«به نام خدا»

پیشگفتار

کتاب حاضر بر اساس دو دهه تدریس به دانشجویانی طراحی شده است که قبل از ورود به دانشگاه، با دروس کمتری از فیزیک سر و کار داشته‌اند. در سال‌هایی که تدریس کردم جای خالی یک کتاب مناسب، هم برای تدریس خودم و هم برای استفاده‌ی موثر توسط این قشر دانشجو را احساس می کردم. زیرا کتاب‌هایی که ترجمه شده‌اند کتاب‌های خوب و کاملی هستند ولی تاکنون برای این دانشجویان مورد استفاده نبوده‌اند و آنها صرفا به جزوه‌ی کلاسی اکتفا می‌کرده‌اند. به نظر می‌رسد چون مسائل آخر فصل این کتاب براساس مثال‌های متن طراحی شده‌اند دانشجو تشویق به حل مسائل به کمک مثال‌ها شود. هر چند ممکن است مثال‌های این کتاب در مسائل کتاب‌های فیزیک هالیدی وجود داشته باشند ولی مؤلف از بین روش‌های مختلف برای تدریس، روشی را انتخاب کرده است که در کلاس، مورد توجه همه‌ی دانشجویان بوده است. روش بهینه در فصل اول این کتاب شش فصلی، روش جایگذاری در تبدیل واحدها است. روش مؤثر در فصل‌های دوم و چهارم، محاسبه بردار براساس تعریف ضلع‌های مجاور و مقابل در یک مثلث قائم الزاویه است. در فصل سوم به دلیل اهمیت علامت‌ها، تأکید زیادی روی علامت‌های مثبت و منفی کمیت‌های حرکت شتاب ثابت افقی و عمودی شده است. برای جلوگیری از سردرگمی دانشجو، سعی شده است به موضوعاتی بیشتر پرداخته شود که برای حل مثال‌ها و مسائل مناسب هستند. در صورتی که مطالب این کتاب به طور کامل در کلاس دنبال شود به نظر می‌رسد زمینه مطالعه‌ی دانشجو، در دروس دیگر فیزیک و درس‌های تخصصی بعدی بهتر فراهم شود. علاوه بر این، در حل مثال‌ها سعی شده است به خواننده القا شود برای فهم بهتر مثال‌ها و مسائل و حل آنها، رسم

شکل بسیار ضروری است. این کتاب برای تدریس فیزیک پیش دانشگاهی در دانشگاه پیشنهاد می- شود . در این کتاب فصل پنجم (حرکت پرتابی) و فصل ششم (نیروهای اصطکاک) و در پایان فصل ها سوالات تستی نسبت به چاپ قبلی اضافه شده است. بنابراین، این کتاب شش فصلی برای تدریس فیزیک پیش نیاز هم مناسب است. امیدوارم کتاب حاضر مورد توجه دانشجویان و همکاران محترم قرار گیرد.

در پایان جا دارد از آقایان داوود رفیعی دانشجوی فیزیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرضا که مؤلف را در تهیه‌ی این کتاب یاری کردند کمال تشکر و سپاسگزاری را داشته باشم.

دکتر مجید محمدی

گروه فیزیک

فهرست:

عنوان صفحه

فصل اول: کمیت‌های فیزیکی، واحدهای آنها و تبدیل واحدها

کمیت‌های فیزیکی، واحدها و تبدیل واحدها

قبل از تعریف کمیت‌های فیزیکی، واحدهای آن‌ها و تبدیل آن‌ها، ابتدا به معرفی پیش واحد می‌پردازیم.

۱-۱ پیش واحد

پیش واحد که یک عدد بدون واحد است بر دو نوع است:

الف) پیش واحد با پایه‌ی ۱۰ و با توان صحیح و مثبت

ب) پیش واحد با پایه‌ی ۱۰ و با توان صحیح و منفی

الف) پیش واحد با پایه‌ی ۱۰ و با توان صحیح و مثبت

ضریب	پیش واحد	نماد
$۱۰^{۹}$	گیگا	G
$۱۰^{۶}$	مگا	M
$۱۰^{۳}$	کیلو	K

ب) پیش واحد با پایه‌ی ۱۰ و با توان صحیح و منفی

ضریب	پیش واحد	نماد
$۱۰^{-۲}$	سانتی	C
$۱۰^{-۳}$	میلی	m
$۱۰^{-۶}$	میکرو	μ
$۱۰^{-۹}$	نانو	N
$۱۰^{-۱۲}$	پیکو	P

دو نوع کمیت تعریف می‌کنیم:

۱- کمیت‌های اصلی

۲- کمیت‌های فرعی

۱- ۲ کمیت‌های اصلی

کمیت‌های مستقل به سه شکل زیر را کمیت‌های اصلی می‌نامیم.

الف)طول   ب)زمان ج) جرم

واحد کمیت‌های اصلی در دستگاه SI:

واحد طول	m متر
واحد زمان	S ثانیه
واحد جرم	Kg کیلوگرم

الف) طول:

طول یا جابجایی افقی را با x و طول یا جابجایی عمودی را با y نشان می‌دهیم.

واحدهای طول:
متر m
مایل mi
فوت ft
اینچ in
سال نوری Ly

تبدیل واحدهای طول

برای تبدیل واحد با استفاده از روش جایگذاری، برخی از تبدیل واحدها را به شکل زیر در نظر می-

گیریم:

$$1mi = 5280\ ft \tag{1}$$

$$1ft = 12\ in \tag{2}$$

$$1in = 2/54\ cm \tag{3}$$

☜ **مثال (۱– ۱).** یک اینچ چند متر است؟

$$1in = 2/54\ cm \tag{4}$$

$$c = 10^{-2} \tag{5}$$

حال رابطه‌ی (۵) را در (۴) قرار می‌دهیم:

$$۱in = ۲/۵۸ = ۲/۵۸ \times ۱۰^{-۲} m$$

☜ **مثال (۱- ۲).** طول‌های زیر را بر حسب متر به دست آورید؟

الف) $۱/۲ \times ۱۰^{۱۰} nm$ ب) $۳۲ \times ۱۰^{-۴} Km$ ج) $۱۲ \ cm$

د) $۹۶ \ mm$ ه) $۱ \ mi$

حل: الف)

$$۱/۲ \times ۱۰^{۱۰} nm \quad (۶)$$

$$n = ۱۰^{۹} \quad (۷)$$

حال رابطه (۷) را در (۶) قرار می‌دهیم:

$$۱/۲ \times ۱۰^{۱۰} nm = ۱/۲ \times ۱۰^{۱۰} \times ۱۰^{-۹} m$$

چون $۱۰^{۱} = ۱۰^{-۹} \times ۱۰^{۱۰}$، بنابراین چنین داریم:

$$۱/۲ \times ۱۰^{۱۰} nm = ۱/۲ \times ۱۰^{۱} m$$

سرانجام

$$۱/۲ \times ۱۰^{۱۰} nm = ۱۲ m$$

حل: ب)

$$۳۲ \times ۱۰^{-۴} Km \quad (۸)$$

$$K = ۱۰^{۳} \quad (۹)$$

با جایگذاری (۹) در (۸) چنین داریم:

$$۳۲ \times ۱۰^{-۴} Km = ۳۲ \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰^{۳} m \quad (۱۰)$$

چون $۳۲\times۱۰^{-۴}\times۱۰^{۳} = ۳۲\times۱۰^{-۱} = ۳/۲$ ، رابطه (۱۰) به شکل زیر درمی‌آید:

$$۳۲\times۱۰^{-۴}\mathrm{Km} = ۳/۲\mathrm{m}$$

حل: ج)

$$۱۲\ \mathrm{m} \tag{۱۱}$$

$$\mathrm{c} = ۱۰^{۲} \tag{۱۲}$$

با جایگذاری (۱۲) در (۱۱) چنین داریم:

$$۱۲\mathrm{cm} = ۱۲\times۱۰^{-۲}\mathrm{m}$$
$$\rightarrow ۲\mathrm{cm} = ۰/۱۲\mathrm{m}$$

حل: د)

$$۹۶\ \mathrm{mm} \tag{۱۳}$$

$$\mathrm{m} = ۱۰^{-۳} \tag{۱۴}$$

با جایگذاری (۱۴) در (۱۳) چنین داریم:

$$۹۶\mathrm{mm} = ۹۶\times۱۰^{-۳}\mathrm{m}$$
$$\rightarrow ۹۶\mathrm{mm} = ۰/۰۹۶\mathrm{m}$$

حل: هـ)

ابتدا رابطه‌ی (۲) را در (۱) قرار می‌دهیم.

$$۱\mathrm{mi} = ۵۲۸۰\times۱۲\mathrm{in} \tag{۱۵}$$

سپس رابطه‌ی (۳) را در (۱۵) جایگذاری می‌کنیم:

$$1mi = 5280 \times 12 \times 2/54cm$$

$$c = 10^{-2}$$

$$\rightarrow 1mi = 5280 \times 12 \times 2/54 \times 10^{-2}m$$
$$\rightarrow 1mi = 1609m \qquad (16)$$

ب) زمان

مدت زمان t را با واحدهای SI مربوط به آن به این شکل نشان می‌دهیم:

واحدهای زمان
قرن cent
سال y
روز d
ساعت h
دقیقه min
ثانیه s

تبدیل واحدهای زمان

$$1y = 365D$$

$$1D = 24h$$

$$1h = 60min$$

$$1min = 60S$$

☜ **مثال (۱- ۳)**. یک سال چند ثانیه است؟

$$\begin{aligned} &۱y = ۳۶۵d\left(d = ۲۴h\right) \\ &\rightarrow ۱y = ۳۶۵ \times ۲۴h\left(h = ۶۰min\right) \\ &\rightarrow ۱y = ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰min\left(min = ۶۰s\right) \\ &\rightarrow ۱y = ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰s \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

سال نوری Ly

سال نوری مسافتی است که نور با سرعت $۳\times ۱۰^{۸}\dfrac{m}{s}$ در مدت یکسال می‌پیماید. علاوه بر این، سال نوری واحد فواصل بین ستارگان است.

مثال (۱- ۴). یک سال نوری چند متر است؟

براساس تعریف سال نوری، مقادیر $x = ۱Ly$، $v = ۳\times ۱۰^{۸}\dfrac{m}{s}$ و

$$\begin{aligned} &۱Ly = \left(۳\times ۱۰^{۸}\frac{m}{s}\right)\left(۳۶۵\times ۲۴\times ۶۰\times ۶۰s\right) \\ &\rightarrow ۱Ly = \left(۳\times ۱۰^{۸}m\right)\left(۳۶۵\times ۲۴\times ۶۰\times ۶۰\right) \\ &\rightarrow ۱Ly = ۳\times ۱۰^{۸}\times ۳۶۵\times ۲۴\times ۶۰\times ۶۰m \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

☜ **مثال (۱- ۵)**. موشکی در ارتفاع ۳۰۰ کیلومتری قرار دارد. این فاصله برحسب مایل چقدر است؟

$$\begin{aligned} &y = ۳۰۰Km\left(K = ۱۰^{۳}\right) \\ &y = ۳۰۰\times ۱۰^{۳}m \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

از رابطه‌ی (۱۶) مایل برحسب متر را در مثال (۱- ۲) قسمت حل (هـ) به دست آوردیم:

$$1\text{mi} = 1609\text{m}$$

بنابراین متر بر حسب مایل به شکل زیر است:

$$1\text{m} = \frac{1}{1609}\text{mi} \tag{20}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۰) در (۱۹) چنین به دست می‌آوریم:

$$y = 300 \times 10^{3} \times \frac{1}{1609}\text{m}$$
$$\rightarrow y = \frac{3 \times 10^{5}}{1609}\text{mi}$$

☜ **مثال (۱- ۶).** ده میلی ثانیه چند ثانیه است؟

$$t = 10\text{ms}\left(\text{m} = 10^{-3}\right)$$
$$\rightarrow t = 10 \times 10^{-3}\text{s} = 0/01\text{s}$$

یعنی ۱۰ میلی ثانیه برابر با ۰/۰۱ ثانیه است.

ج) جرم

جرم را با m نشان می‌دهیم و واحد آن در SI ، kg (کیلوگرم) است.

☜ **مثال (۱- ۷).** جسمی به جرم ۲۱۶g می‌باشد این جرم را بر حسب کیلوگرم به دست آورید.

$$m = ۲۱۶g\left(kg = ۱۰^{۳} g \rightarrow g = \frac{۱}{۱۰^{۳}} kg \right)$$

$$\rightarrow m = ۲۱۶ \times \frac{۱}{۱۰^{۳}} kg$$

$$\rightarrow = ۰/۲۱۶kg$$

۱-۳- کمیت‌های فرعی

کمیت‌های وابسته به سه کمیت اصلی، کمیت‌های فرعی نام دارند.

۱- سرعت V

۲- شتاب a

۳- نیرو F

۱- سرعت v

سرعت از دو کمیت اصلی طول و زمان به شکل زیر تشکیل شده است.

سرعت

واحدهای سرعت

واحدهای سرعت از تقسیم واحد طول بر واحد زمان به دست می‌آیند که شکل‌های مختلف زیر را دارند.

$\frac{m}{s}$متر بر ثانیه؛ $\frac{km}{h}$کیلومتر بر ساعت؛ $\frac{mi}{h}$ مایل بر ساعت؛ $\frac{ft}{ns}$ فوت بر نانو ثانیه

☜ **مثال (۱- ۸)**. یک کیلومتر بر ساعت چند متر بر ثانیه است؟

$$v=1\frac{km}{h} \tag{21}$$

$$Km=10^3 m \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&1h=60\min(\min=60s)\\&\rightarrow 1h=3600s\end{aligned} \tag{23}$$

روابط (۲۲) و (۲۳) را در (۲۱) قرار دهیم:

$$v=1\frac{10^3 m}{3600s}=\frac{1000m}{360s} \tag{24}$$

اگر صورت و مخرج سمت راست رابطه‌ی (۲۴) را بر ۱۰۰۰ تقسیم می‌کنیم.

$$v=\frac{1}{3/6}\frac{m}{s}$$

بنابراین اگر بخواهیم $\frac{Km}{h}$ را به $\frac{m}{s}$ تبدیل کنیم به ۳/۶ تقسیم می کنیم:

☜ **مثال (۱- ۹)**. اتومبیلی با سرعت $80\frac{km}{h}$ حرکت می‌کند، سرعت آن را بر حسب $\frac{m}{s}$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}&v=80\frac{km}{h}\\&\rightarrow v=\frac{80}{3/6}\frac{m}{s}\end{aligned}$$

☜ **مثال (۱- ۱۰)**. سرعت جسمی $0/01\frac{ft}{ms}$ می‌باشد، سرعت را بر حسب $\frac{m}{s}$ به دست آورید.

$$V=0/01\frac{ft}{ms} \tag{25}$$

$$1ft = 12in\left(in = 2/54cm\right)$$

$$\rightarrow 1ft = 12 \times 2/54cm\left(c = 10^{-2}\right) \qquad (26)$$

$$\rightarrow 1ft = 12 \times 2/54 \times 10^{-2}m$$

$$1ms = 10^{-3}s \qquad (27)$$

رابطه‌ی (۲۶) را بر (۲۴) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{ft}{ms} = \frac{12 \times 2/54 \times 10^{-2}m}{10^{-3}s} \qquad (28)$$

$\frac{ft}{ms}$ را از رابطه‌ی (۲۸) در رابطه‌ی (۲۵) قرار می‌دهیم:

$$v = 0/01 \times \frac{12 \times 2/54 \times 10^{-2}m}{10^{-3}s}$$

$$\rightarrow v = 1/2 \times 2/54 \frac{m}{s}$$

☜ **مثال (۱- ۱۱).** ۰/۳ میلی متر بر پیکو ثانیه $\left(0/3 \frac{mm}{ps}\right)$ چند متر بر ثانیه است؟

$$v = 0/3 \frac{mm}{ps} \qquad (29)$$

$$mm = 10^{-3}m$$

$$ps = 10^{-12}s$$

$$\rightarrow \frac{mm}{ps} = \frac{10^{-3}m}{10^{12}s} \qquad (30)$$

$\frac{mm}{ps}$ را از رابطه‌ی (۳۰) در رابطه‌ی (۲۹) قرار می‌دهیم.

$$v = ۰/۳ \times \frac{۱۰^{-۳}\,m}{۱۰^{۱۲}\,s}$$

$$v = \frac{۳ \times ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{-۳}\,m}{۱۰^{-۱۲}} \qquad \left(\frac{۱۰^{-۱} \times ۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۱۲}} = ۱۰^{-۴} \times ۱۰^{۱۲} = ۱۰^{۸} \right)$$

$$\rightarrow v = ۳ \times ۱۰^{۸}\,\frac{m}{s}$$

☜ **مثال (۱- ۱۲).** $۱/۸۶ \times ۱۰^{-۳}\,\frac{mi}{s}$ چند متر بر ثانیه است؟

$$v = ۱/۸۶ \times ۱۰^{-۳}\,\frac{mi}{s} \qquad (۳۱)$$

با توجه به مثال (۱- ۲) قسمت حل ه=(هـ) می‌دانیم: $\leftarrow ۱mi = ۱۶۰۹m$

$$\frac{۱mi}{s} = \frac{۱۶۰۹}{۱}\,\frac{m}{s} \qquad (۳۲)$$

با جایگذاری (۳۲) در (۳۱) چنین به دست می‌آوریم:

$$v = ۱/۸۶ \times ۱۰^{-۳} \times \frac{۱۶۰۹}{۱}\,\frac{mi}{s}$$

$$v = ۱/۸۶ \times ۱/۶۰۹۸\,\frac{m}{s}$$

۲- شتاب: a

شتاب از دو کمیت اصلی طول و زمان به شکل زیر تشکیل شده است.

$$\text{شتاب} = \frac{\text{طول}}{(\text{زمان})^{۲}}$$

واحدهای شتاب:

از تقسیم واحدهای طول بر مربع واحدهای زمان به دست می‌آید:

مثلاً، $\frac{Km}{h^۲}$, $\frac{m}{s^۲}$, $\frac{ft}{(ms)^۲}$ و غیره.

☜ **مثال (۱- ۱۳).** $۱\frac{km}{h^۲}$ چند $\frac{m}{s^۲}$ است؟

$$۱Km = ۱۰^۳ m \tag{۳۳}$$

$$۱h = ۶۰min \Rightarrow (۱min = ۶۰s) \rightarrow ۱h = ۶۰\times۶۰s \rightarrow (۱h)^۲ = (۶۰\times۶۰s)^۲ \tag{۳۴}$$

$$\rightarrow \frac{(۳۳)}{(۳۴)} \rightarrow \frac{۱Km}{h^۲} = \frac{۱۰^۳ m}{(۶۰\times۶۰s)^۲} \rightarrow \frac{۱Km}{h^۲} = \frac{۱۰۰۰m}{(۳۶۰۰)^۲ S^۲} \tag{۳۵}$$

اگر صورت و مخرج سمت راست رابطه‌ی (۳۵) را بر ۱۰۰۰ تقسیم کنیم، داریم:

$$۱\frac{Km}{h^۲} = \frac{۱۰۰۰m}{(۳۶)^۲(۱۰۰۰۰)s^۲}$$

$$۱\frac{Km}{h^۲} = \frac{۱}{۱۰\times(۳۶)^۲}\frac{m}{s^۲}$$

☜ **مثال (۱- ۱۴).** جسمی با شتاب $۱۶۰۰۰\frac{km}{h^۲}$ حرکت می‌کند، شتاب آن را برحسب $\frac{m}{s^۲}$ به دست آورید.

$$a = ۱۶۰۰۰\frac{Km}{h^۲}$$

$$\frac{۱Km}{h^۲} = \frac{۱}{۱۰\times(۳۶)^۲}\frac{m}{s^۲} \rightarrow a = ۱۶۰۰۰\times\frac{۱}{۱۰\times(۳۶)^۲}\frac{m}{s^۲}$$

$$a = ۱۶۰۰\times\frac{۱}{(۳۶)^۲}\frac{m}{s^۲} \rightarrow a = \frac{۱۶۰۰}{(۳۶)^۲}\frac{m}{s^۲} \rightarrow a = ۱/۲۳\frac{m}{s^۲}$$

۳- نیرو F

نیروی وارد بر جسم را با F نشان می‌دهیم و واحد آن نیوتن است که آن را با N نشان می‌دهیم.

☜ **مثال (۱- ۱۵).** ۰/۲۳ کیلو نیوتن نیرو به جسم وارد شده است، واحد آن را بر حسب نیوتن محاسبه کنید.

$$F=۰/۲۳KN \rightarrow F=۰/۲۳\times ۱۰^{۳}N \rightarrow F=۲۳۰N$$

$$\downarrow$$

$$K=۱۰^{۳}$$

یعنی به جسم ۲۳۰ نیوتن نیرو وارد شده است.

۱- ۴- کمیت‌های فرعی دیگر

۱- مساحت A

الف) مساحت دایره $A=\pi r^{۲}$

ب) مساحت مستطیل $A=L_{۱}L_{۲}$

واحد مساحت $m^{۲}$ یا $cm^{۲}$ است.

☜ **مثال (۱- ۱۶).** مساحت یک جسم $۱cm^{۲}$ می‌باشد، سطح آن چند $m^{۲}$ است؟

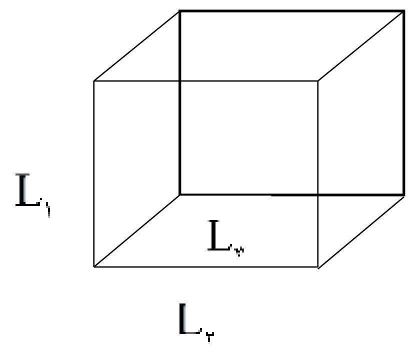
$$۱cm^{۲}=c^{۲}m^{۲}\left(c=۱۰^{-۲}\right)$$

$$\rightarrow ۱cm^{۲}=\left(۱۰^{-۲}\right)^{۲}m^{۲}$$

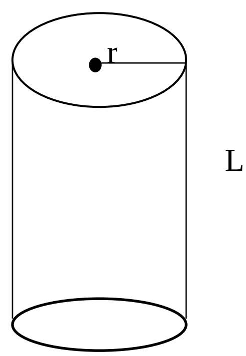
$$\rightarrow ۱cm^{۲}=۱۰^{-۴}m^{۲}$$

۲- حجم V

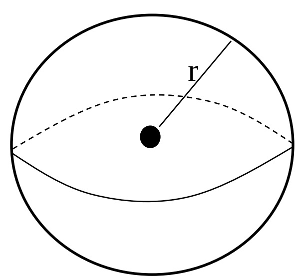
الف) حجم مکعب: $V = L_۱L_۲L_۳$



ب) حجم استوانه : $V = \pi r^۲ L$



ج) حجم کره: $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$



واحد حجم $m^۳$ یا $cm^۳$ است.

☜ **مثال (۱- ۱۷)**. حجم یک جسم $1cm^3$ می‌باشد، حجم آن چند m^3 است؟

$$1cm^3 = c^3m^3\left(c = 10^{-2}\right)$$
$$\rightarrow 1cm^3 = \left(10^{-2}\right)^3 m^3$$
$$\rightarrow 1cm^3 = 10^{-6}m^3$$

۳- چگالی حجمی ρ

از تقسیم جرم M به حجم V به دست می‌آید. $\left(\rho = \dfrac{M}{V}\right)$

واحدهای چگالی حجمی $\dfrac{g}{cm^3}$, $\dfrac{Kg}{m^3}$ است.

☜ **مثال (۱- ۱۸)**. طلا که چگالی‌اش $\dfrac{g}{cm^3}$, $\dfrac{Kg}{m^3}$ است، چگالی آن را بر حسب $\dfrac{Kg}{m^3}$ به دست آورید.

$$\rho = 19/32\frac{g}{cm^3} \tag{۳۶}$$

$$1Kg = 10^3 g \rightarrow 1g = \frac{1Kg}{10^3} \tag{۳۷}$$

$$1cm = 10^{-2}m \rightarrow 1cm^3 = 10^{-6}m^3 \tag{۳۸}$$

$$\frac{(37)}{(38)} \rightarrow \frac{g}{cm^3} = \frac{\frac{1Kg}{10^3}}{10^{-6}m^3} = \frac{1Kg}{10^{-3}m^3} = 10^3\frac{Kg}{m^3} \rightarrow \frac{g}{cm^3} = 10^3\frac{Kg}{m^3} \tag{۳۹}$$

$\frac{g}{cm^۳}$ را از رابطه (۳۹) در رابطه‌ی (۳۶) قرار می‌دهیم.

$$\rho = ۱۹/۳۲ \times ۱۰^۳ \frac{Kg}{m^۳}$$

☜ **مثال (۱- ۱۹).** با فرض اینکه چگالی آب دقیقاً $۱\frac{g}{cm^۳}$ است، جرم یک متر مکعب آب را به کیلوگرم به دست آورید؟

$$\rho = ۱\frac{g}{cm^۳} \tag{۴۰}$$

$$g = ۱۰^{-۳} kg \tag{۴۱}$$

$$۱cm = ۱۰^{-۲} m \rightarrow ۱cm^۳ = ۱۰^{-۶} m^۳ \tag{۴۲}$$

$$\frac{(۴۱)}{(۴۲)} \rightarrow \frac{g}{cm^۳} = \frac{۱۰^{-۳}kg}{۱۰^{-۶}m^۳} = ۱۰^۳ \frac{kg}{m^۳} \rightarrow \rho = ۱۰^۳ \frac{kg}{m^۳}$$

$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow M = \rho V \rightarrow M = ۱۰^۳ \left(\frac{kg}{m^۳}\right) \times \left(۱m^۳\right)$$
$$\rightarrow M = ۱۰^۳ kg$$

☜ **مثال (۱- ۲۰).** چگالی طلا $۱۹/۳۲\frac{g}{cm^۳}$ می‌باشد، قطعه‌ی طلایی به جرم ۲۷/۶۳g چه حجمی بر حسب $cm^۳$ و $m^۳$ دارد؟

$$\rho = ۱۹\backslash ۳۲\frac{g}{cm^3} \; ;M = ۲۷/۶۳g,\ V = ?$$
$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow V = \frac{M}{\rho} \rightarrow V = \frac{۲۷/۶۳g}{۱۹/۳۲\frac{g}{cm^3}}$$

از مثال (۱- ۱۹) چنین داریم:

$$\to V = \frac{۲۷/۳۶g}{۱} \times \frac{۱cm^۳}{۱۹/۳۲g} \to V = \frac{۲۷/۶۳}{۱۹/۳۲} cm^۳$$

$$۱cm^۳ = ۱۰^{-۶} m^۳$$

$$\to V = \frac{۲۷/۶۳}{۱۹/۳۲} \times ۱۰^{-۶} m^۳$$

☜ **مثال (۱- ۲۱).** سرعت نور یعنی $۳ \times ۱۰^۸ \frac{m}{s}$ را بر حسب فوت بر نانو ثانیه به دست آورید؟

$$v = ۳ \times ۱۰^۸ \frac{m}{s} \quad (۴۳)$$

از مثال (۱- ۱۰) چنین به دست آوردیم:

$$۱ft = ۱۲ \times ۲/۵۴ \times ۱۰^{-۲} m$$

$$\to ۱m = \frac{۱ft}{۱۲ \times ۲/۵۴ \times ۱۰^{-۲}} \quad (۴۴)$$

$$۱n = ۱۰^{-۹} s \to ۱s = \frac{۱ns}{۱۰^{-۹}} \quad (۴۵)$$

رابطه (۴۴) و (۴۵) را در رابطه‌ی (۴۳) قرار می‌دهیم.

$$v = ۳\times ۱۰^{۸}\,\frac{\dfrac{۱ft}{۱۲\times ۲/۵۴\times ۱۰^{-۲}}}{\dfrac{۱ns}{۱۰^{-۹}}}$$

$$v = ۳\times ۱۰^{۸}\,\frac{۱ft}{۱۲\times ۲/۵۴\times ۱۰^{-۲}}\times\frac{۱۰^{-۹}}{۱ns}$$

$$v = \frac{۳\times ۱۰^{۸}\times ۱۰^{-۹}}{۱۲\times ۲/۵۴\times ۱۰^{-۲}}\frac{ft}{ns} \rightarrow v = \frac{۳\times ۱۰^{-۱}}{۱۲\times ۲/۵۴\times ۱۰^{-۲}}\frac{ft}{ns}$$

$$v = \frac{۳}{۱۲\times ۲/۵۴\times ۱۰^{-۱}}\frac{ft}{ns} \rightarrow v = \frac{۱}{۴\times ۲/۵۴\times ۱۰^{-۱}}\frac{ft}{ns}$$

$$v = ۰/۹۸\frac{ft}{ns}$$

☜ **مثال (۱- ۲۲).** سرعت یک سفینه‌ی فضایی $۱۸۶۰۰\frac{mi}{h}$ است ، سرعت آن را بر حسب سال نوری بر قرن به دست آورید؟

$$v = ۱۸۶۰۰\frac{mi}{h} \tag{۴۶}$$

از مثال (۱- ۲) قسمت حل (هـ) $mi = ۱۶۰۹m$ و از مثال (۱- ۴) $۱Ly = ۳\times ۱۰^{۸}\times ۳۶۵\times ۲۴\times ۶۰\times ۶۰m$ را محاسبه کردیم. از تقسیم دو رابطه‌ی اخیر چنین به دست می‌آوریم.

$$\frac{mi}{Ly} = \frac{۱۶۰۹m}{۳\times ۱۰^{۸}\times ۳۶۵\times ۲۴\times ۳۶۰۰m}$$
$$mi = \frac{۱۶۰۹}{۳\times ۱۰^{۸}\times ۳۶۵\times ۲۴\times ۳۶۰۰}Ly \tag{۴۷}$$

$$
\begin{aligned}
&۱\text{cent} = ۱۰۰\text{y} = \left(\text{y} = ۳۶۵\text{d}\right) \\
&\rightarrow ۱\text{cent} = ۱۰۰ \times ۳۶۵\text{d}\left(= ۲۴\text{h}\right) \\
&\rightarrow ۱\text{cent} = ۱۰۰ \times ۳۶۵ \times ۲۴\text{h} \\
&\rightarrow ۱\text{h} = \frac{۱\text{cent}}{۱۰۰ \times ۳۶۵ \times ۲۴}
\end{aligned}
\tag{۴۸}
$$

رابطه های (۴۷) و (۴۸) را در رابطه‌ی (۴۶) قرار می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
&\text{v} = \frac{\frac{۱۶۰۹\text{m}}{۳ \times ۱۰^{۸} \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۳۶۰۰}\text{Ly}}{\frac{\text{cent}}{۱۰۰ \times ۳۶۵ \times ۲۴}} \\
&\rightarrow \text{v} = \frac{۱۶۰۹\text{Ly}}{۳ \times ۱۰^{۸} \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۳۶۰۰} \times \frac{۱۰۰ \times ۳۶۵ \times ۲۴}{\text{cent}} \\
&\rightarrow \text{v} = \frac{۱۶۰۹}{۳ \times ۳۶ \times ۱۰^{۸}} \frac{\text{Ly}}{\text{cent}}
\end{aligned}
$$

مسائل آخر فصل:

۱- $0/012\,mi$ چند متر است؟ (راهنمایی: به مثال (۱- ۲) مراجعه شود)

۲- موشکی در ارتفاع ۱۲۰ کیلومتری قرار دارد این فاصله بر حسب مایل چقدر است؟ (راهنمایی: به مثال (۱- ۵) مراجعه شود)

۳- سرعت جسمی $100\frac{Km}{s}$ می‌باشد سرعت آن را بر حسب فوت بر نانو ثانیه به دست آورید؟ (راهنمایی: به مثال (۱- ۲۱) مراجعه شود)

۴- سرعت نور $3\times10^{8}\frac{m}{s}$ را بر حسب میلی‌متر بر پیکو ثانیه به دست آورید؟ (راهنمایی: به مثال (۱- ۲۱) مراجعه شود)

۵- سرعت جسمی $20000\frac{mi}{h}$ می‌باشد سرعت آن را بر حسب سال نوری بر قرن محاسبه کنید؟ (راهنمایی: به مثال (۱- ۲۲) مراجعه شود)

۶- چگالی آهن $7/87\frac{g}{cm^{3}}$ و جرم هر اتم آهن برابر با $9/27\times10^{-26}kg$ است. اگر اتم‌ها را کروی و به هم چسبیده در نظر بگیریم، حجم هر اتم آهن برحسب cm^{3} و m^{3} چقدر است؟ (راهنمایی: به مثال‌های (۱- ۱۸) و (۱- ۲۰) مراجعه شود)

۷- موشکی با شتاب $30000\frac{mi}{h^{2}}$ حرکت می‌کند، شتاب آن را بر حسب $\frac{m}{s^{2}}$ به دست آورید؟ (راهنمایی: به مثال‌های (۱- ۱۳) و (۱- ۱۴) مراجعه شود)

سؤالات چهار گزینه‌ای فصل اول

۱-کدامیک از دسته کمیت های سه تایی زیر، جز کمیت های اصلی در دستگاه بین المللی یکاها (S.I) هستند.

الف) طول، دما،نیرو   ب) جرم، شدت جریان الکتریکی، سرعت

ج) طول،جرم،زمان   د) زمان،جرم،شتاب

۲- یک فروشنده از ترازویی برای اندازه‌گیری جرم جسم‌ها استفاده می کند. این ترازو دارای وزنه های ۱۰۰ و ۲۰۰ گرمی و وزنه های ۱، ۲، ۳ و ۴ کیلوگرمی است. این فروشنده نمی تواند جسمی به جرم .... را با این ترازو اندازه‌گیری کند.

الف) ۵/۲ kg   ب) ۱۱۵۰ g   ج) ۷ kg   د) ۰/۳ kg

۳- سال نوری یکای کدام کمیت است؟

الف) زمان   ب) طول   ج) طول ضربدر زمان   د) شدت نور

۴- سرعت نور در خلا برابر $۳ \times ۱۰^{۸} \frac{m}{s}$ می باشد. یک سال نوری تقریباً برابر است با:

الف) $۹/۴۶ \times ۱۰^{۱۲}$ Mm   ب) $۹/۴۶ \times ۱۰^{۱۲}$ m

ج) $۹/۴۶ \times ۱۰^{۱۵}$ km   د) $۹/۴۶ \times ۱۰^{۱۵}$ m

۵- سرعت خورویی برابر $۹۰ \frac{km}{h}$ می باشد. سرعت این خودرو، چند متر بر ثانیه ($\frac{m}{s}$) است؟

الف) ۱۵   ب) ۲۰   ج) ۲۵   د) ۳۰

۶- سرعت $۷/۵ \frac{m}{s}$ چند کیلومتر بر ساعت است؟

الف) ۵۴   ب) ۱۸   ج) ۹   د) ۲۷

۷-طول ضلع یک مکعب آهنی برابر cm ۵ می باشد. اگر جرم این مکعب۹۷۵g باشد، جرم یک متر مکعب آهن، چقدر است؟

الف)۹۷۵kg　　ب) ۷۸۰kg　　ج) ۹/۷۵ ton　　د) ۷/۸ ton

۸- جرم یک متر مکعب طلا برابر ۱۹/۳ تن است. حجم ۲۰g طلا، تقریباً چند سانتی متر است؟

الف)۱۰　　ب) ۲۰　　ج) ۱　　د) ۲

پاسخنامه چهار گزینه ای فصل اول:

۱) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۲) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۳) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۴) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۵) گزینه‌ی(ج) صحیح است.

۶) گزینه‌ی(د) صحیح است.

۷) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۸) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فصل ۲: بردار

بردار

بردار

بردار کمیتی است که دو ویژگی مهم دارد.

اندازه

جهت

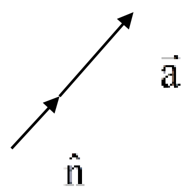
جهت، که به شکل $\vec{a}$ نشان می‌دهیم.

اندازه‌ی بردار را با a و جهت آن را با زاویه‌ی θ تعیین می‌کنیم.

۲-۱- بردار یکه

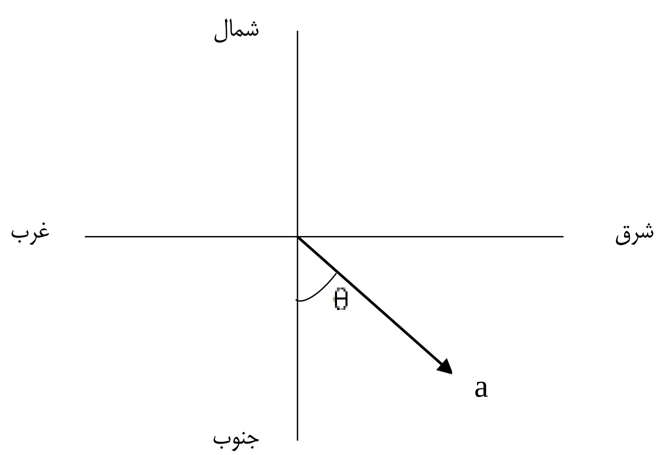
برداری است که اندازه‌ی آن واحد باشد که از تقسیم هر بردار بر اندازه‌ی آن به دست می‌آید و با $\hat{n}$ نشان می‌دهیم.

$$\hat{n} = \frac{\vec{a}}{a}$$

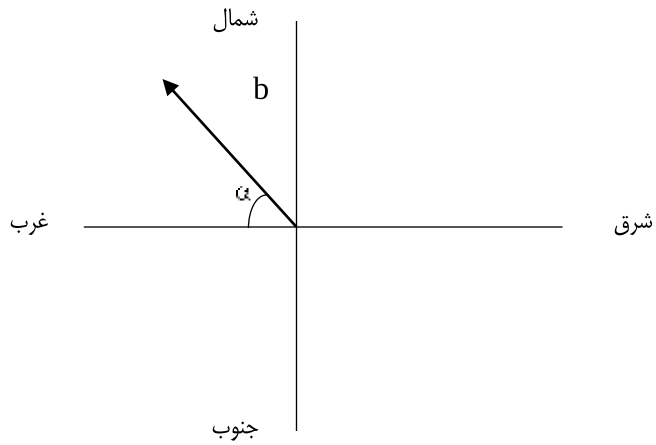


۲-۲- نمایش یک بردار

☜ مثال (۲-۱). برداری به اندازه‌ی a در جهت θ درجه شرق محور جنوبی رسم کنید.



☜ مثال (۲- ۲). برداری به اندازه‌ی b در جهت α درجه شمال محور غربی رسم کنید.



۲- ۳- بردار یکه و دستگاه مختصات دوبعدی

بردار یکه افقی

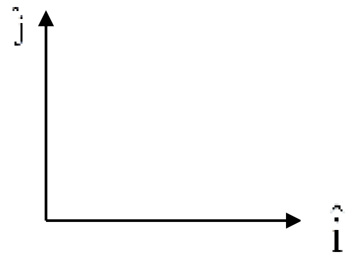
بردار یکه افقی، برداری است که در جهت شرق رسم می‌شود و اندازه‌ی آن واحد است و آن را با $\hat{i}$ نشان می‌دهیم. $\hat{i} \rightarrow$

بردار یکه عمودی

بردار یکه عمودی، برداری است که در جهت شمال رسم می‌شود و اندازه‌ی آن واحد است و آن را با $\hat{j}$ نشان می‌دهیم. $\hat{j} \uparrow$

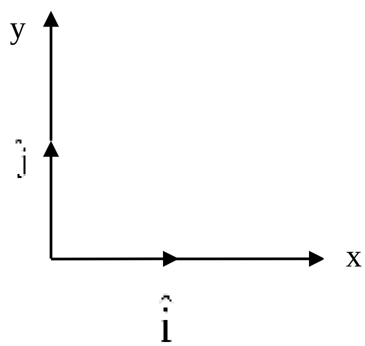
پایه دستگاه مختصات دو بعدی:

دو بردار یکه و عمود بر هم $\hat{j},\hat{i}$، پایه دستگاه مختصات دو بعدی است.



دستگاه مختصات دو بعدی:

از x برابر کردن بردار یکه $\hat{i}$ و y برابر کردن بردار یکه $\hat{j}$ دستگاه مختصات دو بعدی به دست می آید.



۲- ۴- تعیین جهت بردار یا مؤلفه‌های آن

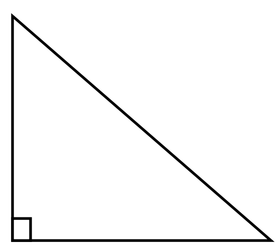
اگر جهت بردار یا جهت مؤلفه‌های بردار با جهت محور x (به سمت شرق) یکی باشد، علامت آن مثبت (+) و در غیر این صورت منفی (−) است.

اگر جهت بردار یا جهت مؤلفه‌ی بردار با جهت محور y (به سمت شمال) یکی باشد، علامت آن مثبت (+) و در غیر این صورت منفی (−) است.

به علامت و نوع نوشتن بردارهای $\vec{d},\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ در شکل‌های زیر توجه کنید.

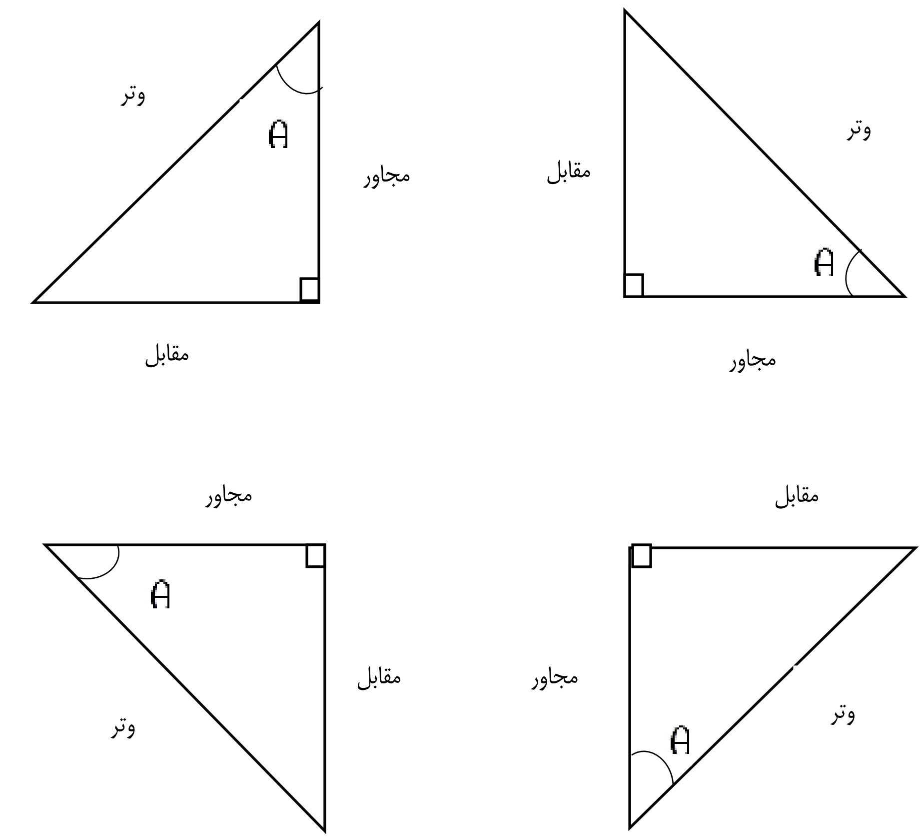
- $a_x = +a$، علامت (+) است، زیرا نوک پیکان بردار روی افق هم جهت با نوک پیکان محور x است. $\underset{\longrightarrow}{\vec{a}}$
- $b_x = -b$، علامت (–) است، زیرا نوک پیکان بردار روی افق خلاف جهت نوک پیکان محور x است. $\underset{\longleftarrow}{\vec{b}}$
- $c_y = +c$، علامت (+) است، زیرا نوک پیکان بردار روی قائم هم جهت با نوک پیکان محور y است. $\uparrow \vec{c}$
- $d_y = -d$، علامت (–) است، زیرا نوک پیکان بردار روی قائم خلاف جهت نوک پیکان محور y است. $\downarrow \vec{d}$

۲- ۵- مثلث قائم الزاویه



به شرطی سه ضلع مثلث قائم الزاویه به صورت (**۱**- وتر) (۲- مجاور) (۳- مقابل) تعریف می‌شوند که یکی از دو زاویه‌ی کمتر از ۹۰° را با θ نشان می‌دهیم. **بنابراین مجاور، ضلع** مجاور به زاویه θ **و** مقابل، ضلع مقابل به زاویه θ **تعریف می‌شود.**

در شکل‌های زیر ضلع مجاور و ضلع مقابل مشخص شده است.



