مهندس حسین خزایی

❋جزوه ماتریس و کاربردها

❋ درس اول : ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها:

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک ماتریس نامیده می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}\begin{array}{l} \longrightarrow \text{سطر اول} \\ \longrightarrow \text{سطر دوم} \end{array}$$

ستون اول ↓ ، ستون دوم ↓ ، ستون سوم ↓

❋ **نتیجه:** در حالت کلی اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، آن را با $A_{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

❋ **درایه:** به هر عضو ماتریسف یک درایه می‌گوییم، مثلا درایه‌ای که در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A قرار دارد را با a_{ij} نشان می‌دهند.

❋ **تذکر:** در بعضی مواقع ماتریس A را می‌توان توسط درایه عمومی آن نمایش داد و به اختصار نوشت $A=\left[a_{ij}\right]$. در این صورت برای پیدا کردن هر درایه ماتریس A باید از ضابطه a_{ij} تبعیت کرد.

مثال۱: اگر ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ با ضابطه زیر تعریف شود، در این صورت جمع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) ۲ ۴) ۳

$$a_{ij}=\begin{cases} i-۲j & i<j \\ -۱ & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ & -۵ \\ ۳ & -۱ & -۴ \\ ۴ & ۵ & -۱ \end{bmatrix} \rightarrow \text{جمع درایه ها} = -۳$$

مثال ۲: در ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times ۳}$ با $a_{ij}=i^j+۱$ حاصل $a_{۱۳}-a_{۳۲}+a_{۲۲}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

$$\begin{cases} a_{۱۳}=۱^۳+۱=۲ \\ a_{۲۲}=۲^۲+۱=۵ \quad \rightarrow a_{۱۳}-a_{۳۲}+a_{۲۲}=۲-۱۰+۵=-۳ \\ a_{۳۲}=۳^۲+۱=۱۰ \end{cases}$$

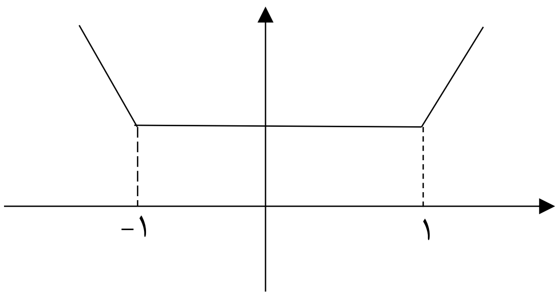
مثال۳: به ازای چند مقدار صحیح و نامنفی k در ماتریس زیر مجموع درایه‌های روی ستون دوم با درایه‌های واقع در سطر سوم ستون اول برابر است؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -|k-۱| \\ -۱ & ۰ \\ |k+۱| & ۲ \end{bmatrix}$$

$$|k+۱|=-|k-۱|+۰+۲\rightarrow \underbrace{|k+۱|+|k-۱|}_{f_۱}=\underset{f_۲}{۲}$$

وقتی دو تابع $f_۱$ و $f_۲$ را رسم می‌کنیم میبینیم که دو نقطه صحیح و نامنفی در این رابطه صدق می‌کند.



❊ انواع ماتریس‌ها :

۱: ماتریس صفر: ماتریسی است که تمام درایه‌های آن صفر است. و آن را با $\overline{O}$ نشان می‌دهیم و مرتبه آن وابسته به مسئله است.

$$\overline{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

۲: ماتریس سطری : ماتریسی که فقط یک سطر دارد. مرتبه این ماتریس $1\times n$ است. چون یک سطر دارد هر تعداد ستونی می‌تواند داشته باشد.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

۳: ماتریس ستونی : ماتریسی است که فقط یک ستون دارد. مرتبه این ماتریس $n\times 1$ است. چون یک ستون دارد هر تعداد سطری می‌تواند داشته باشد.

:

۴: ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌هایش با هم برابرند. مرتبه این ماتریس $n\times n$ است. این ماتریس دارای قطر فرعی و قطر اصلی است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

قطر فرعی

قطر اصلی

۵: ماتریس بالا مثلثی: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفراند.

$$A=\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \to \forall i,j: i>j \to a_{ij}=0$$

*** تذکر: ماتریس بالا مثلثی اکید :** این ماتریس همان ماتریس بالا مثلثی است با این تفاوت که درایه‌های روی قطر اصلی هم صفراند.

