuies theory

می دانیم اگر G ، DD نباشد نمی توان از قوانین نایکوئیست استفاده کرد.اما ممکن است با استفاده از تبدیلات مشابه$\tilde{G}$ یی بدست آورد که $\tilde{G}$ ، DD باشد و آن گاه می توان قوانین لازم را بر روی $\tilde{G}$ اجرا کرد.

$$\tilde{G} = XGX^{-1}$$

حال باید ببینیم که X همیشه وجود دارد یا نه؟Gباید برخی شرایط را داشته باشد.

روش مناسبب بهر انتخاب X:

برای هر ماتریس M با درایه های m_{ij} تعریف می کنیم

$$absM \triangleq [|m_{ij}|]$$

مربعی

چنین ماتریسی را $Positive$ گویند.؟؟؟ اگر مقادیر ویژه ی $absM$ برابر $\{\lambda_1.\lambda_2.\dots.\dots.\lambda_n\}$ مقادیر ویژه ی مثبت باشد.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$$

ماتریس M را $Primitive$ گویند اگر $(absm)^r$ درایه های مثبت داشته باشد(و صفر نداشته باشد).برای هر r،که r یک عدد طبیعی است.

برای یک ماتریس $Primitive$ ، λ_1 را مقدار ویژه ی $Peron\text{-}Ferbenuies$ می گویند،و آن را به صورت $\lambda_{P(m)}$ نمایش می دهند.بردار های ویژه ی چپ و راست $absM$ را بردار های ویژه ی $Peron\text{-}Ferbenuies$ می گویند که حقیقی و مثبت هستند.هم چنین

$$M_{diag} = diag\{m_{11} \quad m_{22} \quad \dots \quad m_{nn}\}$$

قضیه:اگر G یک ماتریس مربعیPrimitive باشد آن گاه یک ماتریس قطری X وجود دارد به طوری که

$$\tilde{G} = XGX^{-1}$$

و $\tilde{G}$ ، DD است اگر و فقط اگر

$$\lambda_P(GG_{diag}^{-1}) < 2$$

اگر رابطه بالا برقرار باشد بردار های ویژه سمت چپ GG_{diag}^{-1} بردار های $(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T$ می باشد،آن گاه به وسیله ی ماتریس X که در زیر تعریف می شود؛G،DD می شود.

$$X = diag\{x_1.x_2.\dots.x_n\}$$

بهترین DD که با ماتریس ثابت قطری به دست می آید.

توجه داشته باشید که X ی که به وسیله ی رابطه بالا به دست می آید را می توان به عنوان scaling برای خروجیو X^{-1} را scaling برای ورودی در نظر گرفت.

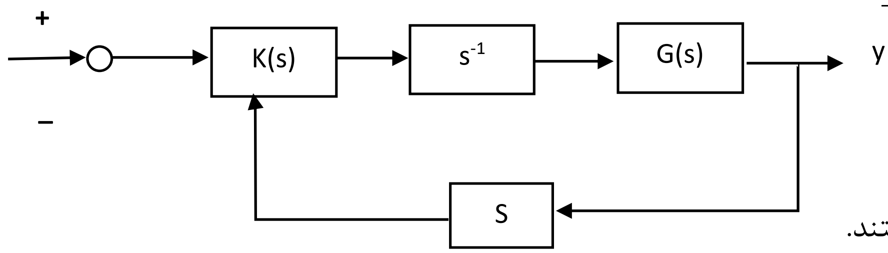
در تئوری بالاG باید Primitive باشد،اما در عمل معمولاً این یک محدودیت سخت نیست،زیرا اگر تمام عضو هایG غیر صفر باشند،G حتماًPrimitive است.

محدودیت آن گاه ایجاد می شود که بعضی اط درایه های G با تغییر فرکانس صفر باقی می ماند.اگر این اتّفاق بیفتد معمولاً G، block diagmal یا حداقل ??? block است.آن گاه C.L. ی G همان C.L. ی block ها است،که آن ها Primitive هستند و قضیه بالا را باید جداگانه برای هر block به کار برد.