اضلاع مقابل و مجاور را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\text{مقابل} = \text{وتر} \times \sin\theta \qquad (۴۹)$$

$$\text{مجاور} = \text{وتر} \times \cos\theta \qquad (۵۰)$$

$$\begin{array}{ll} \sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} & \sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \sin ۹۰^\circ = \cos ۰^\circ = ۱ & \sin ۰^\circ = \cos ۹۰^\circ = ۰ \\ \sin ۶۰^\circ = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \sin ۰^\circ = \cos ۹۰^\circ = ۰ \end{array} \qquad (۵۱)$$

رابطه‌های (۴۹)، (۵۰) و (۵۱) را به خاطر بسپارید، زیرا در تعیین مؤلفه‌های بردار از آن‌ها استفاده خواهیم کرد.

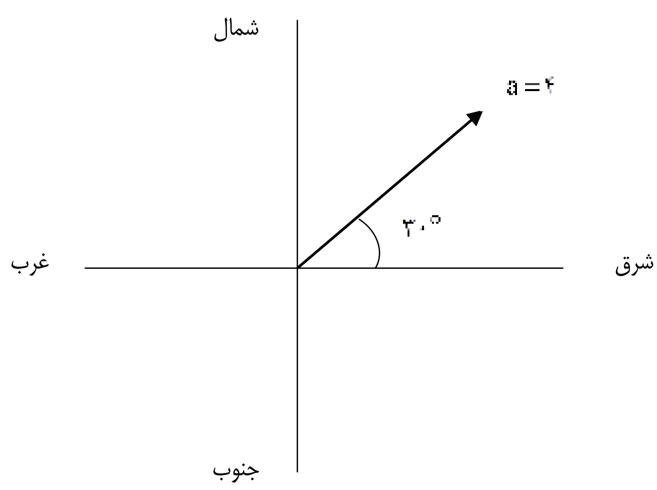
۲- ۶- کاربرد مثلث قائم الزاویه در تجزیه یک بردار

بردار به هر شکلی رسم شده باشد، ابتدا آن را به یک مثلث قائم الزاویه با یک زاویه‌ی معلوم $\theta < ۹۰^{\circ}$ تبدیل می‌کنیم. مثلث قائم الزاویه با یک زاویه معلوم $\theta < ۹۰^{\circ}$ دارای اضلاع تعریف شده‌ی مجاور و مقابل خواهد بود. در این صورت با استفاده از رابطه‌های (۴۹) و (۵۰)، علاوه بر اندازه های اضلاع مقابل و مجاور که همان مؤفه‌های بردارند، علامت (+) و (−) مؤلفه‌ها نیز تعیین خواهد شد.

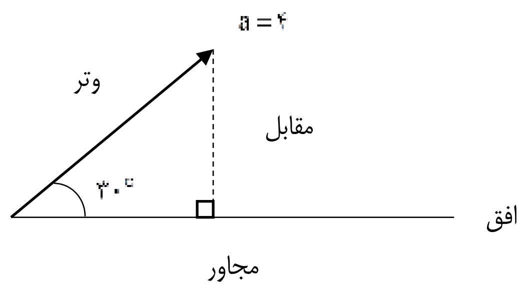
☜ **مثال (۲- ۳).** الف) برداری به اندازه ۴ واحد در جهت ۳۰ درجه شمال محور شرقی رسم کنید؟

ب) مؤلفه‌های این بردار را به دست آورید؟

حل: الف)



حل: ب) یک مثلث قائم الزاویه رسم می‌کنیم تا زاویه ۳۰° داخل مثلث قرار گیرد و بردار $\vec{a}$ به عنوان وتر مثلث قائم الزاویه باشد. بنابراین از نوک پیکان $\vec{a}$ خط عمود بر افق رسم می‌کنیم. تصویر بردار $\vec{a}$ روی محور x را با a_x نشان می‌دهیم، علامت (+) است، زیرا نوک پیکان بردار روی افق هم جهت جهت با نوک پیکان محور x است.



مجاور = وتر $\times \cos ۳۰$

$$a_x = +a\cos ۳۰^\circ \rightarrow a_x = +۴\cos ۳۰^\circ$$

$$\rightarrow a_x = +۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow a_x = ۲\sqrt{۳}$$

تصویر بردار a روی محور y را با a_y نشان می‌دهیم، علامت (+) است، زیرا نوک پیکان بردار روی قائم هم جهت با نوک پیکان محور y است.

مقابل = وتر $\times \sin ۳۰^\circ$

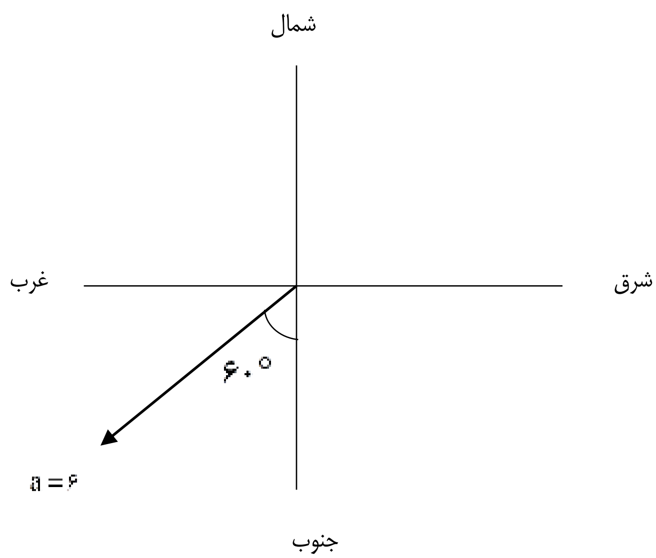
$$a_y = +a\sin ۳۰^\circ \rightarrow a_y = +۴\sin ۳۰^\circ \rightarrow a_y = +۴\times\frac{۱}{۲} \rightarrow a_y = ۲$$

بنابراین مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ را به صورت $\left(a_x = ۲\sqrt{۳}, a_y = ۲\right)$ به دست آوردیم.

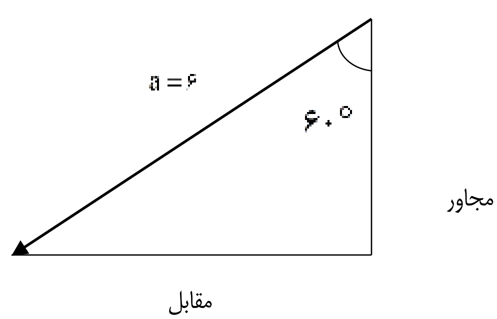
☜ **مثال (۲- ۴).** الف) برداری به اندازه‌ی ۶ واحد در جهت ۶۰ درجه غرب محور جنوبی رسم کنید.

ب) مولفه‌های بردار فرض (الف) را به دست آورید.

حل: الف) زاویه‌ی ۶۰° از محور جنوبی در ربع جنوبی غربی است.



حل: ب) مثلث قائم الزاویه با توجه به شکل فوق به صورت زیر رسم می‌شود.



b_x دارای علامت منفی است، زیرا نوک پیکان بردار b روی افق خلاف جهت محور x است

مقابل = وتر $\times \sin ۶۰^\circ$

$$\rightarrow b_x = -b \sin ۶۰^\circ$$

$$\rightarrow b_x = -۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow b_x = -۳\sqrt{۳}$$

b_y دارای علامت منفی است، زیرا نوک پیکان بردار b روی قائم خلاف جهت محور y است.

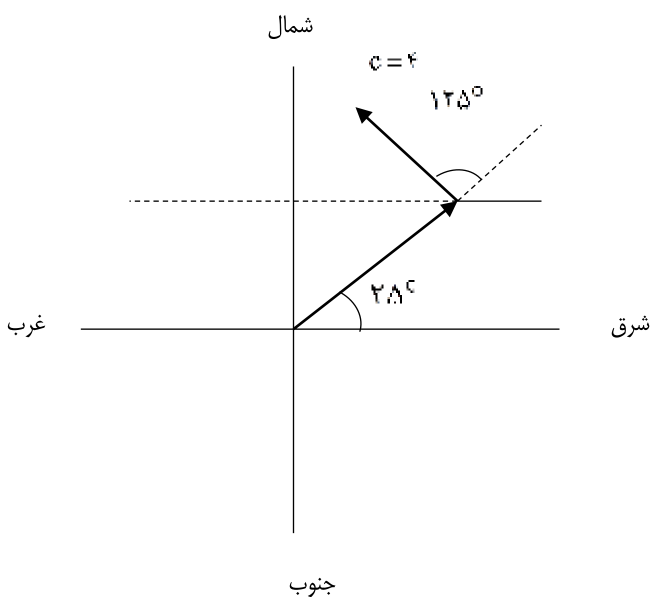
مجاور = وتر $\times \cos ۶۰^\circ$

$$\rightarrow b_y = -b \cos ۶۰^\circ$$

$$\rightarrow b_y = -۶ \times \frac{۱}{۲} \rightarrow b_y = -۳$$

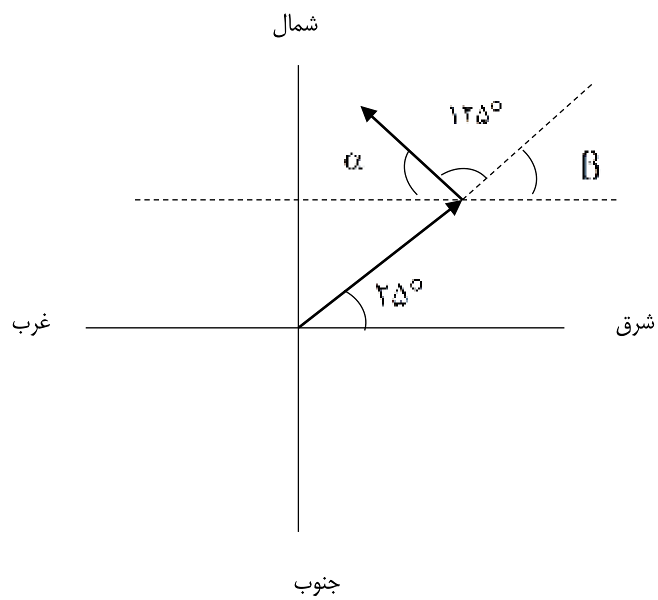
بنابراین مؤلفه‌های بردار $\vec{b}$ به صورت $\left(b_x = -۳, \sqrt{۳} b_y = -۳\right)$ می‌باشد.

☜ **مثال (۲- ۵)**. در شکل زیر، مؤلفه‌های بردار $\vec{c}$ را به دست آورید.



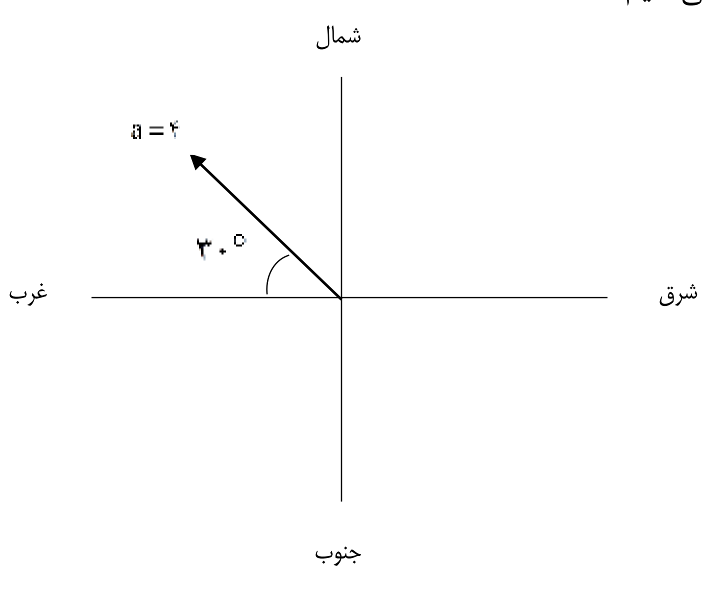
حل: ابتدا زاویه‌ای که بردار $\vec{c}$ با افق می‌سازد را به دست آوریم. با توجه به شکل زیر، زاویه‌ای که بردار $\vec{c}$ با افق می‌سازد زاویه α است که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

طبق قاعده‌ی دو خط موازی و خط مورب $\beta = ۲۵^\circ$ است.

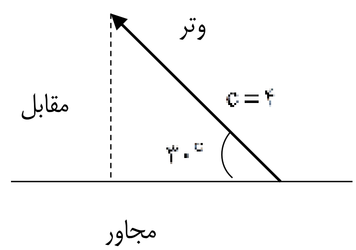


$$\alpha + ۱۲۵ + \beta = ۱۸۰$$
$$\alpha = ۱۸۰^\circ - \left(۱۲۵^\circ + \beta^\circ\right) \rightarrow \alpha = ۱۸۰^\circ - \left(۱۲۵^\circ + ۲۵^\circ\right) \rightarrow \alpha = ۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ \rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

حال بردار $\vec{c}$ را به شکل مقابل رسم می‌کنیم.



سپس روش مثلث قائم الزاویه را به شکل زیر به کار می‌بریم و مؤلفه‌های بردار $\vec{c}$ را به صورت c_x و c_y می‌یابیم. مثلث قائم الزاویه را طوری رسم می‌کنیم که بردار c_y به عنوان وتر باشد که اندازه ی آن ۴ است و زاویه‌ی ۳۰° درجه در داخل مثلث قرار می‌گیرد، بنابراین از نوک پیکان بردار $\vec{c}$ خط عمودی بر افق رسم می‌کنیم.



مجاور = وتر $\times \cos ۳۰^\circ$

$$\rightarrow c_x = -c\cos ۳۰^\circ \rightarrow c_x = -۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow c_x = -۲\sqrt{۳}$$

علامت منفی است زیرا تصویر $\vec{c}$ روی افق خلاف جهت محور x است. از طرفی برای محاسبه ضلع مقابل چنین داریم:

مقابل = وتر $\times \sin ۳۰^\circ$

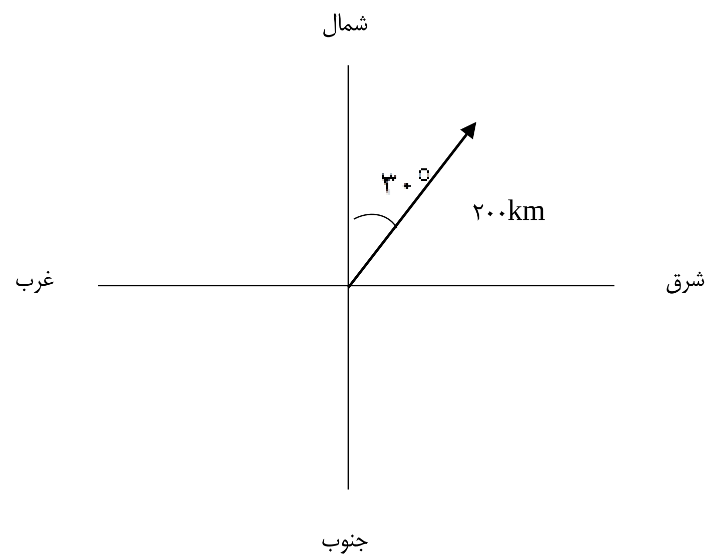
$$\rightarrow c_y = +c\sin ۳۰^\circ \rightarrow c_y = ۴\times\frac{۱}{۲} \rightarrow c_y = ۲$$

علامت مثبت است زیرا تصویر $\vec{c}$ روی قائم در جهت محور y است.

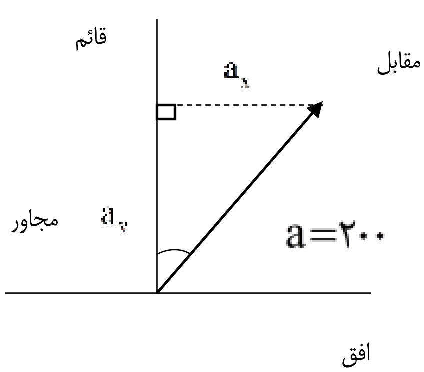
بنابراین مؤلفه‌های بردار $\vec{c}$ به صورت $\left(c_x = -۲\sqrt{۳}\,,\ c_y = ۲\right)$ می‌باشد.

☜ **مثال (۲- ۶).** هواپیمایی از فرودگاه پرواز می‌کند. زمانی بعد، این هواپیما در فاصله‌ی ۲۰۰km از فرودگاه دیده می‌شود. که در جهت شمال شرقی با زاویه‌ی ۳۰° نسبت به شمال در حرکت است. در این هنگام این هواپیما چند کیلومتر به سمت شرق و چند کیلومتر به سمت شمال حرکت کرده است؟

(راهنمایی: برداری مثل $\vec{a}$ به طول ۲۰۰km در جهت ۳۰° شرق محور شمالی در نظر بگیرید و مؤلفه‌های آن $\left(a_x, a_y\right)$ را به روش مثلث قائم الزاویه به دست آورید. a_x مسافتی است که هواپیما به سمت شرق و a_y مسافتی است که هواپیما به سمت شمال حرکت کرده است.)



حال با استفاده از روش مثلث قائم الزاویه مسئله را حل می‌کنیم.



وتر= مجاور $\cos ۳۰^\circ$

$$a_y = a\cos ۳۰^\circ$$

$$a_y = ۲۰۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow a_y = ۱۰۰\sqrt{۳}$$

$$\rightarrow a_y = ۱۷۰ \mathrm{Km}$$

وتر = مقابل $\sin ۳۰^\circ \rightarrow a_x = a\sin ۳۰^\circ \rightarrow a_x = ۲۰۰ \times \frac{۱}{۲}$

$$\rightarrow a_x = ۱۰۰ \mathrm{Km}$$

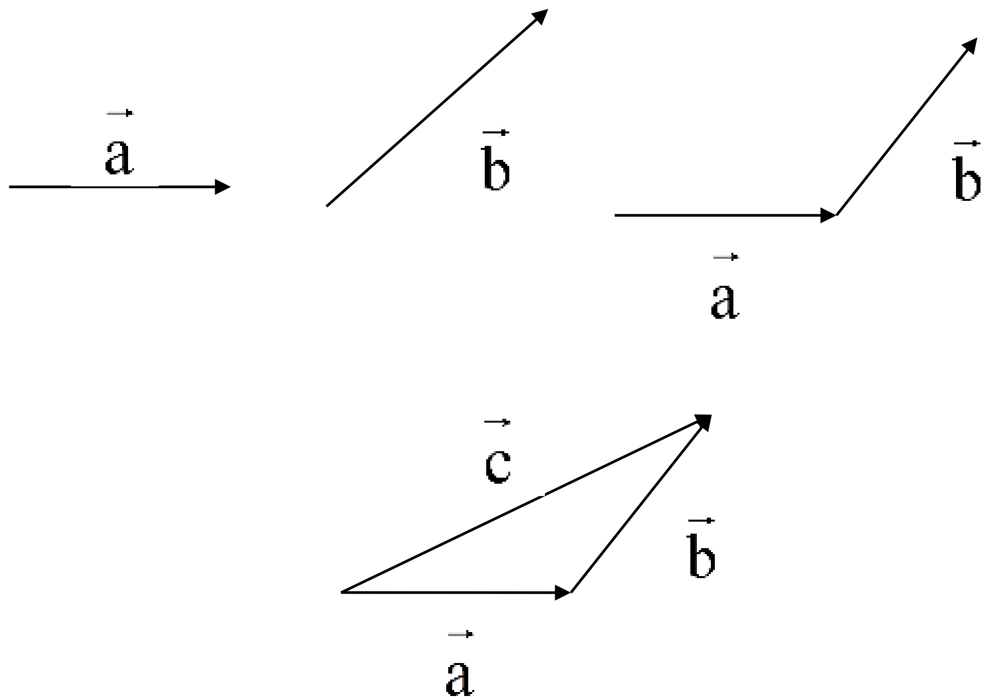
بدین ترتیب میزان حرکت هواپیما به سمت شرق $a_x = ۱۰۰ \mathrm{Km}$ و شمال $a_y = ۱۷۰ \mathrm{Km}$ است.

۲- ۷- تعریف عملیات ریاضی روی بردارها

جمع دو بردار (جمع مثلث)

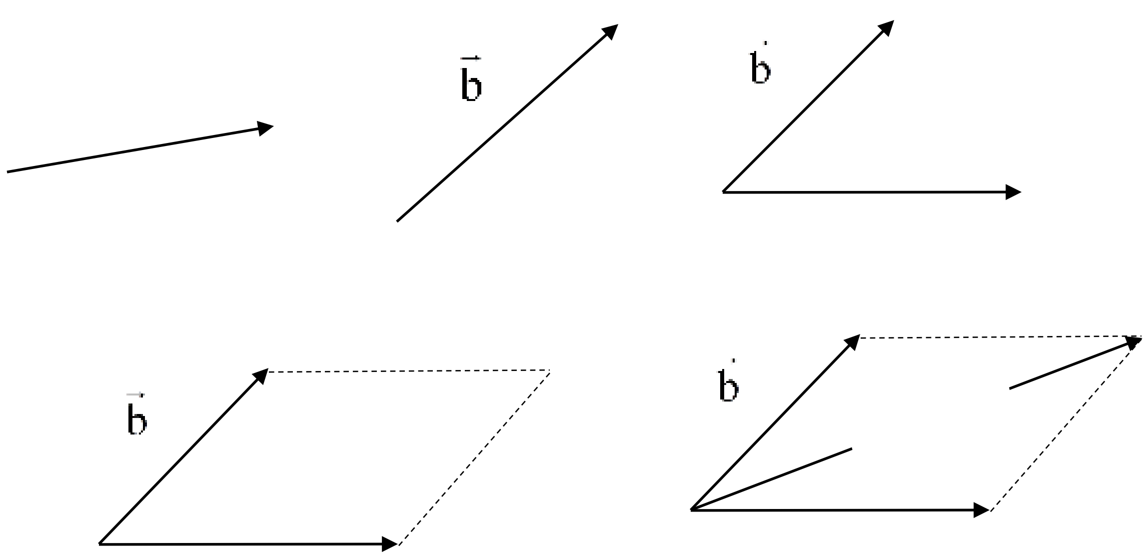
اگر دو بردار $\vec{b}\,,\vec{a}$ را به شکل مقابل داشته باشیم. برای جمع دو بردار، آنها را پشت سر هم رسم می‌کنیم. حال اگر ابتدای بردار $\vec{a}$ را به انتهای بردار $\vec{b}$ وصل کنیم، بردار جدیدی رسم می‌شود که آن را $\vec{a}+\vec{b}$ می‌نامیم و با $\vec{c}$ نشان می‌دهیم.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



جمع دو بردار (جمع متوازی الاضلاع)

اگر دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ را به شکل زیر داشته باشیم. براساس جمع متوازی الاضلاع، دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم. با دو بردار زیر یک متوازی الاضلاع رسم می‌کنیم. قطر متوازی الاضلاع، یک بردار است، که آن را با $\vec{a}+\vec{b}$ نشان می‌دهیم.

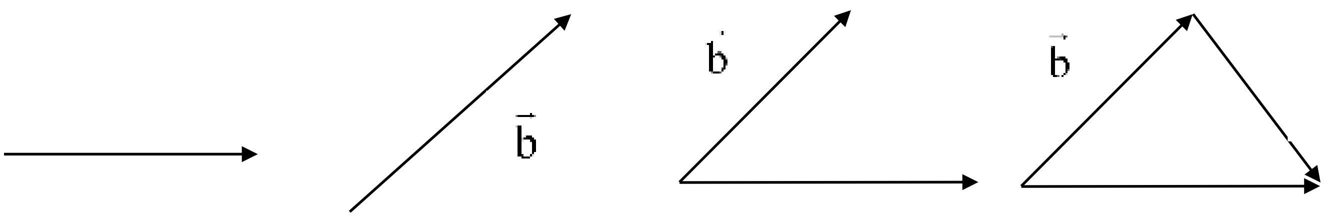


$\vec{a}+\vec{b}$ که یک بردار است که آن را با $\vec{c}$ نشان می‌دهیم

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

تفاضل دو بردار

دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ را به شکل زیر در نظر بگیرید. دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم. انتهای دو بردار را به هم وصل کنید، بردار حاصل تفاضل دو بردار خواهد بود.



برای آن که درستی تفاضل دو بردار را تحقیق کنیم، بردار $\vec{a}-\vec{b},\vec{b}$ را از روش مثلث جمع کنید، بردار $\vec{a}$ حاصل می‌شود.

ضرب دو بردار

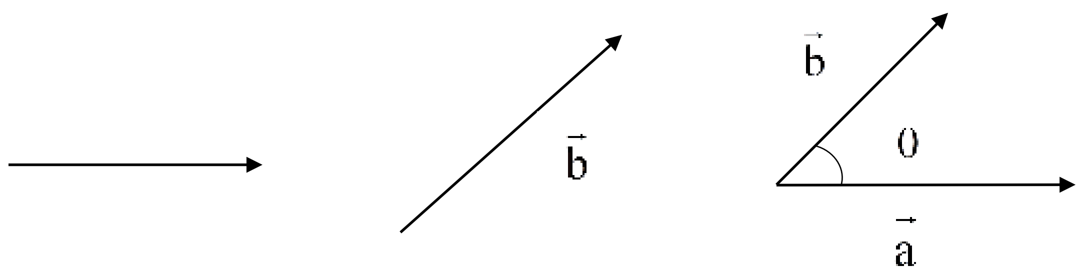
۱- ضرب نرده‌ای (داخلی): حاصل ضرب دو بردار، یک بردار نمی‌شود بلکه حاصل ضرب آن یک عدد یا نرده‌ای می‌شود. بین دو بردار علامت نقطه است و به آن ضرب نقطه‌ای هم می‌گوییم.

۲- ضرب برداری (خارجی): حاصل ضرب دو بردار، یک بردار می‌شود بین دو بردار علامت $(\times)$ قرار می‌دهیم.

۱- ضرب نقطه‌ای (ضرب داخلی یا ضرب نرده‌ای)

دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ را به شکل زیر در نظر بگیرید، دو بردار را از یک نقطه رسم کنید. دو بردار زاویه θ می‌سازند. ضرب نقطه‌ای $\vec{b},\vec{a}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم چون حاصل یک عدد می‌شود و بردار نمی‌شود، این ضرب را ضرب نرده‌ای می‌نامیم.

$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\theta$$

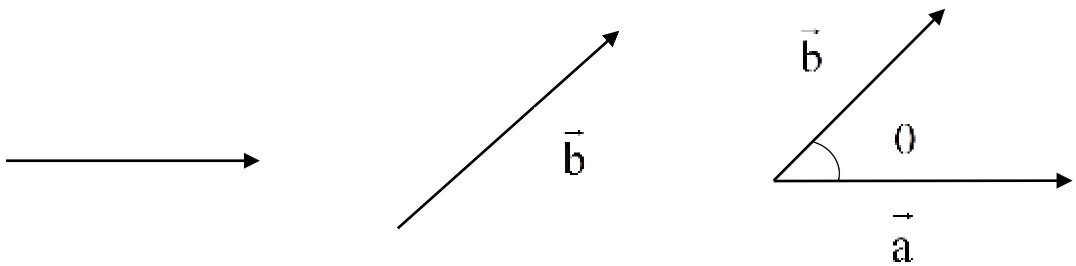


☜ **مثال (۲- ۷).** دو بردار به اندازه‌های ۳ و ۶ در نظر بگیرید که با هم زاویه ۳۰° می‌سازند. ضرب نرده‌ای آنها را به دست آورید.

$$a = ۳ \; ; \; b = ۶ \; ; \; \theta = ۳۰^\circ$$
$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos ۳۰^\circ \rightarrow \vec{a}.\vec{b} = (۳)(۶)\cos ۳۰^\circ$$
$$\rightarrow \vec{a}.\vec{b} = ۱۸\frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow \vec{a}.\vec{b} = ۹\sqrt{۳}$$

۲- ضرب برداری (ضرب خارجی)

دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ را در نظر بگیرید. دو بردار را از یک نقطه رسم کنید. دو بردار با هم زاویه θ می سازند. ضرب برداری به صورت مقابل تعریف می‌شود. $\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\theta\hat{n}$



چون حاصل ضرب فوق یک بردار است. جهت آن را با $\hat{n}$ نشان داده‌ایم، که $\hat{n}$ عمود بر صفحه دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ است. اندازه‌ی ضرب برداری به شکل زیر تعریف می‌شود.

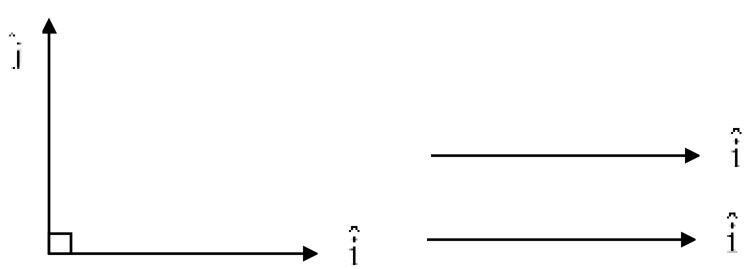
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab\sin\theta$$

☜ **مثال (۲– ۸)**. دو بردار به اندازه‌های ۳ و ۴ با هم زاویه‌ی ۳۰° می‌سازند، اندازه‌ی ضرب برداری آنها را محاسبه کنید.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab\sin\theta \rightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = (۳)(۴)\sin ۳۰^\circ$$
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ۱۲\times\frac{۱}{۲} \rightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ۶$$

ضرب نرده‌ای بردارهای یکه

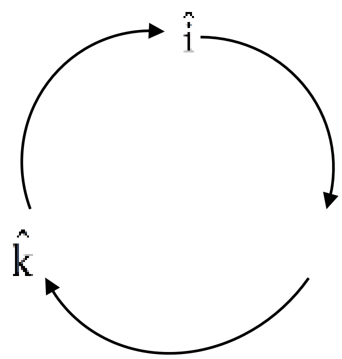
$$\hat{i}.\hat{i} = (۱)(۱)\cos ۰^\circ = ۱$$
$$\hat{i}.\hat{j} = (۱)(۱)\cos ۹۰^\circ = ۰$$



ضرب برداری بردارهای یکه

$$\hat{i}\times\hat{i}=(۱)(۱)\sin ۰^\circ=۰$$
$$\hat{i}\times\hat{j}=(۱)(۱)\sin ۹۰^\circ\hat{k}\rightarrow\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$$

رابطه‌ی قبل یک رابطه‌ی چرخه‌ای است که اگر ساعت گرد باشد علامت مثبت و اگر پاد ساعت گرد باشد علامت منفی است.



بنابراین $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ است ولی $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$ می‌شود.

جهت $\vec{a}\times\vec{b}$ (قاعده‌ی دست راست)

اگر دست راست عمود بر صفحه‌ی دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ قرار گیرد، طوری که چهار انگشت دست راست از بردار اول به بردار دوم در یک زاویه کمتر جمع شوند، آن گاه انگشت شصت جهت $\vec{a}\times\vec{b}$ را نشان می‌دهد.

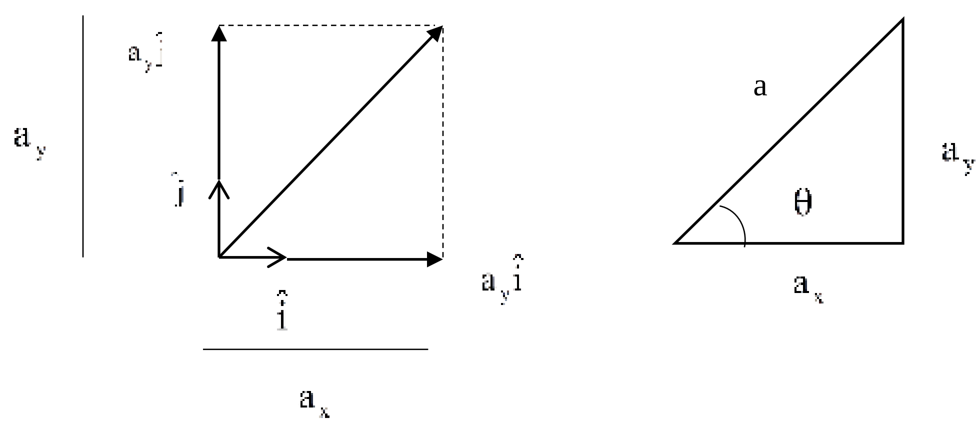
۲- ۸- نمایش یک بردار بر حسب مؤلفه‌های آن

با استفاده از روش متوازی الاضلاع، جمع دو بردار $a_x\hat{i}\,,\,a_y\hat{j}$ بردار $\vec{a}$ می‌شود و $\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$.

اندازه و جهت بردار $\vec{a}$ با معلوم بودن مؤلفه‌های آن یعنی با معلوم بودن $a_y\,,\,a_x$ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$a^{۲}=a_x^{۲}+a_y^{۲}\rightarrow \text{اندازه بردار}=a=\sqrt{a_x^{۲}+a_y^{۲}}$$

$$\text{جهت بردار}=\theta=\mathrm{Arctan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

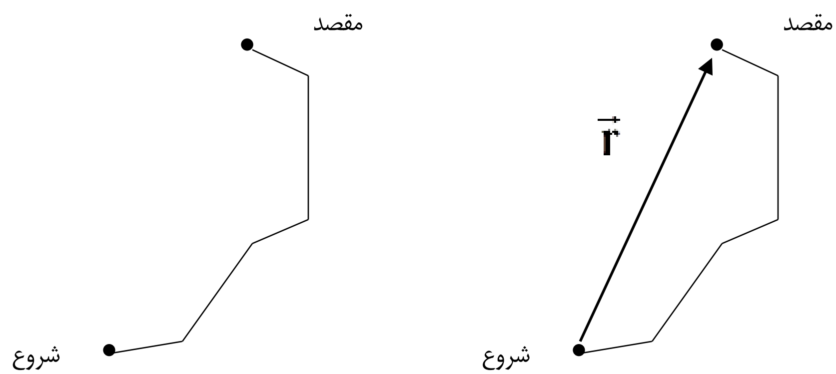


☜ **مثال (۲- ۹).** اندازه و جهت بردار $\vec{a}=۳\hat{i}+۴\hat{j}$ را به دست آورید.

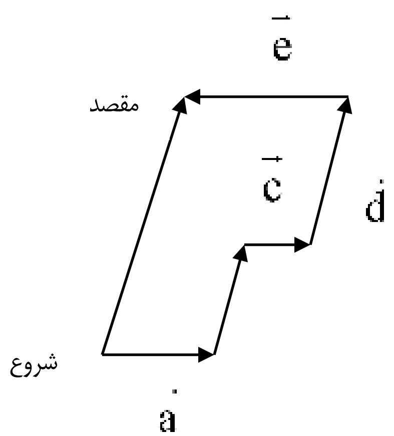
$$a_x=۳\,,\,a_y=۴\rightarrow a=\sqrt{a_x^{۲}+a_y^{۲}}\rightarrow a=\sqrt{(۳)^{۲}+(۴)^{۲}}$$
$$\rightarrow a=\sqrt{۹+۱۶}\rightarrow a=\sqrt{۲۵}\rightarrow a=۵$$
$$\theta=\mathrm{Arctan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)\rightarrow\theta=\mathrm{Arctan}\left(\frac{۴}{۳}\right)\rightarrow\theta=۵۳^{\circ}$$

۲- ۹- بردار مکان $\vec{r}$ (در دو بعد)

اگر جسمی از یک نقطه شروع به حرکت کند و پس از چند جابه‌جایی به مقصد برسد، آن گاه نقطه ی شروع را به مقصد وصل می‌کنیم، خطی که به دست می‌آید را بردار مکان یا جابه‌جایی جسم می نامیم و آن را با $\vec{r}$ نشان می‌دهیم.



برای محاسبه بردار $\vec{r}$ باید به هر یک از جابه‌جایی‌ها یک بردار به شکل زیر نسبت دهیم.



در شکل فوق می‌بینیم که به پنج جابه‌جایی، پنج بردار $\vec{e},\vec{d},\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ نسبت داده شده است با استفاده از جمع بردار به روش مثلث، رابطه‌ی زیر بین بردار مکان $\vec{r}$ با پنج بردار $\vec{e},\vec{d},\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ برقرار است و داریم:

$$\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$$

(حالت خاص): اگر به جای پنج جابه‌جایی بین شروع و مقصد جسم، سه جابه‌جایی وجود داشته باشد رابطه‌ی فوق به شکل زیر در می‌آید.

$$\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

۲- ۱۰- روش محاسبه‌ی اندازه و جهت بردار مکان $\vec{r}$

اگر جسمی سه جابه‌جایی داشته باشد، ابتدا به سه جابه‌جایی، سه بردار $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ نسبت می‌دهیم. وقتی شروع را به مقصد حرکت جسم وصل می‌کنیم. بردار حاصل را $\vec{r}$ می‌نامیم که رابطه‌ی زیر برقرار است. $\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

رابطه‌ی فوق را روی محور x و y به شکل زیر تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases} r_x=a_x+b_x+c_x \\ r_y=a_y+b_y+c_y \end{cases}$$

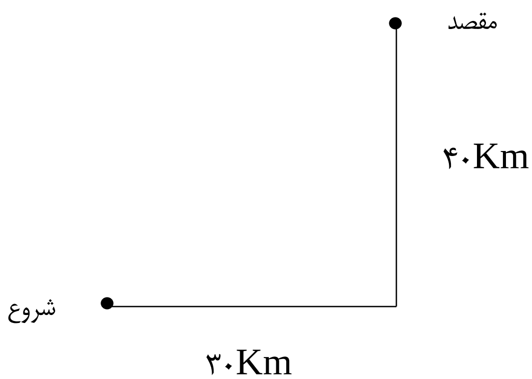
مؤلفه‌های هر کدام از جابه‌جایی‌ها که با بردارهای $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ مشخص شده‌اند را جداگانه به دست می آوریم و در رابطه‌ی فوق قرار می‌دهیم که در مثال‌های بعدی خواهیم دید. در آخر اندازه و جهت بردار $\vec{r}$ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

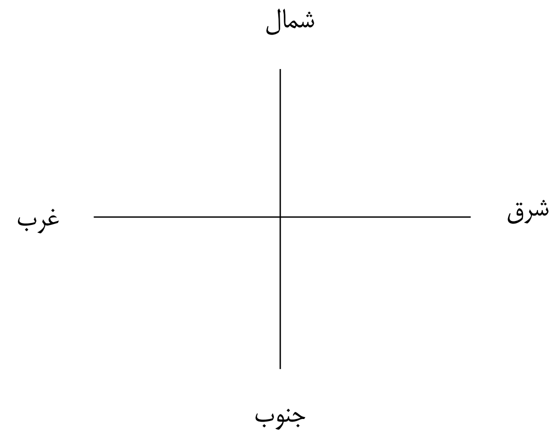
$$\text{اندازه بردار مکان}=r=\sqrt{r_x^{۲}+r_y^{۲}}$$

$$\text{جهت بردار مکان}=\theta=\mathrm{Arctan}\left(\frac{r_y}{r_x}\right)$$

☜ **مثال (۲- ۱۰).** اتومبیلی روی یک جاده‌ی افقی مسافت ۳۰Km را به سمت شرق می‌پیماید. سپس در یک تقاطع به سمت شمال می‌پیچد و تا قبل از توقف مسافت ۴۰Km را طی می کند. بردار مکان (جابه‌جایی برآیند) اتومبیل را پیدا کنید.

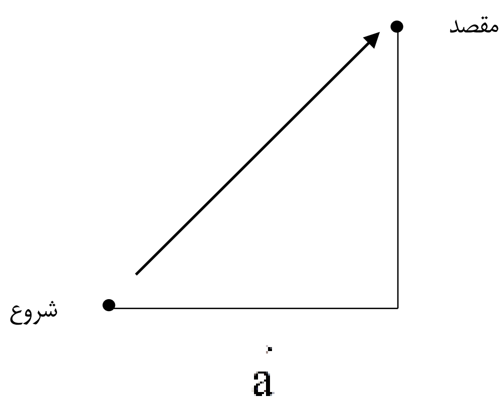
حل: ابتدا مسیر را رسم می‌کنیم.





حال به دو جابه‌جایی فوق دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ نسبت می‌دهیم و شروع را به مقصد وصل می‌کنیم تا بردار $\vec{r}$ به دست آید

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$



رابطه‌ی بالا را روی دو محور x و y تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases} r_x = a_x + b_x \\ r_y = a_y + b_y \end{cases} \qquad (۵۲)$$

a_y, a_x را با رسم بردار $\vec{a}$ می‌یابیم.

علامت مثبت است زیرا $\vec{a}$ روی افق هم جهت با محور x است.

$$\xrightarrow[\text{۳۰Km}]{} \vec{a}$$

$$\begin{cases} a_x = +a \rightarrow a_x = +۳۰ \\ a_y = ۰ \end{cases} \qquad (۵۳)$$

b_y, b_x را با رسم بردار $\vec{b}$ می‌یابیم علامت مثبت است، زیرا $\vec{b}$ روی قائم هم جهت با محور y است.