۶: ماتریس پایین مثلثی: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix} \to \forall i,j: i<j \to a_{ij}=0$$

*** تذکر: ماتریس پایین مثلثی اکید:** این ماتریس همان ماتریس پایین مثلثی است با این تفاوت که درایه‌های روی قطر اصلی هم صفراند.

۷: ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیر قطر اصلی آن صفراند.

$$A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} \rightarrow \forall i,j: i\neq j \rightarrow a_{ij}=۰$$

۸: ماتریس اسکالر: ماتریسی است قطری که عناصر روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

$$A=\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}$$

۹: ماتریس همانی(واحد، یکه): یک ماتریس اسکالر است که مقدار ثابت روی قطر اصلی آن ۱ می‌باشد و آن را با I نشان می‌دهیم.

$$I_{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$I_n=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}: \quad a_{ij}=\begin{bmatrix} ۱\ ; & i=j \\ ۰\ ; & i\neq j \end{bmatrix}$$

۱۰: ماتریس شبه مثلثی : ماتریسی است مربعی که یک طرف قطر فرعی آن صفر است.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & ۰ \\ f & ۰ & ۰ \end{bmatrix}}_{\text{شبه بالا مثلثی}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & a \\ ۰ & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}}_{\text{شبه پایین مثلثی}}$$

مثال۴: در ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times ۳}$ و $a_{ij}=\begin{bmatrix} ij & ; & i\geq j \\ i-j & ; & i<j \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های قطر فرعی کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

$$A=\begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & a_{۱۳} \\ \bigcirc & a_{۲۲} & \bigcirc \\ a_{۳۱} & \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{۱۳}=۱-۳=-۲ \\ a_{۲۲}=۲\times ۲=۴ \\ a_{۳۱}=۳\times ۱=۳ \end{bmatrix} \rightarrow \text{مجموع}=۵$$

❊ عملیات مقدماتی روی ماتریس‌ها:

۱: جمع و تفریق دو ماتریس: برای جمع و تفریق دو ماتریس **اولا** : باید دو ماتریس هم مرتبه باشند و **ثانیاً**: برای جمع و تفریق آنها، درایه‌های نظیر در دو ماتریس را با هم جمع و تفریق می‌کنیم.

۲: ضرب عدد در ماتریس: برای ضرب کردن یک عدد در یک ماتریس، کافیست آن عدد را در تک تک درایه‌های ماتریس ضرب کنیم.

۳: تساوی دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبه زمانی با هم برابرند که درایه‌های نظیر در دو ماتریس با هم برابر باشند.

۴: قرینه یک ماتریس: قرینه ماتریس A را با $-A$ نمایش داده که از ضرب (۱-) در ماتریس A به دست می‌آید. واضح است که $A+\left(-A\right)=\overline{O}$ است.

❊ خواص: ۱: جمع ماتریس‌ها خاصیت جا به جایی دارد. $A+B=B+A$

۲: جمع ماتریس‌ها خاصیت شرکت پذیری دارد. $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$

۳: ماتریس صفر عضو خنثی عمل جمع است. $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$

۴: طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک عدد دلخواه ضرب کرد. $A=B\rightarrow rA=rB$

۵: طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد دلخواه مخالف صفر تقسیم کرد.

$rA=rB\ ,\ r\neq ۰\rightarrow A=B$

۶: اگر s,r اعداد حقیقی باشند داریم:

$r\left(A\pm B\right)=rA\pm rB\ \ ,\ \left(r\pm s\right)A=rA\pm sB$

❊ نکته: اثر ماتریس: در هر ماتریس مربعی مجموع درایه‌های قطر اصلی را اثر ماتریس می‌نامند و آن را با $tr\left(A\right)$ نشان می‌دهند.

مثال۵: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & a \\ -۴ & b \end{bmatrix}$ و $۲A+B$ ماتریس همانی باشند، بزرگترین درایه ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

جواب: با توجه به اینکه $۲A+B=I$ است مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$2A+B=I\rightarrow\begin{bmatrix}2&0\\4&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&a\\-4&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0+a=0\\6+b=1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}a=0\\b=-5\end{bmatrix}\rightarrow A+B=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\-4&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\-2&-2\end{bmatrix}$$

پس بزرگترین درایه صفر است.