Meas نشان داد که X به دست آمده از نظر DD کردن بهینه است.

با توجه به این قضیه،DD کردن در واقع scaling ورودی_خروجی است و این قضیه در طراحی می تواند کاربرد داشته باشد اگر scaling در خروجی مجاز باشد؛و در واقع گذاشتن یک "پس جبرانگر"یعنی قرار دادن یک جبران کننده بین ورودی و متغیر هایی که باید کنترل شوند.این،عملاً غیر ممکن است؛چون خروجی های معنی دار سیستم مثل سرعت،یا ضخامت ورقه فولاد،با عملیات ریاضی اثر پذیر نیستند که امکان scaling باشد.

لذا پس جبرانگر را می توان در فیدبک گذاشت.



S و S^{-1} در واقع همان X و X-1 هستند.

متغیّر های خروجی می توانند تا حدود قابل قبولی باهم intract داشته باشند،و ممکن است این interaction با استفاده از scaling اندازه گیری S پنهان شود.لذا اغلب scaling اندازه گیری در حقیقت از مسائل مورد نیاز درخواست فیدبک می باشد و معمولاً این نوع scaling به عنوان قسمتی از یک قدم طراحی مطرح می شود؛و این عمل می تواند به عنوان قسمتی مؤثر در طراحی در نظر گرفته شود.

****

قضیه ی P.F نتایج بسیار مفیدی برای حتی اگر فقط پیش جبران کننده(scaling ورودی)مجاز باشد.

نتیجه ی اولیه این قضیه این است که یک ماتریس مربعی Primitive را برای مقدار ویژه ی λ_p که حقیقی و مثبت و بزرگ تر از تمام مقادیر ویژه ی دیگر است و هم چنین درایه های بردار ویژه ی مربوطه را می توان تماماً مثبت و حقیقی انتخاب کرد.

قضیه:فرض کنید M یک ماتریس مربعی مثبتPrimitive با مقدار ویژه یλ_p باشد،آن گاه برای هر بردار که دارای عضو های مثبت حقیقی است خواهیم داشت:

$$\min_i \frac{1}{x_i}\sum_j m_{ij}x_j \le \lambda_p \le \max_i \frac{1}{x_i}\sum_j m_{ij}x_j$$

و هر دو نا مساوی به مساوی تبدیل می شود اگر $Mx=\lambda x$.

حال فرض کنید $M(s)=abs(G_{diag}^{-1}(s)G_{(s)})$ و فرض کنید یک پیش جبران کننده

$K_{(s)}=diag\{K_1(s). \dots . K_n(s)\}$

به طوری که $G(jw)$ و $K(jw)$، RDD باشد،آن گاه

$$\sum_{j\neq i} |g_{ij}(jw)K_i(jw)| < |g_{ii}(jw)K_i(jw)|$$

چون عنصر ij ماتریس M

$$m_{ij} = \frac{|g_{ij}(s)|}{|g_{ii}(s)|}$$

لذا نا مساوی فوق

$$\sum_{j\neq i} m_{ij}(jw)\frac{K_j(jw)}{K_i(jw)} < 1$$

و چون $m_{ij}(s)=1$ بنا بر این

$$\sum_{j} m_{ij}(jw)\frac{K_j(jw)}{K_i(jw)} < 2$$

بنا بر این پیش جبرانگر قطری،بزرگ ترین درجه ی RDD می دهد که کوچک ترین مقدار مجموع رابطه ی بالا را به دست می دهد.

نتیجه ای که از قضیه بالا می گیریم این است که کوچکترین مقداری که می توان به دست آورد $\lambda p(jw)$ است و بهترین انتخاب برای هر عضو $K(jw)$ قطری است همان عضو بردار ویژه ی راست P.F ماتریس $M(jw)$ است.و اگر $\lambda p \geq 2$ باشد آن گاه ممکن نیست که بتوانیم به DD در فرکانس w با استفاده از پیش جبرانگر قطری برسیم.