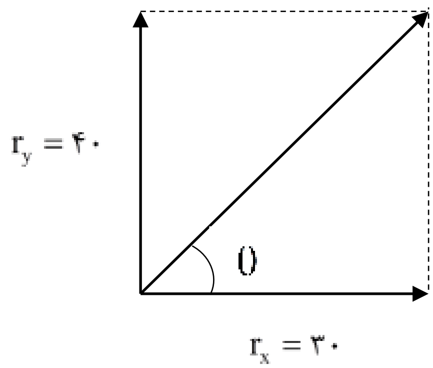
$$۴۰\text{Km} \uparrow \vec{b}$$

$$\begin{cases} b_x = ۰ \\ b_y = +b \rightarrow b_y = +۴۰ \end{cases} \qquad (۵۴)$$

حال رابطه‌های (۵۳) و (۵۴) را در رابطه‌ی (۵۲) قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} r_x = ۳۰ + ۰ \\ r_y = ۰ + ۴۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_x = ۳۰ \\ r_y = ۴۰ \end{cases}$$

اندازه و جهت بردار $\vec{r}$ به شکل زیر تعیین می‌شود.



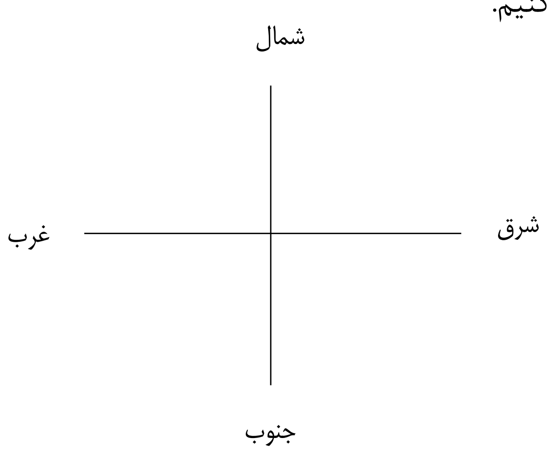
$$\text{اندازه بردار مکان} = r = \sqrt{{r_x}^{۲} + {r_y}^{۲}} = \sqrt{(۳۰)^{۲} + (۴۰)^{۲}} = ۵۰$$

$$\text{جهت بردار مکان} = \theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{r_y}{r_x}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{۴۰}{۳۰}\right) = ۵۳^{\circ}$$

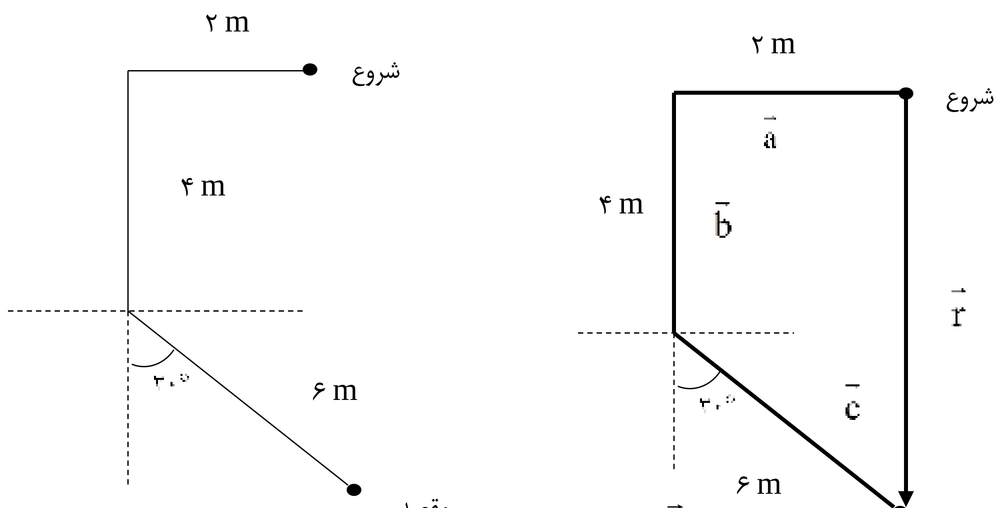
یعنی بردار مکان به اندازه ۵۰km در جهت ۵۳° درجه شمال محور شرقی است.

☜ **مثال (۲- ۱۱).** جسمی ۲m به سمت غرب، ۴m به سمت جنوب، ۶m در جهت ۳۰ درجه شرق محور جنوبی حرکت می‌کند. بردار مکان (جابه‌جایی) جسم را به دست آورید.

ابتدا مسیر را به شکل مقابل رسم می‌کنیم.



حال به سه جابه‌جایی مقابل سه بردار $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ نسبت می‌دهیم و شروع را به مقصد وصل می‌کنیم تا بردار $\vec{r}$ به دست آید

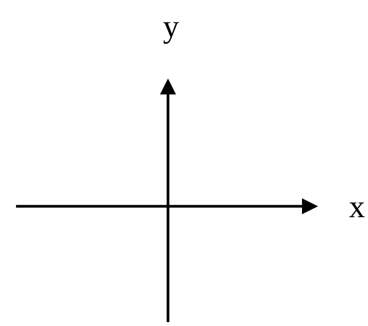


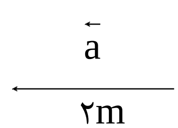
$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

رابطه‌ی برداری فوق را در دو راستای x و y تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases} r_x = a_x + b_x + c_x \\ r_y = a_y + b_y + c_y \end{cases} \tag{۵۵}$$

هر بردار را جداگانه رسم می‌کنیم و مؤلفه‌های آن را محاسبه می‌کنیم.



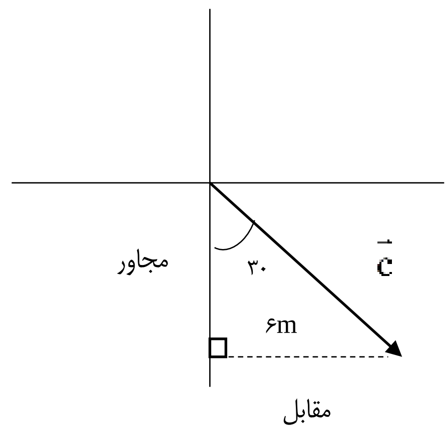


$$\begin{cases} a_x = -۲ \\ a_y = ۰ \end{cases} \tag{۵۶}$$

$$\begin{cases} b_x = ۰ \\ b_y = -۴ \end{cases} \qquad ۴\text{m} \downarrow \vec{b} \tag{۵۷}$$

در شکل زیر از انتهای بردار $\vec{c}$ یک مثلث قائم الزاویه طوری رسم می‌کنیم تا زاویه ۳۰° را در برگیرد که وتر همان $c = ۶m$ می‌باشد.

علامت منفی است زیرا بردار $\vec{c}$ در راستای قائم خلاف جهت محور y است.

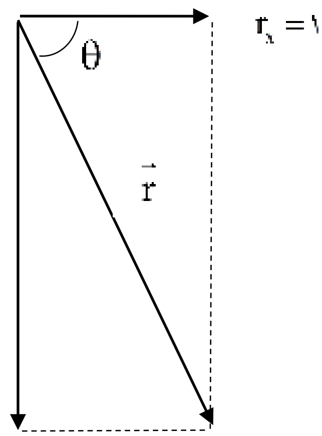


$$\begin{cases} \cos ۳۰^\circ = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \\ c_y = -۶\cos ۳۰^\circ \\ c_y = -۶\dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \\ c_y = -۳\sqrt{۳} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin ۳۰^\circ = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \\ c_x = +۶\sin ۳۰^\circ \\ c_x = +۶ \times \dfrac{۱}{۲} \\ c_x = ۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_x = ۳ \\ c_y = -۳\sqrt{۳} \end{cases} \qquad (۵۸)$$

حال رابطه‌های (۵۶)، (۵۷) و (۵۸) را در رابطه‌ی (۵۵) قرار می‌دهیم.



$$\begin{cases} r_x = -۲ + ۰ + ۳ \\ r_y = ۰ - ۴ - ۵/۱ = -۹/۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_x = ۱ \\ r_y = -۹/۱ \end{cases}$$

اندازه و جهت بردار مکان به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$r = \sqrt{r_x^{۲} + r_y^{۲}} = \sqrt{(۱)^{۲} + (-۹/۱)^{۲}} = ۹/۱m$$

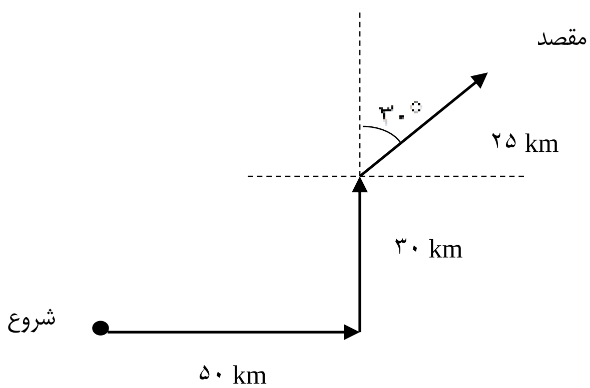
$$\theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{r_y}{r_x}\right)$$

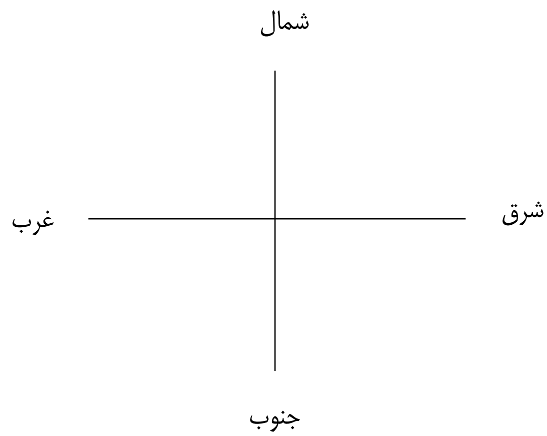
$$\theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{-۹/۱}{۱}\right) = \mathrm{Arctan}(-۹/۱) = -۸۳^\circ$$

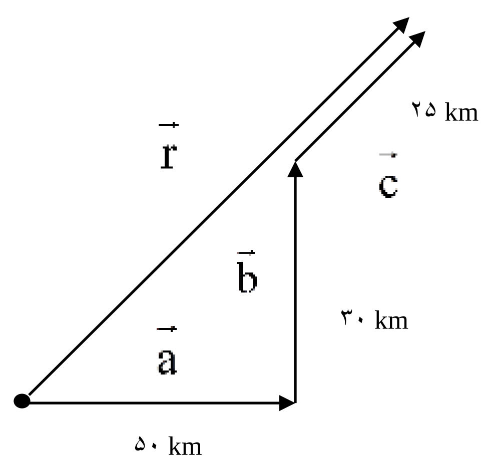
یعنی بردار مکان به طول $r = ۹/۱۵m$ و در جهت $\theta = ۸۳$ درجه جنوب محور شرقی است.

☜ **مثال (۲- ۱۲).** اتومبیلی مسافت ۵۰km را در جهت شرق، سپس ۳۰km را در جهت شمال و آن گاه ۲۵km را در جهت °۳۰ شرق محور شمالی می‌پیماید. نمودار برداری حرکت را رسم کنید و جابه‌جایی کل اتومبیل را نسبت به نقطه‌ی شروع حرکتش به دست آورید.

حل: ابتدا مسیر را رسم می‌کنیم. سپس سه بردار $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ را به این سه جابه‌جایی نسبت می‌دهیم و نقطه‌ی شروع را به نقطه‌ی مقصد وصل می‌کنیم تا بردار جابه‌جایی $\vec{r}$ به دست آید.



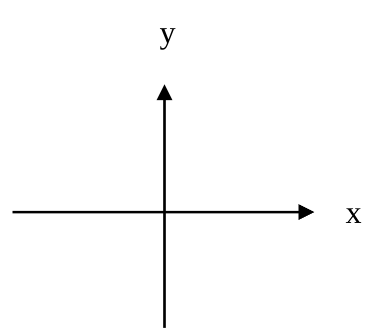




$$\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

رابطه‌ی برداری فوق را در راستای x و y تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases} r_x = a_x + b_x + c_x \\ r_y = a_y + b_y + c_y \end{cases} \qquad (۵۹)$$

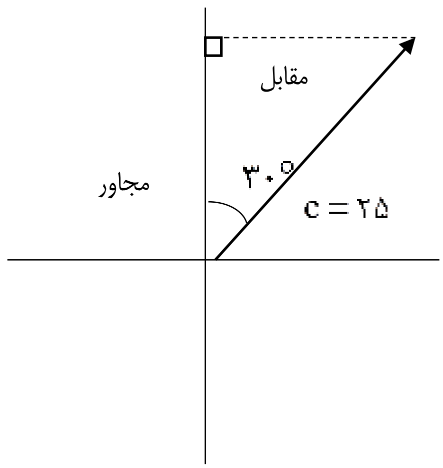


هر بردار را به طور جداگانه رسم می‌کنیم و مؤلفه‌های آن را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} b_x = ۰ \\ b_{y} = ۳۰ \end{cases} \qquad \uparrow \vec{b} \qquad (۶۰)$$

$$\begin{cases} a_x = ۵۰ \\ a_y = ۰ \end{cases} \qquad \xrightarrow{\vec{a}} \qquad (۶۱)$$

در شکل زیر از انتهای بردار $\vec{c}$ یک مثلث قائم الزاویه طوری رسم می‌کنیم تا زاویه‌ی ۳۰° را در برگیرد به طوری که $c = ۲۵$ وتر مثلث باشد.



$$c_x = \text{مقابل} = \text{وتر} \ \sin ۳۰^\circ = ۲۵ \times \frac{۱}{۲} = ۱۲/۵$$

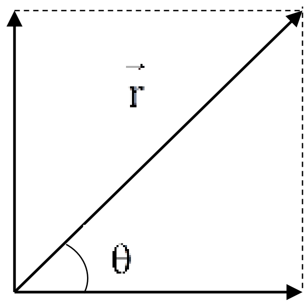
$$c_y = \text{مجاور} = \text{وتر} \ \cos ۳۰^\circ = ۲۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۱/۶$$

$$\begin{cases} c_x = ۱۲/۵ \\ c_y = ۲۱/۶ \end{cases} \qquad (۶۲)$$

در این مرحله رابطه‌های (۶۰)، (۶۰)، (۶۲) را در رابطه‌ی (۵۹) قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} r_x = ۵۰ + ۰ + ۱۲/۵ = ۶۲/۵ \\ r_y = ۰ + ۳۰ + ۲۱/۶ = ۵۱/۶ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_x = ۶۲/۵ \\ r_y = ۵۱/۶ \end{cases}$$

اندازه و جهت بردار جابه‌جایی به صورت زیر محاسبه می‌شود.



$$r=\sqrt{r_x^{۲}+r_y^{۲}}=\sqrt{۶۲/۵^{۲}+۵۱/۶^{۲}}\cong ۸۱$$

$$\theta=\mathrm{Arctan}\left(\frac{r_y}{r_x}\right)=\mathrm{Arctan}\left(\frac{۵۱/۶}{۶۲/۵}\right)$$

$$\theta=۳۹/۵^{\circ}$$

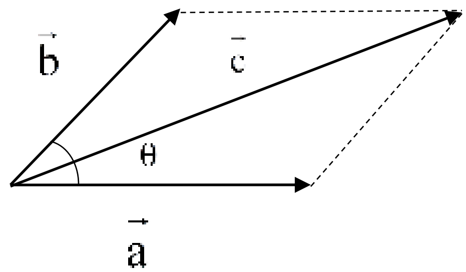
یعنی بردار جابه‌جایی به اندازه‌ی $r\cong ۸۱$ است و در جهت $\theta=۳۹/۵^{\circ}$ درجه شمال محور شرقی قرار دارد.

☜ **مثال (۲- ۱۲).** دو بردار به طول‌های b,a با یکدیگر زاویه θ می‌سازند و دو مبدأ آنها بر هم منطبق است با در نظر گرفتن مؤلفه‌های این بردارها در راستای دو محور عمود بر هم، ثابت کنید که طول بردار برآیند برابر است با $r=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+۲ab\cos\theta}$.

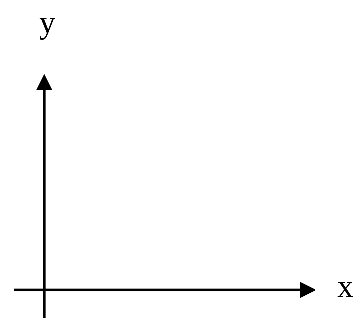
حل: حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

بردار برآیند $\vec{c}$ به صورت مقابل است. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ مؤلفه‌های آن در راستای x و y عبارتند از:

$$\begin{cases} c_x=a_x+b_x \\ c_y=a_y+b_y \end{cases} \tag{۶۳}$$



مؤلفه‌های بردار $\vec{b},\vec{a}$ را به دست می‌آوریم. $|\vec{a}| = a; |\vec{b}| = b$



$$\vec{a} \to \begin{cases} a_x = a \\ a_y = ۰ \end{cases} \tag{۶۴}$$

از روش مثلث قائم الزاویه مؤلفه‌های بردار $\vec{b}$ را می‌یابیم.

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \\ \cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_x = \text{مجاور} = b\ \cos\theta \\ b_y = \text{مقابل} = b\sin\theta \end{cases} \tag{۶۵}$$

بردار برآیند $\vec{c}$ به صورت مقابل است.

رابطه (۶۴) و (۶۵) را در (۶۳) قرار می‌دهیم.

$$c_x = a + b\cos\theta$$
$$c_y = ۰ + b\sin\theta$$

اندازه‌ی بردار $\vec{c}$ به شکل زیر محاسبه می‌کنیم.

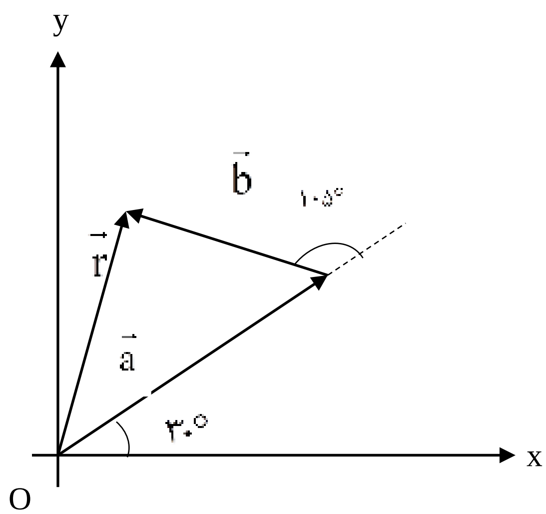
$$|\vec{c}| = c = \sqrt{c_x{}^{2} + c_y{}^{2}}$$
$$|\vec{c}| = \sqrt{(a + b\cos\theta)^{2} + (b\sin\theta)^{2}} = \sqrt{a^{2} + b^{2}\cos^{2}\theta + 2ab\cos\theta + b^{2}\sin^{2}\theta}$$
$$= \sqrt{a^{2} + b^{2}(\cos^{2} + \sin^{2}\theta) + 2ab\cos\theta} = \sqrt{a^{2} + b^{2} + 2ab\cos\theta}$$
$$\Rightarrow |\vec{c}| = c = \sqrt{a^{2} + b^{2} + 2ab\cos\theta}$$

☜ **مثال (۲– ۱۴)**. دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ مساوی و برابر با ۱۰ واحد است. جهت این بردارها مطابق شکل جمع برداری آنها $\vec{r}$ است مطلوب است.

الف) مولفه x و y بردار $\vec{r}$

ب) بزرگی $\vec{r}$

ج) زاویه‌ای که $\vec{r}$ با محور x می‌سازد.



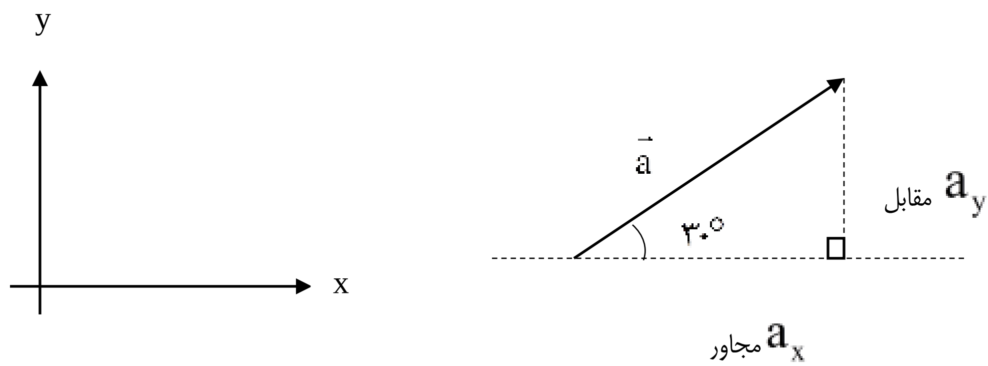
حل: الف) بردار جابه‌جایی برابر است با:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\begin{cases} r_x = a_x + b_x \\ r_y = a_y + b_y \end{cases} \qquad (۶۶)$$

برای حل مسئله، مؤلفه‌های بردار $\vec{b},\vec{a}$ را به دست آوریم.

با توجه به شکل و روش مثلث قائم‌الزاویه برای بردار $\vec{a}$ داریم.

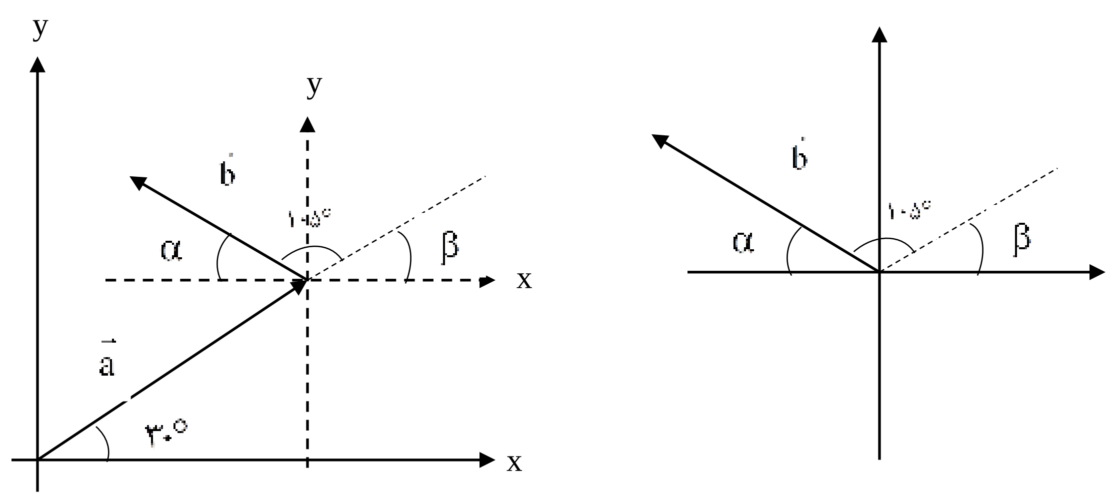


$$\begin{cases} \text{مقابل} = \text{وتر} \ \sin ۳۰^\circ \\ \text{مجاور} = \text{وتر} \ \cos ۳۰^\circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_x = \text{مجاور} \ \cos ۳۰^\circ \\ a_y = \text{مقابل} \ \sin ۳۰^\circ \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_x = ۱۰ \times \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} = ۵\sqrt{۳} \\ a_y = ۱۰ \times \dfrac{۱}{۲} = ۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_x = ۸/۶ \\ a_y = ۵ \end{cases} \qquad (۶۷)$$

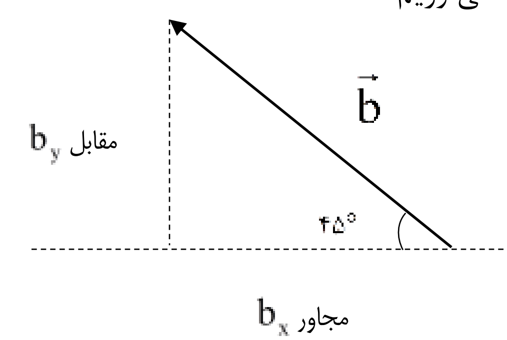
برای به دست آوردن مؤلفه‌های بردار $\vec{b}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم. ابتدا زاویه‌ی بردار $\vec{b}$ را با محور x به دست می‌آوریم.

از قضیه‌ی دو خط موازی و خط مورب در شکل زیر $\beta = ۳۰^\circ$ است.



$$\alpha + ۱۰۵° + \beta = ۱۸۰°$$
$$\alpha = ۱۸۰° - (۱۰۵° + \beta)$$
$$\alpha = ۱۸۰° - (۱۰۵° + ۳۰°)$$
$$\alpha = ۱۸۰° - (۱۳۵°) = ۴۵°$$

$\alpha = ۴۵°$ زاویه بردار $\vec{b}$ با محور x به دست آمد، حال با استفاده از روش مثلث قائم الزاویه مؤلفه های بردار $\vec{b}$ را به دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} \sin ۴۵° = \text{مقابل} = \text{وتر} \\ \cos ۴۵° = \text{مجاور} = \text{وتر} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{مجاور} = b_x = -b\cos ۴۵° \\ \text{مقابل} = b_y = b\sin ۴۵° \end{cases}$$

b_x منفی است زیرا بردار $\vec{b}$ در راستای افق خلاف جهت محور x می‌باشد.

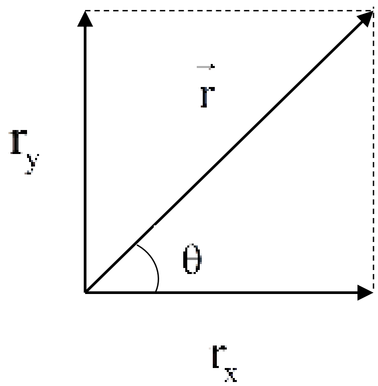
$$\rightarrow \begin{cases} b_x = -۱۰\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = -۷ \\ b_y = ۱۰\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۷ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_x = -۷ \\ b_y = ۷ \end{cases} \qquad (۶۸)$$

رابطه (۶۷) و (۶۸) را در (۶۶) قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} r_x = a_x + b_x \\ r_y = a_y + b_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_x = ۸/۶ - ۷ = ۱/۶ \\ r_y = ۵ + ۷ = ۱۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_x = ۱/۶ \\ r_y = ۱۲ \end{cases}$$

حل: ب) اندازه‌ی بردار $\vec{r}$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.



$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^{۲} + r_y^{۲}}$$

$$r = \sqrt{(۱/۶)^{۲} + (۱۲)^{۲}} \cong ۱۲$$

حل: ج) زاویه بردار $\vec{r}$ با محور x عبارتست از:

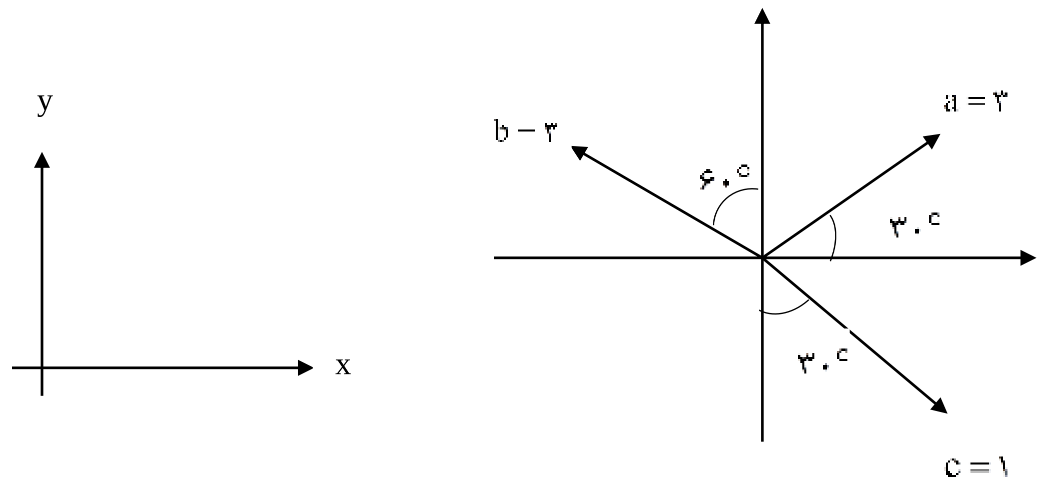
$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{r_y}{r_x}\right)$$

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{۱۲}{۱۶}\right) = ۸۲/۴^{\circ}$$

یعنی بردار $\vec{r} \cong ۱۴/۱$ در جهت $۸۲/۴^{\circ}$ درجه شمال محور شرقی است.

☜ **مثال (۲- ۱۵)**. برآیند سه بردار را در شکل زیر محاسبه کنید.

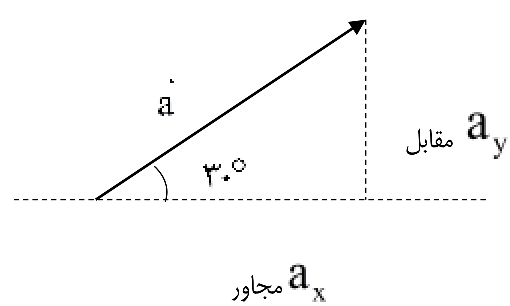
راهنمایی: برآیند سه بردار $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ بردار $\vec{r}$ است که رابطه‌ی $\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ برقرار است.



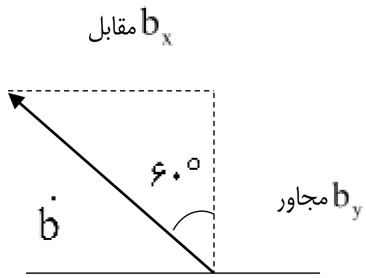
حل: برای حل مسئله فوق باید هر یک از بردارهای $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ را به مؤلفه‌هایشان روی محور x و y تجزیه کنیم و سپس برآیند سه بردار را به دست آوریم. بردار $\vec{r}$ که بردار برآیند می‌باشد عبارت است از:

$$\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\rightarrow\begin{cases}r_x=a_x+b_x+c_x\\ r_y=a_y+b_y+c_y\end{cases} \tag{۶۹}$$

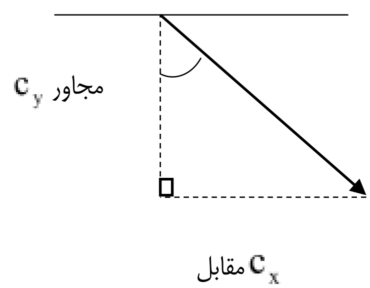
برای به دست آوردن مؤلفه‌های هر سه بردار از روش مثلث قائم الزاویه استفاده می‌کنیم.



$$\begin{cases} a_y = \text{مقابل} = \text{وتر} \sin ۳۰^\circ \\ a_x = \text{مجاور} = \text{وتر} \cos ۳۰^\circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_y = ۳ \times \frac{۱}{۲} = ۲/۵ \\ a_x = ۳ \times \frac{۱}{۲} = ۱/۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_y = ۲/۵ \\ a_x = ۱/۵ \end{cases} \qquad (۷۰)$$



$$\begin{cases} \text{مقابل} = b_x = -\text{وتر} \sin ۶۰^\circ = -۳ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = -۲/۵ \\ \text{مجاور} = b_y = \text{وتر} \cos ۶۰^\circ = ۳ \times \frac{۱}{۲} = ۱/۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_x = ۲/۵ \\ b_y = ۱/۵ \end{cases} \qquad (۷۱)$$



$$\begin{cases} \text{مقابل} = c_x = +\text{وتر} \sin ۳۰^\circ = c \sin ۳۰^\circ - ۱ \times \frac{۱}{۲} = ۰/۵ \\ \text{مجاور} = c_y = -\text{وتر} \cos ۳۰^\circ = -c \cos ۳۰^\circ = -۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = -۰/۸۶ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_x = ۰/۵ \\ c_y = /۸۶ \end{cases} \qquad (۷۲)$$

در این مرحله روابط (۷۰)، (۷۱)، (۷۲) را در رابطه‌ی (۶۹) می‌گذاریم.

$$\begin{cases} r_x = ۲/۵ - ۲/۵ + ۰/۵ = ۰/۵ \\ r_y = ۱/۵ + ۱/۵ - ۰/۸۶ = ۲/۱۴ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_x = ۰/۵ \\ r_y = ۲/۱۴ \end{cases}$$

$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} = ۰/۵\hat{i} + ۲/۱۴\hat{j}$$

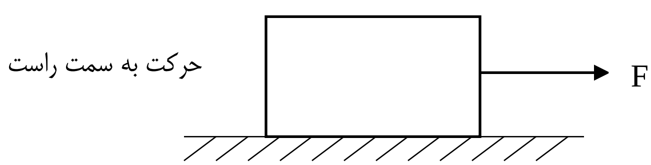
نکته: علاوه بر بردار مکان که آن را با $\vec{r}$ نشان می‌دهیم، بردار سرعت را با $\vec{v}$ و بردار شتاب را با $\vec{a}$ نشان خواهیم دید. با توجه به این که در فصل‌های بعدی قوانین نیوتن را بیان خواهیم کرد و در این قوانین نیروها نقش مهمی دارند، در ادامه‌ی بحث بردارها، برخی از نیروها را معرفی و در مورد تجزیه‌ی آنها با رسم شکل توضیح می‌دهیم.

۲- ۱۱- نمایش بردار نیرو و محاسبه مؤلفه‌های آن

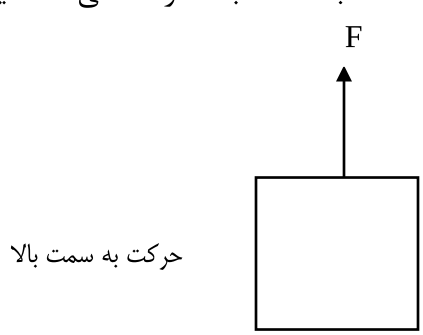
نیرو یک کمیت برداری است که اندازه و جهت دارد.

۱- نیروی جلو برنده $\vec{F}$

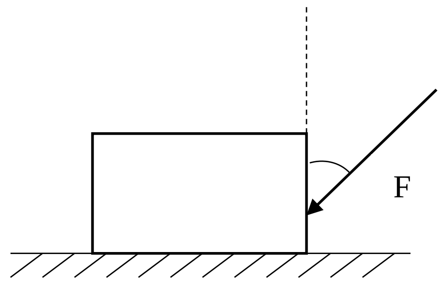
☜ **مثال (۲- ۱۶).** اتومبیلی به سمت راست با نیروی جلو برنده‌ی $\vec{F}$ حرکت می‌کند، نیروی وارد بر آن را رسم کنید.

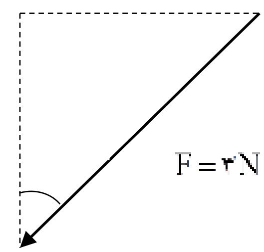


☜ **مثال (۲- ۱۷).** بالونی با نیروی بالا برنده $\vec{F}$ به سمت بالا حرکت می‌کند، نیروی وارد بر آن را رسم کنید.

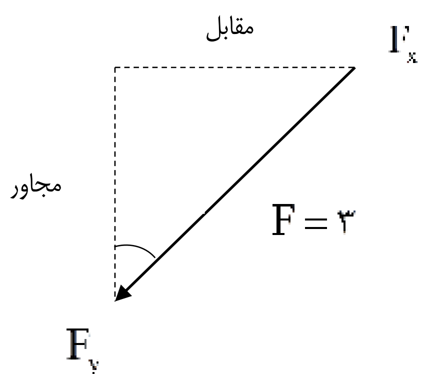


☜ **مثال (۲- ۸).** یک شخص به یک جسم تحت زاویه‌ی ۳۰° نسبت به خط قائم ۳ نیوتن وارد می‌کند، مؤلفه‌های نیرو را به دست آورید.



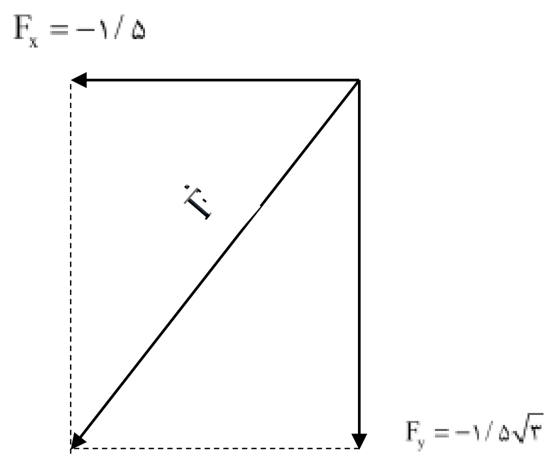


با بردار نیروی F و زاویه‌ی ۳۰ درجه یک مثلث قائم الزاویه رسم می‌کنیم که $F = ۳N$ وتر و زاویه ی ۳۰ درجه درون مثلث باشد.

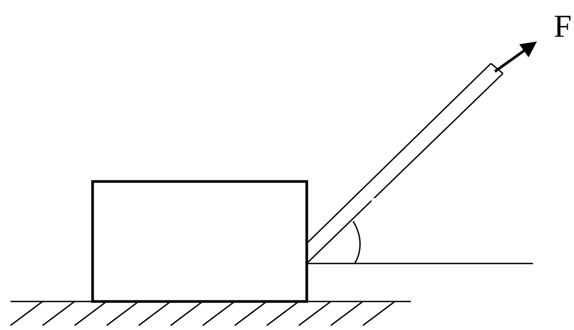


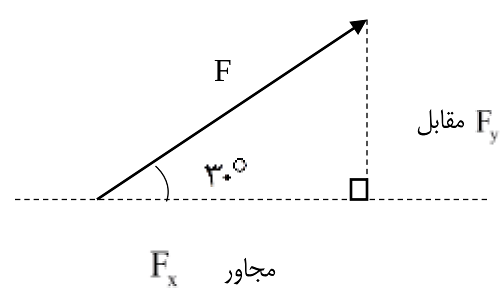
$$\begin{cases} \sin ۳۰^\circ = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \\ \cos ۳۰^\circ = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = -F\sin ۳۰^\circ \to F_x = -۳\sin ۳۰^\circ \to F_x = -۳ \times \dfrac{۱}{۲} = -۱/۵ \\ \\ F_y = -F\cos ۳۰^\circ \to F_y = -۳\cos ۳۰^\circ = -۳ \times \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} = -۱/۵\sqrt{۳} \end{cases} \to \begin{cases} F_x = -۱/۵ \\ F_y = -۱/۵\sqrt{۳} \end{cases}$$

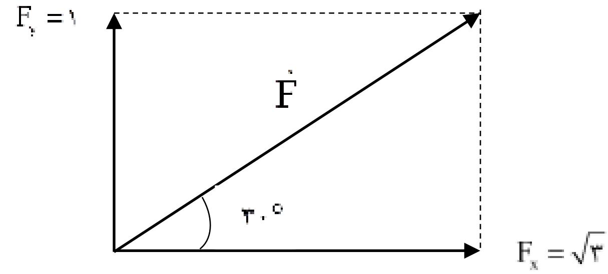


☜ **مثال (۲- ۱۹).** جسمی را توسط طناب بدون جرمی با نیروی ۲N می‌کشیم، طوری که طناب با افق زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد. مؤلفه‌های نیرو را به دست آورید.



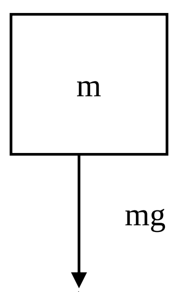


$$\begin{cases} \text{مقابل} = \text{وتر}\ \sin ۳۰^\circ \\ \text{مجاور} = \text{وتر}\ \cos ۳۰^\circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_y = F\sin ۳۰^\circ \\ F_x = F\cos ۳۰^\circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_y = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱ \\ F_x = ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_y = ۱ \\ F_x = \sqrt{۳} \end{cases}$$

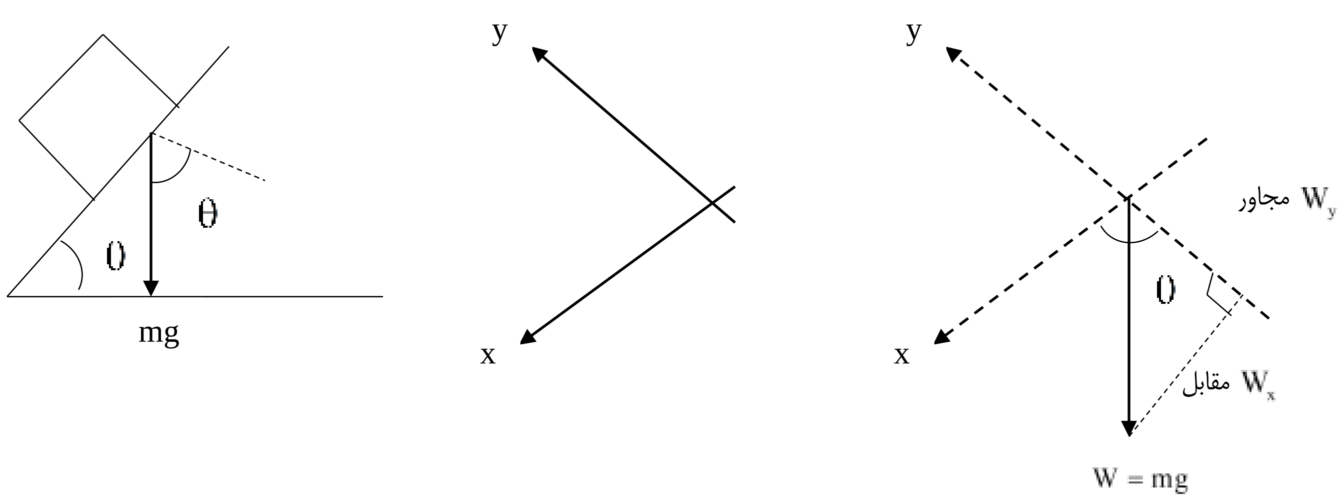


۲- نیروی وزن $W = mg$

جرم جسم m و $g = ۹/۸\frac{m}{s^۲}$ شتاب جاذبه‌ی زمین است، همیشه جهت mg به سمت پایین است.

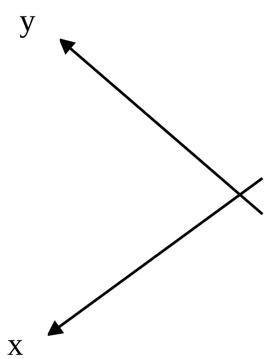


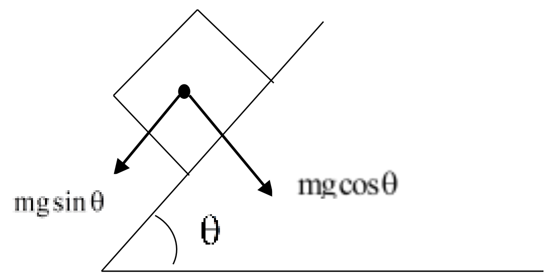
☜ **مثال (۲- ۲۰)**. نیرو وزن یک جسم روی سطح شیب‌دار رسم کنید و مؤلفه‌های آن را به دست آورید.



$$\begin{cases}\sin\theta\ \text{وتر} = \text{مقابل} \\ \cos\theta\ \text{وتر} = \text{مجاور}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}W_x = mg\sin\theta \\ W_y = -mg\cos\theta\end{cases} \rightarrow \begin{cases}W_x = mg\sin\theta \\ W_y = -mg\cos\theta\end{cases}$$

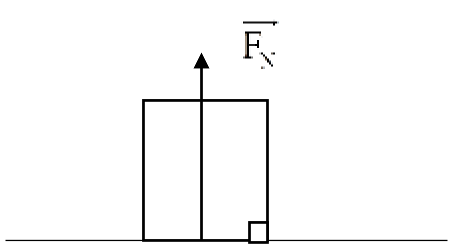
بنابراین برای حل مسائل مربوط به سطح شیب‌دار بهتر است به جای نیروی وزن mg، مؤلفه‌های آن را به شکل زیر رسم کنیم.