مثال۶: ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&c+b\\a+c&0\end{bmatrix}$ با ماتریس $B=\begin{bmatrix}2\\i-2j\end{bmatrix}$ که در آن i شماره سطر و j شماره ستون است، برابر است. حاصل abc کدام است؟

۱) ۱۸- ۲) ۱۸ ۳) ۹ ۴) ۹-

جواب: اول درایه‌های B را معلوم می‌کنیم. توجه کنید چون ماتریس B با A برابر است. پس B باید ۲×۲ باشد:

$$B=\begin{bmatrix}1-2&1-4\\4-2&4-4\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-1&-3\\2&0\end{bmatrix}\rightarrow A=B\rightarrow\begin{bmatrix}a=-1\\a+c=2\rightarrow c=3\\c+b=-3\rightarrow b=-6\end{bmatrix}\rightarrow abc=(-1)(-6)(3)=18$$

مثال۷: اگر $3A+\begin{bmatrix}1&4\\4&x\end{bmatrix}=2I+\begin{bmatrix}0&0\\0&8\end{bmatrix}$ و اثر ماتریس A برابر با ۹ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۶-

$$3A+\begin{bmatrix}1&4\\4&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&10\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 3A=\begin{bmatrix}2&0\\0&10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&4\\4&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4\\-4&10-x\end{bmatrix}\rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\-\frac{4}{3}&\frac{10}{3}-\frac{x}{3}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow tr(A)=9\rightarrow\frac{1}{3}+\left(\frac{10}{3}-\frac{x}{3}\right)=9\rightarrow\frac{11}{3}-\frac{x}{3}=9\rightarrow x=-16$$

❊ ضرب ماتریس‌ها:

۱: شرط انجام پذیری ضرب دو ماتریس : اگر $A_{m\times n}$ و $B_{s\times p}$ باشد، $A\times B$ زمانی وجود دارد که $n=s$ باشد. یعنی ضرب دو ماتریس زمانی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند. $A\times B$ ماتریسی است از مرتبه $m\times p$.

$$\boxed{A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}}$$

۲: به دست آوردن ماتریس حاصلضرب: ضرب ماتریس‌ها به صورت سطر در ستون انجام می‌شود. یعنی برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول سطر و از ماتریس دوم ستون برمی‌داریم و درایه‌های هر سطر در ستون نظیر به نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می‌شود و در ماتریس حاصلضرب جایگزین می‌گردد. یعنی درایه‌های ماتریس حاصلضرب، سطر را از ماتریس اول و ستون را از ماتریس دوم می‌گیرد.

$$\boxed{۲\times۱+۱\times۰+۰\times۲}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۳ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۲ \end{bmatrix}}_{A\times B \quad ۲\times۲}$$

❊ ویژگی‌ها :

۱: ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جا به جایی ندارد. $A\times B\neq B\times A$

۲: در صورتیکه $A\times B$ و $B\times A$ هر دو تعریف شوند، آنگاه همواره اثر ماتریس AB با اثر ماتریس BA برابر است. (تعویض پذیر باشند.)

$$tr(AB)=tr(BA)$$

۳: ماتریس همانی عضو خنثی عمل ضرب است. $A\times I=I\times A=A$

۴: ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع و تفریق ماتریس‌ها توزیع پذیر است.

$$A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$$

توجه: اگر به ویژگی بالا از راست به چپ نگاه کنیم می‌توان گفت که از «$A\times$» از سمت چپ فاکتور گرفته‌ایم.

۵: ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت پذیری است. $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

۶: طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک ماتریس دلخواه ضرب کرد.

$$B=C\rightarrow AB=AC \quad , BA=CA$$

۷: قانون حذف در حالت کلی در تساوی‌های ماتریسی برقرار نسیت. $AB=AC\not\rightarrow B=C$

۸: اگر حاصلضرب دو ماتریس صفر شود، نمی‌توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است.