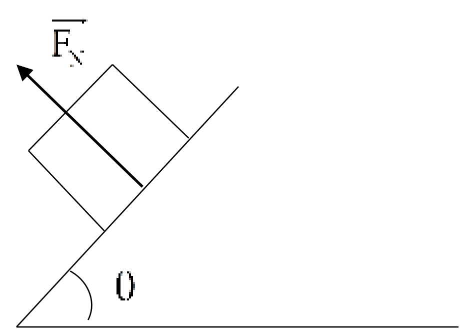


۳- نیروی عمود بر سطح $\vec{F}_N$

نیروی است که از سطح به جسم وارد می‌شود و عمود بر سطح است.



سطح افقی



سطح شیبدار

۲- ۱۲- محاسبه‌ی بردار

اگر دو بردار دو بعدی $\vec{b},\vec{a}$ را به شکل‌های $\vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}\,,\,\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$ نشان دهیم. آن گاه عملیات ریاضی روی دو بردار به شکل زیر است.

جمع دو بردار

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x\right)\hat{i}+\left(a_y+b_y\right)\hat{j}$$

☜ **مثال (۲- ۲۱).** $\vec{b}=-۳\hat{i}+۳\hat{j}\,,\,\vec{a}=\hat{i}+۲\hat{j}$ است، $\vec{a}+\vec{b}$ محاسبه کنید.

$$\begin{cases}a_x=+۱\\a_y=+۲\end{cases};\begin{cases}b_x=-۳\\b_y=۳\end{cases}\rightarrow\vec{a}+\vec{b}=\left(۱-۳\right)\hat{i}+\left(۲+۳\right)\hat{j}\rightarrow\vec{a}+\vec{b}=-۲\hat{i}+۵\hat{j}$$

تفاضل دو بردار

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x\right)\hat{i}+\left(a_y-b_y\right)\hat{j}$$

☜ **مثال (۲- ۲۲).** $\vec{a}-\vec{b}$ در مثال قبل را محاسبه کنید.

$$\begin{cases}a_x=۱\\a_y=۲\end{cases};\begin{cases}b_x=-۳\\b_y=۳\end{cases}\rightarrow\vec{a}-\vec{b}=\left(۱-\left(-۳\right)\right)\hat{i}+\left(۲-۳\right)\hat{j}\rightarrow\vec{a}-\vec{b}=۴\hat{i}-\hat{j}$$

ضرب نرده‌ای

$$\vec{a}.\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y$$

☜ **مثال (۲- ۲۳).** در مثال (۲- ۲۲)، $\vec{a}.\vec{b}$ را به دست آورید.

$$\begin{cases}a_x=۱\\a_y=۲\end{cases};\begin{cases}b_x=-۳\\b_y=۳\end{cases}\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\left(۱\right)\left(-۳\right)+\left(۲\right)\left(۳\right)\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=-۳+۶=-۳$$

ضرب برداری در سه بعد

ابتدا دو بردار سه بعدی به شکل $\vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}\ ,\ \vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$ در نظر می گیریم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

که در آن، حاصل هر دترمینال ۲×۲ برابر حاصل ضرب قطر اصلی منهای حاصل ضرب قطر فرعی است.

☜ **مثال (۲- ۲۴)**. ضرب $\vec{a}\times\vec{b}$ را برای دو بردار $\vec{b}=-۲\hat{i}+۳\hat{j}+\hat{k}\ ,\ \vec{a}=\hat{i}+۲\hat{j}-\hat{k}$ محاسبه کنید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ ۱ & ۲ & -۱\\ -۲ & ۳ & ۱\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۱\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ -۲ & ۱\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ -۲ & ۳\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left[(۲)(۱)-(-۱)(۳)\right]-\hat{j}\left[(۱)(۱)-(-۱)(-۲)\right]+\hat{k}\left[(۱)(۳)-(۲)(-۲)\right]$$

$$=\hat{i}\left[۲+۳\right]-\hat{j}\left[۱-۲\right]+\hat{k}\left[۳+۴\right]=۵\hat{i}+\hat{j}+۷\hat{k}$$

☜ **مثال (۲- ۲۵)**. با استفاده از تعریف $\vec{a}.\vec{b}=ab\cos\theta$ برای ضرب نرده‌ای و رابطه‌ی مربوطه $\vec{a}.\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$، زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{b}=۲\hat{i}+\hat{j}+۳\hat{k}\ ,\ \vec{a}=۳\hat{i}+۳\hat{j}-۳\hat{k}$ را به دست آورید.

$$\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a}: \begin{cases} a_x = ۳ \\ a_y = ۳ \\ a_z = -۳ \end{cases} \qquad \vec{b}: \begin{cases} b_x = ۲ \\ b_y = ۱ \\ b_z = ۳ \end{cases} \rightarrow \vec{a}.\vec{b} = (۳)(۲) + (۳)(۱) + (-۳)(۳)$$

$$\rightarrow \vec{a}.\vec{b} = (۶) + (۳) + (-۹) \rightarrow \vec{a}.\vec{b} = ۰$$

از تعریف دیگر برای ضرب نرده‌ای چنین داریم:

$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\theta \quad ; \quad |\vec{a}| = a = \sqrt{a_x{}^۲ + a_y{}^۲ + a_z{}^۲} = \sqrt{۹+۹+۹} = \sqrt{۲۷}$$

$$|\vec{b}| = b = \sqrt{b_x{}^۲ + b_y{}^۲ + b_z{}^۲} = \sqrt{۴+۱+۹} = \sqrt{۱۴}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{۲۷} \times \sqrt{۱۴}\cos\theta \rightarrow \vec{a}.\vec{b} = ۰ \rightarrow ab\cos\theta = ۰$$

$$\rightarrow \sqrt{۲۷} \times \sqrt{۱۴}\cos\theta = ۰ \rightarrow \cos\theta = . \rightarrow \theta = ۹۰$$

بنابراین، دو بردار با هم عمودند.

☜ **مثال (۲- ۲۶)**. سه بردار $\vec{a} = ۳\hat{i} + ۳\hat{j} - ۲\hat{k}$ ، $\vec{b} = -\hat{i} - ۴\hat{j} + ۲\hat{k}$ ، $\vec{c} = ۲\hat{i} + ۲\hat{j} + \hat{k}$ مفروض‌اند. مطلوب است:

الف) $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ ب) $\vec{a}.\vec{b}$ ج) $\vec{b}.\vec{c}$ د) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c})$ ه) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$

حل: الف) برای محاسبه‌ی $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ ، ابتدا $(\vec{b} \times \vec{c})$ را به دست می‌آوریم.

$$\vec{b}:\begin{cases} b_x=-۱ \\ b_y=-۴ \\ b_z=۲ \end{cases} \qquad \vec{c}:\begin{cases} c_x=۲ \\ c_y=۲ \\ c_z=۱ \end{cases} \rightarrow \vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -۱ & -۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\hat{i}\begin{vmatrix} -۴ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix} -۱ & -۴ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\hat{i}\big((-۴)(۱)-(۲)(۲)\big)-\hat{j}\big((-۱)(۱)-(۲)(۲)\big)+\hat{k}\big((-۱)(۲)-(-۴)(۲)\big)$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\hat{i}(-۴-۴)-\hat{j}(-۱-۴)+\hat{k}(-۲+۸)$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\hat{i}(-۸)-\hat{j}(-۵)+\hat{k}(۶) \rightarrow \vec{b}\times\vec{c}=-۸\hat{i}+۵\hat{j}+۶\hat{k}$$

$$\vec{a}:\begin{cases} a_x=۳ \\ a_y=۳ \\ a_z=-۲ \end{cases} \quad \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=a_x(\vec{b}\times\vec{c})_x+a_y(\vec{b}\times\vec{c})_y+a_z(\vec{b}\times\vec{c})_z$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۳)(-۸)+(۳)(۵)+(-۲)(۶)=-۲۴+۱۵-۱۲=-۲۱$$

حل: ب)

$$\vec{a}.\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\vec{a}.\vec{b}=(۳)(-۱)+(۳)(-۴)+(-۲)(۲)=(-۳)+(-۱۲)+(-۴)=-۱۹$$

حل: ج)

$$\vec{b}.\vec{c}=b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z$$

$$\vec{b}.\vec{c}=(-۱)(۲)+(-۴)(۲)+(۲)(۱)=(-۲)+(-۸)+(۲)=-۸$$

حل: د)

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=a_x(\vec{b}+\vec{c})_x+a_y(\vec{b}+\vec{c})_y+a_z(\vec{b}+\vec{c})_z$$

$$\vec{b}+\vec{c}=(b_x+c_x)\hat{i}+(b_y+c_y)\hat{j}+(b_z+c_z)\hat{k}$$

$$\vec{b}+\vec{c}=(-۱+۲)\hat{i}+(-۴+۲)\hat{j}+(۲+۱)\hat{k}$$

$$\vec{b}+\vec{c}=(۱)\hat{i}+(-۲)\hat{j}+(۳)\hat{k}$$

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=(۳)(۱)+(۳)(-۲)+(-۲)(۳)=۳-۶-۶=-۹$$

حل: هـ) ابتدا $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست می‌آوریم.

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right);$$

$$\vec{b}+\vec{c}=\left(b_x+c_x\right)\hat{i}+\left(b_y+c_y\right)\hat{j}+\left(b_z+c_z\right)\hat{k}$$

$$\vec{b}+\vec{c}=\left(-۱+۲\right)\hat{i}+\left(-۴+۲\right)\hat{j}+\left(۲+۱\right)\hat{k}$$

$$\vec{b}+\vec{c}=۱\hat{i}-۲\hat{j}+۳\hat{k}\ \ ;\ \vec{a}=۳\hat{i}+۳\hat{j}-۲\hat{k}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ ۳ & ۳ & -۲\\ ۱ & -۲ & ۳\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}۳ & -۲\\ -۲ & ۳\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}۳ & -۲\\ ۱ & ۳\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}۳ & ۳\\ ۱ & -۲\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\hat{i}\left(\left(۳\right)\left(۳\right)-\left(-۲\right)\left(-۲\right)\right)-\hat{j}\left(\left(۳\right)\left(۳\right)-\left(-۲\right)\left(۱\right)\right)+\hat{k}\left(\left(۳\right)\left(-۲\right)-\left(۳\right)\left(۱\right)\right)$$

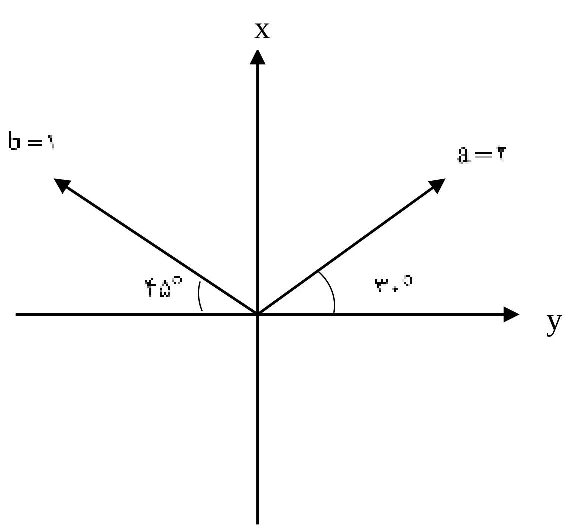
$$=\hat{i}\left(۹-۴\right)-\hat{j}\left(۹+۲\right)+\hat{k}\left(-۶-۳\right)=\hat{i}\left(۵\right)-\hat{j}\left(۱۱\right)+\hat{k}\left(-۹\right)$$

$$\rightarrow\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=۵\hat{i}-۱۱\hat{j}-۹\hat{k}$$

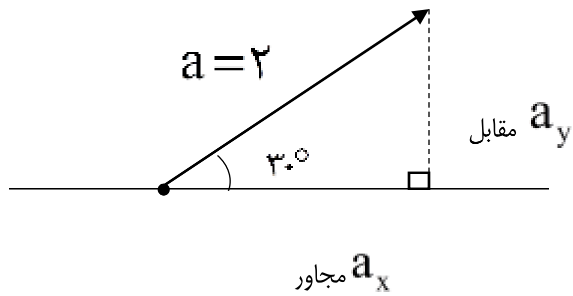
☜ **مثال (۲- ۲۷).** الف) مؤلفه‌های بردارهای $\vec{b},\vec{a}$ را در شکل مقابل به دست آورید.

ب) هر بردار را بر حسب بردارهای یکه $\hat{j},\hat{i}$ بنویسید.

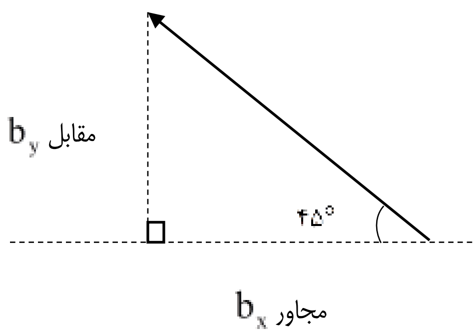
ج) $\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+\vec{b},\vec{a}.\vec{b}$ را به دست آورید.



حل الف) مؤلفه‌های هر بردار را با استفاده از روش مثلث قائم الزاویه به دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} a_x = \text{مجاور} = \text{وتر}\cos ۳۰^\circ = ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳} \\ a_y = \text{مقابل} = \text{وتر}\sin ۳۰^\circ = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱ \end{cases}$$



$$\begin{cases} b_x = \text{مجاور} = -\text{وتر}\cos ۴۵^\circ = -۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ b_y = \text{مقابل} = \text{وتر}\sin ۴۵^\circ = ۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

حل: ب)

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \rightarrow \vec{a} = \sqrt{۳}\hat{i} + ۱\hat{j}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} \rightarrow \vec{b} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{j}$$

حل: ج)

$$\vec{a}.\vec{b}=a_x b_x + a_y b_y = \sqrt{۳}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)+(۱)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

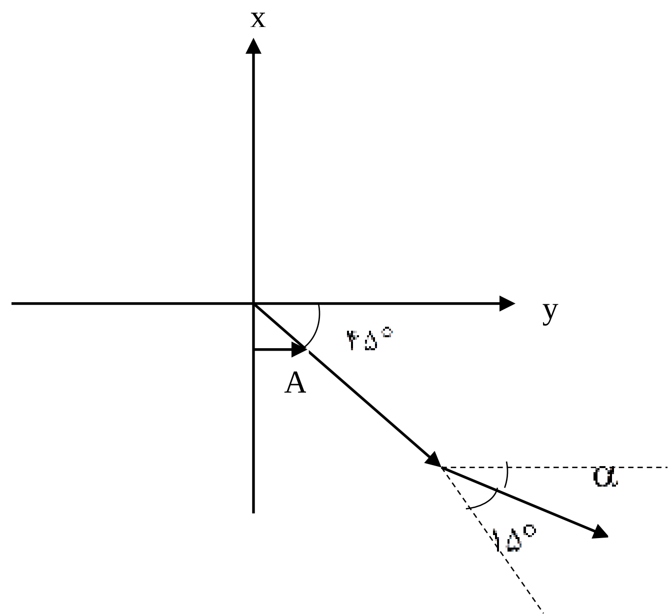
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\hat{i}+(a_y+b_y)\hat{j}=\left(\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\hat{i}+\left(۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\hat{j}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\hat{i}+(a_y-b_y)\hat{j}=\left(\sqrt{۳}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\hat{i}+\left(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\hat{j}$$

مسائل فصل دوم

۱- با توجه به شکل مقابل مؤلفه‌های بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به دست آورید.

(راهنمایی: به مثال‌های (۲- ۳) تا (۲- ۵) مراجعه شود.)



۲- موتوری km ۱۰ در جهت °۶۰ شرق محور جنوبی حرکت می‌کند. این جسم چند کیلومتر به سمت شرق و چند کیلومتر به سمت جنوب حرکت کرده است.

(راهنمایی: به مثال (۲- ۶) مراجعه شود)

۳- دوچرخه‌ای ۳km در جهت شرق، سپس ۴km در جهت شمال و آنگاه ۵km را در جهت °۳۰ درجه شرق محور شمالی حرکت کرده است، بردار مکان جسم را بیابید. (راهنمایی: به مثال (۲-۱۱) مراجعه شود.)

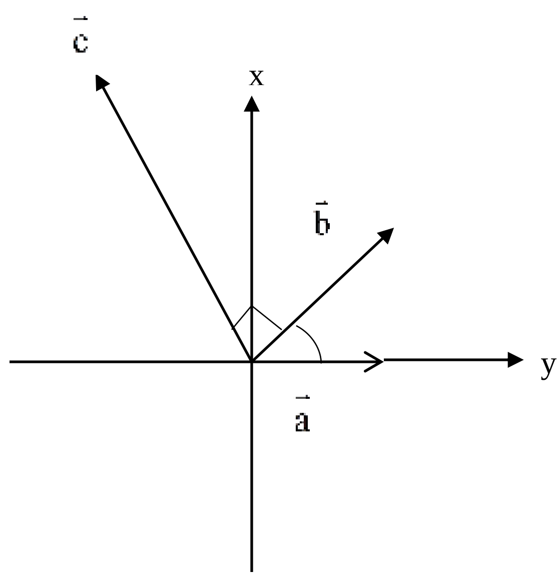
۴- دو بردار به طول‌های a و b با یکدیگر زاویه θ می‌سازند و در مبدا آنها بر هم منطبق هستند. با در نظر گرفتن مؤلفه‌های این دو بردار در راستای x و y، ثابت کنید اندازه‌ی تفاضل دو بردار برابر است با: (راهنمایی: به مثال (۲- ۱۳) مراجعه شود)

$$r = \sqrt{a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\theta}$$

۵- دو بردار $\vec{b} = ۶\hat{i} - ۸\hat{j}\,,\ \vec{a} = ۴\hat{i} - ۳\hat{j}$ مفروض‌اند. بزرگی و جهت بردارهای $\vec{a} - \vec{b}\,,\ \vec{b} - \vec{a}\,,\ \vec{a} + \vec{b}\,,\ \vec{a}.\vec{b}$ را تعیین کنید. (راهنمایی: به مثال‌های (۲- ۲۱) تا (۲- ۲۳) مراجعه شود.)

۶- بزرگی بردار $\vec{a}$ برابر با ۵ است و جهت آن به سمت شرق است، بردار $\vec{b}$ در جهت ۴۵° غرب محور شمالی و بزرگی آن ۴ واحد است، اندازه و جهت $\vec{b} - \vec{a}, \vec{a} + \vec{b}$ را به دست آورید. (راهنمایی: به مثال (۲- ۱۱) مراجعه شود)

۷- اندازه‌ی سه بردار شکل زیر برابر $a = ۳$ و $b = ۴$ و $c = ۸$ است مؤلفه‌های این سه بردار را در راستای x و y، به دست آورید. و $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ را بیابید و اندازه و جهت آن را مشخص کنید. (راهنمایی: به مثال (۲- ۱۵) مراجعه شود)



۸- با توجه به تعریف کلی $\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\theta$, $\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$، زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}, \vec{b}$ و زاویه‌ی بین $\vec{d}, \vec{c}$ را بیابید. (راهنمایی: به مثال (۲- ۲۵) مراجعه شود)

$$\vec{a} = \frac{۱}{۲}\hat{i} + ۶\hat{j} + ۲\hat{k} \; ; \; \vec{b} = -۴\hat{i} + ۲\hat{j} - ۵\hat{k}$$

$$\vec{c} = \sqrt{۳}i + ۱\hat{j} + ۰\hat{k}, \vec{d} = ۱\hat{i} + ۰\hat{j} + ۰k$$

۹- سه بردار زیر را نظر بگیرید. (راهنمایی: به مثال (۲- ۲۶) مراجعه شود)

$$\vec{a} = ۲\hat{i} + ۳j + ۱\hat{k}, \vec{b} = ۴\hat{i} + ۲\hat{j}, \vec{c} = ۵\hat{i} + ۲\hat{j} - ۳\hat{k}$$

سؤالات چهار گزینه ای فصل دوم

۱-شخصی از یک نقطه ۱۵m به طرف جنوب، سپس ۲m به طرف مغرب، سپس ۳m به طرف شمال و در آخر ۷m به طرف شرق حرکت می کند. جابه‌جایی این شخص از نقطه‌ی شروع حرکت، چند متر است؟

الف)۱۳ ب) ۹ ج) ۱۷ د) ۷

۲- برآیند در بردار بر تفاضل آن دو بردار عمود است. کدام بیان درباره‌ی این دو بردار، حتماً درست است؟

الف)برهم عمودند ب) هم اندازه اند ج) هم اندازه و بر هم عمودند د) هم اندازه‌اند ولی بر هم عمود نیستند

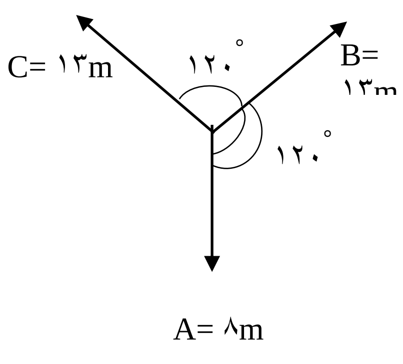
۳- برآیند سر بردار که در شکل روبه‌رو نشان داده شده اند، چند متر است؟

الف)۸

ب) ۵

ج) ۱۳

د) صفر



۴- آیا برداری به بزرگی ۴۵ می تواند برآیند دو بردار که بزرگی هر یک برابر ۴۵ می باشد، باشد؟

اگر پاسخ مثبت است، زاویه‌ی بین برآیند و هر یک از دو بردار، چند درجه است؟

الف) بلی – ۱۲۰ درجه ب) خیر

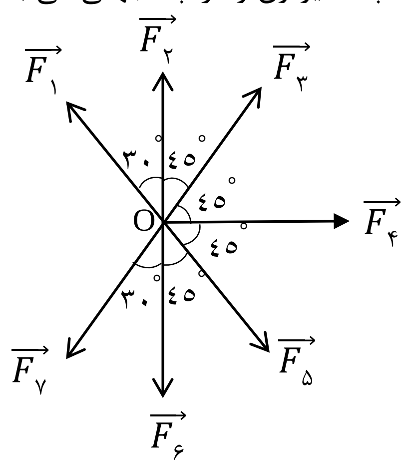
ج) بلی – ۶۰ درجه د) بلی- ۴۵ درجه

۵- آیا اندازه‌ی تفاضل دو بردار که بزرگی هر یک برابر ۱۲ می باشد می تواند برابر ۱۲ باشد؟ اگر پاسخ مثبت است زاویه‌ی بین دو بردار چند درجه باید باشد؟

الف) بلی – ۶۰ درجه　　　ب) خیر

ج) بلی – ۳۰ درجه　　　د) بلی – ۹۰ درجه

۶- برآیند نیروهای نشان داده شده در شکل روبه‌رو، تقریباً چند نیوتون و در چه جهتی می باشد؟ اندازه‌ی هر یک از نیروهای ۲۵N می باشد.



الف)۳۵ و در جهت $\vec{F}_4$

ب) ۲۵ و در جهت $\vec{F}_4$

ج) ۳۵ و در خلاف جهت $\vec{F}_4$

د) ۲۵ و در خلاف جهت $\vec{F}_4$

۷- اگر $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ و $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_3\right| = 5N$ باشد، اندازه‌ی $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3|$ چند نیوتون است؟

الف)صفر　　　ب) ۵　　　ج) ۱۰　　　د) ۲۰

۸- برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با بردار $\vec{a}$ زاویه‌ی ۶۰ درجه می سازد. اگر اندازه‌ی بردار $\vec{a}$ ، ۱۰ واحد و اندازه‌ی برآیند ۵ واحد باشد، زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

الف)۳۰　　　ب) ۹۰　　　ج) ۱۲۰　　　د) ۱۵۰

پاسخنامه چهار گزینه ای فصل دوم

۱)گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۲) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۳) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۴) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۵) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۶) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۷) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۸) گزینه‌ی (د) صحیح است.

فصل ۳

حرکت یک بعدی

حرکت یک بعدی

حرکت یک بعدی، حرکتی است که مسیر آن یک خط افقی یا عمودی باشد.

۱- حرکت یک بعدی افقی

۲- حرکت یک بعدی عمودی

توصیف حرکت جسم

برای توصیف حرکت یک جسم در هر لحظه t سه کمیت تعیین می‌شود

(الف) مکان جسم   (ب) سرعت جسم   (ج) شتاب جسم را تعیین

حرکت یک بعدی افقی

(الف) مکان جسم X

(ب) سرعت جسم $\left(v=\frac{dx}{dt}\right)$ (تغییر مکان در واحد زمان)

(ج) شتاب جسم $\left(a=\frac{dv}{dt}\right)$ (تغییر سرعت در واحد زمان)

۳- ۱- حرکت سرعت ثابت

در حرکت سرعت ثابت، سه کمیت حرکت به شکل زیر هستند.

مکان جسم : $x = vt$

سرعت جسم : V= ثابت

شتاب جسم : $a = ۰$

☜ **مثال (۳- ۱).** برای اندازه‌گیری فاصله بین دو ایستگاه در یک جاده مستقیم، سرعت اتومبیل را روی $\frac{km}{h}$ ۴۰تنظیم می کنیم، ۵۰ ثانیه طول می کشد تا فاصله بین دو ایستگاه طی شود، فاصله بین دو ایستگاه چند متر است؟

$$X = ?$$

$$v = ۴۰\,\frac{km}{h} = \frac{۴۰}{۳/۶}\frac{m}{s}$$

$$t = ۵۰s$$

$$x = vt$$

$$x = \left(\frac{۴۰}{۳/۶}\frac{m}{s}\right)\left(۵۰s\right) = \frac{۲۰۰۰}{۳/۶}m \rightarrow x \cong ۵۵۵/۵m$$

۳- ۲- سرعت متوسط

سرعت متوسط جسم از تقسیم جابه‌جایی به دست می‌آید.

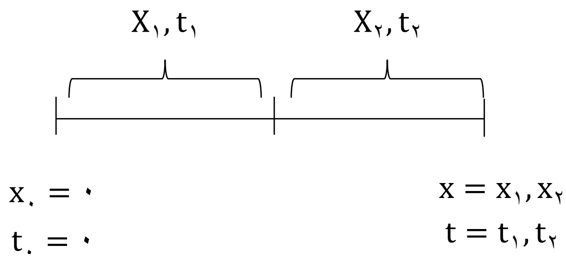
$$\bar{v} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{x - x_{.}}{t - t_{.}}$$

☜ **مثال (۳- ۲).** سرعت متوسط خود را در دو حالت زیر به دست آورید.

(الف) در امتداد یک مسیر مستقیم ابتدا مساحت ۷۲ متر را با سرعت ۱/۲ متر بر ثانیه راه بروید و سپس ۷۲ متر را با سرعت ۳ متر بر ثانیه بدوید.

(ب) در امتداد یک مسیر مستقیم ابتدا ۱ دقیقه با سرعت ۱/۲ متر بر ثانیه راه بروید و سپس به مدت یک دقیقه با سرعت ۳ متر بر ثانیه بدوید.

حل: (الف)



$$\bar{v} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{x - x_{۰}}{t - t_{۰}}$$

$$\bar{v} = \frac{\left(x_{۱},x_{۲}\right) - ۰}{\left(t_{۱},t_{۲}\right) - ۰} = \frac{x_{۱},x_{۲}}{t_{۱},t_{۲}} \qquad (۷۳)$$

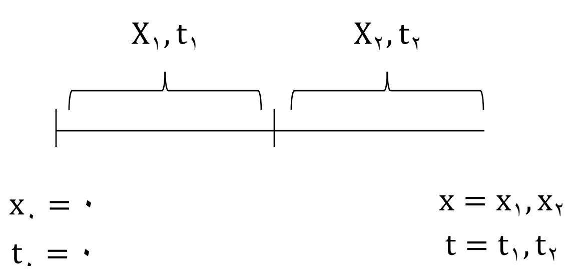
$$\begin{cases} x_{۱} = ۷۲\ \text{m} \\ t_{۱} = ? \\ v_{۱} = ۱/۲\ \text{m/s} \end{cases} \Rightarrow x_{۱} = v_{۱}t_{۱} \Rightarrow ۷۲ = ۱/۲t_{۱} \Rightarrow t_{۱} = \frac{۷۲}{۱/۲} = ۶۰\text{s} \qquad (۷۴)$$

$$\begin{cases} x_{۲} = ۷۲\ \text{m} \\ t_{۲} = ? \\ v_{۲} = ۳\ \text{m/s} \end{cases} \Rightarrow \quad x_{۲} = v_{۲}t_{۲} \Rightarrow ۷۲ = ۳t_{۲} \Rightarrow t_{۲} = \frac{۷۲}{۳} \qquad (۷۵)$$

رابطه (۷۴) و (۷۵) را در رابطه (۷۳) قرار می‌دهیم و داریم:

$$\bar{v} = \frac{۷۲ + ۷۲}{۶۰ + ۲۴} = ۱/۷\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حل: (ب)



$$\bar{v} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{x - x_{۰}}{t - t_{۰}}$$

$$\bar{v} = \frac{\left(x_۱,x_۲\right)-۰}{\left(t_۱,t_۲\right)-۰} = \frac{x_۱,x_۲}{t_۱,t_۲} \qquad (۷۶)$$

$$\begin{cases} x_۱ = ؟ \\ t_۱ = ۱\ \text{min} = ۶۰\text{s} \\ v_۱ = ۱/۲\ \text{m/s}\ \text{سرعت ثابت} \end{cases} \Rightarrow x_۱ = v_۱ t_۱ \Rightarrow x_۱ = ۱/۲ \times ۶۰ = ۷۲\text{s} \qquad (۷۷)$$

$$\begin{cases} x_۲ = ؟ \\ t_۲ = ۱\ \text{min} = ۶۰\text{s} \\ v_۲ = ۳\ \text{m/s}\ \text{سرعت ثابت} \end{cases} \Rightarrow x_۲ = v_۲ t_۲ \Rightarrow x_۲ = ۳ \times ۶۰ = ۱۸۰\text{s} \qquad (۷۸)$$

رابطه (۷۷) و (۷۸) را در رابطه (۷۶) قرار می‌دهیم و داریم:

$$\bar{v} = \frac{۷۲ + ۱۸۰}{۶۰ + ۶۰} = ۲/۱\, \frac{m}{s}$$

☜ **مثال (۳- ۳).** قطاری که با سرعت تقریباً ثابت $۶۰\,\frac{km}{h}$ حرکت می‌کند، ابتدا به مدت ۴۰ دقیقه به طرف شرق و سپس به مدت ۲۰ دقیقه در جهت °۴۵ شرق محور شمالی و سرانجام به مدت ۵۰ دقیقه به سمت غرب می‌رود. سرعت متوسط قطار در مدت حرکت چقدر است؟

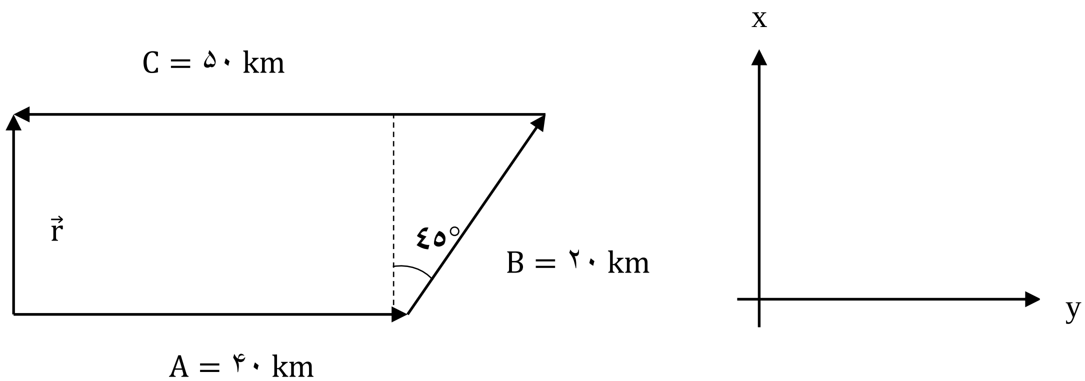
$$t_۱ = ۴۰\ \text{min} \to t_۱ = \frac{۴۰}{۶۰}h\ ;\ t_۲ = ۲۰\ \text{min} \to t_۲ = \frac{۲۰}{۶۰}h$$

$$\textbf{سرعت ثابت}\ t_۳ = ۵۰\ \text{min} \to t_۳ = \frac{۵۰}{۶۰}h\ ; v = ۶۰\,\frac{km}{h}$$

از فرمول $x = vt$ ابتدا اندازه سه جابه‌جایی A, B, C را به دست آورید.

$$x = vt \rightarrow \begin{cases} A = vt_۱ \Rightarrow A = ۶۰ \times \frac{۴۰}{۶۰} = ۴۰\ Km \\ B = vt_۲ \Rightarrow B = ۶۰ \times \frac{۲۰}{۶۰} = ۲۰\ Km \\ C = vt_۳ \Rightarrow C = ۶۰ \times \frac{۵۰}{۶۰} = ۵۰\ Km \end{cases}$$

حال مسئله به شکل زیر درمی‌آید که ابتدا $۴۰\ Km$ به سمت شرق، سپس $۲۰\ Km$ در جهت $۴۵°$ شرق محور شمالی و سرانجام $۵۰\ Km$ به طرف غرب می‌رود و سرعت متوسط را به دست می‌آوریم.



$$\bar{v} = \frac{r}{t} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} \quad ; \quad \bar{r} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

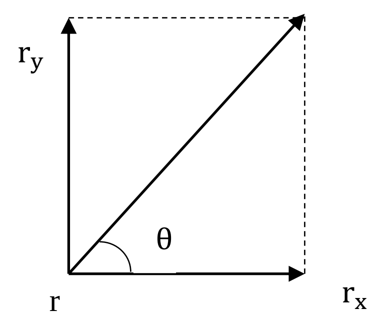
$$\bar{r} = \begin{cases} r_x = A_x + B_x + C_x \\ r_y = A_y + B_y + C_y \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{cases} A_x = ۴۰ \\ A_y = ۰ \end{cases}$$

$$\bar{B} = \begin{cases} B_x = B\ \sin(۴۵) = ۲۰\ \sin(۴۵) = ۱۴ \\ B_Y = B\ \cos(۴۵) = ۲۰\ \cos(۴۵) = ۱۴ \end{cases}$$

$$\bar{C} = \begin{cases} C_x = -۵۰ \\ C_y = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{r} = \begin{cases} r_x = ۴۰ + ۱۴ - ۵۰ = ۴ \text{ Km} \\ r_y = ۰ + ۱۴ + ۰ = ۴ \text{ Km} \end{cases}$$



$$|\bar{r}| = r = \sqrt{r_x^{۲} + r_y^{۲}} + \sqrt{۱۶ + ۱۹۶} = \sqrt{۲۱۲} = ۱۴/۵$$

$$\theta = \arctan\frac{r_y}{r_x} = \arctan\frac{۱۴}{۴} = \arctan\left(۳/۵\right) \Rightarrow \theta = ۷۴°$$

$$\bar{v} = \frac{r}{t} = \frac{۱۴/۵}{\frac{۴۰}{۶۰} + \frac{۲۰}{۶۰} + \frac{۵۰}{۶۰}} = \frac{۱۴/۵}{\frac{۱۱۰}{۶۰}} = ۷/۹ \ \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

۳- ۳- حرکت شتاب ثابت افقی

دو نوع حرکت شتاب ثابت وجود دارد:

(الف) شتاب ثابت مثبت (حرکت تند شونده) که در آن، سرعت جسم به طور یکنواخت افزایش می یابد، شتاب جسم ثابت است و علامت شتاب مثبت است.

(ب) شتاب ثابت منفی (حرکت کند شونده)، سرعت جسم به طور یک نواخت کاهش می یابد، شتاب جسم ثابت است و علامت شتاب منفی است. سه کمیت حرکت شتاب ثابت به شکل زیر هستند:

مکان جسم : $x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{.}t + x_{.}$

سرعت جسم : $v = at + v_{.}$ و $v^{۲} - v_{.}^{۲} = ۲ax$

شتاب جسم : $a =$ ثابت (شتاب جسم از زمان)

۳- ۴- نمودار سرعت – زمان

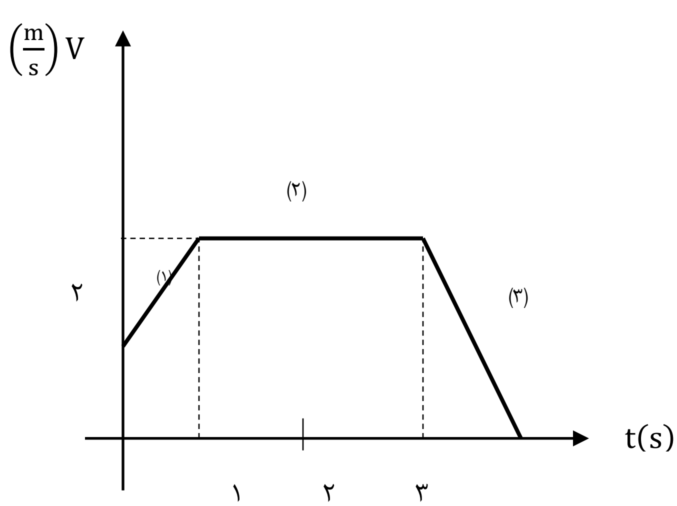
حرکت سرعت ثابت و حرکت شتاب ثابت را می توان در نمودار سرعت- زمان نیز مطالعه کرد.

طبق $V = \frac{dx}{dt}$، سطح زیر منحنی سرعت- زمان برابر با مسافت طی شده x توسط جسم است.

☜ مثال (۳- ۴). (الف) در نمودار سرعت- زمان زیر هر خط آن را تحلیل کنید.

(ب) و شتاب

(ج) و مسافت طی شده وسط جسم برای هر خط (د) کل مسافت را محاسبه کنید.



تحلیل خط (۱) در نمودار سرعت- زمان

$$v = ۲\frac{m}{s} \quad ; \quad v_۰ = ۱\frac{m}{s} \quad ; \quad t = ۱\,s$$

سرعت یکنواخت زیاد می شود یعنی حرکت شتاب ثابت مثبت است (حرکت تند شونده)

$$v = at + v_۰ \quad \Rightarrow \quad ۲ = a\left(۱\right) + ۱ \ \Rightarrow \ ۲ = a + ۱ \ \Rightarrow \ a = ۲ - ۱ \ \Rightarrow \ a = +۱\frac{m}{s^۲}$$

$$x_۱ = S_{\text{قائم‌الزاویه}} + S_{\text{مربع}}$$

$$\text{مساحت مربع} = ۱ \times ۱$$

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۲} + ۱ \Rightarrow x_۱ = \frac{۲}{۳}m$$

تحلیل خط (۲) در نمودار سرعت- زمان

در خط (۲) سرعت ثابت است و شتاب صفر می باشد $(a = ۰)$

$$x_۲ = \text{سطح زیر خط افقی} = S\ \text{مستطیل} = ۲ \times ۲ = ۴\ m$$

تحلیل خط (۳) در نمودار سرعت- زمان

سرعت یکنواخت کاهش می یابد یعنی حرکت شتاب ثابت منفی است. (حرکت کند شونده).

$$v_۰ = ۲\frac{m}{s} \quad ; \quad v = ۰ \quad ; \quad t = ۱s$$

$$v = at + v_۰ \ \Rightarrow \ ۰ = a\left(۱\right) + ۲ \Rightarrow a = -۲\frac{m}{s}$$

$$x_۳ = \text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه} = \frac{۲ \times ۱}{۲} = ۱m$$

$$x = x_۱ + x_۲ + x_۳ \quad \text{کل مسافت}$$

$$x = ۱/۵ + ۴ + ۱ = ۶/۵m$$

☜ **مثال (۳- ۵).** سرعت اتومبیلی در مدت نیم دقیقه به طور یکنواخت از ۲۵ Km/h به ۵۵ Km/h افزایش می یابد. دوچرخه سواری نیز در مدت نیم دقیقه سرعت خود را به طور یکنواخت از حالت سکون به ۳۰ Km/h می‌رساند، شتاب‌های این دو حالت را با هم مقایسه کنید.

حل:

$$V = at + v_{۰}$$

اتومبیل

$$\begin{cases} v_{۰} = ۲۵\ \text{Km/h} & \rightarrow \quad v_{۰} = \frac{۲۵}{۳/۶}\frac{m}{s} \\ v = ۵۵\ \text{Km/h} & \rightarrow \quad v = \frac{۵۵}{۳/۶}\frac{m}{s} \\ t = ۰/۵\ \text{min} & \rightarrow \quad t = ۳۰\ s \end{cases}$$

$$V = at + v_{۰} \rightarrow \frac{۵۵}{۳/۶} = ۳۰\ a + \frac{۲۵}{۳/۶}$$

$$\frac{۵۵}{۳/۶} - \frac{۲۵}{۳/۶} = ۳۰\ a \quad \rightarrow \quad \frac{۳۰}{۳/۶} = ۳۰\ a \quad \rightarrow \quad a = ۰/۲۸\ m/s^{۲}$$

دوچرخه‌سوار

$$\begin{cases} v_{۰} = ۰ \\ v = ۳۰\ \text{Km/h} & \rightarrow \quad v = \frac{۳۰}{۳/۶}\frac{m}{s} \\ t = ۰/۵\ \text{min} & \rightarrow \quad t = ۳۰\ s \end{cases}$$

$$V = at + v_{۰} \rightarrow v = at \quad \rightarrow \quad \frac{۳۰}{۳/۶} = ۳۰\ a \quad \rightarrow \quad a = ۰/۲۸\ m/s^{۲}$$

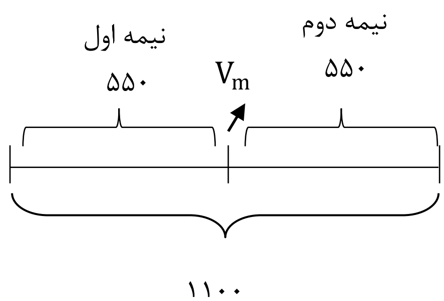
(هر دو شتاب برابر هستند)

☜ **مثال (۳- ۶)**. یک قطار زیر زمینی از حالت سکون شروع به حرکت می کند و نیمه‌ی اول

فاصله میان یک ایستگاه تا ایستگاه بعدی را با شتاب $۱/۲\ m/s^۲$ می‌پیماید.

سپس نیمه دوم مسیر را با همان شتاب ولی با حرکت کند شونده طی می‌کند. اگر فاصله دو ایستگاه ۱۱۰۰ متر باشد.

مطلوب است تعیین کنید: (الف) مدت مسافرت میان دو ایستگاه، (ب) بیشینه سرعت قطار



بیشینه سرعت قطار = V_m

نیمه اول

$$\begin{cases} a = ۱/۲\ m/s^۲ \\ x = ۵۵۰\ m \\ v_۰ = ۰ \end{cases} \Rightarrow v^۲ - v_۰^۲ = ۲ax \Rightarrow v^۲ - ۰ = ۲ \times ۱/۲ \times ۵۵۰$$

$$v^۲ = ۱۳۲۰ \rightarrow v = ۳۶/۳\ m/s$$

سرعت در انتهای نیمه اول مسیر، که همان سرعت بیشینه است. زیرا از آنجا به بعد سرعت به صورت کند شونده کاهش می یابد.

سرعت بیشینه $\rightarrow v_m = ۳۶/۳\ m/s$

نیمه دوم

$$\begin{cases} v_{۰} = ۳۶/۳\ m/s \\ x = ۵۵۰\ m \\ v = ۰ \end{cases} \Rightarrow v^{۲} - v_{۰}^{۲} = ۲ax \Rightarrow ۰ - ۱۳۲۰ = ۲ \times a \times ۵۵۰ \Rightarrow -۱۳۲۰ = ۱۱۰a$$

$$a = -۱/۲\ m/s^{۲}$$

شتاب منفی است چون حرکت کند شونده است.

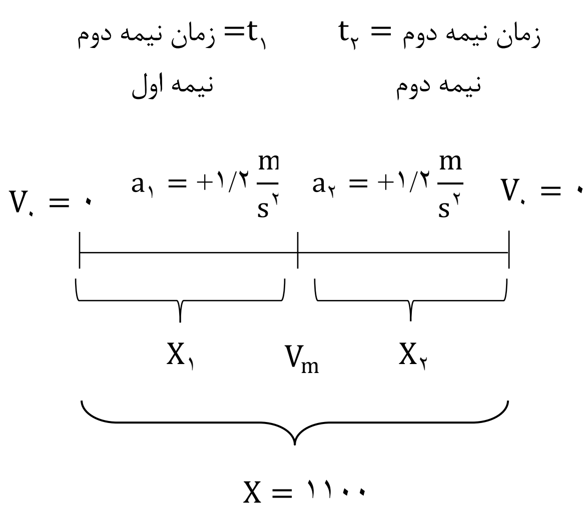
حال با توجه به داشتن شتاب در هر دو نیمه راه:

نیمه اول $\rightarrow v = at_{۱} + v_{۰} \rightarrow ۳۶/۳ = ۱/۲\, t_{۱} + ۰ \rightarrow t_{۱} = ۳۰/۲۵\ s$

نیمه دوم $\rightarrow v = at_{۲} + v_{۰} \rightarrow ۰ = -۱/۲\, t_{۱} + ۳۶/۳ \rightarrow t_{۲} = ۳۰/۲۵\ s$

$t =$ مدت مسافرت بین دو ایستگاه $= t_{۱} + t_{۲} = ۳۰/۲۵ + ۳۰/۲۵ = ۶۰/۵۰\ s$

روش دوم



(نیمه اول راه) $x_۱ = \frac{۱}{۲} a_۱ t_۱^۲ + v_. t_۱$

$۵۵۰ = \frac{۱}{۲} \times ۱/۲ \times t_۱^۲ + ۰$

$۱۱۰۰ = ۱/۲\, t_۱^۲ \rightarrow t_۱ = \sqrt{\frac{۱۱۰۰}{۱/۲}} \rightarrow t_۱ = ۳۰/۲۸\, s$

(نیمه دوم راه) $\left\{\begin{matrix} a_۱ = a_۲ \\ v = v_. = ۰ \end{matrix}\right\} \rightarrow t_۱ = t_۲ = ۳۰/۲۸\, s$

$t = t_۱ + t_۲ = ۶۰/۵۶\, s$

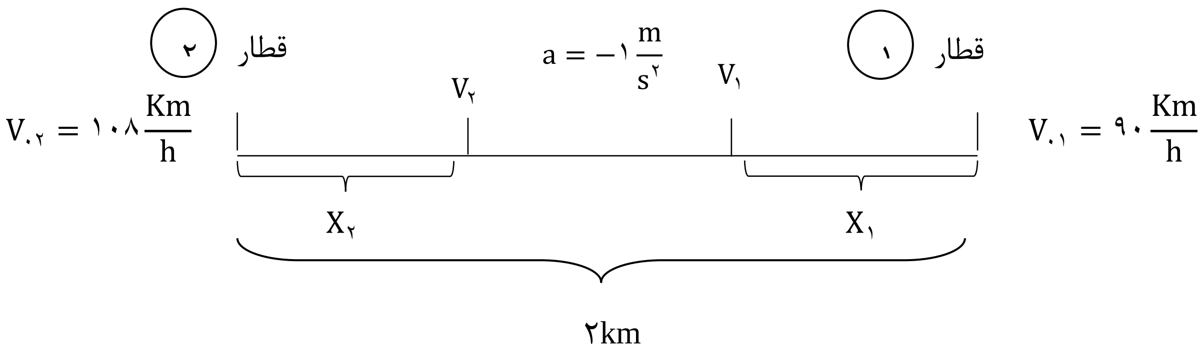
(ب)

$v_m = a_۱ t_۱ + v_. \rightarrow v_m = ۱/۲ \times ۳۰/۲۸ + ۰ \rightarrow v_m = ۳۶/۳۴\, m/s$

☜ **مثال (۳- ۷)**. دو قطار یکی با سرعت ۹۰ Km/h و دیگری با سرعت ۱۰۸ Km/h در یک مسیر مستقیم و افقی به سوی هم در حرکتند. وقتی که فاصله دو قطار به ۲km می رسد، راننده‌های آن‌ها همزمان قطارهای یکدیگر را می بینند و ترمز می‌کنند. اگر این ترمزگیری سرعت هر یک از قطارها را با آهنگ $۱\, m/s^۲$ کند کند، آیا برخوردی رخ می دهد یا نه؟

حل: حرکت را از زمانی که دو راننده همدیگر را مشاهده می‌کنند و ترمز می‌کنند بررسی می کنیم و محاسبه می‌کنیم که هر کدام چقدر فاصله می‌پیمایند تا توقف کنند.

ابتدا با توجه به مثال شکل زیر را رسم می‌کنیم:



$v_۱^۲ - v_{۰_۱} = ۲ax_۱$

$$\text{(۱) قطار}: ۰ - \left(\frac{۹۰}{۳/۶}\right)^۲ = ۲\left(-۱\right) x_۱ \rightarrow x_۱ = ۳۱۲/۵ \text{ m}$$

$v_۱^۲ - v_{۰۲}^۲ = ۲ax_۲$

$$\text{(۲۵) قطار}: ۰ - \left(\frac{۱۰۸}{۳/۶}\right)^۲ = ۲\left(-۱\right) x_۲ \rightarrow x_۲ = ۴۵۰ \text{ m}$$

$L = ۲ \text{ Km} \rightarrow x_۱ + x_۲ = ۴۵۰ + ۳۱۲/۵ = ۷۶۲/۵ \text{ m}$

$\Rightarrow x_۱ + x_۲ < L$ پس برخورد نمی‌کنند.

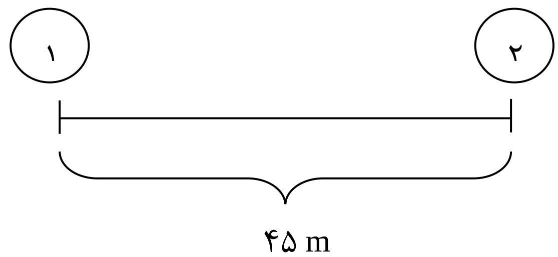
☜ **مثال (۳- ۸)**. اتومبیلی با شتاب ثابت حرکت می کند و فاصله میان دو نقطه را که ۵۴m است، در مدت ۶s می‌پیماید. سرعت این اتومبیل هنگام عبور از نقطه دوم ۱۳/۵ m/s است.

(الف) سرعت اتومبیل در نقطه اول چقدر است؟

(ب) شتاب آن چقدر است؟

(ج) در چه فاصله‌ی پیش از نقطه اول اتومبیل در حال سکون بوده است؟

حل:



(الف)

$$x = \frac{v_۲ + v_۱}{۲} t \rightarrow ۵۴ = \frac{۱۳/۵ + v_۱}{۲} \times ۶$$

$$\frac{۵۴}{۶} = \frac{۱۳/۵ + v_۱}{۲} \rightarrow \frac{۲ \times ۵۴}{۶} = ۱۳/۵ + v_۱ \rightarrow \frac{۵۴}{۶} = ۱۳/۵ + v_۱ \rightarrow ۱۸ = ۱۳/۵ + v_۱$$

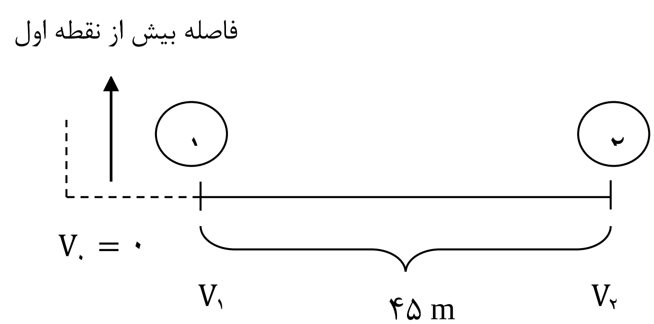
$$v_۲ = ۴/۵ \ m/s$$

(ب)

$$v_۲ = at + v_۱ \rightarrow ۱۳/۵ = ۶a + ۴/۵ \rightarrow ۹ = ۶a \rightarrow a = \frac{۹}{۶} m/s^۲$$

$$a = ۱/۵ m/s^۲$$

(ج)



$$\begin{cases} v_{\cdot} = \cdot \\ v_{۱} = ۱/۵\ m\ /s \\ a = ۱/۵\ m/s^{۲} \end{cases} \Rightarrow v_{۱}^{۲} - v_{\cdot}^{۲} = ۲ax \Rightarrow \left(۴/۵\right)^{۲} - \cdot = ۲ \times ۱/۵\, x \Rightarrow ۳\cdot/۲۵ = ۳x$$

$$x = \frac{۳\cdot/۲۵}{۳} = ۶/۷۵\ m$$

☜ **مثال (۳- ۹).** سرعت اتومبیلی که به طرف شرق در حرکت است در طی مسافت ۸۰ m، به طور یکنواخت از ۷۲Km / h به ۴۸Km / h کاهش می یابد.

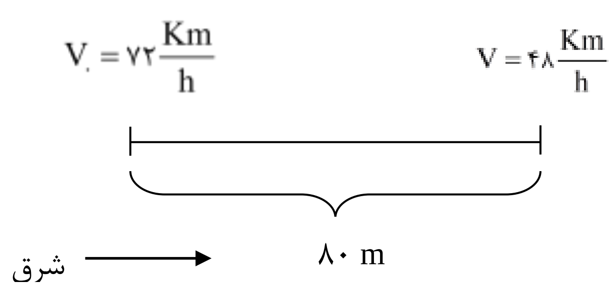
(الف) بزرگی و جهت شتاب ثابت چقدر است؟

(ب) این حرکت کند شونده برای چه مدتی ادامه داشته است؟

(ج) اگر کاهش سرعت اتومبیل با همان آهنگ ادامه پیدا کند، چه مدت طول می کشد تا اتومبیل از سرعت ۷۲Km / h به حالت سکون برسد؟

د) در مدتی که اتومبیل از سرعت ۷۲Km / h به حالت سکون می رسد؟ مسافت طی شده چقدر است؟

حل:



(الف)

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ax$$

$$\begin{cases} v_۰ = \dfrac{۷۲}{۳/۶} = ۲۰ m/s \\ v = \dfrac{۴۸}{۳/۶} = ۱۳/۳ m/s \\ x = ۸۰ m \end{cases} \Rightarrow (۱۳/۳)^۲ - (۲۰)^۲ = ۲a \times ۸۰$$

$$a = -۱/۳۹ m/s^۲$$

شتاب در جهت غرب است

(ب)

$$v = at = v_۰$$

$$+۱۳/۳ = (-۱/۳۹)t + ۲۰ \rightarrow ۱۳/۳ - ۲۰ = (-۱/۳۹)t \rightarrow -۶/۷ = (-۱/۳۹)t$$

$$t = \frac{۶/۷}{۱/۳۹} = ۴/۸ s$$

(د)

$$v_۰ = ۷۲ Km/h = ۲۰ m/s$$

$$v = ۰$$

$$a = -۱/۳۹ m/s^۲$$

$$x = ?$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ax$$

$$۰ - (۴۰۰) = ۲ \times (-۱/۳۹)x$$

$$-۴۰۰ = -۲/۷۸x$$

$$x = \frac{۴۰۰}{۲/۷۸} = ۱۴۳/۸ m$$

(ج)

$$\begin{cases} v_{۰} = ۷۲Km/h = ۲۰m/s \\ v = ۰ \\ a = -۱/۳۹m/s^{۲} \end{cases} \Rightarrow v = at + v_{۰} \Rightarrow ۰ = (۱۳/۳)^{۲} + ۲۰ \Rightarrow$$

$$-۲۰(-۱/۳۹)t$$

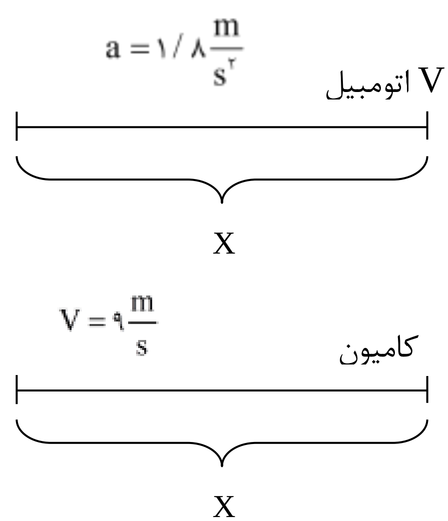
$$t = ۱۴/۳s$$

☜ **مثال (۳- ۱۰)**. در لحظه ای که چراغ راهنمایی سبز می شود اتومبیلی با شتاب ثابت a_x برابر با $۱/۸m/s^{۲}$ به راه می افتد. در همان لحظه کامیونی که با سرعت ثابت $۹m/s$ در حرکت است، به اتومبیل می رسد و از آن سبقت می گیرد.

(الف) در چه فاصله‌ای از نقطه شروع حرکت، اتومبیل از کامیون جلو خواهد افتاد؟

(ب) سرعت اتومبیل در آن لحظه چقدر است؟

حل:



نکته: هر دو متحرک از زمان آغاز حرکت که لحظه روشن شدن چراغ سبز است (مبدأ حرکت)، تا زمانی که اتومبیل به کامیون می‌رسد نسبت به مبدأ به یک میزان حرکت کرده‌اند یعنی هر دو فاصله مکانی و جابه‌جایی یکسانی نسبت به مبدأ داشته اند.

اتومبیل : $x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{۰}t \rightarrow x = \frac{۱}{۲}at^{۲}$

کامیون : $x = vt$

$\rightarrow \frac{۱}{۲}at^{۲} = vt$

$\frac{۱}{۲} \times ۱/۸ \times t^{۲} = ۹t \rightarrow ۰/۹t = ۹ \rightarrow t = ۱۰s$

(الف) $x = vt \rightarrow x = ۱۰ \times ۹ \rightarrow x = ۹۰m$

(ب)

$v = at + v_{۰} \rightarrow v = ۱/۸ \times ۱۰ \rightarrow v = ۱۸m/s$

☜ **مثال (۳- ۱۱).** اتومبیلی با سرعت $۵۶Km/h$ حرکت می کند و وقتی به فاصله ۳۵ متری یک مانع می رسد، راننده ترمز می کند و بعد از چهار ثانیه اتومبیل با مانع برخورد می کند.

(الف) شتاب کند کننده اتومبیل پیش از برخورد چقدر بوده است؟

(ب) سرعت اتومبیل هنگام برخورد چقدر است؟

$t = ۴s$

$V_{۰} = ۵۶Km/h = \frac{۵۶}{۳/۶} m/s = ۱۵/۵m/s$

(الف)

$$x = ۳۵m$$
$$a = ?$$
$$x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{۰}t \rightarrow ۳۵ = \frac{۱}{۲} \times a \times ۱۶ + ۱۵/۵ \times ۴$$
$$۳۵ = ۸a + ۶۲ \rightarrow -۸a = ۲۷ \rightarrow a = \frac{-۲۷}{۸} = -۳/۳m/s^{۲}$$

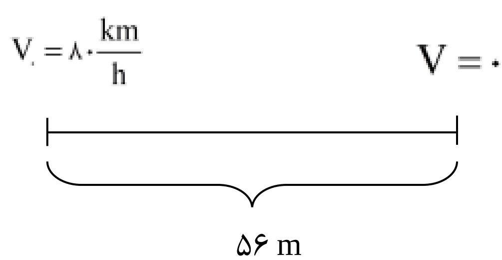
(ب)

$$v = ?$$
$$v = at + v_{۰} \rightarrow v = (-۳/۳)(۴) + ۱۵/۵ \rightarrow v = -۱۳/۳ + ۱۵/۵ \rightarrow v = ۲/۳m/s$$

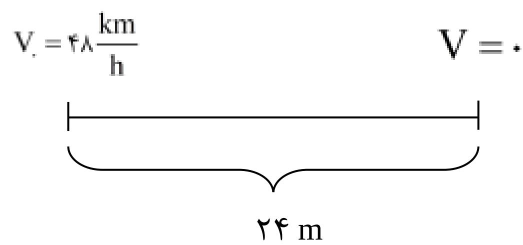
☜ **مثال (۳- ۱۲).** در کتاب راهنمایی رانندگی آمده است که یک اتومبیل با ترمز خوب در صورتی که سرعتش $۸۰Km/h$ باشد، پس از پیمودن مسافت $۵۶m$ و در صورتی که سرعتش $۴۸Km/h$ باشد، پس از پیمودن $۲۴m$ می تواند به حال سکون در آید. فرض کنید که زمان واکنش راننده یعنی فاصله زمانی میان شتاب صفر و شتاب بعد از ترمز کردن، برای دو هر سرعت مساوی باشد،

(الف) زمان واکنش راننده، **(ب)** شتاب اتومبیل.

حل:



$$V_{\cdot} = ۸۰ Km/h = \frac{۸۰}{۳/۶}\frac{m}{s} = ۲۲/۲ m/s$$
$$v^{۲} - v_{\cdot}^{۲} = ۲ax \rightarrow ۰ - (۲۲/۲)^{۲} = ۲ \times ۵۶a \rightarrow a = -۴/۴ m/s^{۲}$$
$$v = at + v_{\cdot} \rightarrow ۰ = -۴/۴t + ۲۲/۲ \rightarrow t = ۵s$$

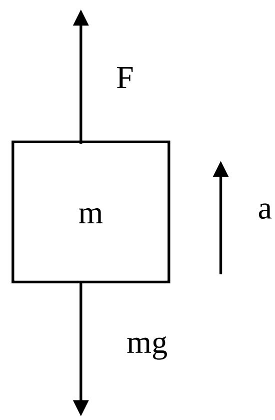


$$V_{\cdot} = ۴۸ Km/h = \frac{۴۸}{۳/۶}\frac{m}{s} = ۱۳/۳ m/s$$
$$v^{۲} - v_{\cdot}^{۲} = ۲ax \rightarrow ۰ - (۱۳/۳)^{۲} = ۲ \times ۲۴a \rightarrow a = -۳/۷ m/s^{۲}$$
$$v = at + v_{\cdot} \rightarrow ۰ = -۳/۷t + ۱۳/۳ \rightarrow t = ۳/۶s$$

۳- ۵- حرکت شتاب ثابت عمومی

در صورتی که جسمی در راستای قائم با شتاب ثابت حرکت کند همه‌ی روابط بخش (۳- ۳) بدون تغییر مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مثال موشک، هواپیما، هلیکوپتر و بالنی که در راستای قائم با موتور روشن بالا یا پایین حرکت می‌کنند در راستای قائم دو نیرو، ۱) نیروی بال برنده و ۲) نیروی رو به پایین وزن وجود دارند. شتاب جسم از تقسیم برآیند دو نیرو به جرم به دست می‌آید. برای مثال موشکی از حالت سکون با شتاب ۱۹/۶ متر بر مجذور ثانیه با موتور روشن به سمت بالا حرکت می‌کند ۳ ثانیه بعد از شروع حرکت، سرعت آن را رابطه بخش (۳- ۳) برابر ۵۸/۸ متر بر ثانیه می‌شود. زیرا در صورتی که $m = ۱۰۰۰kg, mg \approx ۱۰۰۰۰N, F = ۲۹۶۰۰N$ باشد، داریم:

$$a=\frac{F-mg}{m}=\frac{۲۹۶۰۰-۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰}=۱۹/۶\frac{m}{s^{۲}}$$



$$v=at+v_{۰}\Rightarrow V=۱۹/۶+۳+۰\Rightarrow V=۵۸/۸\frac{m}{s}$$

اگر موتور موشک خاموش شود به موشک فقط نیروی وزن وارد می‌شود و موشک حرکت آزاد دارد که در بخش بعدی مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۳- ۶- حرکت آزاد (حرکت شتاب ثابت عمودی)

(جهت + محور yها را به سمت بالا فرض می‌کنیم)

دو نوع حرکت آزاد داریم:

۱- حرکت سقوط آزاد.

۲- حرکت صعود آزاد.

در سقوط آزاد، جسم به سمت پائین حرکت می کند و در صعود آزاد جسم به سمت بالا پرتاب شده است. در هر دو حرکت آزاد، فقط نیروی وزن mg به آن وارد شده است و هیچ نیروی دیگری به آن وارد نشده است که

در این صورت همیشه شتاب آن $a=-g=-۹/۸ m/s^۲$ است. یعنی در چهار فرمول شتاب ثابت قبلی کافی است به جای a، مقدار $(-g)$ قرار دهیم. در ضمن، محور عمودی رو به بالا محور y است که به جای محور x قرار می‌دهیم.

$$y=\frac{v+v_۰}{۲}t \quad \text{یا} \quad y=\frac{-۱}{۲}gt^۲+v_۰t$$

$$v^۲-v_۰^۲=-۲gy \quad \text{یا} \quad v=-gt+v_۰$$

$$a=-g$$

$$g=۹/۸\frac{m}{s^۲}$$

نکته: در مورد علامت سرعت v

اگر حرکت جسم رو به بالا باشد، علامت سرعت مثبت (+) است.

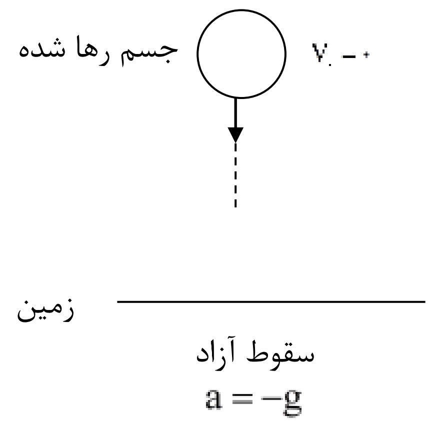
اگر حرکت جسم رو به پائین باشد علامت سرعت منفی (-) است.

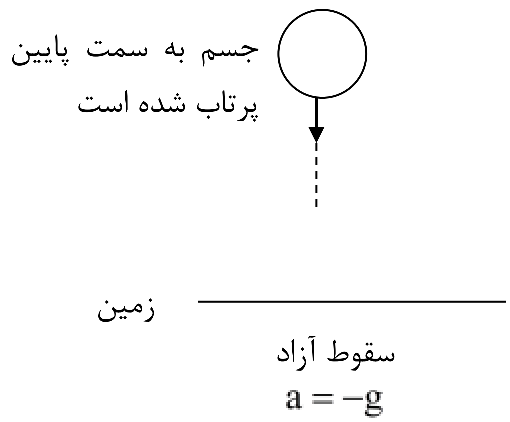
نکته: در مورد علامت جابه‌جایی y

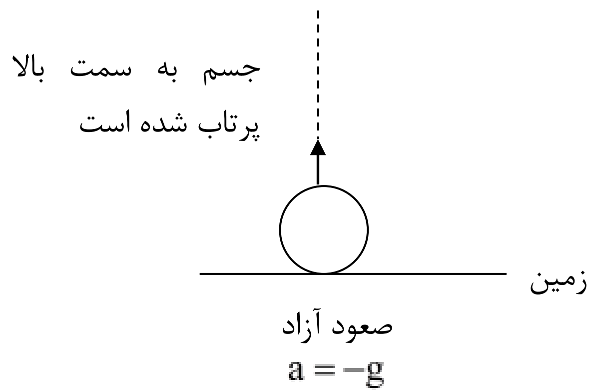
اگر جسم بالای مبدأ باشد، علامت y مثبت است.

اگر جسم زیر مبدأ باشد، علامت y منفی است.

نکته مهم آن است که y جابه‌جایی است مثلاً اگر جسم از زمین به بالا پرتاب شود و به زمین برگردد، $y=۰$ است. زیرا جابه‌جایی یعنی شروع حرکت را به مقصد وصل کنیم، که در این صورت جابه‌جایی صفر است. حرکت های زیر تحت عنوان حرکت آزاد هستند.







نکته حل معادله درجه ۲

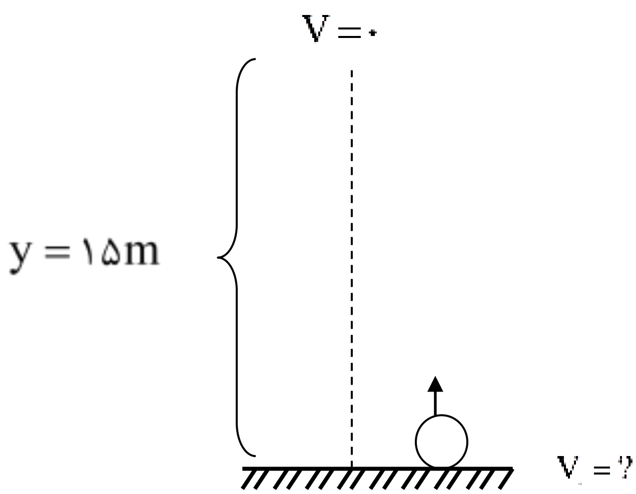
ریشه داریم : $ax^۲ + bx + c = ۰ \qquad \text{if} \qquad \Delta \geq ۰$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \qquad ; \qquad \Delta = b^۲ - ۴ac$$

☜ **مثال (۳- ۱۳).** (الف) گلوله‌ای را با چه سرعتی در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب کنیم تا به ارتفاع ۱۵ متری برسد؟

(ب) این گلوله چه مدت در هوا خواهد بود؟

حل: (الف)



$$v^{۲} - v_{.}^{۲} - ۲gy$$

$$a = -g \quad ; \quad v_{.} = ? \quad ; \quad v = ۰ \quad ; \quad y = ۱۵m \quad ; \quad g = ۹/۸m/s^{۲}$$

$$۰ - v_{.}^{۲} = -۲ \times ۹/۸ \times ۱۵$$

$$v_{.}^{۲} = ۳۰ \times ۹/۸ = ۲۹۴$$

$$V_{.} = ۱۷/۱۵m/s$$

(ب)

$$v = -gt + v_{.}$$

$$۰ = -۹/۸ \times t + ۱۷/۱۵$$

$$۹/۸ \times t = ۱۷/۱۵$$

زمان اوج (مدت زمان از نقطه پرتاب تا نقطه اوج) $t = \frac{۱۷/۱۵}{۹/۸} = ۱/۷۵s$

مدت زمان در هوا بودن گلوله یعنی مدت زمان رفت و برگشت گلوله از نقطه ی پرتاب به نقطه اوج و از نقطه اوج به نقطه ی پرتاب است. زمان رفت به نقطه اوج با زمان برگشت از اوج برابر است، پس برای زمان در هوا بودن گلوله چنین داریم:

$T = ۲t = ۳/۵s$

☜ **مثال (۳- ۱۴)**. شخصی روی پلی مشرف به یک بزرگراه ایستاده است و هم‌چنان که به آیساک نیوتن فکر می‌کند، سیبی از بالای نرده‌های پل از دستش می‌افتد. درست در همان لحظه قسمت جلو کامیونی از زیر نرده‌ها عبور می‌کند. اگر سرعت کامیون $۵۵Km/h$ و طول آن ۱۲ m باشد، نرده باید در چه ارتفاعی بالای کامیون قرار داشته باشد تا سیب درست با قسمت عقب کامیون برخورد کند.

حل: چون می خواهیم گلوله در انتهای کامیون برخورد کند، بایستی کامیون به طور کامل از زیر نرده‌ها عبور کند، سپس مدت زمان لازم برای عبور کامل کامیون، همان زمانی است که برای برخورد گلوله به انتهای کامیون لازم است.

$$x = vt \qquad (\text{مربوط به کامیون}) \qquad \rightarrow ۱۲ = \frac{۵۵}{۳/۶}t \rightarrow t = \frac{۱۲}{۱۵/۲۵} = ۰/۷۸s$$

$$v_۰ = ۰ \quad ; \quad g = ۹/۸m/s^۲ \quad ; \quad t = ۰/۷۸s$$

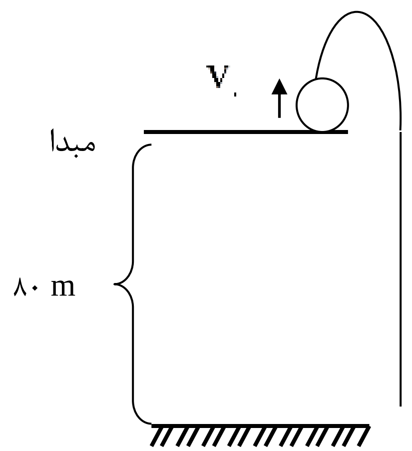
$$y = \frac{-۱}{۲}gt^۲ + v_۰t \rightarrow y = \frac{-۱}{۲}gt^۲$$

$$y = \frac{-۱}{۲} \times ۹/۸ \times (۰/۷۸)^۲ = -۳m$$

(علامت منفی بدین دلیل است که مبدا را پل در نظر گرفتیم و جسم در زیر مبدا قرار دارد)

☜ **مثال (۳- ۱۵)**. بالونی با سرعت $۱۲m/s$ صعود می کند و هنگامی که در ارتفاع ۸۰ متری از سطح زمین قرار دارد. یک بسته از آن ها رها می شود، چقدر طول می کشد تا بسته به زمین برسد؟

حل: با توجه به این که بالن با سرعت $۱۲m/s$ به سمت بالا حرکت می‌کند، سپس زمانی که بسته از بالن رها می‌شود به دلیل سرعت ناشی از بالن، یک حرکت پرتابی روبه بالا انجام می‌دهد و سپس به سمت زمین می‌آید. یعنی مسیر حرکت به صورت مقابل است.



$y=-۸۰$

(جسم زیر مبدا خواهد بود)

$$g=۹/۸m/s^{۲} \qquad a=-g \qquad t=? \qquad v_{۰}=۱۲m/s \qquad y=-۸۰$$

$$-۸۰=-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times t^{۲}+۱۲t \qquad \rightarrow \qquad y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{۰}t$$

$$-۴/۹t^{۲}-۱۲t-۸۰=۰\leftrightarrow At^{۲}+Bt+C=۰$$

$$A=۴/۹, \qquad B=-۱۲, \qquad C=-۸۰$$

$$t=\frac{-B\pm\sqrt{\Delta}}{۲A} \quad ; \quad \Delta=B^{۲}-۴AC$$

$$\Delta=۱۴۴-۴(۴/۹)(-۸۰)=۱۷۱۲$$

$$t=\frac{+۱۲\pm\sqrt{۱۷۱۲}}{۹/۸}\rightarrow t=\frac{۱۲\pm۴۱}{۹/۸}$$

$$t=\frac{۱۲\pm۴۱}{۹/۸}=۵/۴$$

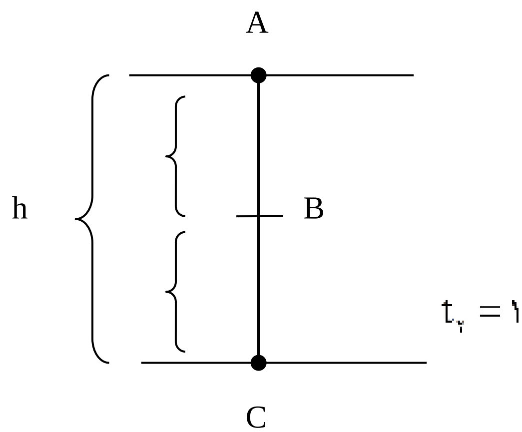
علامت منفی قابل قبول است

☜ **مثال (۳- ۱۶).** اگر جسمی که از حالت سکون سقوط می کند، نصف کل مسیر را در ثانیه آخر بپیماید.

(الف) زمان

ب) ارتفاع سقوط را محاسبه کنید.

ج) جواب غیر قابل قبول معادله درجه دوم بر حسب زمان را از نظر فیزیکی توجیه کنید.



مسیر $A-B$:

$$y_{AB} = \frac{۱}{۲} g t_۱^۲$$

$$\frac{h}{۲} = \frac{۱}{۲}(۹/۸)(T-۱)^۲ \qquad (۷۹)$$

مسیر $A-C$:

$$y_{AB} = \frac{۱}{۲} g t_۱^۲$$

$$h = \frac{۱}{۲}(۹/۸)T^۲ \qquad (۸۰)$$

دو رابطه‌ی (۷۹) و (۸۰) را مساوی قرار می‌دهیم:

$$۴/۹T^۲ = ۹/۸\left(T^۲ - ۲T + ۱\right)۴/۹$$
$$۴/۹T^۲ = ۹/۸T^۲ - ۱۹/۶T + ۹/۸$$
$$۴/۹T^۲ - ۱۹/۶ + ۹/۸ = ۰$$

حال با حل معادله درجه دوم T را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = B^{۲} - ۴AC \rightarrow \quad A - ۴/۹, \quad B = -۱۹/۶, \quad C = ۹/۸$$

$$\Delta = \left(-۱۹/۶\right)^{۲} - ۴\left(۴/۹\right)\left(۹/۸\right) = ۳۸۴/۱۶ - ۱۹۲/۰۸ = ۱۹۲/۰۸$$

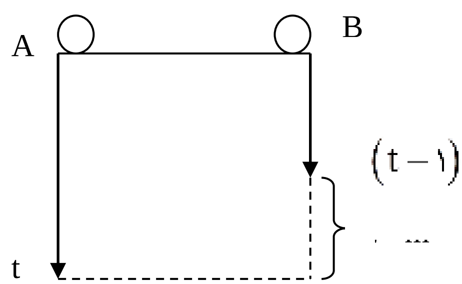
$$T = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{۲A} \Rightarrow T = \frac{۱۹/۶ \pm \sqrt{۱۹۲/۰۸}}{۹/۸} = \frac{۱۹/۶ \pm ۱۳/۸}{۹/۸}$$

(قابل قبول) $T = ۳/۴s \leftarrow$ با علامت مثبت

(غیرقابل قبول، زیرا باید از ۱ بزرگتر باشد) $T = ۰/۵s \leftarrow$ با علامت منفی

☜ **مثال (۳- ۱۷).** دو جسم به فاصله زمانی ۱s از حالت سکون و از ارتفاع مساوی به طور آزاد سقوط می‌کنند. چه مدت بعد از رها شدن جسم اول، فاصله میان دو جسم به ۱۰ m می‌رسد؟

حل:



$$A_A \quad : y_{\text{جسم}} = \frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

$$B_B \quad : y_{\text{جسم}} = \frac{۱}{۲}g\left(t-۱\right)^{۲}$$

$$y_A - y_B = \frac{۱}{۲}gt^{۲} - \frac{۱}{۲}g\left(t-۱\right)^{۲}$$

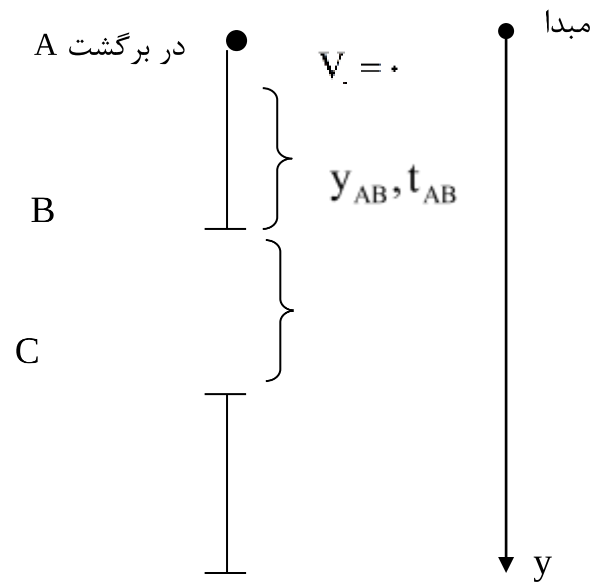
$$y_A - y_B = ۱۰ \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱}{۲}gt^{۲} - \frac{۱}{۲}g\left(t^{۲} - ۲t + ۱\right)$$

$$۱۰ = \frac{۱}{۲}gt^{۲} - \frac{۱}{۲}gt^{۲} + gt - \frac{۱}{۲}g$$

$$۱۰ = ۹/۸t - ۴/۹ \rightarrow ۱۰ + ۴/۹ = ۹/۸t \rightarrow ۱۴/۹ = ۹/۸t \rightarrow t = ۱/۵۲s$$

☜ **مثال (۳- ۱۸).** شخصی از پنجره‌ای به بلندی m ۱/۵ توپی را می‌بیند که به طرف بالا می‌رود و بعد به طرف پایین برمی‌گردد. اگر کل مدت زمانی که توپ در معرض دید بوده است 1s باشد، توپ تا چه ارتفاعی از لبه فوقانی پنجره بالا رفته است؟

حل:



با توجه به این که توپ به طور کلی یک ثانیه در برابر دید آن شخص بوده است، سپس ۰/۵ ثانیه در رفت و ۰/۵ ثانیه در برگشت در برابر دید او بوده است. برای بررسی مسئله از زمانی توپ را در نظر می گیریم که تا نقطه اوج رفته است و می خواهد برگردد. برای حل مسئله سه مسیر A تا A,B تا B,C تا C را مورد توجه قرار می دهیم.

$$A - B \rightarrow \begin{cases} v_{\cdot} = \cdot \\ g = ۹/۸ m/s^{۲} \\ y = \frac{۱}{۲}gt^{۲} + v_{\cdot}t \end{cases} \Rightarrow y_{AB} = \frac{۱}{۲}g{t^{۲}}_{AB} \qquad (۸۱)$$

$$B-C \rightarrow \begin{cases} y_{BC} = ۱/۵m \\ t_{BC} = ۰/۵m \end{cases}$$

هدف پیدا کردن y_{AB} یعنی مقدار ارتفاعی که توپ از لبه فوقانی پنجره بالا رفته است می‌باشد.

$$A-C \rightarrow \begin{cases} v_{۰} = ۰ \\ g = ۹/۸m/s^{۲} \\ t_{AV} = t_{BC} + t_{AB} \end{cases} \Rightarrow t_{AC} = ۰/۵ + t_{AB}, y_{AC} = \frac{۱}{۲} g{t^{۲}}_{AC}$$

$$y_{AC} = \frac{۱}{۲} g\left(t_{AB} + ۰/۵\right)^{۲} \tag{۸۲}$$

$$y_{AC} = y_{AB} + ۱/۵ \tag{۸۳}$$

روابط (۸۱) و (۸۲) را در (۸۳) قرار می‌دهیم.

$$\frac{۱}{۲} g\left(t_{AB} + ۰/۵\right)^{۲} = \frac{۱}{۲} g t_{AB}^{۲} + ۱/۵$$

$$\frac{۱}{۲} g\left(t_{AB}^{۲} + t_{AB} + ۰/۲۵\right)^{۲} = \frac{۱}{۲} g t_{AB}^{۲} + ۱/۵$$

$$\frac{۱}{۲} g t_{AB}^{۲} + \frac{۱}{۲} g t_{AB} + ۰/۱۲۵g = \frac{۱}{۲} g t_{AB}^{۲} + ۱/۵$$

$$\frac{۱}{۲} g t_{AB} + ۰/۱۲۵g = ۱/۵$$

$$\frac{۱}{۲}\left(۹/۸\right) t_{AB} + ۰/۱۲۵\left(۹/۸\right) = ۱/۵$$

$$۴/۹t_{AB} + ۱/۲۲۵ = ۱/۵$$

$$۴/۹t_{AB} = ۰/۲۷۵ \rightarrow t_{AB} = ۰/۰۵۶s$$

$$y_{AB} = \frac{۱}{۲} g t_{AB}^{۲} = \frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times \left(۰/۵۶\right)^{۲} = ۰/۰۱۵m$$

☜ **مثال (۳- ۱۹).** جسمی با سرعت $۳۰ m/s$ از بام ساختمانی به طرف بالا پرتاب می‌شود مطلوب است تعیین:

(الف) زمان اوج

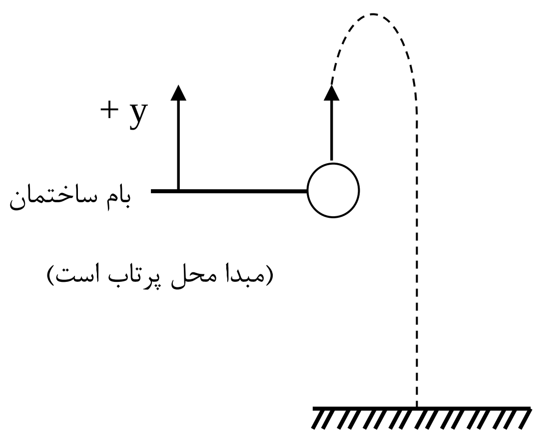
(ب) ارتفاع اوج

(ج) زمان‌هایی که به فاصله ۲ متری بالای بام ساختمان می‌رسد.

(د) سرعت‌ها در فاصله ۲ متری بالای بام ساختمان،

(هـ) زمانی که به فاصله ۱ متری پائین‌تر از بام ساختمان می‌رسد.