۹: حاصلضرب دو ماتریس قطری هم مرتبه یک ماتریس قطری است که باید درایه‌های نظیر روی قطر اصلی را در هم ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & \cdot & \cdot \\ \cdot & b' & \cdot \\ \cdot & \cdot & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa' & \cdot & \cdot \\ \cdot & bb' & \cdot \\ \cdot & \cdot & cc' \end{bmatrix}$$

مثال۸: اگر $A=\begin{bmatrix} x^{۲} & ۳ & -۴ \\ ۵ & -x & \cdot \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -x \\ x & -۷ \end{bmatrix}$ و درایه سطر اول و ستون دوم AB برابر با ۵۶ باشد، حاصل جمع مقادیر x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب: چون درایه سطر اول و ستون دوم AB برابر با ۵۶ است ، کافی است سطر اول A را در ستون دوم B ضرب کنیم :

$$\begin{bmatrix} x^{۲} & ۳ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -x \\ -۷ \end{bmatrix}=۵۶\rightarrow\begin{cases} x^{۲}-۳x+۲۸=۵۶ \\ x^{۲}-۳x-۲۸=\cdot \\ (x-۷)(x+۴)=\cdot \\ x=۷, x=-۴ \end{cases}\rightarrow \quad \text{مجموع} = ۳$$

مثال ۹: جواب‌های معادله $\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & \cdot \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}=\overline{O}$ کدامند؟

۱) ۳- و ۱- ۲) ۳- و ۱ ۳) ۳ و ۱- ۴) ۳ و ۱

جواب:

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x \\ ۲x+۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x \\ ۲x+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x^{۲}+۲x+۳ \end{bmatrix}=\overline{O}=\begin{bmatrix} ۰ \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow -x^{۲}+۲x+۳=۰ \rightarrow (x-۳)(x+۱)=۰ \rightarrow x=۳, x=-۱$$

مثال ۱۰: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -a \\ b & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و حاصل AB ماتریسی قطری باشد، حاصل $(a+b)^{۲}$ کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲/۲۵ ۴) ۱۰

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & -a \\ b & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bigcirc & ۳-۲a \\ ۲b-۴ & \bigcirc \end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{l} ۳-۲a=۰ \\ ۲b-۴=۰ \end{array}\right.$$
$$\rightarrow\left[\begin{array}{l} a=۱/۵ \\ b=۲ \end{array}\right.\rightarrow (a+b)^{۲}=(۱/۵+۲)^{۲}=۱۲/۲۵$$

مثال ۱۱: اگر A و B دو ماتریس مربعی ۲×۲ باشند بطوریکه $BA=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ، اثر ماتریس زیر $B\begin{bmatrix} ۷ & ۰ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}A+B\begin{bmatrix} -۶ & ۰ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}A$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

جواب:

A را از راست و B را از چپ فاکتور می‌گیریم:

$$B\left(\begin{bmatrix} ۷ & ۰ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۶ & ۰ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}\right)A=B\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}A=BIA=BA=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$
$$tr(BA)=۵$$

مثال ۱۲: کنکور ۹۸ داخل : از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۲x & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix}=۰$ عدد غیر صفر x کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

جواب:

$$\begin{bmatrix} ۱۱x-۱ & -x-۲ & -۳x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix}=۰$$

$$\to ۱۱x^{۲}-x-۲x^{۲}-۴x+۳x=۰ \to ۹x^{۲}-۲x=۰ \to \left[\begin{array}{l} x=۰ \\ x=\frac{۲}{۹} \end{array}\right.$$

❈ توان در ماتریس‌ها:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه توان‌های صحیح یا نامنفی A به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} &A^{۰}=I \\ &A^{۱}=A \\ &A^{۲}=A.A \\ &A^{۳}=A^{۲}.A \\ &\quad\vdots \\ &A^{n}=A^{n-۱}.A \end{aligned}$$

❈ توجه کنید اگر A ماتریسی مربعی، m و n طبیعی و k عدد حقیقی باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} &۱: I^{n}=I \\ &۲: (kA)^{n}=k^{n}A^{n} \\ &۳: A^{m}\times A^{n}=A^{m+n} \\ &۴: (A^{m})^{n}=A^{mn} \end{aligned}$$

❈ محاسبه توان‌های بزرگتر در یک ماتریس: برای محاسبه توان‌های بزرگ در یک ماتریس، ابتدا توان دوم آن را به دست می‌آوریم سپس با توجه به نکات زیر حاصل توان بزرگ را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} &۱: A^{۲}=\overline{O} \to A^{n}=\overline{O} \\ &۲: A^{۲}=A \to A^{n}=A \\ &۳: A^{۲}=kA \to A^{n}=k^{n-۱}A \\ &۴: A^{۲}=I \to \left[\begin{array}{l} A^{۲k}=I \\ A^{۲k+۱}=A \end{array}\right. \end{aligned}$$

❈ توجه کنید: w اگر توان دوم A در موارد فوق نبود، باید توان سوم آن را به دست آوریم و از روی $A^{۳},A^{۲},A$ ماتریس A^{n} را حدس بزنیم.