حل:



(الف) در اوج $v_{۰} = ۳۰ m/s \quad ; \quad v = ۰$

$$۰ = -۹/۸t + ۳۰ \rightarrow t = \frac{۳۰}{۹/۸} = ۳۰/۶s \qquad \rightarrow \qquad v = -gt + v_{۰}$$

(ب) در اوج $v_{۰} = ۳۰ m/s \quad ; \quad v = ۰$

$$v^۲ - v_۰^۲ = -۲gy$$

$$۰-(۳۰)^۲ = -۲\times ۹/۸y \rightarrow -(۳۰)^۲ = -۱۹/۶y \rightarrow y = \frac{۹۰۰}{۱۹/۶} \cong ۴۶m$$

(ج)

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t$$

(۸۴)

$$۲ = -\frac{۱}{۲}\times ۹/۸t^۲ + ۳۰t \rightarrow -۴/۹t^۲ + ۳۰t - ۲ = ۰ \rightarrow ۴/۹t^۲ - ۳۰t + ۲ = ۰$$

معادله درجه‌ی دوم (۸۴) را با مقادیر زیر حل می‌کنیم.

$$A = ۴/۹ \quad , \quad B = -۳۰ \quad , \quad C = ۲$$

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{۲A} \quad ; \quad \Delta = B^۲ - ۴AC$$

$$\Delta = ۹۰۰ - ۴(۴/۹)(۲) = ۹۰۰ - ۳۹/۲ = ۸۶۰/۸$$

$$t = \frac{۳۰ \pm \sqrt{۸۶۰/۸}}{۹/۸} \rightarrow t = \frac{۳۰ \pm ۲۹/۳۳}{۹/۸}s$$

(د)

$$v^۲ - v_۰^۲ = -۲gy$$

$$v^۲ - (۹۰۰) = -۲\times ۹/۸ \times ۲ \rightarrow -v^۲ = ۹۰۰ - ۳۹/۲ = ۸۶۰/۸ \rightarrow V = \pm ۲۹/۳۳m/s$$

(هـ)

$$v_۰ = ۳۰m/s$$

$$g = ۹/۸m/s^۲$$

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t$$

چون ۱ متر پائین مبدا می باشد y منفی خواهد بود.

$$-1=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t \rightarrow -1=\frac{1}{2}\times 9/8t^2+30t \rightarrow -4/9t^2+30t+1=0$$

$$4/9t^2-30t-1=0$$

$$t=\frac{-B\pm\sqrt{\Delta}}{2A} \quad ; \quad A=4/9 \quad , \quad B=-30 \quad , \quad C=-1$$

$$\Delta=B^2-4AC=900-4(4/9)(2)=900-19/6=880/4$$

$$t=\frac{30\pm\sqrt{880/4}}{9/8} \rightarrow t=\frac{30\pm 29/67}{9/8}s$$

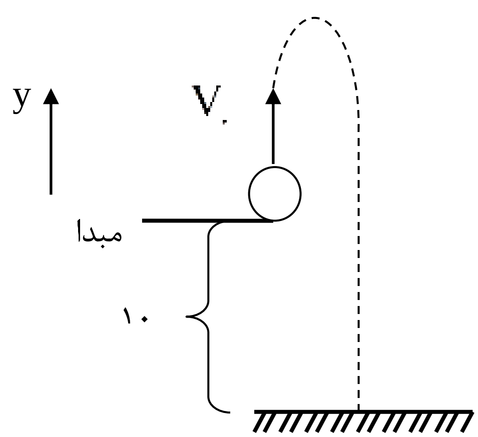
علامت مثبت قابل قبول است چون زمان مربوط به ۱ متر زیر مبدا، از زمان رفت و برگشت بیشتر است.

$$t=\frac{30\pm 29/67}{9/8}s$$

$$t=6/09s$$

☜ **مثال (۳- ۲۰).** بالونی با سرعت ثابت $20m/s$ به طرف بالا حرکت می‌کند وقتی به فاصله ۱۰ متری می رسد. بسته‌ای از آن جدا می‌شود و می‌افتد. کل زمانی که طول می‌کشد تا بسته به زمین برسد را به دست آورید.

حل:



$$v_0=+20m/s \quad ; \quad g=9/8m/s^2 \quad ; \quad y=-10m$$

(جابه‌جایی زیر مبدأ می‌باشد، پس علامت منفی در نظر می‌گیریم)

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + v_{.}t$$

$$-۱۰ = \frac{۱}{۲}(۹/۸)t^{۲} + ۲۰t$$

$$-۱۰ = -۴/۹t^{۲} + ۲۰t \rightarrow -۴/۹t^{۲} + ۲۰t + ۱ = ۰ \rightarrow ۴/۹t^{۲} - ۲۰t - ۱۰ = ۰$$

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{۲A} \quad ; \quad A = ۴/۹ \quad , \quad B = -۲۰ \quad , \quad C = -۱۰$$

$$\Delta = B^{۲} - ۴AC = ۴۰۰ - ۴(۴/۹)(۱۰) = ۴۰۰ - ۱۹۶ = ۲۰۴$$

$$t = \frac{۲۰ \pm \sqrt{۲۰۴}}{۹/۸} = \frac{۲۰ \pm ۱۴/۲۸}{۹/۸}s$$

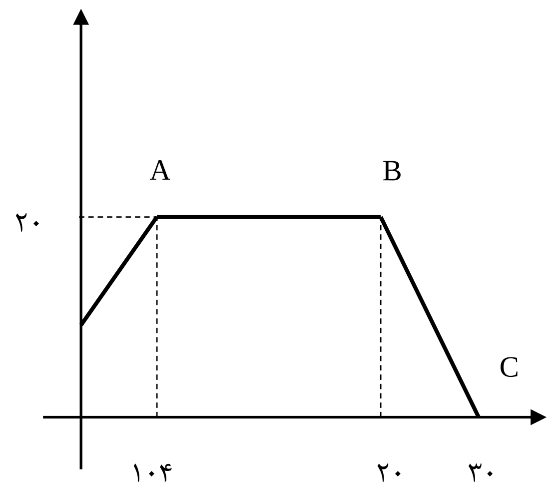
علامت مثبت قابل قبول است چون زمان مربوط به ۱۰ متر زیر مبدا، از زمان رفت و برگشت بیشتر است.

$$t = \frac{۲۰ \pm ۱۴/۲۸}{۹/۸}s$$

$$t = ۳/۵s$$

مسائل فصل سوم

۱- شتاب حرکت، نوع حرکت و مسافت طی شده در سه ناحیه شکل زیر و سرعت متوسط در طی این مسیر را تعیین کنید. (راهنمایی: به مثال (۳- ۴) مراجعه شود)



۲- فردی با دوچرخه‌ای فاصله‌ی بین دو روستا را که ۴Km است طی ۱ ساعت با سرعت ثابت طی می کند، سرعت مورد نظر را بر حسب m/s پیدا کنید. (راهنمایی: به مثال (۳- ۲) مراجعه شود)

۳- متحرکی ۴۰ کیلومتر را به طرف شمال در مدت ۴۰ دقیقه و سپس ۴۰ کیلومتر به طرف غرب در مدت ۱۰۰ دقیقه و سرانجام ۱۰ کیلومتر به طرف جنوب در مدت ۴۰ دقیقه انجام می‌کند، سرعت متوسط را بر حسب m/s پیدا کنید. (راهنمایی: به مثال ۳(۳- ۳) مراجعه شود)

۴- موتوری سرعتش طی شتاب $۰/۲۸m/s^{۲}$ به مقدار ۵۵Km / h می‌رسد اگر این حرکت در نیم دقیقه انجام شود، سرعت اولیه چقدر است؟ (را هنمایی: به مثال (۳- ۹) مراجعه شود)

۵- متحرکی با سرعت $۱۸Km/h$ در حرکت است، پس از جابهجایی ۷۵ متر سرعت آم به $۵۴Km/h$ می‌رسد، زمان حرکت شتاب حرکت را بیابید. (راهنمایی: به مثال (۳- ۹) مراجعه شود)

۶- متحرکی با سرعت $۹۰Km/h$ در حرکت است ترمز می‌کند و پس از جابه‌جایی $۵۰m$ سرعت آن به $۵۴Km/h$ می‌رسد شتاب حرکت را به دست آورید و پس از چه مدت و چه مقدار جابه‌جایی متوقف می شود. (راهنمایی: به مثال (۳- ۹) مراجعه شود)

۷- دوچرخه‌ای با شتاب ثابت فاصله میان دو نقطه را که ۶۰ متر است، در مدت $۱۰s$ می پیماید. اگر سرعت این دوچرخه هنگام عبور از نقطه اول $5m/s$ باشد،

(الف) سرعت اتومبیل در نقطه دوم چقدر است؟

(ب) شتاب آن چقدر است؟

(ج) در چه فاصله‌ای پیش از نقطه اول اتومبیل در حال سکون بوده است؟

(راهنمایی: به مثال (۳- ۸) مراجعه شود)

۸- از کنار یک رستوران، اتومبیلی با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ به راه می افتد در همان لحظه کامیونی که با سرعت ثابت $۱۰m/s$ در حرکت است، به اتومبیل می‌رسد و از آن سبقت می‌گیرد.

(الف) در چه فاصل‌ای از رستوران اتومبیل از کامیون جلو خواهد افتاد؟

(ب) سرعت اتومبیل در آن لحظه چقدر است؟ (راهنمایی: به مثال (۳- ۱۰) مراجعه شود)

۹- موتوری با سرعت $۵۰Km/h$ در حرکت است، ناگهان در فاصله ۳۰ متری خود، یک عابر پیاده را مشاهده می‌کند و ترمز می‌کند و دقیقاً در هنگام رسیدن به عابر می‌ایستد.

الف) مدت زمان حرکت را بیابید.

ب) شتاب را به دست آورید. (راهنمایی: به مثال (۳- ۱۱) مراجعه شود.)

۱۰- جسمی را در شرایط خلاء با سرعت اولیه $۲۹/۴ m/s$ را در راستای قائم از زمین به طرف بالا پرتاب می‌کنیم.

الف) جسم تا چه ارتفاعی بالا خواهد رفت.

ب) چقدر طول می‌کشد تا جسم به بالاترین نقطه مسیر خود برسد.

ج) در چه لحظاتی سرعت جسم $۹/۸ m/s$ خواهد بود؟ (راهنمایی: به مثال (۳- ۱۳) مراجعه شود)

۱۱- شخصی از روی یک پل توپی را به پائین رها می‌کند، در همین لحظه قسمت جلوی اتومبیلی از زیر پل عبور می‌کند، اگر سرعت اتومبیل $۶۰ Km/h$ باشد، ارتفاع پل چه قدر باشد تا توپ درست با عقب اتومبیل ۴ متری برخورد کند. (راهنمایی: به مثال (۳- ۱۴) مراجعه شود)

۱۲- بالونی با سرعت $۱۴ m/s$ صعود می‌کند، در ارتفاعی ۹۰ متری از سطح زمین یک بسته از آن رها می‌شود، چقدر طول می‌کشد تا بسته به زمین برسد؟ سرعت بسته هنگام برخورد چقدر است؟ (راهنمایی: به مثال (۳- ۱۵) مراجعه شود)

۱۳- دو جسم به فاصله زمانی ۲s از حالت سکون و از ارتفاع مساوی رها می‌شوند. چه مدت بعد از رها شدن جسم اول فاصله میان دو جسم $۲۰ m$ متر می‌شود؟ (راهنمایی: به مثال (۳- ۱۷) مراجعه شود)

۱۴- شخصی از پنجره‌ای به بلندی $۲ m$ توپی را می‌بیند، که به طرف بالا می‌رود. و بعد به طرف پائین برمی‌گردد. اگر کل مدت زمانی که توپ در معرض دید بوده است ۲s باشد، توپ تا چه ارتفاعی از لبه فوقانی پنجره بالاتر رفته است. (راهنمایی: به مثال (۳- ۱۸) مراجعه شود)

۱۵- جسمی با سرعت $40 m/s^2$ از بام ساختمانی به طرف بالا پرتاب می شود. مطلوب است تعیین کنید،

الف) زمان اوج

ب) ارتفاع اوج

ج) زمان هایی که به فاصله ۴ متری بالای بام ساختمان می‌رسد.

د) سرعت در فاصله ۴ متر بالای بام ساختمان

هـ) زمانی که به فاصله ۲ متری زیر بام ساختمان می رسد.

(راهنمایی: به مثال (۳- ۱۹) مراجعه شود)

سؤالات چهار گزینه ای فصل سوم

۱)معادله‌ی مکان – زمان جسمی بر حسب یکاهای SI به صورت $y = ۵t + ۱۶$ می باشد. مسافت طی شده توسط متحرک در ۴ ثانیه‌ی اول حرکت، برحسب متر، کدام است؟

الف)۲۰ ب) ۴- ج) ۲۰- د) ۴

۲) سرعت جسمی که با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می کند، بعداز جابجایی ۱۷/۵ متر از ۲۰ $\frac{m}{s}$ به ۱۵ $\frac{m}{s}$ می رسد. شتاب این حرکت:

الف) ۲ $\frac{m}{s^۲}$ و در جهت سرعت است.

ب) ۵ $\frac{m}{s^۲}$ و در جهت سرعت است.

ج) ۲ $\frac{m}{s^۲}$ و در خلاف جهت سرعت است.

د) ۵ $\frac{m}{s^۲}$ و در خلاف جهت سرعت است.

۳) سرعت اولیه و شتاب جسمی که روی خط راست در حرکت است، به ترتیب ۱۲ $\frac{m}{s}$ و ۳ $\frac{m}{s^۲}$ و درخلاف جهت یک دیگر هستند. جابه‌جایی جسم در سه ثانیه‌ی اولیه اول حرکت چند متر ایت؟

الف)۳۹/۵ ب) ۳۲ ج) ۲۲/۵ د) ۴۲

۴) سرعت جسمی که با شتاب روی خط راست در حرکت است بعد از جابه‌جایی ۲۱ متر از ۲۰ $\frac{m}{s}$ به ۲۲ $\frac{m}{s}$ می‌رسد. جسم چند متر دیگر با همان شتاب به حرکت خود ادامه دهد تا سرعتش به ۲۵ $\frac{m}{s}$ برسد؟

الف)۳۵/۲۵ ب) ۶۴/۵ ج) ۱۷/۵ د) ۳۵

۵)سرعت جسمی بعد از ۵s حرکت روی خط راست به $۲۵\,\frac{m}{s}$ می رسد. اگر جابه‌جایی جسم در این مدت برابر ۷۵m باشد، شتاب حرکت در صورت ثابت بودن چند $\frac{m}{s^۲}$ می باشد؟

الف)۲ ب) ۴ ج) ۱/۵ د)۳

۶- حرکت خودرویی را که با سرعت $۹۰\,\frac{km}{h}$روی جاده‌ی مستقیمی در حرکت است، با شتاب $۲/۵\,\frac{m}{s^۲}$ کند می کنیم. خودرو پس از چند ثانیه و پیمودن چند متر، می ایستد؟

الف)۱۰ و ۱۲۵ ب) ۱۰ و ۶۲/۵ ج) ۵ و ۱۲۵ د) ۵ و ۶۲/۵

۷- خودرویی که با سرعت $۱۰۸\,\frac{km}{h}$ در جاده‌ی مستقیمی در حرکت است را با چه شتابی(برحسب $\frac{m}{s^۲}$)ترمز کنیم تا بعد از پیمودن ۶۰m ، متوقف شود؟

الف)۲/۵ ب) ۵ ج) ۷/۵ د) ۹

۸- متحرکی مسیر مستقیم ۷/۲ متر را در مدت ۳S با شتاب ثابت، طی می کند. اگر نصف این مسیر در ثانیه‌ی اول پیموده شود، اندازه‌ی شتاب حرکت، چند متر بر مجذور ثانیه است؟

الف) ۱/۲ ب) ۱/۵ ج) ۱/۸ د) ۲

۹- جسم کوچکی از ارتفاع h بالای سطح زمین، رها می شود. اگر جسم با سرعت $۵۰\,\frac{m}{s}$ به زمین برخورد کند. h چند متر و زمان حرکت آن چند ثانیه است؟$g = ۱۰\,\frac{m}{s^۲}$

الف) ۱۲۵ و ۵ ب) ۸۰ و ۴ ج) ۱۰۰ و ۵ د) ۱۲۵ و ۴

۱۰- جسم کوچکی را با چه سرعت اولیه‌ای از ارتفاع ۷۵ متری زمین قائم رو به پایین پرتاب کنیم تا با سرعت $۴۰\,\frac{m}{s}$ به زمین برخورد کند؟$g = ۱۰\,\frac{m}{s^۲}$

الف) ۵ ب) ۱۰ ج) ۱۵ د) ۲۰

۱۱- جسم کوچکی را از ارتفاع ۱۶۰ متری زمین، قائم و روبه پایین پرتاب می کنیم. اگر سرعت جسم در ۱۰۰ متری زمین برابر $۴۰\frac{m}{s}$ باشد، سرعت اولیه‌ی پرتاب چند $\frac{m}{s}$ و زمان حرکت آن از شروع تا رسیدن به زمین، چند ثانیه می شود؟ $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$

الف) ۴، ۲۰ ب) ۶، ۲۰ ج) ۴، ۲۵ د) ۶، ۲۵

۱۲- جسم کوچکی را بدون سرعت اولیه از ارتفاع ۳۰ متری زمین، رها می کنیم. اگر جسم با سرعت $۲۴\frac{m}{s}$ به زمین برسد، شتاب گرانش در محل آزمایش چند متر بر مجذور ثانیه است؟

الف) ۹/۸ ب) ۱۰ ج) ۹/۶ د) ۹/۸

۱۳- گلوله‌ی کوچکی از ارتفاع $h_۰$ بدون سرعت اولیه، سقوط می کند. اگر سرعت آن در ارتفاع ۵ متری زمین برابر $۲۰\frac{m}{s}$باشد، $h_۰$ چند متر است؟ $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$

الف) ۸۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۲۵

۱۴- از ارتفاع ۸۰ متری زمین، گلوله‌ی کوچکی را با سرعت اولیه‌ی $۳۰\frac{m}{s}$، قائم به بالا پرتاب می کنیم، این گلوله با چه بزرگی سرعتی (بر حسب $\frac{m}{s}$) و بعد از چند ثانیه به زمین می رسد؟ $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$

الف) ۵۰ و ۶ ب) ۸۰ و ۸ ج) ۵۰ و ۸ د) ۸۰ و ۶

۱۵- از ارتفاع ۱۵ متری زمین گلوله‌ی کوچکی را با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ قائم به بالا پرتاب می کنیم. بالاترین ارتفاعی که گلوله به آن جا می رسد چند متر است و چند ثانیه در حال بالا رفتن است؟

الف) ۲۰ و ۲ ب) ۳۵ و ۱/۵ ج) ۲۰ و ۱/۵ د) ۳۵ و ۲

۱۶- گلوله‌ی کوچکی را از بالای سطح زمین با سرعت $۲۵\frac{m}{s}$ در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می کنیم چند ثانیه بعد، اندازه‌ی سرعت گلوله به $۵۵\frac{m}{s}$ می رسد؟ $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$

الف) ۴   ب) ۵   ج) ۷   د) ۸

۱۷- گلوله‌ی کوچکی را با سرعت $16\frac{m}{s}$ در راستای قائم به سوی بالا پرتاب می کنیم. بعد از چند ثانیه، بزرگی سرعت جسم به $12\frac{m}{s}$ می رسد؟ $g = 10\frac{m}{s^2}$

الف) فقط ۰/۴   ب) ۰/۸ و ۲/۴   ج) ۰/۴ و ۲/۸   د) فقط ۲/۴

۱۸- از بالای ساختمانی به ارتفاع ۶۰ متر سنگی را در راستای قائم با سرعت $20\frac{m}{s}$ به بالا پرتاب می کنیم. چند ثانیه طول می کشد تا سنگ به زمین برسد؟ $g = 10\frac{m}{s^2}$

الف) ۴   ب) ۶   ج) ۸   د) ۵

۱۹- سنگی در راستای قائم با سرعت اولیه‌ی M به سمت بالا پرتاب می شود. اگر مقاومت هوا ناچیز باشد در لحظه‌ای که سنگ $\frac{1}{4}$ ارتفاع خود را طی کرده سرعت آن چند M است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخنامه چهار گزینه ای فصل سوم

۱) گزینه (الف) صحیح است.

۲)گزینه (د) صحیح است.

۳) گزینه (ج) صحیح است.

۴) گزینه (الف) صحیح است.

۵) گزینه (ب) صحیح است.

۶) گزینه (الف) صحیح است.

۷) گزینه (ج) صحیح است.

۸) گزینه (الف) صحیح است.

۹) گزینه (الف) صحیح است.

۱۰) گزینه (ب) صحیح است.

۱۱) گزینه (الف) صحیح است.

۱۲) گزینه (ج) صحیح است.

۱۳) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۱۴) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۱۵) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۱۶) گزینه (د) صحیح است.

۱۷) گزینه (ج) صحیح است.

۱۸) گزینه (ب) صحیح است.

۱۹) گزینه (د) صحیح است.

فصل ۴

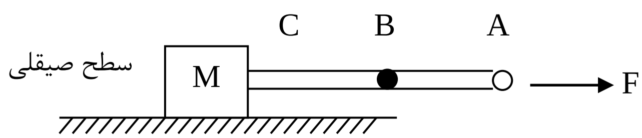
قانون های نیوتن

قانون‌های نیوتن

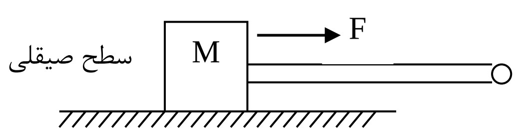
قبل از این که قوانین نیوتن را برای حرکت اجسام روی سطوح صیقلی (بدون اصطحکاک) بیان کنیم از دو فرض ساده‌سازی استفاده می‌کنیم.

فرض اول: در اکثر مثال‌ها و مسائل از جرم طناب چشم‌پوشی می‌کنیم. با این فرض، نیرویی که به ابتدای طناب وارد شود با حفظ اندازه و جهت در طول طناب منتقل می‌شود.

الف) (طناب بدون جرم)



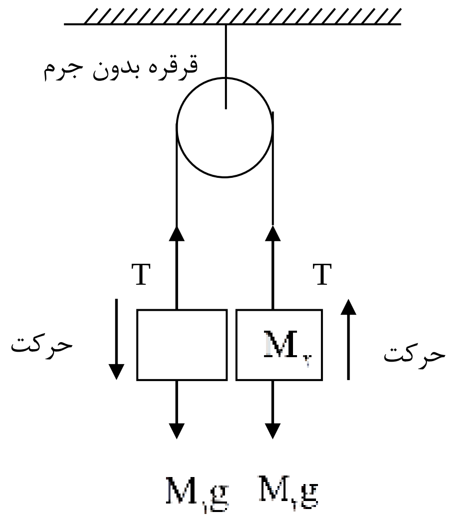
ب) (طناب بدون جرم)



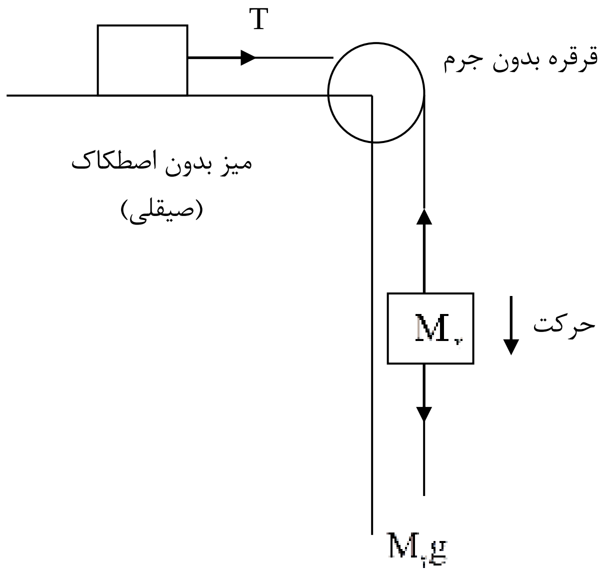
از مقایسه شکل‌های (الف) و (ب) می‌بینیم که نیروی F در نقطه A و C بربرا است و نیروی F به جسم رسیده و به جسم وارد شده است.

فرض دوم: در مسائلی که طناب از روی قرقره عبور کرده است از جرم قرقره نیز صرف نظر می‌شود.

در این حالت نیروی کشش طناب در دو طرف قرقره برابر T است.



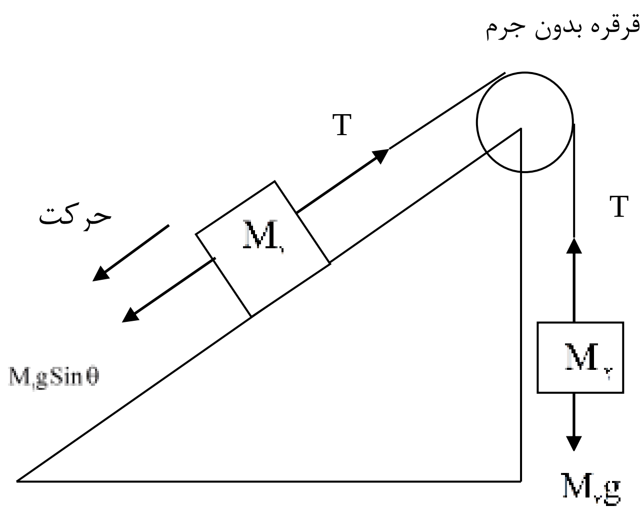
(الف)



(ب)

M_1 به سمت پایین حرکت می کند زیرا: $M_1g > M_2g$

M_2 به سمت پایین حرکت می‌کند.



(ج)

M_2 به سمت بالا و M_1 به سمت پایین حرکت می‌کند زیرا: $M_1 g \sin\theta > M_2 g$ است.

☜ **مثال عددی**

$$M_1 = 4kg$$
$$\theta = 30^\circ$$
$$M_2 = 1kg$$
$$M_1 g \sin\theta = 4 \times 9/8 \times \frac{1}{2} = 2 \times 9/8 = 19/6N$$
$$M_2 g = 1 \times 9/8 = 9/8N$$
$$M_1 g \sin\theta = 19/6N > M_2 g = 9/8N$$

۴-۱- قانون اول نیوتن

برآیند نیروها وارد بر یک جسم صفر است:

$\sum \vec{F}_{\text{نیروها}} = 0$ برآیند (مجموع برداری)

قانون اول نیوتن در دو حالت برای اجسام به کار می‌رود.

حالت اول: جسم ساکن باشد.

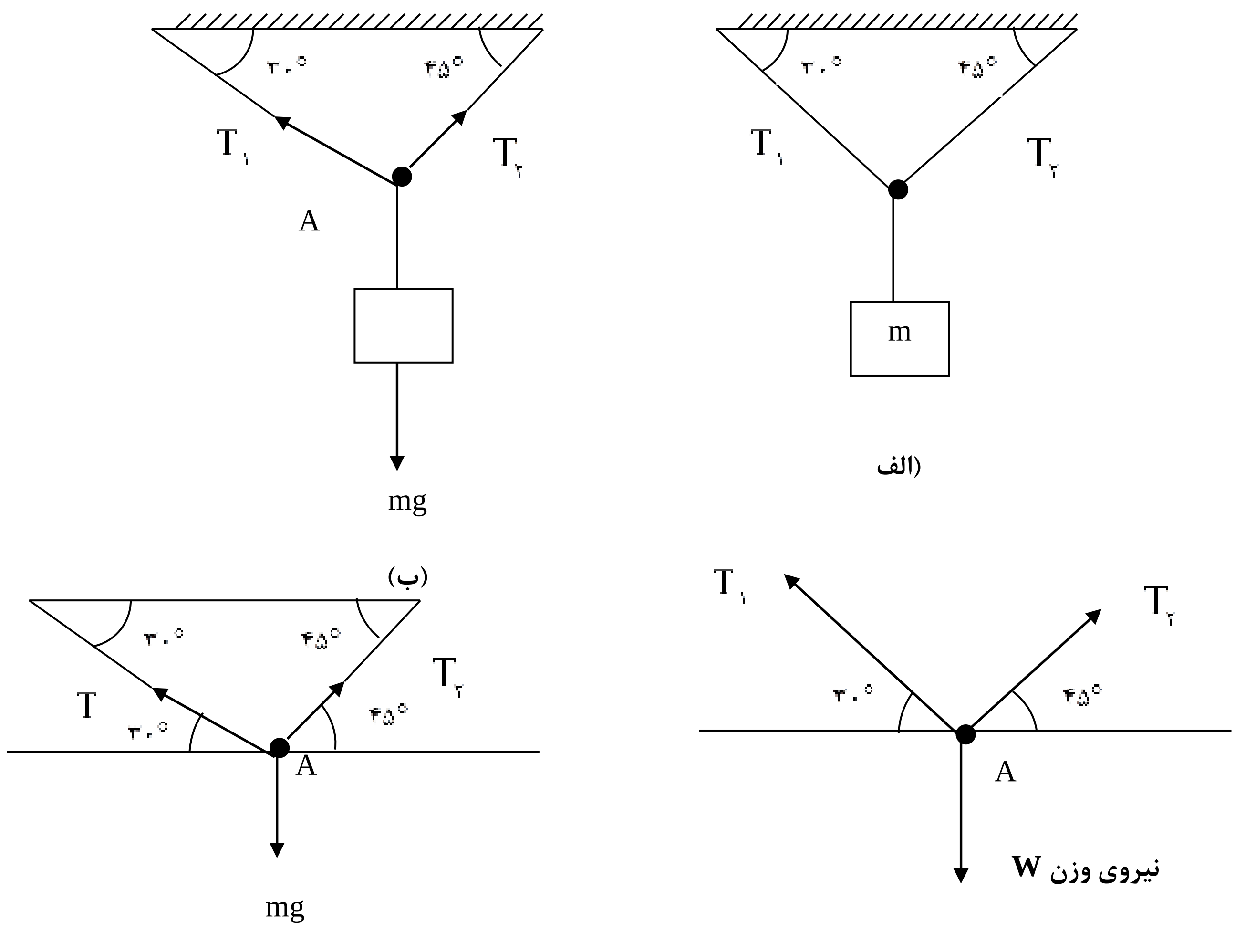
حالت دوم: جسم با سرعت ثابت در یک جاده مستقیم حرکت کند.

حالت اول: در اطراف ما اجسام زیادی مشاهده می‌شود که ساکن هستند و حرکتی ندارند، برای همه این اجسام قانون اول نیوتن به کار می‌رود و $\sum \vec{F} = 0$ است.

حالت دوم: اجسامی که حرکت مستقیم دارند به شرط آن که، سرعت آن‌ها ثابت باشد، مثلاً فرض کنید با اتومبیلی در یک جاده مستقیم حرکت می‌کنید، اگر کیلومتر شمار اتومبیل روی یک عدد مثل $80 Km/h$ ثابت باشد، یعنی بر اتومبیل قانون اول حاکم است یعنی $\sum \vec{F} = 0$ می باشد.

۴- ۲- کاربرد قانون اول در حل مسائل

☜ مثال (۴- ۱): جسمی به جرم ۱۰kg به وسیله سه تکه ریسمان بدون جرم مطابق شکل زیر آویخته شده است. نیروهای کشش $T_۱$ و $T_۲$ را به دست آورید.



(ج)

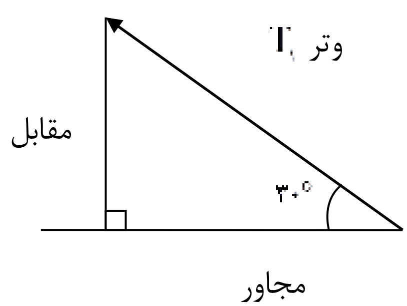
حل: ابتدا نیرو ها را رسم می‌کنیم. نیروی mg با حفظ جهت در ریسمان سوم منتقل می‌شود تا به گره A برسد. با قطع ریسمان ۱، جهت نیروی کشش $T_۱$ (مطابق شکل ب) تعیین می‌شود. با قطع ریسمان ۲، جهت $T_۲$ (مطابق شکل ب) تعیین می‌شود در نتیجه؛ به نقطه ی A سه نیروی $T_۱$ و $T_۲$ و mg وارد می‌شود.

نقطه A (محل گره سه تکه ریسمان) ساکن است و بنابراین قانون اول نیوتن بر آن حاکم است.

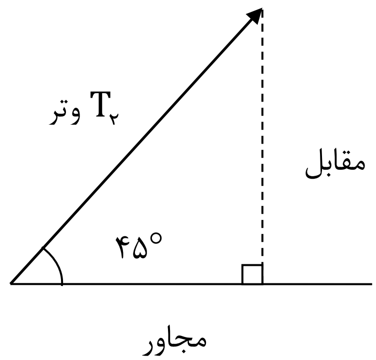
$$\sum \vec{F} = ۰ \Rightarrow \vec{T}_۱ + \vec{T}_۲ + \overrightarrow{W} = ۰$$

$$\text{مجموع نیروها} \begin{cases} \sum F_x = ۰ \Rightarrow T_{۱x} + T_{۲x} + W_x = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow T_{۱y} + T_{۲y} + W_y = ۰ \end{cases} \qquad (۸۵)$$

مؤلفه‌های هر یک از نیروها را به طور جداگانه به دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} \text{مجاور} = \text{وتر} \cos ۳۰° \Longrightarrow T_{۱x} = -T_۱ \cos ۳۰° \\ \text{مقابل} = \text{وتر} \sin ۳۰° \Longrightarrow T_{۱y} = +T_۱ \sin ۳۰° \end{cases} \qquad \begin{cases} T_{۱x} = -\sqrt{\frac{۳}{۲}}\ T_۱ \\ T_{۱y} = \frac{۱}{۲}\ T_۱ \end{cases} \qquad (۸۶)$$



$$\begin{cases} \text{مجاور} = \text{وتر}\ \cos ۴۵^\circ \Longrightarrow +\ T_{۲x} = T_۲ \cos ۴۵^\circ \\ \text{مقابل} = \text{وتر}\ \ \sin ۴۵^\circ \Longrightarrow\ T_{۲y} = +T_۲ \sin ۴۵^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} T_{۲x} = +\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\ T_۲ \\ \\ T_{۲y} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\ T_۲ \end{cases} \tag{۸۷}$$

$W = mg$

$$\begin{cases} W_x = \text{مؤلفه افقی وزن} = ۰ \\ W_y = \text{مولفه عمودی وزن} = -mg \end{cases} \qquad \begin{cases} W_x = ۰ \\ W_y = -mg \end{cases} \tag{۸۸}$$

رابط (۸۶)، (۸۷)، (۸۸) را در رابطه (۸۵) قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{۳}}{۲} T_۱ + \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} T_۲ = ۰ \\ \\ \dfrac{۱}{۲} T_۱ + \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} T_۲ - mg = ۰ \end{cases}$$

طرفین رابطه بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} -\sqrt{۳}\,T_۱ + \sqrt{۲}\,T_۲ = ۰ \\ T_۱ + \sqrt{۲}\,T_۲ = ۲mg \end{cases} \qquad g \cong ۱۰\,\frac{m}{s^۲}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{۳}\,T_۱ + \sqrt{۲}\,T_۲ = ۰ \\ T_۱ + \sqrt{۲}\,T_۲ = ۲ \times ۱۰ \times ۱۰ \end{cases} \qquad \sqrt{۳} = ۱/۷ \quad ; \quad \sqrt{۲} = ۱/۴$$

از روش دو معادله دو مجهول $T_۱$ و $T_۲$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} -۱/۷\,T_۱ + ۱/۴\,T_۲ = ۰ & (۸۹) \\ T_۱ + ۱/۴\,T_۲ = ۲۰۰ & (۹۰) \end{cases}$$

رابطه (۸۹) را در منفی ضرب می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۱/۷\,T_۱ - ۱/۴\,T_۲ = ۰ & (۹۱) \\ T_۱ + ۱/۴\,T_۲ = ۲۰۰ & (۹۲) \end{cases}$$

حال سمت چپ و راست دو رابطه (۹۱) و (۹۲) را با هم جمع می‌کنیم.

$$۱/۷T_۱ + T_۱ + \left(-۱/۴\,T_۲ + ۱/۴\,T_۲\right) = ۰ + ۲۰۰$$

$$۲/۷T_۱ = ۲۰۰$$

$$T_۱ = \frac{۲۰۰}{۲/۷}N$$

حال $T_۱ = \frac{۲۰۰}{۲/۷}N$ را در رابطه (۹۱) قرار می‌دهیم تا $T_۲$ به دست آید.

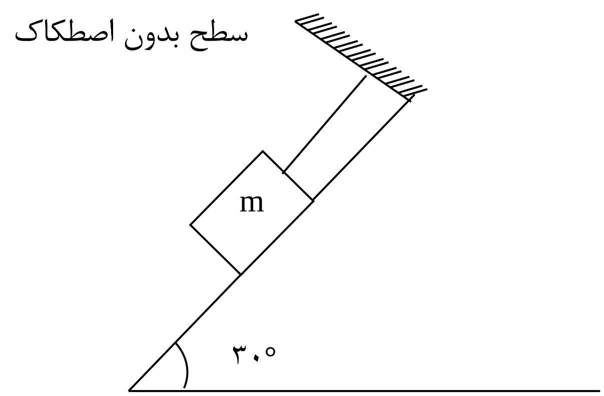
$$۱/۷\,T_۱ - ۱/۴\,T_۲ = ۰ \Rightarrow ۱/۷\,T_۱ = ۱/۴\,T_۲$$

$$\Rightarrow ۱/۷ \times \frac{۲۰۰}{۲/۷} = ۱/۴\,T_۲ \Rightarrow T_۲ = \frac{۱/۷ \times ۲۰۰}{۲/۷ \times ۱/۴}N$$

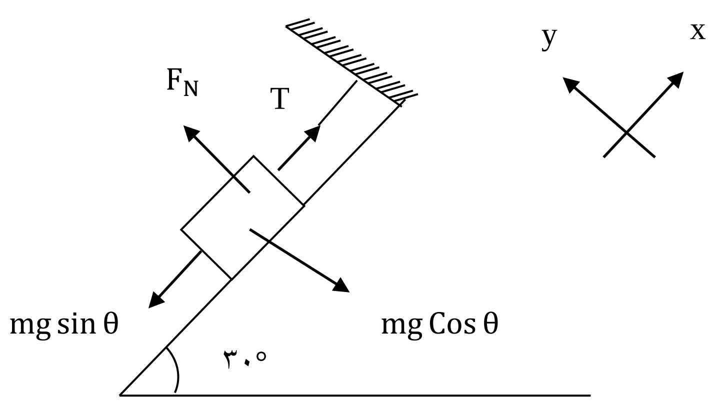
☜ **مثال(۴- ۳).** جسمی به جرم ۲۰ Kg روی سطح شیب‌دار با زاویه $\theta = ۳۰^\circ$ به وسیله ریسمان بدون جرمی به دیوار قائم متصل شده است.

(الف) نیروی کشش ریسمان

(ب) نیروی عکس‌العمل سطح را به دست آورید.



حل: با قطع ریسمان نیروی کشش T مطابق شکل به سمت بالا تعیین می‌شود.



چون جسم ساکن است، قانون اول نیوتن به آن حاکم است.

$$\sum \vec{F} = ۰ \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} T - mg\sin\theta = ۰ \\ F_N - mg\cos\theta = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} T - mg\sin\theta \\ F_N - mg\cos\theta \end{cases} \xrightarrow[g = ۱۰\frac{m}{s^۲}]{\theta = ۳۰^\circ} \begin{cases} T = ۲۰ \times ۱۰ \times \frac{۱}{۲} \\ F_N = ۲۰ \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

۴- ۳- قانون دوم نیوتن

اگر برآیند نیروهای وارد بر جسم به جرم M مخالف صفر باشد $\left(\sum \vec{F} \neq ۰\right)$. آن گاه جسم شتاب $\vec{a}$ دارد که این شتاب با جرم m و برآیند نیروهایی $\sum \vec{F}$ به صورت زیر ارتباط دارد.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{M}$$

به ارتباط فوق، قانون دوم نیوتن می‌گویند و چون رابطه شتاب $\vec{a}$ (یکی از کمیت‌های حرکت)، و برایند نیروها $\sum \vec{F}$ (عامل حرکت) را نشان می‌دهد، به آن دینامیک جسم هم می‌گویند و آن را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}$$

قرارداد

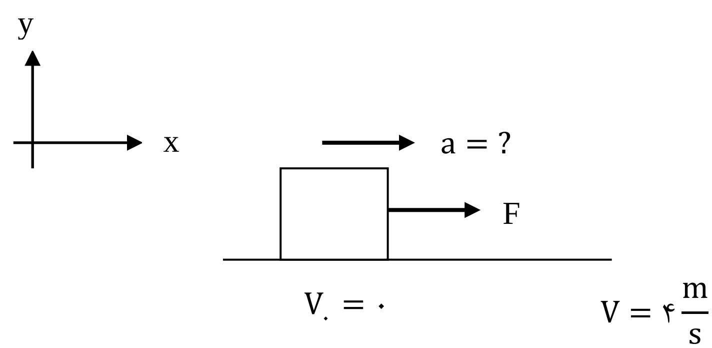
جهت شتاب مثبت ($\vec{a}$) (جهت حرکت با افزایش سرعت) را جهت (+) در نظر می‌گیریم. اگر نیرویی هم جهت با جهت (+) بود آن نیرو یا مؤلفه نیرو را (+) و اگر خلاف جهت (+) بود آن نیرو یا مؤلفه را (-) در نظر می‌گیریم.

☜ **مثال (۴- ۳).** جسمی به جرم ۲Kg روی سطح بدون اصطکاک از حالت سکون تحت تأثیر یک نیروی افقی ۶ نیوتنی به حرکت درمی‌آید و پس از مدتی سرعتش به ۴m/s می‌رسد.

(الف) شتاب آن را به دست آورید؟

(ب) در چه زمانی سرعت به ۴m/s رسیده است؟

حل: $F = ۴\ N \ ,\ \ m = ۲\ Kg \ ,\ \ v_{.} = ۰ \ ,\ \ v = ۴m/s$



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = m \Rightarrow F = ma \\ \sum F_y = ۰ \end{cases}$$

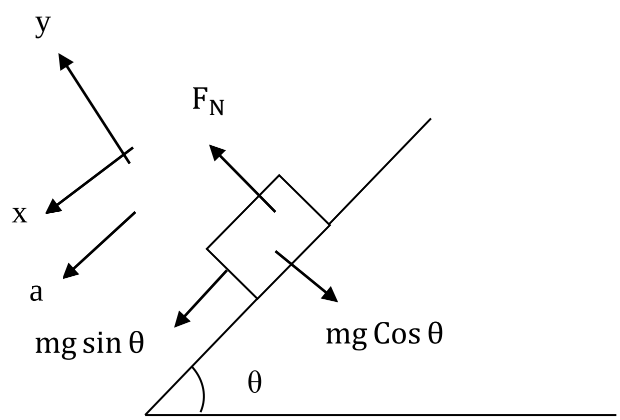
$$F = ma \rightarrow ۶ = ۲a \rightarrow a = ۳m/s^{۲}$$

$$v = at + V_{.} \qquad \rightarrow \qquad ۴ = ۳t + ۰ \rightarrow t = \frac{۴}{۳}s$$

☜ **مثال (۴- ۴).** جسمی به جرم ۲kg روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک با زاویه ۳۰ نسبت به افق از حالت سکون حرکت می‌کند.

(الف) شتاب آن را به دست آورید.

(ب) نیروی عکس‌العمل سطح را تعیین کنید.



حل: چون جسم به سطح پایین حرکت می‌کند، جهت a به سمت پایین است و جهت x + نیز به سمت پایین انتخاب شده است.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = ma \\ \sum F_y = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} mg\sin\theta = ma \\ F_N - mg\cos\theta = ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = g\sin\theta \\ F_N - mg\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = ۱۰\sin ۳۰ \\ F_N = ۲ \times ۱۰ \times \cos ۳۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۵m/s^۲ \\ F_N = ۲۰ \times \frac{\sqrt{۲۰}}{۲} = ۱۷N \end{cases}$$

۴- ۴- کالبد قانون دوم نیوتن در وزن ظاهری

اولین سؤالی که پیش می‌آید این است که وضع ظاهری در چه صورتی مطرح است؟

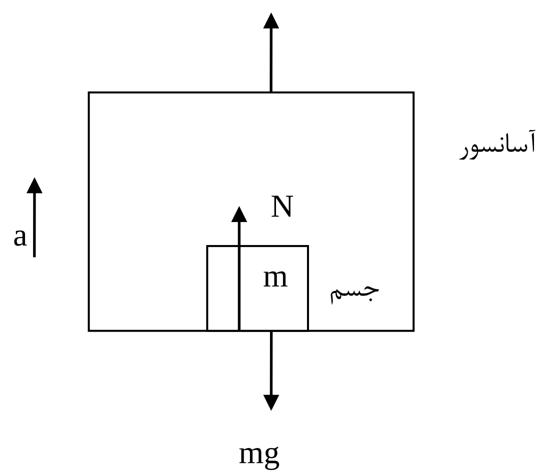
حل: اگر جسمی شخصی به جرم m در یک آسانسور شتاب‌دار با شتاب a قرار داشته باشد آن‌گاه وزن ظاهری برای آن مطرح می‌شود. حال این سؤال مطرح می‌شود که وزن ظاهری چیست؟

وزن ظاهری برابر با نیروی عکس‌العمل کف آسانسور به جسم یا شخص است در صورتی که آسانسور حتماً شتاب داشته باشد.

با توجه به علامت شتاب آسانسور، برای آسانسور دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: آسانسور با شتاب مثبت a حرکت کند یعنی سرعت آسانسور افزایش می‌یابد.

الف) وقتی آسانسور از یک طبقه پایین به طرف بالا شروع به حرکت کند.



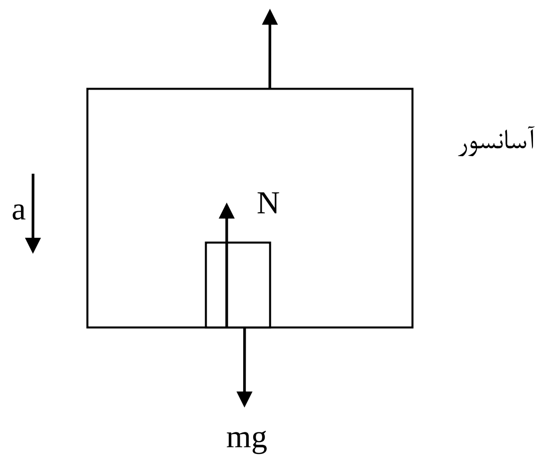
$$\sum F = ma$$

$$N - mg = ma$$

$$N = mg + ma$$

وزن ظاهری N است، که مقدار آن mg به علاوه ma شده است یعنی از وزن واقعی بیشتر است و اگر شخصی در یک چنین وضعیتی در آسانسور باشد، در یک لحظه وزن بیشتری برای خود روی ترازو مشاهده می‌کند و احساس سنگینی می‌کند.

ب) وقتی آسانسور از یک طبقه بالا به طرف پایین شروع به حرکت کند.

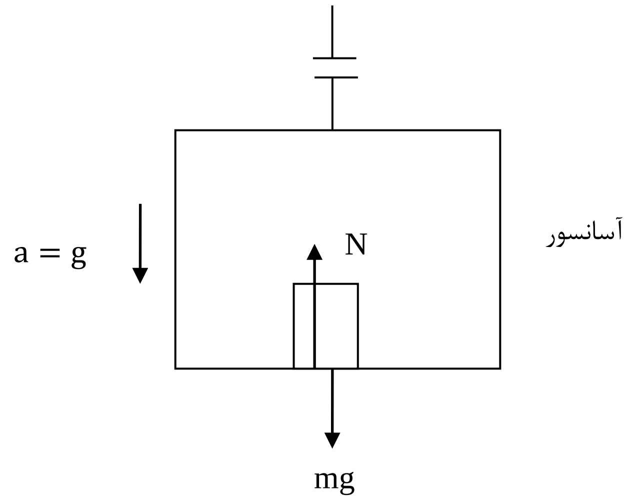


$$\sum F = ma \rightarrow mg - N = ma$$

$$N = mg - ma$$

وزن ظاهری N است که مقدار آن mg منهای $(ma - mg)ma$ است یعنی از وزن واقعی کمتر است و اگر شخصی در یک چنین شرایطی در آسانسور باشد، در یک لحظه وزن کمتری برای خود روی ترازو مشاهده می‌کند و احساس سبکی دارد.

ج) وقتی به کابل آسانسور قطع شود و سقوط کند که شتاب آثار مثبت و برابر g است.



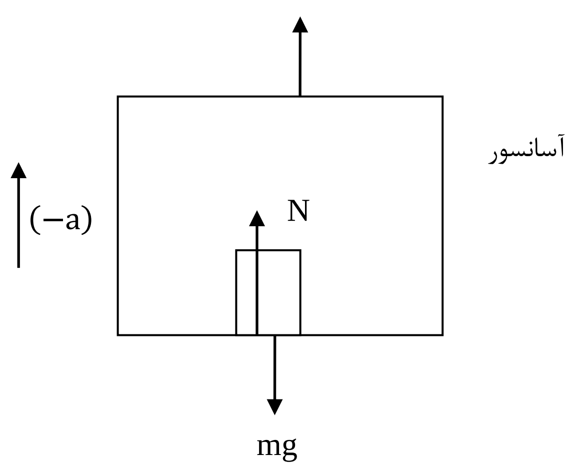
$$\sum F = ma \rightarrow mg - N = ma = ma(a = g)$$

$$mg - N = mg \rightarrow N = mg - ma \Rightarrow N = ۰$$

وزن ظاهری صفر است یعنی شخص روی ترازو در یک لحظه وزنی برای خود مشاهده نمی‌کند و احساس بی‌وزنی دارد چون در یک لحظه کف پای او از روی ترازو جدا می‌شود.

حالت دوم: حرکت آسانسور شتاب منفی $(-a)$ دارد یعنی سرعت آسانسور کاهش می‌یابد.

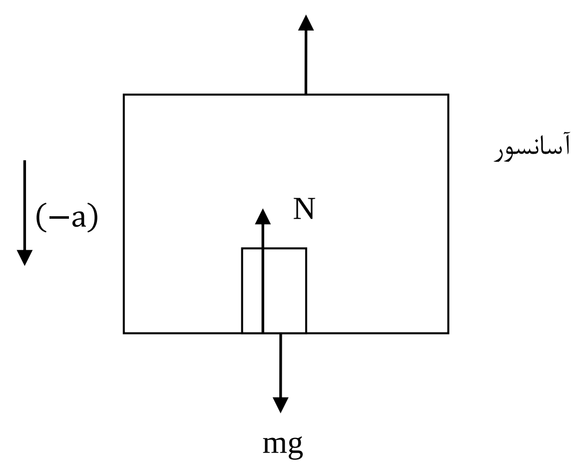
الف) وقتی آسانسور در حال رسیدن به یک طبقه بالاتر است. (حرکت رو به بالا)



$$\sum F = ma \rightarrow N - mg = m(-a)$$
$$N = mg - ma$$

وزن ظاهری N است که مقدار mg منهای ma است، یعنی از وزن واقعی کمتر است و اگر شخصی در یک چنین شرایطی در آسانسور باشد، وزن کمتری برای خود روی ترازو مشاهده می‌کند و احساس سبکی دارد.

ب) وقتی احساس در حال رسیدن به یک طبقه پائین‌تر است. (حرکت رو به پایین)



$$\sum F = ma \rightarrow mg - N = m(-a)$$
$$N = mg + ma$$

وزن ظاهری N است که مقدار آن mg به علاوه ma شده است یعنی از وزن واقعی بیشتر است و اگر شخص در یک چنین وضعیتی در آسانسور باشد، وزن بیشتری برای خود روی ترازو مشاهده می‌کند و احساس سنگین شدن می‌کند.

تذکر: اگر آسانسور با سرعت ثابت به طرف بالا یا پایین در حرکت باشد، $N = mg$ است یعنی وزن ظاهری برابر وزن واقعی mg است.

☜ **مثال (۴- ۵).** آسانسور با شتاب $۲m/s^۲$ از یک طبقه دوم ساختمانی به طرف بالا حرکت می‌کند شخصی به جرم $۵۰Kg$ روی ترازو در آسانسور ایستاده است.

(الف) وضع واقعی چه قدر است؟

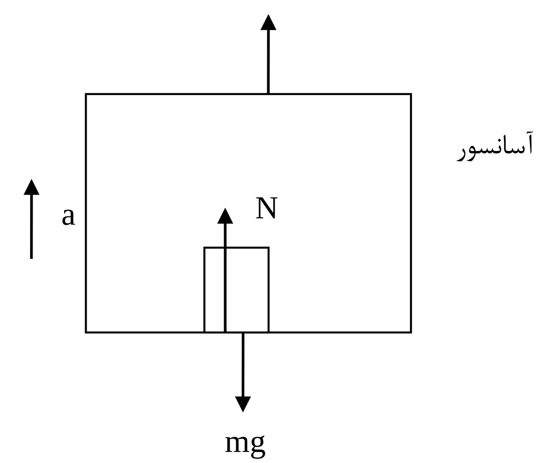
(ب) وزن ظاهری را به دست آورید؟

(ج) از مقایسه (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: الف)

وزن واقعی : $W = mg = ۵۰ \times ۱۰ = ۵۰۰N$

ب)



$$\sum F = ma \rightarrow N - mg = ma$$

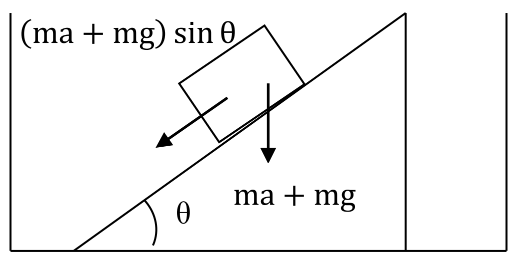
$$N = ۵۰ \times ۱۰ + ۵۰ \times ۲ = ۵۰ + ۱۰۰ \rightarrow N = ۶۰۰_N$$

ج) از مقایسه فرض‌های (الف) و (ب) متوجه می‌شویم، وضع ظاهری شخص $\left(N = ۶۰۰_N\right)$ نسبت به وزن واقعی شخص $W = mg = ۵۰ \times ۱۰ = ۵۰۰N$ بیشتر است و شخص در این لحظه احساس سنگین‌تر می‌کند.

۴- ۵- کاربرد وضع ظاهری در سطح شیب‌دار

☜ **مثال (۴- ۶).** جسم روی سطح شیب‌دار در یک آسانسور شتاب‌دار است، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

۱- آسانسور با شتاب مثبت a به طرف بالا حرکت می‌کند (از یک طبقه پایین‌تر به طرف بالا حرکت می‌کند)، جسمی به جرم m روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک حرکت می‌کند. وزن ظاهری جسم بیشتر و برابر با $mg + ma$ می‌شود.



شتاب جسم روی سطح شیب‌دار به صورت زیر درمی‌آید.

$$\sum F = ma'$$

$$(ma + mg)\sin\theta = ma' \quad \rightarrow \quad a' = (g + a)\sin\theta$$

۲- آسانسور با شتاب مثبت a از یک طبقه بالا به طرف پایین حرکت می‌کند. (از یک طبقه بالاتر و به طرف پائین حرکت می‌کند) وزن ظاهری جسم روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک کم و برابر $mg - ma$ می‌شود.

شتاب جسم روی سطح شیب‌دار به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\sum F = ma'$$

$$(mg - ma)\sin\theta = ma' \qquad \rightarrow \qquad a' = (g - a)\sin\theta$$

۳- اگر آسانسور سقوط کند و $a = g$ باشد:

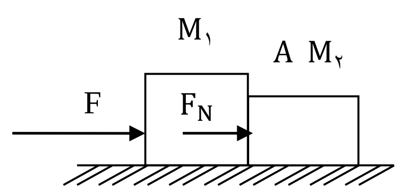
$$\sum F = ma'$$

$$(mg - ma)\sin\theta = ma' \xrightarrow{a=g} \qquad (mg - ma)\ \sin\theta = ma' \rightarrow a' = ۰$$

۴- آسانسور با شتاب منفی $(-a)$ در حال رسیدن به یک طبقه بالاتر است. جسم روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک دارای وزن ظاهری $mg - ma$ می‌شود و شتاب جسم روی سطح شیب‌دار a' به صورت زیر است:

$$\sum F = ma'$$

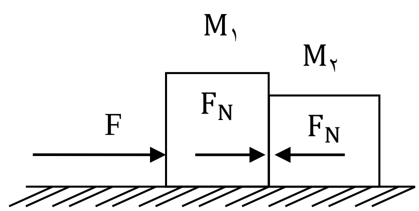
$$(mg - ma)\sin\theta = ma' \qquad \rightarrow \qquad a' = (g - a)\sin\theta$$



می‌دانیم $M_۱$ و $M_۲$ نیروی F_A به سمت راست وارد کرده است، حال قانون سوم نیوتن مطرح می‌شود.

قانون سوم نیوتن

قانون سوم نیوتن بیان می‌دارد که هر عملی را عکس‌العملی است مساوی و خلاف جهت آن، بنابراین $M_۲$ نیز به $M_۱$ همان نیروی F_A را در خلاف جهت (یعنی به سمت چپ) مطابق شکل وارد می‌کند.

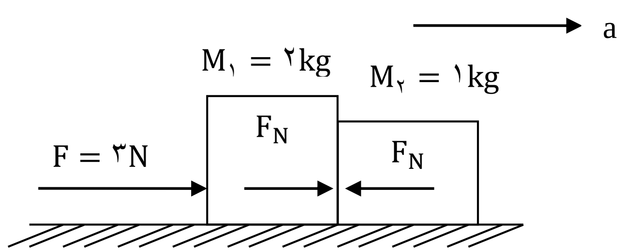


تذکر: برای حل برخی از مسائل که نیروی خارجی به چند جسم وارد شده است، بهتر است، نیروی خارجی را با حفظ جهت و کاهش آن در اجسام متوالی نفوذ دهیم.

۴- ۷- کاربرد قانون سوم نیوتن در حل مسائل

☜ **مثال (۴- ۷).** در شکل زیر، نیروی تماس را به دست آورید.

نیروی تماس در مسئله فوق، منظور نیروی F_A می‌باشد.



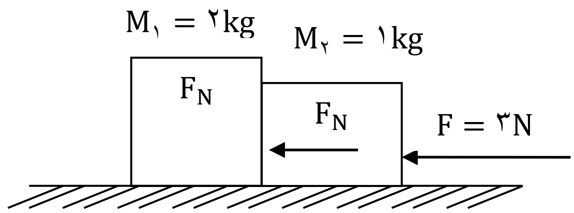
(قانون دوم نیوتن برای $M_۱$ و $M_۲$)
$$F = \left(M_۱ + M_۲\right) a$$

$$۳ = \left(۲ + ۱\right) a \Rightarrow a = ۱\ m/s^۲$$

(قانون دوم نیوتن برای $M_۲$)
$$F_A = M_۲ a$$

$F_A = ۱ \times ۱ = ۱N$

☜ **مثال (۴- ۸).** نیروی تماس را به دست آورید.



(قانون دوم نیوتون برای $M_۱$ و $M_۲$)

$$F = \left(M_۱ + M_۲\right)a$$

$$۳ = \left(۲ + ۱\right)a \Rightarrow a = ۱\ m/s^۲$$

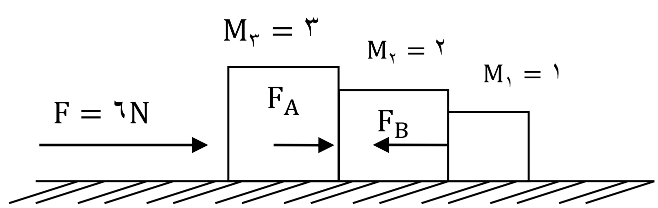
(قانون دوم نیوتون برای $M_۱$)

$$F_A = M_۱ a$$

$$F_A = ۲ \times ۱ = ۲N$$

☜ **مثال (۴- ۹).** نیروهای تماس را در حالت زیر به دست آورید.

F_A و F_B نیروهای تماس در این مسئله هستند.



قانون دوم نیوتون برای $M_۱$ و $M_۲$ و $M_۳$

$$F = \left(M_۱ + M_۲ + M_۳\right)a$$

$$۶ = ۶a \Rightarrow a = ۱\ m/s^۲$$

قانون دوم نیوتون برای $M_۱$ و $M_۲$

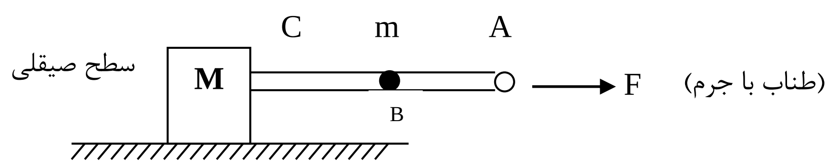
$$F_A = \left(M_۱ + M_۲\right)a$$

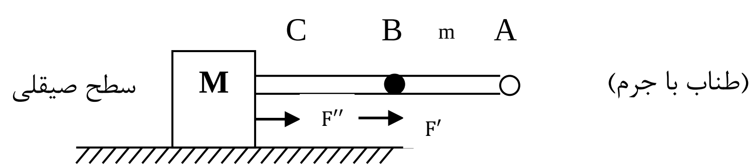
$F_A = ۳ \times ۱ = ۳N$

قانون دوم نیوتون برای $M_۱$ $\quad F_A = M_۱ a$

$F_B = ۱ \times ۱ = ۳N$

نکته: اگر طناب جرم داشته باشد و نیروی F به ابتدای طناب وارد شود، این نیرو با حفظ جهت، اندازه‌اش کمتر می‌شود که مثلاً در یک نقطه مثل B آن را با نیروی F' نشان می‌دهیم و در نقطه C نیز، این نیرو به F'' تبدیل می‌شود. $(F'' < F' < F)$

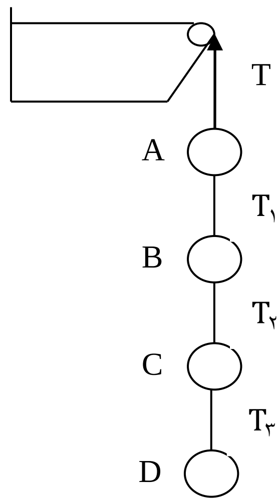




☜ **مثال (۴- ۱۰).** شکل زیر وضعیتی را نشان می‌دهد که در آن چهار قرص به وسیله رشته نخ‌های آویزان مانده‌اند. نخ بالایی که از همه درازتر است، از روی قرقره‌ای بدون اصطکاک می‌گذرد و نیرویی به اندازه ۹۸ N بر دیواری که به آن متصل شده است وارد می‌آورد. نیروهای کشش در نخ کوتاه‌تر عبارت‌اند از $T_۱ = ۵۸/۸\ N$، $T_۲ = ۴۹\ N$ و $T_۳ = ۹/۸\ N$ جرم، (الف) قرص A- (ب) قرص B- (ج) قرص C- (د) قرص D چیست؟

حل: $\quad T = ۹۸\ N$

$$\sum \vec{F} = ۰$$



از قانون اول نیوتن استفاده می‌کنیم چون سیستم ساکن است.

ابتدا D را در نظر می‌گیریم:

$$T_۳ - m_D g = ۰$$

$$T_۳ - m_D g \rightarrow ۹/۸ = ۹/۸ m_D \rightarrow m_D = ۱ \ Kg$$

$T_۲$ که به جرم C اعمال می‌شود بر اثر وزن C و D است، پس داریم:

$$T_۲ - (m_C + m_D)g = ۰ \rightarrow T_۲ - (m_C + m_D)g$$

$$۴۹ = \left(۱ + m_C\right) ۹/۸ \rightarrow ۴۹ - ۹/۸ = ۹/۸\ m_C$$

$$m_C = ۴\ Kg$$

$T_۱$ که بر جرم B وارد می‌شود ناشی از جرم B، C، D است.

$$T_۱ - (m_B + m_C + m_D)g = ۰$$

$$T_۱ - \left(۴ + ۱ + m_B\right) g \rightarrow ۵۸/۸ = ۵ \times ۹/۸ + m_B \times ۹/۸$$

$$۵۸/۸ - ۴۹ = ۹/۸\ m_B$$

$m_B = ۱\ Kg$

کشش نخ T که بر A وارد می‌شود در اثر جرم هر چهار قرص است.

$$T - (m_A + m_B + m_C + m_D)g = ۰$$

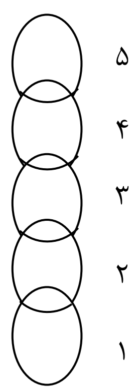
$$T = \left(m_A + ۶\right) g \rightarrow T = m_A g + ۶g$$

$$T = ۹/۸ m_A + ۵۸/۸ \rightarrow ۹۸ - ۵۸/۸ = ۹/۸ m_A$$

$$m_A = ۴\ Kg$$

☜ **مثال (۴- ۱)**. در شکل زیر، زنجیر پنج حلقه‌ای که جرم هر حلقه آن $۰/۱\ kg$ است، با شتاب ثابت $a = ۲/۵\ m/s^۲$ به طور قائم به بالا کشیده می‌شود.

نیروی بالا برنده و نیروهای کشش بین حلقه‌ها را به دست آورید؟



قانون دوم نیوتون را برای ۵ حلقه می‌نویسیم.

$$a = ۲/۵\ m/s^۲$$

$F_۵$ نیروی رو به بالای وارد بر حلقه ۵، است.

$$F_۵ - \left(۵m\right) g = \left(۵m\right) a$$

$$F_{۵} - ۵\left(۰/۱\right)۹/۸ = ۵\left(۰/۱\right)\left(۲/۵\right) \to F_{۵} = ۶/۱۵\ \mathrm{N}$$

برای چهار حلقه پایین‌تر داریم:

$F_{۴}$ نیروی رو به بالای وارد بر حلقه ۴، است.

$$F_{۴} - \left(۴m\right)g = \left(۴m\right)a$$

$$F_{۴} - ۴\left(۰/۱\right)۹/۸ = ۴\left(۰/۱\right)\left(۲/۵\right) \to F_{۴} = ۴/۹۲\ \mathrm{N}$$

برای سه حلقه پایین‌تر داریم:

$F_{۳}$ نیروی رو به بالای وارد بر هر حلقه ۳، است.

$$F_{۳} - \left(۳m\right)g = \left(۳m\right)a$$

$$F_{۳} - ۳\left(۰/۱\right)۹/۸ = ۳\left(۰/۱\right)\left(۲/۵\right) \to F_{۳} = ۳/۶۹\ \mathrm{N}$$

برای دو حلقه پایین‌تر داریم:

$$F_{۲} - \left(۲m\right)g = \left(۲m\right)a$$

$$F_{۲} - ۲\left(۰/۱\right)۹/۸ = ۲\left(۰/۱\right)\left(۲/۵\right) \to F_{۲} = ۲/۴۲\ \mathrm{N}$$

$F_{۲}$ نیروی رو به بالا وارد بر حلقه ۲، است.

برای پایین‌ترین حلقه داریم:

$$F_{۱} - (m)g = (m)a$$

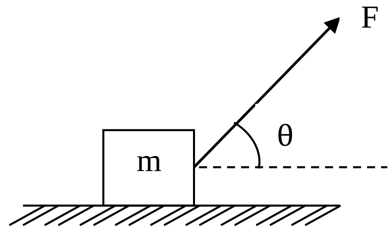
$$F_{۲} - \left(۰/۱\right)۹/۸ = \left(۰/۱\right)\left(۲/۵\right) \to F_{۱} = ۱/۲۳\ \mathrm{N}$$

$F_{۱}$ نیروی رو به بالای وارد بر حلقه ۱، است.

نتیجه: نیروی بالا برنده با حفظ جهت به سمت حلقه‌های پایین‌تر زنجیره نفوذ کرده و مقدار آن کمتر و کمتر شده است.

۴- ۸- مثال‌های متنوع کاربرد قانون‌های نیوتن

☜ **مثال (۴- ۱۲)**. در شکل زیر، قطعه‌ای به جرم $m = ۵\ Kg$ را در امتداد سطح افقی بدون اصطکاکی به وسیله طنابی که نیرویی به اندازه $F = ۱۲N$ و با زاویه $\theta = ۲۵°$ بر آن وارد می‌کند و می‌کشیم.



(الف) اندازه شتاب این قطعه چقدر است؟

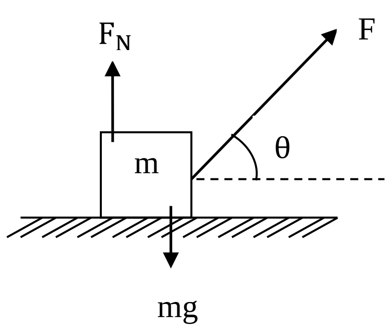
(ب) اندازه F نیرو را به‌آرامی افزایش می‌دهیم مقدار آن درست پیش از آنکه قطعه (کاملاً) از سطح بلند شود چیست؟

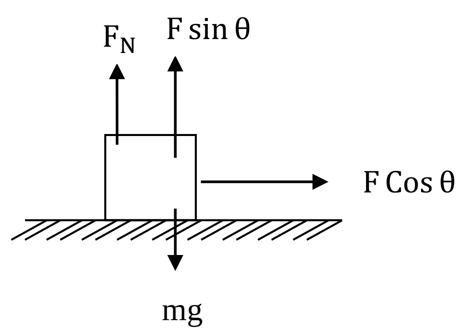
(ج) اندازه شتاب قطعه درست پیش از آن که (کاملاً) از سطح بلند شود، چیست؟

حل:

الف) $\theta = ۱۵° \quad ; \quad m = ۵\ Kg \quad ; \quad F = ۱۲\ N$

نیروی F را به با توجه به زاویه θ ، به مؤلفه‌هایش تجدید می‌کنیم.





چون حرکت در راستای افق صورت می‌گیرد. قانون دوم نیوتون را برای راستای افق در نظر می‌گیریم.

$$\sum F_x = ma \to F\cos\theta = ma$$

$$۱۲\cos ۱۵ = ۵a,$$

$$\left[\cos ۱۵ = \cos\left(۴۵ - ۳۰\right) = \cos ۴۵ \cos ۳۰ + \sin ۴۵ \sin ۳۰ \cong ۰/۹۵\right]$$

$$\to ۱۲ \times ۰/۹۵ = ۵a \ \to a = ۲/۲۸\ m/s^۲$$

ب) در این حالت $F_N = ۰$ می‌شود، پس داریم:

$$F\sin\theta = mg \to F\sin ۱۵ = ۵ \times ۹/۸$$

$$\sin ۱۵ = \sin\left(۴۵ - ۳۰\right) = \sin ۴۵ \cos ۳۰ - \sin ۳۰ \cos ۴۵ \cong ۰/۲۵$$

$$\to F = ۱۹۶N$$

ج) چون هنوز حرکت افقی است.

$$\sum F_x = ma \to F\cos ۱۵ = ۵a \to ۱۹۶\cos ۱۵ = ۵a \to a = ۳۷/۲۴\ m/s^۲$$

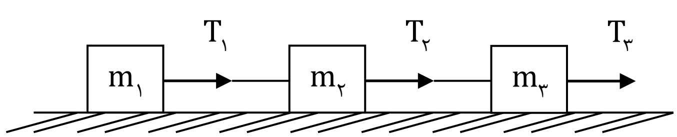
☜ **مثال (۴- ۱۳).** در شکل زیر سه قطعه را که به هم متصل شده‌اند با وارد کردن نیرویی به اندازه $T_۳ = ۶۵\ N$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی به طرف راست می‌کشیم.

اگر $m_۱ = ۱۲\ Kg$، $m_۲ = ۲۴\ Kg$ ، $m_۳ = ۳۱\ Kg$ باشد، کمیت‌های زیر چقدند:

(الف) اندازه شتاب این سیستم سه قطعه‌ای

(ب) کشش $T_۱$

(ج) کشش $T_۲$



حل: قانون دوم نیوتون را برای این سیستم سه قطعه‌ای می‌نویسیم، سیستم با نیروی ۶۵ N کشیده می‌شود.

الف) $\sum F = ma \rightarrow T_{۳} = \left(m_{۱} + m_{۲} + m_{۳}\right)a \rightarrow ۶a = \left(۱۲ + ۲۴ + ۳۱\right)a$

$۶۵ = ۶۷a \rightarrow a = ۰/۹۷\ m/s^{۲}$

ب) برای جرم $m_{۱}$ قانون دوم نیوتن را می‌نویسیم.

$\sum F = m_{۱}a \rightarrow T_{۱} = m_{۱}a \rightarrow T_{۱} = ۱۲ \times ۰/۹۷ = ۱۱/۶۴\ N$

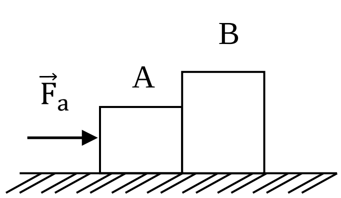
ج) اگر بخواهیم جرم $m_{۱}$ و $m_{۲}$ را با هم در نظر بگیریم.

$$\sum F = ma \rightarrow T_{۲} = \left(m_{۱} + m_{۲}\right)a \rightarrow T_{۲} = \left(۱۲ + ۲۴\right)۰/۹۷ = ۳۴/۹\ N$$

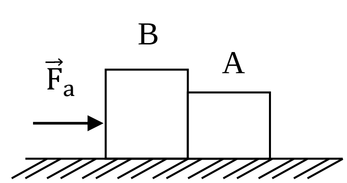
☜ **مثال (۴- ۱۴).** در شکل شماره ۱، یک نیروی ثابت و افقی $\vec{F}_a$ بر قطعه A وارد می‌شود، و در نتیجه آن نیرویی به اندازه ۲۰N در جهت افقی رو به راست بر قطعه B وارد می‌آید. در شکل ۲ همان نیروی $\vec{F}_a$ بر قطعه B وارد می‌شود و در نتیجه آن، این بار نیروی به اندازه ۱۰N از طرف قطعه A در جهت افقی رو به چپ بر قطعه وارد B می‌شود. جرم این دو قطعه در مجموع Kg ۱۲ است.

(الف) اندازه شتاب قطعه‌ها در شکل ۱ چقدر است؟

(ب) نیروی $\vec{F}_a$ چه اندازه‌ای دارد؟



(۱)



(۲)

حل: نیرویی Fa پس از گذشتن از هر جرم، متناسب با میزان جرم، کاهش می‌یابد به طوری که در شکل ۱ نیروی Fa پس از گذشتن از A، کاهش می‌یابد و تنها ۲۰N نیرو به B وارد می‌شود و در شکل ۲ نیز نیروی Fa با گذشتن از B کاهش می‌یابد و ۱۰N نیرو به A اعمال می‌شود که با توجه به قانون سوم نیوتن به همان میزان نیرو یعنی ۱۰N اما در خلاف جهت به B وارد می‌شود. حال قانون دوم نیوتن را برای هر شکل می‌نویسیم.

$$F_a = (m_A + m_B)a = ۱۲a$$

$$۲۰ = m_B a \qquad\qquad ۱۰ = m_A a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲۰ = m_B a \\ ۱۰ = m_A a \end{cases} \quad \Rightarrow\ ۳۰(m_A + m_B)a = ۱۲a \rightarrow a = ۲/۵ m/s^۲$$

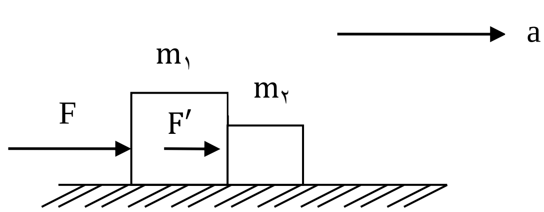
$$F_a = ۱۲a \rightarrow F_a = ۱۲ \times ۲/۵ \Rightarrow F_a = ۳۰\ N$$

☜ **مثال (۴- ۱۵).** دو قطعه روی میز بدون اصطکاک با هم تماس دارند. یک نیروی افقی، چنان که در شکل زیر نشان‌داده شده است و قطعه بزرگ‌تر وارد می‌شود.

(الف) $m_۱ = ۲/۳\ Kg$، $m_۲ = ۱/۲\ Kg$ ، $F = ۳/۲\ N$ اندازه نیرو وارد بین دو قطعه را پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که اگر نیرویی با همان اندازه F اما در جهت مخالف به قطعه کوچک‌تر وارد آید، اندازه نیروی بین دو قطعه برابر با ۲/۱N خواهد شد که با آن چه در قسمت (الف) به دست آمد تفاوت دارد.

(ج) علت این تفاوت را توضیح دهید.



حل: الف)

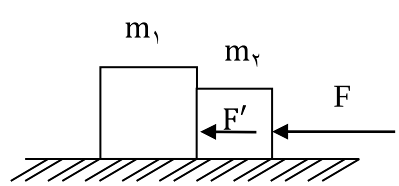
$$F = \left(m_{۱} + m_{۲}\right) a$$

$$۳/۲ = \left(۲/۳ + ۱/۲\right) a \rightarrow ۳/۲ = ۳/۵a \rightarrow a = ۰/۹۱ m/s^{۲}$$

می‌خوانیم در واقع نیرویی که پس از کاهش نیروی $\vec{F}$ در اثر گذشتن از $m_{۱}$ بر $m_{۲}$ اعمال می‌شود را به دست آوریم.

$$F' = m_{۲} a \rightarrow F' = ۱/۲ \times ۰/۹۱ = ۱/۰۹۲ \text{ N}$$

(ب) در واقع می‌خواهیم نیرویی که پس از کاهش نیروی $\vec{F}$ در اثر گذشتن از $m_{۲}$ بر $m_{۱}$ اعمال می‌شود را به دست آوریم.



$$F = \left(m_{۱} + m_{۲}\right) a \rightarrow a = ۰/۹۱ \ \frac{m}{s^{۲}}$$

$$F'' = m_{۱} a$$

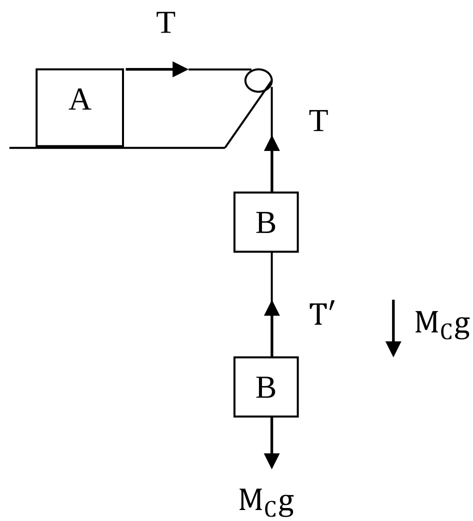
$$F'' = ۲/۴ \times ۰/۹۱ = ۲/۰۹۳ \text{ N} = ۲/۱ \text{ N}$$

(ج) چون نیروی $\vec{F}$ در اثر گذشتن از جرم‌های مختلف متناسب با آن جرم کاهش می‌یابد.

☜ **مثال (۴- ۱۶).** در شکل زیر سه صندوق با رشته نخ‌هایی به هم متصل شده‌اند که یکی از آن‌ها روی قرقره‌ای به جرم ناچیز و اصطکاک ناچیز رد شده است. جرم صندوق‌ها عبارتند از $m_A = ۳۰$ Kg، $m_B = ۴۰$ Kg ، $m_C = ۱۰$ Kg، هنگامی که این مجموعه از حالت سکون رها می‌شود.

(الف) کشش نخی که B و C را به هم متصل کرده است چقدر خواهد شد؟

(ب) صندوق A در اولین بازه زمانی $۰/۲۵S$ چه مسافتی را می‌پیماید. (فرض کنید این صندوق به قرقره نمی‌رسد.)



حل: الف) منظور از به دست آوردن کشش نخ بین B و C به دست آوردن T' است. ابتدا شتاب سیستم را به دست می‌آوریم.

برای به دست آوردن شتاب، نیروی خارجی وارد بر سیستم را در نظر می‌گیریم. $(m_C + m_B)g$ یعنی نیروی گرانش وارد بر جعبه‌های B و C.

$$\sum F = ma$$

$$(m_C + m_B)g = (m_A + m_B + m_C)a$$

$$(۵۰)(۹/۸) = ۸۰a \rightarrow a = ۶/۱۲m/s^۲$$

سپس برای به دست آوردن T' ، جعبه C را به طور مجزا در نظر می‌گیریم.

(ب)

$$m_C g - T' = m_C a \rightarrow \left(۱۰\right)\left(۹/۸\right) - T' = \left(۱۰\right)\left(۶/۱۲\right)$$

$$۹۸ - T' = ۶۱/۲ \rightarrow T' = ۶۱/۲ - ۹۸ \rightarrow T' = ۳۶/۸\ \text{N}$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{.}t\left(v_{.} = ۰\right) \rightarrow x = \frac{۱}{۲}at^{۲}$$

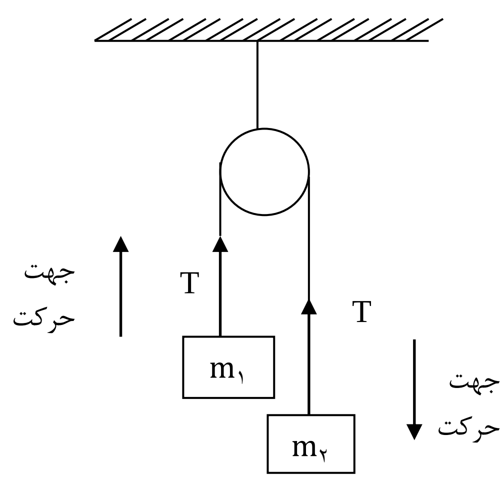
$$x = \frac{۱}{۲}\left(۶/۱۲\right)\left(۰/۲۵\right)^{۲} = ۰/۱۹۱\ \text{m}$$

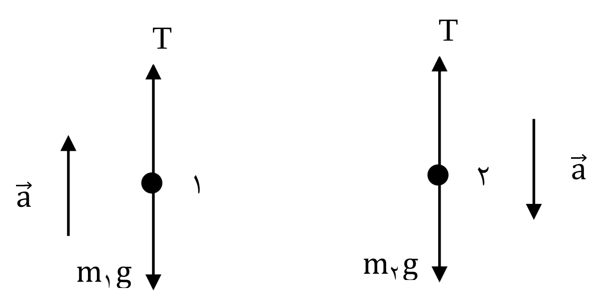
☜ **مثال (۴- ۱۷).** شکل زیر دو قطعه را نشان می‌دهد که با یک نخ رشته نخ (به جرم ناچیز) که از روی قرقره‌ای بی اصطکاک (باز هم به جرم ناچیز) عبور کرده است، به یکدیگر متصل شده-اند. این آرایش را ماشین آتود می‌گویند. جرم یه قطعه $m_۱ = ۱/۳\ \text{Kg}$ و جرم دیگری $m_۲ = ۲/۸\ \text{Kg}$ است.

(الف) اندازه شتاب حرکت این قطعه‌ها

(ب)کشش نخ را به دست آورید.

دو جسم را به‌طور مجزا در نظر می‌گیریم و نیروهای وارد بر آن را رسم می‌کنیم.





$$T - m_۱ g = m_۱ a \qquad ; \qquad m_۲ g - T = m_۲ a$$

دو معادله را با هم جمع می‌کنیم:

$$m_۲ g - m_۱ g = m_۲ a + m_۱ a$$

$$\left(m_۲ - m_۱\right) g = \left(m_۲ + m_۱\right) a \rightarrow a = \frac{\left(m_۲ - m_۱\right) g}{\left(m_۲ + m_۱\right)} \rightarrow a = ۳/۶\ m/s^۲$$

$$T - m_۱ g = m_۱ a \ \rightarrow T - m_۱ g = m_۱ \frac{\left(m_۲ - m_۱\right) g}{m_۲ + m_۱}$$

$$T = \left[\frac{۲ m_۱ m_۲}{m_۲ + m_۱}\right] g \rightarrow T = ۱۷\ N$$

☜ **مثال (۴- ۱۸).** قطعه‌ای به جرم $m_۱ = ۳/۷\ Kg$ که در سطح شیب‌دار بی اصطکاکی با زاویه $\theta = ۳۰°$ قرار دارد، به وسیله نخی که روی قرقره‌ای بدون اصطکاک گذشته است، به قطعه دیگری به جرم $m_۲ = ۲/۳\ Kg$ متصل شده است.

(الف) جهت شتاب در قطعه‌ای که آویزان شده است چیست؟

(ب) اندازه شتاب هر قطعه چقدر است؟

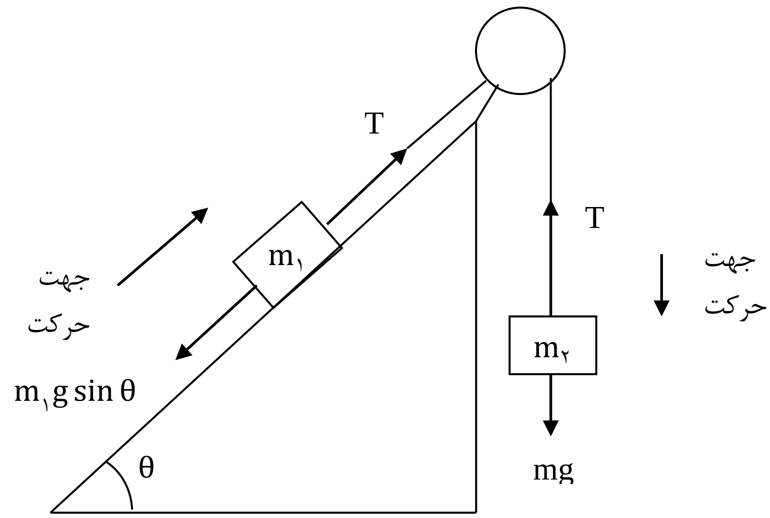
(ج) کشش نخ چقدر است؟

حل: ابتدا بررسی می‌کنیم که $m_۲ g$ بزرگ‌تر است یا $m_۱ g \sin\theta$. تا بتوانیم جهت حرکت را مشخص کنیم.

$$m_۲ g = ۲۲/۵۴\ N \qquad , \qquad m_۱ g \sin\theta = ۱۸/۱۳\ N$$

$$m_۲ g > \ m_۱ g \sin\theta$$

جهت شتاب برای قطعه آویزان رو به پایین است (جهت مثبت رو به پایین است).