❊ **تذکر:** نکته ۹ صفحه ۷ که در مورد ضرب دو ماتریس قطری گفتیم، در مورد توان رساندن آنها نیز برقرار است.

مثال ۱۳: کنکور ۹۶ خارج: ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times ۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ ۲ & i\neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲}-۴A$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

جواب:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\rightarrow A^{۲}-۴A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}-۴A$$

$$\rightarrow A^{۲}-۴A=\begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۹ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۴ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ مجموع درایه‌ها = ۱۵

مثال ۱۴: اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، حاصل $A^{۱۰۰}-A^{۹۹}$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

جواب:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$A^{۲}=I\rightarrow\begin{bmatrix} A^{۱۰۰}=I \\ A^{۹۹}=A \end{bmatrix}\rightarrow I-A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۱۵: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۶}$ کدام است؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

$$\left.\begin{array}{l} A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ A^{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۹ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}\right\}\rightarrow$$

$A^{n}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳n & ۳n \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\rightarrow A^{n}$ مجموع درایه‌های سطر اول = $۶n+۱\rightarrow n=۶\rightarrow ۶\times ۶+۱=۳۷$

مثال ۱۶: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس $C^{۲}$ کدام است؟ (کنکور ۹۷ داخل)

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}\rightarrow C^{۲}=\begin{bmatrix} ۱+۱+۱+۱ & & & \\ & ۱+۱+۱+۱ & & \\ & & ۱+۱+۱+۱ & \\ & & & ۱+۱+۱+۱ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow tr\left(C^{۲}\right)=۴+۴+۴+۴=۱۶$$

مثال ۱۷: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $BA^{n}=\begin{bmatrix} ۹۶ & ۹۶ \\ ۱۶۰ & ۱۶۰ \end{bmatrix}$ باشد، n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۲

جواب:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲\\۲&۲\end{bmatrix}\to A^{۳}=\begin{bmatrix}۴&۴\\۴&۴\end{bmatrix}$$
$$\to A^{n}=\begin{bmatrix}۲^{n-۱}&۲^{n-۱}\\۲^{n-۱}&۲^{n-۱}\end{bmatrix}\to BA^{n}=\begin{bmatrix}۴&-۱\\۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲^{n-۱}&۲^{n-۱}\\۲^{n-۱}&۲^{n-۱}\end{bmatrix}$$
$$\to BA^{n}=\begin{bmatrix}۳\times۲^{n-۱}&۳\times۲^{n-۱}\\۵\times۲^{n-۱}&۵\times۲^{n-۱}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹۶&۹۶\\۱۶۰&۱۶۰\end{bmatrix}$$
$$\to ۳\times۲^{n-۱}=۹۶\to n=۶$$

* **اتحادها در ماتریس‌ها :** ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی دارای خاصیت جا به جایی نیست. ولی اگر دارای خاصیت جا به جایی باشد، آنگاه اتحادهای جبری برای آنها برقرار است و بالعکس. یعنی اگر اتحادهای جبری در ماتریس‌ها برقرار باشد، حتما ضرب ماتریس‌ها خاصیت جا به جایی دارد. مثلا داریم:

$$AB=BA\to(A\pm B)^{۲}=A^{۲}\pm۲AB+B^{۲}$$

$$AB=BA\to(A+B)(A-B)=A^{۲}-B^{۲}$$

$$AB=BA\to A^{۳}-B^{۳}=(A-B)(A^{۲}+AB+B^{۲})$$

$$AB=BA\to A^{۳}+B^{۳}=(A+B)(A^{۲}-AB+B^{۲})$$

* **تذکر:** ضریب ماتریس I با هر ماتریس دلخواه مانند A دارای خاصیت جا به جایی است. بنابراین تمام اتحادهای جبری در مورد ماتریس‌های I و A برقرار است.

مثال ۱۸: اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۲\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}۲&m\\۳&n\end{bmatrix}$ و $(A-B)(A+B)$ باشند، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۴-   ۳) ۶   ۴) ۳

$$(A-B)(A+B)=A^{۲}-B^{۲}\to AB=BA$$
$$\begin{bmatrix}AB=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&m\\۳&n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸&m+۲n\\۱&n-m\end{bmatrix}\\ BA=\begin{bmatrix}۲&m\\۳&n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲-m&۴+m\\۳-n&۶+n\end{bmatrix}\end{bmatrix}\xrightarrow{AB=BA}$$
$$\begin{cases}۲-m=۸\to m=-۶\\ ۳-n=۱\to n=۲\end{cases}\to m+n=-۶+۲=-۴$$

مثال ۱۹: اگر ماتریس مربعی A در رابطه $A-A^{۲}-I=\overline{O}$ صدق کند، حاصل $A^{۱۱}+A^{۱۲}$ کدام است؟

۱) I ۲) $۲I+A$ ۳) $۲I-A$ ۴) $-A$

$$A-A^{۲}-I=\overline{O}\rightarrow A^{۲}=A-I$$
$$A^{۲}=A-I\rightarrow A^{۴}=\left(A-I\right)^{۲}=A^{۲}-۲A+I\xrightarrow{A^{۲}=A-I}$$
$$A^{۴}=\left(A-I\right)-۲A+I\rightarrow A^{۴}=-A$$
$$A^{۱۱}=A^{۴}\times A^{۴}\times A^{۳}=-A\times-A\times A^{۳}=A^{۵}=A^{۴}\times A^{۱}=\left(-A\right)\times A=-A^{۲}=-\left(A-I\right)=I-A$$
$$A^{۱۲}=A^{۴}\times A^{۴}\times A^{۴}=-A\times-A\times-A=-A^{۳}=-A^{۲}\times A=-\left(A-I\right)\times A$$
$$=-A^{۲}+A=-\left(A-I\right)+A=-A+I+A=I$$
$$\rightarrow A^{۱۱}+A^{۱۲}=I-A+I=۲I-A$$

مثال ۲۰: اگر $A^{۲}+A+I=\overline{O}$ باشد، $A^{۵۶}$ کدام است؟

۱) $-A$ ۲) $-I$ ۳) A ۴) $A^{۲}$

$$\left(A-I\right)\left(A^{۲}+A+I\right)=A^{۳}-I^{۳}=A^{۳}-I$$
$$A^{۲}+A+I=\overline{O}\rightarrow\times\left(A-I\right)\rightarrow A^{۳}-I=\overline{O}\rightarrow A^{۳}=I$$
$$\rightarrow A^{۵۶}=\left(A^{۳}\right)^{۱۸}.A^{۲}=I^{۱۸}.A^{۲}=I.A^{۲}=A^{۲}$$

مثال ۲۱: اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوریکه $A^{۲}-A=\overline{O}$ ، آنگاه $\left(۲I-A\right)^{۱۳۳۱}$ کدام است؟

۱) A ۲) I ۳) $۲A-I$ ۴) $۲A+I$

$$A^{۲}-A=\overline{O}\rightarrow A^{۲}=A$$
$$\left(۲A-I\right)^{۲}=۴A^{۲}-۴AI+I^{۲}=۴A^{۲}-۴A+I\xrightarrow{A^{۲}=A}$$
$$\left(۲A-I\right)^{۲}۴A-۴A+I\rightarrow\left(۲A-I\right)^{۲}=I$$
$$\left(۲A-I\right)^{۱۳۳۱}=\left(۲A-I\right)^{۱۳۳۰}.\left(۲A-I\right)=I^{۱۳۳۰}.\left(۲A-I\right)=۲A-I$$

مثال ۲۲: فرض کنید A ماتریسی مربعی باشد و $A^{۳}=\overline{O}$ ، حاصل $A\left(۲I-۳A\right)^{۵}$ چیست؟

از $A^{۳}=\overline{O}$ نتیجه می‌گیریم که $A^{۴}=A^{۵}=....=\overline{O}$، داریم:

$$A\left(۲I-۳A\right)^{۵}=A\left(۲^{۵}I-۵\left(۲^{۴}I\right)\left(۳A\right)+\alpha_{۲}A^{۲}+\alpha_{۳}A^{۳}+...+\alpha_{۵}A^{۵}\right)$$
$$=A\left(۳۲I-۲۴۰A+CA^{۲}\right)=۳۲A-۲۴۰A^{۲}+CA^{۳}=۳۲A-۲۴۰A^{۲}$$

مثال ۲۳: A و B ماتریس‌های مربعی هم مرتبه هستند. و $B^۴=I$ و $AB=B^۳A$. ماتریس $\left(AB^۲\right)^۲$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $A^۲$ ۴) B

از $B^۴=I$ نتیجه می‌گیریم که $B^۵=B$. حال می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}\left(AB^۲\right)^۲ &= AB^۲.AB^۲ = AB^۲\left(AB\right)B = AB^۲\left(B^۳A\right)B\\ &=AB^۵.AB = AB.\left(AB\right) = AB\left(B^۳A\right)\\ &=AB^۴A = AIA = A^۲\end{aligned}$$

❊ جزوه ماتریس و کاربردها:

❊ مثال‌های تکمیلی از درس اول:

مثال ۲۴: اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد که درایه‌های آن از ضابطه زیر به دست آید، جمع درایه‌های ستون دوم آن چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$a_{ij}=\begin{bmatrix} ۲i+j^۲,\ i<j \to a_{۱۲}=۲\times ۱+۴=۶ \\ ۰ \quad ,\ i=j \to a_{۲۲}=۰ \\ j-i \ ,\ i>j \to a_{۳۲}=۲-۳=-۱ \end{bmatrix} \to ۶-۱=۵$$

مثال ۲۵: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ، درایه واقع در سطر دوم و ستون دوم $AB^۲$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۵- ۳) ۱۰ ۴) ۱۰-

میدانیم باید سطر دوم A را در ستون دوم $B^۲$ ضرب کنیم. پس ابتدا باید ستون دوم $B^۲$ را به دست آوریم:

$$B^۲=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & ۲ \\ \square & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \square & ۶ \\ \square & ۲ \end{bmatrix}$$

$$AB^۲=\begin{bmatrix} \square & \square \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & ۶ \\ \square & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & ۱۰ \end{bmatrix} \to a_{۲۲}=۱۰$$

مثال ۲۶: اگر فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ m & n \end{bmatrix}$ ، چند زوج مرتب (m,n) باعث می‌شوند که $AB=BA$ شود؟

۱) هیچ ۲) بی‌شمار ۳) ۱ ۴) ۲

$$\left.\begin{array}{l} AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ m & n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲+۴m & ۳+۴n \\ ۸+m & ۱۲+n \end{bmatrix} \\ BA=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ m & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۴ & ۱۱ \\ m+۴n & ۴m+n \end{bmatrix} \end{array}\right] \to AB=BA$$

$$\left.\begin{array}{l} \to ۲+۴m=۱۴\to ۴m=۱۲\to m=۳ \\ \to ۳+۴n=۱۱\to ۴n=۸\to n=۲ \end{array}\right] \to (m,n)=(۳,۲)$$

مثال ۲۷: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A^۳=\alpha A+\beta I$ ، آنگاه $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۳

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=\alpha\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{l} \alpha\times ۲+۰=۱۰\to\alpha=۵ \\ \alpha\times ۱+\beta=۷\to\beta=۲ \end{array}\right.$$

مثال ۲۸: اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، $A^{۱۳۹۰}$ کدام است؟

۱) A ۲) I ۳) $-I$ ۴) $-A$

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=-I$$

$$A^۳=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^۴=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$\to A^{۱۳۹۰}=\left(A^۴\right)^{۳۴۷}\times A^۲=I^{۳۴۷}\times -I=-I$$

راه سریع : $A^۲=-I\to A^{۱۳۹۰}=\left(A^۲\right)^{۶۹۵}=(-I)^{۶۹۵}=-I$

مثال ۲۹: اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} \sin x & \frac{۱}{۲} \\ \cos y & \cos x \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند ، $x+y$ چند درجه است؟

۱) ۷۵ ‏‏ ۲) ۸۵ ‏‏ ۳) ۹۵ ‏‏ ۴) ۱۰۵

$$AB=\begin{bmatrix} \sin x & \frac{۱}{۲} \\ \cos y & \cos x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳\sin x+۲ & ۴\sin x+\frac{۳}{۲} \\ ۳\cos y++۴\cos x & ۴\cos y+۳\cos x \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin x & \frac{۱}{۲} \\ \cos y & \cos x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳\sin x+۴\cos y & \frac{۳}{۲}+۴\cos x \\ ۴\sin x+۳\cos y & ۲+۳\cos x \end{bmatrix}$$

$$\to AB=BA\to\left[\begin{array}{l} ۴\sin x+\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۲}+۴\cos x\to\begin{cases} \sin x=\cos x \\ x=۴۵^\circ \end{cases} \\ ۴\cos y+۳\cos x=۲+۳\cos x\to\begin{cases} \cos y=\frac{۱}{۲} \\ y=۶۰^\circ \\ x+y=۱۰۵^\circ \end{cases} \end{array}\right.$$

مثال ۳۰: اگر $A^۲=\overline{O}$ باشد، حاصل $A\left(I+A\right)^۳$ کدام است؟

۱) A ‏‏ ۲) $۳A$ ‏‏ ۳) $A+I$ ‏‏ ۴) $A-I$

$$A\left(I+A\right)^۳=A\left(\underset{I}{I^۳}+۳\underset{I}{I^۲}A+۳I\underset{\overline{O}}{A^۲}+\underset{\overline{O}}{A^۳}\right)=AI+۳A^۲=A$$

مثال ۳۱: اگر $A^۲=۳A$ آنگاه $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $۳^{۹۹}A^{۹۹}$ ‏‏ ۲) $۳^{۹۹}A$ ‏‏ ۳) $۳A$ ‏‏ ۴) $۳I$

$$\left.\begin{array}{l} A^۳=A^۲A=\left(۳A\right)A=۳A^۲=۳\left(۳A\right)=۳^۲A \\ A^۴=A^۳A=\left(۳^۲A\right)\left(A\right)=۳^۲A^۲=۳^۲\left(۳A\right)=۳^۳A \end{array}\right]\to A^{۱۰۰}=۳^{۹۹}A$$

مثال ۳۲: اگر $A^{۲}=\overline{O}$ باشد، آنگاه حاصل $A\left(۲A-۳I\right)^{۳}$ کدام است؟

۱) $۲۷A$ ۲) $-۲۷A$ ۳) $۲۷I$ ۴) $-۲۷I$

$$A\left(۸A^{۳}-۳\left(۲A-۳I\right)\left(۲A\right)\left(-۳I\right)-۲۷I\right)$$
$$A\left(۳۶A-۵۴A-۲۷I\right)=۳۶A^{۲}-۵۴A^{۲}-۲۷A=-۲۷A$$

مثال ۳۳: اگر ماتریس‌های مربعی A و B در رابطه $A=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}-B$ صدق کنند، اثر ماتریس $\left(B^{۲}+BA+AB+A^{۲}\right)^{۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲}{۲۷}$

$$B^{۲}+BA+AB+A^{۲}=\left(A+B\right)^{۲}$$
$$A+B=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}$$
$$\left(A+B\right)^{۲}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}=\frac{۱}{۳}I$$
$$\left(B^{۲}+BA+AB+A^{۲}\right)^{۳}=\left(\left(A+B\right)^{۲}\right)^{۳}=\left(\frac{۱}{۳}I\right)^{۳}=\frac{۱}{۲۷}I^{۳}=\frac{۱}{۲۷}I$$
$$\rightarrow\frac{۱}{۲۷}I=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲۷} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۲۷}\end{bmatrix}\rightarrow tr\left(\left(A+B\right)^{۲}\right)^{۳}=\frac{۲}{۲۷}$$

مثال۳۴: اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $2A=A^2-I$، حاصل $2A^4-A^5$ چیست؟

۱) $5A+2I$ ۲) $-5A-2I$ ۳) $5A-2I$ ۴) $-5A+2I$

$$A^2=2A+I \to \times A^2 \to A^2\times A^2=A^2\left(2A-I\right)$$
$$\to A^4=\left(2A+I\right)\left(2A+I\right)$$
$$\to A^4=4A^2+4A+I$$
$$\to A^4=4\left(2A+I\right)+4A+I$$
$$\to A^4=12A+5I$$
$$\to 2A^4=24A+10I$$
$$\to A\times A^4=A\left(12A+5I\right)\to A^5=12A^2+5A$$
$$\to A^5=12\left(2A+I\right)+5A$$
$$\to A^5=29A+12I$$
$$\to 2A^4-A^5=24A+10I-12\left(29A+12I\right)$$
$$\to 2A^4-A^5=-5A-2I$$

Telegram: @hoseinkhazaei