ب) قانون دوم نیوتون را برای هر جسم در نظر می‌گیریم.

$$T - m_۱ g\sin\theta = m_۱ a \qquad ; \qquad m_۲ g - T = m_۲ g$$

دو معادله را با هم جمع می‌کنیم:

$$m_۲ g - m_۱ g\sin\theta = \left(m_۱ + m_۲\right)a$$

$$۲۲/۵۴ - ۱۸/۱۳ = ۶a \rightarrow ۴/۴۱ = ۶a \rightarrow a = ۰/۷۳۵\ N$$

ج)

$$T - m_۱ g\sin\theta = m_۱ a \rightarrow$$

$$T - ۱۸/۱۳ = \left(۳/۷\right)\left(۰/۷۳۵\right)$$

$$\rightarrow T = ۱۸/۱۳ + ۲/۷۱۹۵$$

$$T = ۲۰/۸۴\ N$$

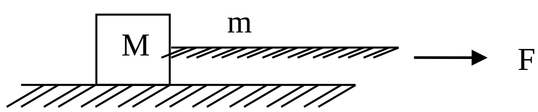
☜ **مثال (۴- ۱۹).** قطعه‌ای به جرم M با طنابی به جرم m در امتداد سطح افقی بدون اصطکاکی، چنان که در شکل زیر آمده است کشیده می‌شود. نیروی افقی F بر یک سر طناب وارد می‌آید.

(الف) نشان دهید که وسط این طناب الزاماً پایین می‌آید، حتی اگر میزان آن بسیار نامحسوس باشد. سپس با فرض این که این مقدار ناچیز است.

(ب) شتاب حرکت طناب و قطعه.

(ج) نیروی وارد بر قطعه از طرف طناب

(د) کشش طناب را در نقطه وسط آن به دست آورید.



حل: الف) چون تنها جرم دارد، بنابراین یک نیروی m به طرف پایین بر آن وارد می‌شود که این نیرو عمود بر نیروی F است و باعث پایین آمدن طناب می‌شود.

ب) برای به دست آوردن شتاب، طناب و جعبه را یک سیستم در نظر می‌گیریم نیرویی که به این سیستم وارد می‌شود F است پس داریم.

$$\sum F = ma$$

$$F = (m + M)a \rightarrow a = \frac{F}{m + M}$$

ج) نیرویی که از طرف طناب به جعبه وارد می‌شود، نیروی F نیست، زیرا این نیرو در طول طناب کاهش می‌یابد و درواقع نیروی $F_۲$ به جعبه وارد می‌شود. برای به دست آوردن این نیرو قانون دوم نیوتن را برای جعبه می‌نویسیم.

$$F_۲ = Ma = \frac{F}{m + M}$$

د) نیمی از طناب و جعبه را به صورت یک سیستم در نظر می‌گیریم. تنها نیروی وارد بر این سیستم نیروی کشش نخی است که به دنبال آن می‌گردیم.

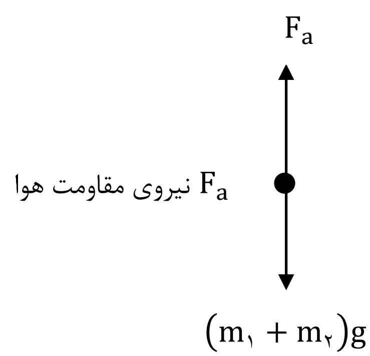
نیروی کشش نخ در نقطه میانه طناب $T_m = \left(m + \frac{۱}{۲}m\right)a = \left(M + \frac{۱}{۲}m\right)\frac{F}{m+M}$

☜ **مثال (۴- ۲۰)**. شخصی به جرم ۸۰Kg به وسیله چتر نجات با شتاب $۲/۵\ m/s^{۲}$ پایین می‌آید. جرم چتر ۵Kg است.

(الف) مقدار نیروی رو به بالایی که از طرف هوا به چتر وارد می‌شود چقدر است؟

(ب) مقدار نیروی رو به پایین که از طرف شخص به چتر وارد می‌شود چقدر است؟

برای قسمت (الف) چتر و شخص را به صورت یک جسم در نظر می‌گیریم و با توجه به شتاب داده شده قانون دوم نیوتون را برای آن می‌نویسیم.



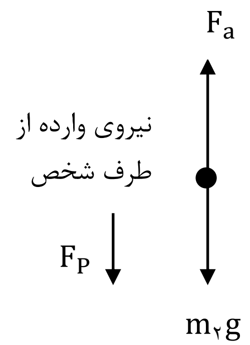
حل:

الف)

$$\left(m_۱ + m_۲\right)g - F_a = \left(m_۱ + m_۲\right)a \rightarrow \left(۸۰ + ۵\right)g - F_a = \left(۸۰ + ۵\right)a$$

$$\left(۸۵\right)\left(۹/۸\right) - F_a = \left(۸۵\right)\left(۲/۵\right) \rightarrow ۸۳۳ - F_a = ۲۱۲/۵ \rightarrow F_a = ۶۲۰\ N$$

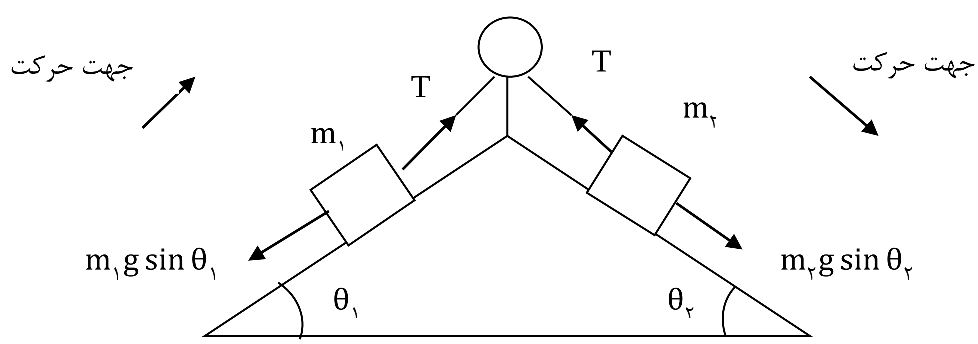
ب) برای به دست آوردن نیروی وارد بر چتر از طرف شخص باید نمودار نیروهای وارد بر چتر را رسم کنیم.



سپس از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم.

$$m_۲g + F_P - F_a = m_۲a$$
$$۵\left(۹/۸\right) + F_P - ۶۲۰/۵ = ۵\left(۲/۵\right)$$
$$۴۹ + F_P - ۶۲۰/۵ = ۱۲/۵$$
$$F_P = ۱۲/۵ + ۶۲۰/۵ - ۴۹ \rightarrow F_P = ۵۸۴\ N$$

☜ **مثال (۴- ۲۱)**. شکل زیر، جعبه‌ای به جرم $m_۱ = ۳\ Kg$ را روی یک سطح شیب‌دار بدون اصطکاک با زاویه $\theta_۱ = ۳۰°$ نشان می‌دهد. این جعبه با نخی که جرم ناچیز دارد، به جعبه دیگری به جرم $m_۲ = ۲\ Kg$ که روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک دیگری با زاویه‌ی $\theta_۲ = ۶۰°$ قرار دارد متصل شده است. قرقره هم بی اصطکاک و هم بدون جرم است. اندازه کشش نخ چقدر است؟



حل: چون $m_2 g\sin\theta_2 = ۱۶/۶۶$ بزرگ‌تر از $m_1 g\sin\theta_1 = ۱۴/۷$ است، m_2 به سمت پایین حرکت می‌کند.

قانون دوم نیوتون را برای هر جسم در نظر می‌گیریم:

$$T - m_1 g\sin\theta = m_1 a \qquad ; \qquad m_2 g\sin\theta - T = m_2 g$$

دو معادله را با هم جمع می‌کنیم:

$$\sum F = ma \rightarrow m_2 g\sin\theta_2 - m_1 g\sin\theta_1 = \left(m_1 + m_2\right) a$$

$$a = ۰/۴۵\ m/s^2$$

جسم m_1 را در نظر می‌گیریم:

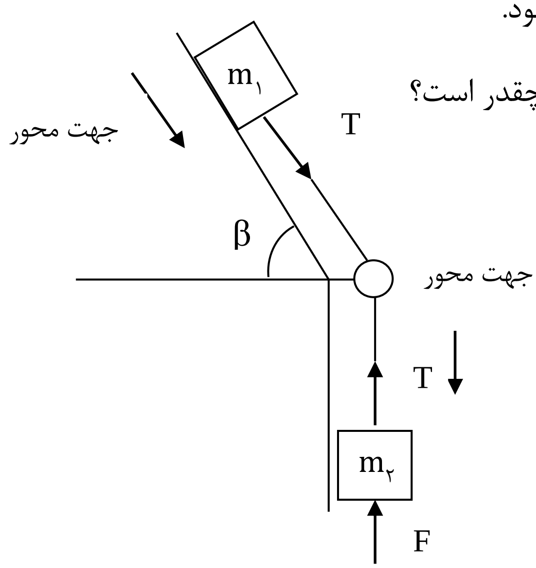
$$\sum F = m_1 a \rightarrow T - m_1 g\sin\theta_1 - m_1 a$$

$$T - ۱۴/۷ = ۱/۳۵ \rightarrow T = ۱۵/۰۵\ N$$

☜ **مثال (۴- ۲۲).** در شکل زیر جعبه‌ای به جرم $m_1 = ۱\ Kg$ که روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی قرار دارد به جعبه دیگری به جرم $m_2 = ۲\ Kg$ متصل شده است. قرقره به کار برده شده بی جر و بدون اصطکاک است. نیروی رو به بالایی به اندازه $F = ۶\ N$ بر جعبه دوم که شتاب رو به پایین به اندازه $۵/۵\ m/s^2$ دارد وارد می‌شود.

(الف) کشش نخ که دو جعبه را به هم متصل کرده است چقدر است؟

(ب) زاویه‌ی β چقدر است؟



حل:

$a = ۵/۵ m/s^{۲} \qquad , \qquad F = ۶\,N$

قانون دوم برای جرم $m_۲$

$m_۲ g - F - T = m_۲ g$

$T = ۲/۶\,N$

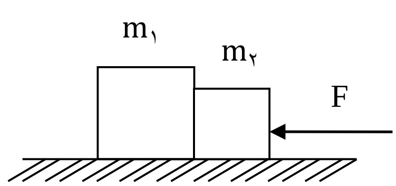
قانون دوم برای جرم $m_۱$

$T + m_۱ g \sin\beta = m_۱ a$

$$\sin\beta = \frac{۲/۹}{۹/۸} \rightarrow \beta \cong ۱۷^{\circ}$$

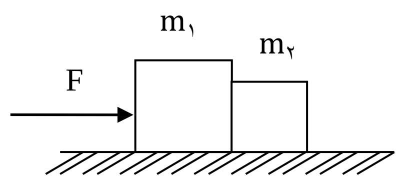
☜ مثال (۴- ۲۳). دو جسم روی میز بدون اصطکاکی با هم در تماس‌اند. یک نیروی افقی مطابق شکل به یکی از دو جسم وارد می‌شود.

الف) اگر $m_۱ = ۲\,Kg$ ، $m_۲ = ۱\,Kg$ ، $F = ۳\,N$ ، نیروی تماس میان دو جسم را پیدا کنید.



(۱)

ب) نشان دهید که اگر همان نیروی F به جای $m_۲$ به $m_۱$ وارد شود، نیروی تماس میان اجسام ۲N می‌شود که با مقدار به دست آمده در حالت (الف) مساوی نیست، علت آن را توضیح دهید.



(۲)

حل: الف)

$$F = \left(m_۱ + m_۲\right) a$$

$$۳ = \left(۲ + ۱\right) a \rightarrow a = ۱ m/s^۲$$

در شکل (۱)، قانون دوم نیوتون را برای جسم $m_۱$ می‌نویسیم.

$$\sum F = m_۱ a \rightarrow F' = m_۱ a$$

$$F' = ۲ \times ۱ = ۲ m/s^۲$$

ب)

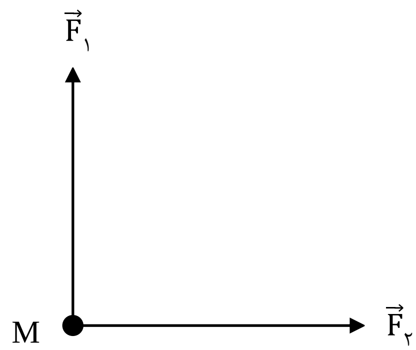
$$a = ۱ m/s^۲$$

در شکل (۲)، قانون دوم نیوتن را برای جسم $m_۲$ می‌نویسیم تا نیروی تماس به دست آید.

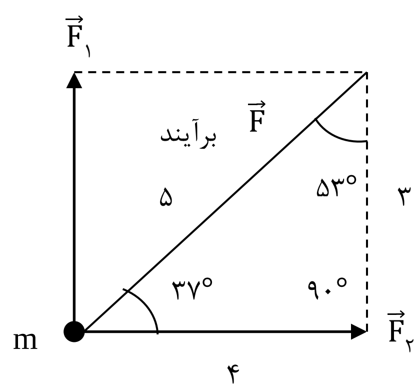
$$F'' = m_۲ a \rightarrow F'' = ۱ \times ۱ = ۱N$$

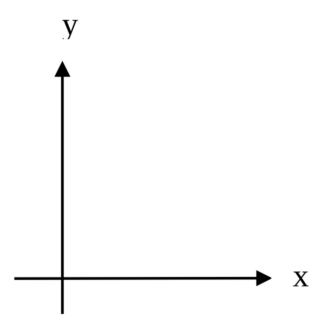
این اختلاف، به دلیل اختلاف در انتقال نیرو از طریق جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ است.

☜ **مثال (۴- ۲۴).** جسمی به جرم m مطابق شکل تحت تأثیر دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ قرار دارد. اگر $m = ۵\,Kg$، $F_۱ = ۳\,N$ و $F_۲ = ۴\,N$ بردار شتاب جسم را پیدا کنید.



حل:





$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \sum F_x = ma_x \qquad , \qquad \sum F_y = ma_y$$

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow ۴ = ۵a_x \rightarrow a_x = ۰/۸$$

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow ۳ = ۵a_y \rightarrow a_y = ۰/۶$$

$$\rightarrow \vec{a} = ۰/۸\hat{i} + ۰/۶\hat{i}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^۲ + a_y^۲} = ۱ \qquad , \qquad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{۰/۸}{۰/۶} \rightarrow \theta = ۵۳/۱۳ \approx ۵۳°$$

☜ **مثال (۴- ۵۴).** الکتریکی با سرعت $۱/۲\times ۱۰^{۷} m/s^{۲}$ از یک تفنگ الکترونی در راستای افقی به داخل یک میدان الکتریکی پرتاب می‌شود. این میدان نیروی قائم و ثابت $۴/۵\times ۱۰^{-۱۶}$ بر الکترون وارد می‌کند. جرم الکترون $۹/۱\times ۱۰^{-۳۱}$ است/ فاصله قائمی که الکترون در طی مسافت افقی ۳ منحرف می‌شود را پیدا کنید.

حل:

$$x = vt \to ۰/۰۳ = ۱/۲\times ۱۰^{۷} t \to t = \frac{۲}{۱/۲}\times ۱۰^{-۹s}$$

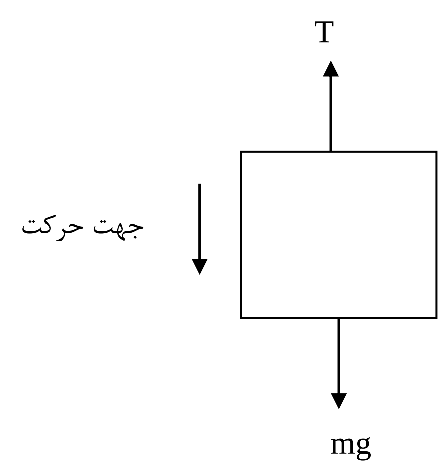
$$F = ma \to ۴/۵\times ۱۰^{-۱۶} = ۹/۱\times ۱۰^{-۳۱} a \to a = \frac{۴/۵}{۹/۱}\times ۱۰^{۱۵}\frac{m}{s^{۲}}$$

حرکت در راستای قائم $y = \frac{۱}{۲}at^{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۴/۵}{۹/۱}\times ۱۰^{۱۵}\right)\left(\frac{۹}{۱/۴۴}\times ۱۰^{-۱۸}\right)$

$$t = ۱/۵\times ۱۰^{-۳} m \to y = ۱۵mm$$

☜ **مثال (۴- ۲۶).** چگونه می‌توان به وسیله طنابی که با نیروی $۴۲۰\ N$ پاره می‌شود، یک جسم ۵۰ کیلوگرمی را از پشت‌بام پایین آورد بدون آن که طناب پاره شود؟

حل:



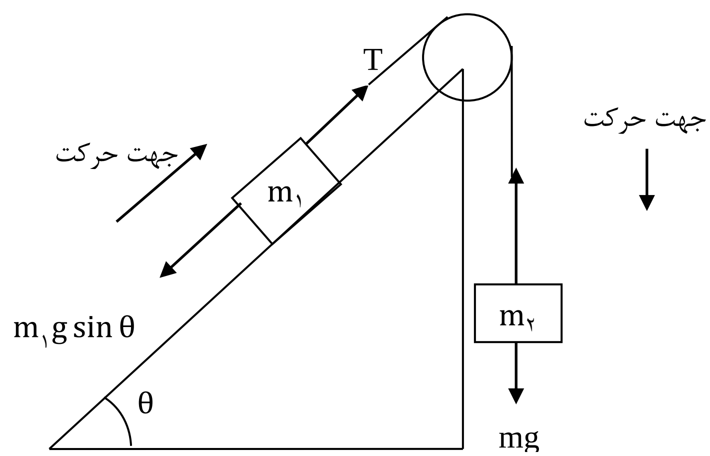
$$mg - T = ma$$
$$۴۹۰ - ۴۲۰ = ma$$
$$۷۰ = ۵۰a \rightarrow a = ۱/۴ m/s^۲$$

شتاب پایین آمدن جسم باید بزرگ‌تر باشد یا مساوی $۱/۴ m/s^۲$ باشد تا طناب پاره نشود.

☜ **مثال (۴- ۲۷).** جسمی به جرم $m_۱ = ۳\ Kg$ بر روی یک سطح شیب‌دار صیقلی با زاویه ۳۰ درجه قرار دارد و به وسیله ریسمانی که از روی قرقره بدون اصطکاکی گذشته است، به جسم دیگر به جرم $m_۲ = ۲\ Kg$ که به طور قائم آویزان است وصل شده است.

(الف) شتاب هر یک از این دو جسم چقدر است؟

(ب) نیروی کشش ریسمان چقدر است؟



حل:

$$m_۱ = ۳kg \rightarrow m_۱ g\sin\theta = ۳\times ۹/۸\times\frac{۱}{۲} = ۱۴/۷N \Rightarrow m_۲ = ۱۹/۶N > m_۱ g\sin\theta = ۱۴/۷N$$

$$m_۲ = ۲kg \rightarrow m_۲ g = ۲\times ۹/۸ = ۱۹/۶N$$

$$\sum F = ma ۱۹/۶ - ۱۴ - ۷ = ۵a \rightarrow a = ۰/۹۸ m/s^۲$$

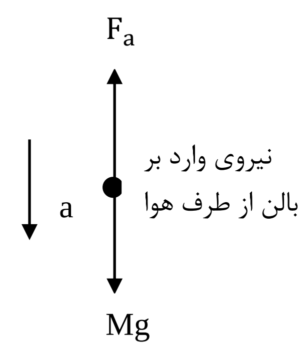
$$m_۲ g - T = m_۲ a \rightarrow ۱۹/۶ - T = ۱/۹۶$$

$$T = ۱۹/۶ - ۱/۹۶$$

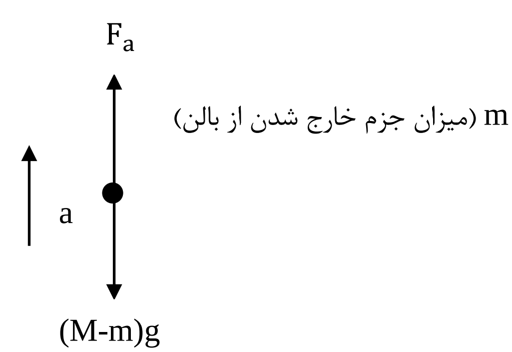
$$T = ۱۷/۶۴N$$

☜ **مثال (۴- ۲۸).** یک بالن تحقیقاتی با جرم کل M در راستای قائم با شتاب a ؟؟؟ می‌آید. چقدر از وزنه‌های تعادل باید از بالون بیرون ریخته شود تا بالون شتابی برابر a به ؟؟؟ بالا پیدا کند؟

فرض کنید نیرویی رو به بالایی که از طرف هوا بر بالون وارد می‌شود (نیروی شناوری) بر آن کاهش جرم تغییر نمی‌کند.



$$Mg - Fa = Ma \rightarrow Fa = Mg(g-a) \tag{۹۳}$$



$$Fa-(M-m)g=(M-m)a$$

$$Fa-Ma+mg=Ma-ma \qquad (۹۴)$$

رابطه‌ی (۹۳) را در (۹۴) قرار می‌دهیم.

$$Mg-Ma-Mg+mg=Ma-ma$$
$$mg+ma=Ma+Ma$$
$$m(g+a)=۲Ma$$
$$m=\frac{۲Ma}{g+a}$$

☜ **مثال (۴- ۹۴)**. جسمی به جرم m روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی که با کف آسانسور زاویه θ می‌سازد، به طرف پائین می‌لغزد. شتاب جسم را نسبت به سطح شیب‌دار در حالت‌های زیر پیدا کنید.

(الف) آسانسور با سرعت ثابت پایین می‌آید.

(ب) آسانسور با سرعت ثابت v بالا می‌رود.

(ج) آسانسور با شتاب تند شونده (مثبت) a پایین می‌آید.

(د) آسانسور با شتاب کند شونده (منفی) a پایین می‌آید.

(هـ) کابل آسانسور پاره می‌شود.

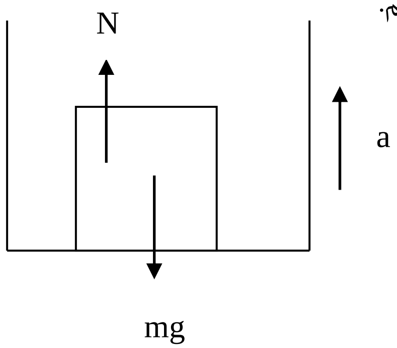
(و) در قسمت (ج) نیروی وارد بر جسم از طرف سطح شیب‌دار چقدر است؟

حل: ابتدا وزن جسم را به دست می‌آوریم، سپس شرایط سطح شیب‌دار را در نظر می‌گیریم.

(الف) سرعت ثابت یعنی $a=۰$، پس شتاب جسم از رابطه $g\sin\theta$ به دست می‌آید، زیرا $mg\sin\theta=ma' \rightarrow a'=g\sin\theta$ ، شتاب به سمت پایین است.

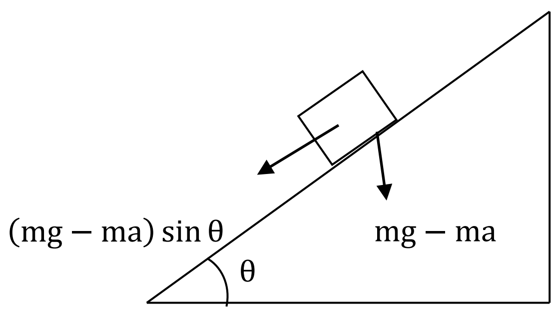
(ب) سرعت ثابت است یعنی آسانسور شتابی ندارد پس باز هم شتاب از رابطه‌ی $g\sin\theta$ به دست می‌آید. شتاب به سمت پایین سطح شیب‌دار است.

(ج) در این مرحله ابتدا وزن ظاهری جسم کف آسانسور را می‌یابیم.



$$mg - N = ma \rightarrow N = mg - ma$$

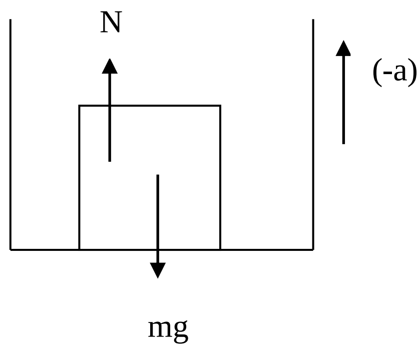
نیروی وزن ظاهری $mg - ma$ را داریم، حال به بررسی سطح شیب‌دار می‌پردازیم.



$$\sum F = ma' \rightarrow (mg - ma)\sin\theta = ma'$$

$a' = (g - a)\sin\theta$ به سمت پایین سطح شیب‌دار

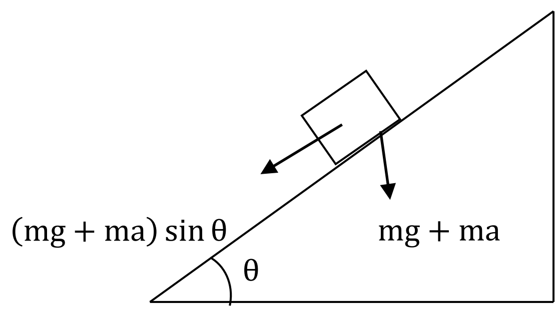
(د) ابتدا وزن ظاهری جسم را بدون در نظر گرفتن سطح شیب‌دار به دست می‌آوریم.



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow mg - N = m(-a)$$

$$mg - N = -mg \rightarrow -N = -mg - mg \rightarrow N = mg + ma$$

حال با وزن ظاهری mg + ma سطح شیب‌دار را در نظر می‌گیریم.



$$\sum F = m\vec{a} \rightarrow (mg + ma)\sin\theta = ma'$$

$a' = (g + a)\sin\theta$ به سمت پایین سطح شیب‌دار

هـ) در حالت a = g است. وزن ظاهری جسم در کف آسانسور بدون سطح شیب‌دار در این حالت برابر است با:

$$mg - N = -mg \rightarrow -N = -mg - mg$$

در قسمت بعدی در فرمول‌نهایی سطح شیب‌دار $a = g$ را به کار می‌بریم.

بنابراین با وزن ظاهری $mg + ma$ سطح شیب‌دار را در نظر می‌گیریم:

$$\sum F = ma' \to (mg - ma)\sin\theta = ma'$$

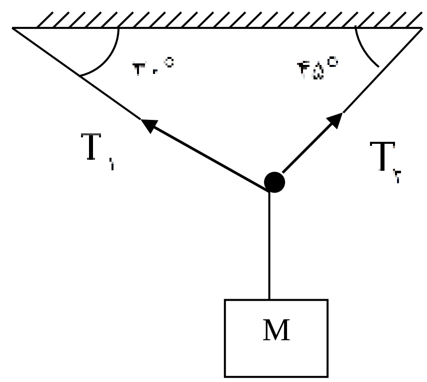
حال چنین به دست می‌آوریم:

$$a = g \Rightarrow (mg - mg)\sin\theta = ma' \Rightarrow a' = ۰$$

و) وزن ظاهری در حالت (ج) برابر است با $N = mg - ma$ نیروی وارد شده از طرف سطح شیب‌دار برابر است با $F_N = (mg - ma)\cos\theta$.

مسائل فصل چهارم

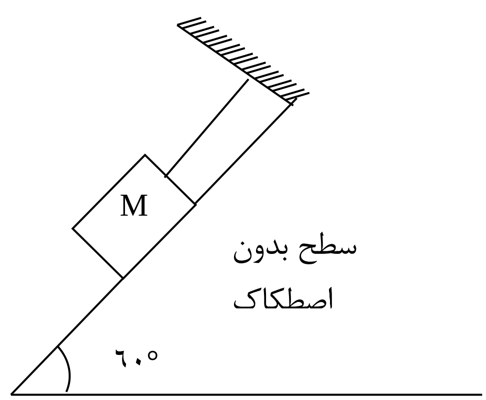
۱- جسمی به جرم ۲۰Kg به وسیله سه تکه ریسمان بدهی جرم مطابق شکل زیر آویخته شده است. نیروهای کشش T_1 و T_2 را بیابید. (راهنمایی: به مثال (۴- ۱) مراجعه شود)



۲- جسمی به جرم ۱۰Kg روی سطح شیب‌دار با زاویه $\theta = ۶۰°$ به وسیله ریسمان بدون جرمی به دیوار قائمی متصل شده است.

(الف) نیروی کشش ریسمان

(ب) نیروی عکس‌العمل سطح را به دست آورید. (راهنمای: به مثال (۴- ۲) مراجعه شود)



۳- جسمی به جرم ۴ Kg روی سطح بدو اصطکاکی از حالت سکون تحت تأثیر یک نیروی افقی ۱۰N به حرکت درمی‌آید و پس از مدتی سرعتش به ۶ m/s می‌رسدُ

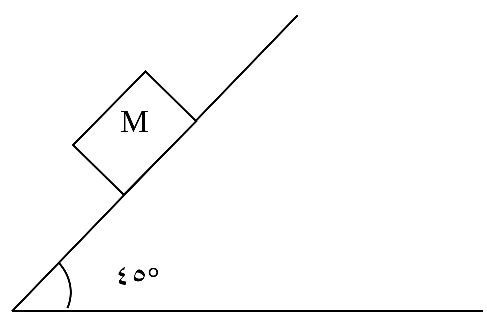
(الف) شتاب را به دست آورید.

(ب) در چه زمانی سرعت ۶m/s می‌رسد (راهنمایی: به مثال (۴- ۳) مراجعه شود)

۴- روی سطح به جرم ۶Kg روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک با زاویه °۴۵ نسبت به افق از حالت سکون حرکت می‌کند.

(الف) شتاب را به دست آورید.

(ب) نیروی عکس‌العمل سطح را تعیین کنید. (راهنمایی: به مثال (۴- ۴) مراجعه شود)



۵- آسانسوری با شتاب $-۴/۵ m/s^۲$ در حال رسیدن به طبقه آخر آپارتمان است. شخصی به جرم ۷۰Kg روی ترازو در آسانسور ایستاده است.

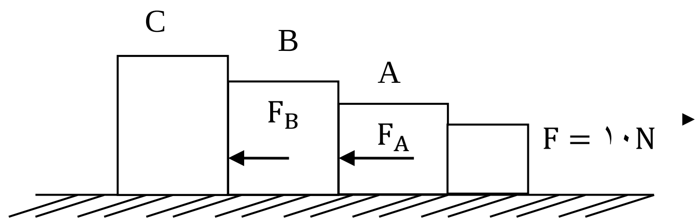
(الف) وزن واقعی

(ب) وزن ظاهری به دست آورید. (راهنمایی: به مثال (۴- ۵) مراجعه شود.)

۶- جسم روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی با زاویه °۳۰ درون آسانسور که با شتاب مثبت $۲m/s^۲$ از یک طبقه بالا به طرف پایین حرکت می‌کند. قرار دارد. اگر جرم جسم ۴Kg باشد. وزن

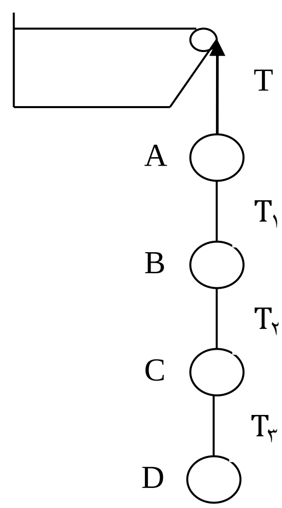
ظاهری جسم و شتاب جسم روی سطح شیب‌دار را به دست آورید. (راهنمایی: به مثال (۴- ۶) مراجعه شود.)

۷- نیروی‌های تماس و در شکل زیر به دست آورید. (راهنمایی: به مثال (۴- ۹) مراجعه شود.)

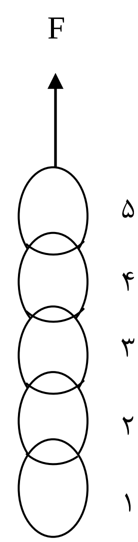


۸- در شکل زیر چهار قرص به وسیله رشته نخ‌های آویزان مانده‌اند. نخ بالایی که از همه درازتر است. از روی قرقره بدون اصطکاکی می‌گذرد و نیرویی به اندازه ۱۰Kg بر دیواری که به آن متصل شده است وارد می‌آورد. چنان چه $M_D = ۱$ Kg ،$M_C = ۳$ Kg ،$M_B = ۴$ Kg ، $M_A = ۲$ Kg باشدُ کشش نخ‌ها را به دست آورید. $(g = ۱۰)$

(راهنمایی: به مثال (۴- ۱۰) مراجعه شود.)



۹- در شکل زیر، پنج حلقه که جرم هر حلقه $۰/۲\text{Kg}$ است. با شتاب ثابت $a = ۳\ m/s^۲$ به طور قائم به بالا کشیده می‌شود. نیروی بالا برنده و نیروهای بین حلقه‌ها را به دست آورید؟ (راهنمایی: به مثال (۴- ۱۱) مراجعه شود)



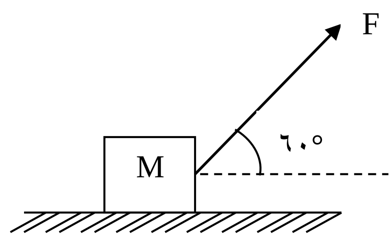
۱۰- در شکل زیر قطعه‌ای به جرم ۶Kg را در امتداد سطح افقی بدون اصطکاکی به وسیله نیروی $F = ۲۰\ N$ تحت زاویه ۶۰° می‌کشیم.

(الف) اندازه نیروی شتاب قطعه چقدر است؟

(ب) اندازه نیروی F را به‌آرامی افزایش می‌دهیم، مقدار آن درست پیش از آنکه قطعه کاملاً از سطح بلند شود چیست؟

(ج) اندازه شتاب قطعه درست پیش از آن که کاملاً سطح بلند شود چیست؟

(راهنمایی به مثال (۴- ۱۲) مراجعه شود)

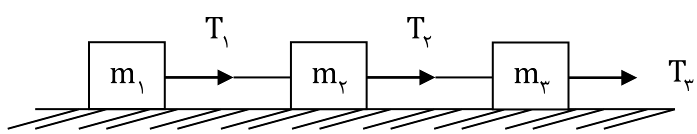


۱۱- در شکل زیر سه قطعه به هم متصل شده‌اند، با وارد کردن نیرویی به اندازه $T_۳ = ۹۰\ N$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی به طرف راست می‌کشیم. اگر $m_۱ = ۵\ Kg$ ، $m_۲ = ۳۵\ Kg$ ، $m_۳ = ۴۰\ Kg$ باشد، کمیت‌های زیر چقدر است؟

(الف) اندازه شتاب سیستم

(ب) کشش $T_۱$

(ج) کشش $T_۲$ (راهنمایی: به مثال (۴- ۱۳) مراجعه شود.)

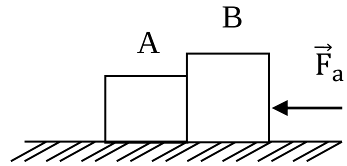


۱۲- در شکل ۱ یک نیروی ثابت $\vec{F}_a$ به اندازه ۴۰N بر قطعه وارد می‌شود. در شکل ۲ همان نیرو $\vec{F}_a$ بر قطعه B وارد می‌شود و نتیجه آن یک نیروی ۱۶N که از طرف قطعه A به قطعه B وارد می‌شود. چنان‌چه جرم دو قطعه ۲۰Kg باشد.

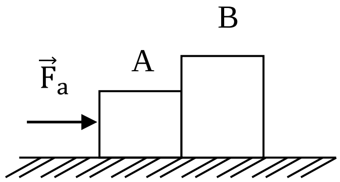
(الف) نیروی تماس در شکل

(ب) جرم دو قطعه A و B

(ج) شتاب رو به دست آورید. ر(اهنمایی: به مثال (۴- ۱۴) مراجعه شود.)



(۱)



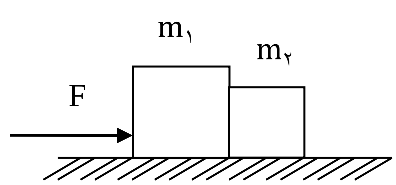
(۱)

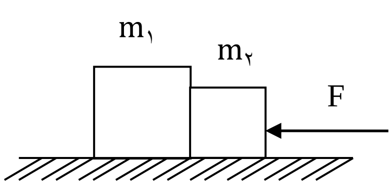
۱۳- دو قطعه به جرم $m_{۱}$، $m_{۲}$ داریم. $m_{۱} = ۴\ Kg$ ، $m_{۲} = ۸\ Kg$ ؛

الف) چنانچه نیروی $۲۴N$ به قطعه $m_{۱}$ وارد شود، نیروی تماسی را به دست آورید.

ب) اگر نیروی $۲۴N$ به قطعه $m_{۲}$ وارد می‌شود نیروی تماسی را به دست آورید.

ج) این دو نتیجه را با هم مقایسه کنید. (راهنمایی: به مثال‌های (۴- ۷) و (۴- ۲۳) مراجعه شود.

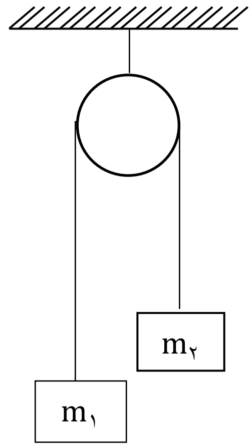




۱۴- شکل زیر دو قطعه را نشان می‌دهد که با یک رشته نخ به جرم ناچیز که روی قرقره‌ای بی اصطکاک (با جرم ناچیز) عبور کرده است. به یک‌دیگر متصل شده‌اند. این آرایش را ماشین آتود می‌گویند. جرم $m_{۱} = ۴\ Kg$ ، $m_{۲} = ۳Kg$ است.

(الف) اندازه شتاب حرکت

(ب) کشش نخ را به دست آورید. (راهنمایی: به مثال (۴- ۱۷) مراجعه شود.)

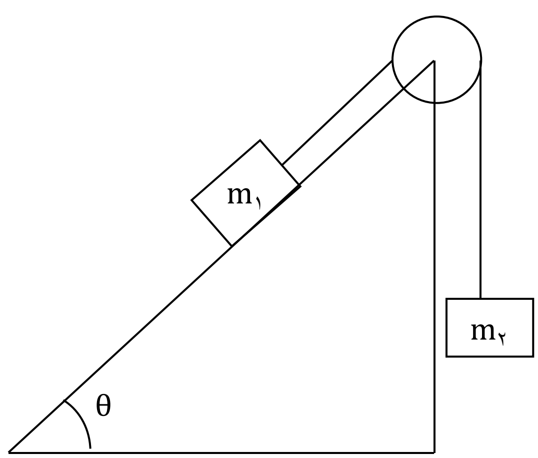


۱۵- قطعه‌ای به جرم $m_۱ = ۶\,Kg$ که روی سطح شیب‌دار بی اصطکاک با زاویه‌ای $\theta = ۳۰°$ قرار دارد، به وسیله نخی که از روی قرقره‌ای بدون اصطکاک گذشته‌است، به قطعه دیگری به جرم $m_۲ = ۲Kg$ متصل شده است.

(الف) اندازه شتاب هر قطعه

(ب) جهت شتاب در دو قطعه مورد نظر

(ج) کشش نخ را به دست آورید. (راهنمایی: به مثال (۴- ۱۸) مراجعه شود)

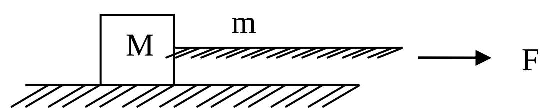


۱۶- قطعه‌ای به جرم ۶Kg و طنابی با جرم ۱Kg در امتداد سطح افقی بدون اصطکاکی، چنان که در شکل زیر آمده است، با نیروی $F = ۲۰ \, N$ کشیده می‌شود.

(الف) شتاب حرکت طناب دو قطعه

(ب) نیرو وارد بر قطعه از طرف طناب

(ج) کشش طناب را در نقطه وسط آن به دست آورید (راهنمایی: به مثال (۴- ۱۹) مراجعه شود.)



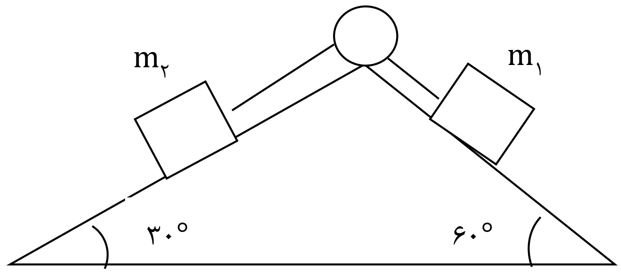
۱۷- شخصی به جرم ۷۰Kg به وسیله چتر نجات با شتاب $۳m/s^۲$ پایین می‌آید. جرم چتر ۷Kg است.

(الف) مقدار نیروی رو به بالایی که از طرف هوا به چتر وارد می‌شود چقدر است؟

(ب) مقدار نیروی رو به پایینی که از طرف شخصی به چتر وارد می‌شود چقدر است؟

(راهنمایی: به مثال (۴- ۲۰) مراجعه شود.

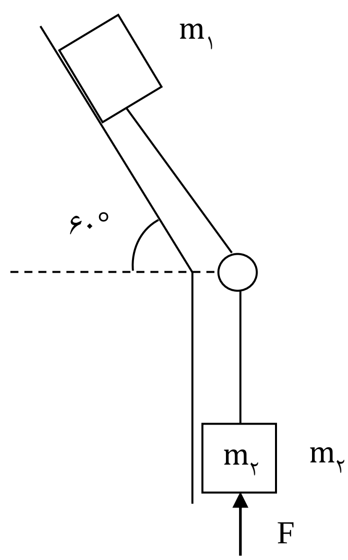
۱۸- شکل زیر جعبه‌ای به جرم $m_۱ = ۶ \, Kg$ را روی یک سطح شیب‌دار بدون اصطکاک با زاویه $\theta_۱ = ۶۰°$ نشان می‌دهد این جعبه با ناخی جرم ناچیز دارد، به جعبه دیگری به جرم $m_۲ = ۱۰ \, Kg$ که روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک دیگری با زاویه $\theta_۲ = ۳۰°$ قرار دارد، متصل است. قرقره هم بی جرم ولی با اصطکاک است. کشش نخ را به دست آورید. (راهنمایی: به مثال (۴- ۲۱) مراجعه شود).



۱۹- در شکل زیر جعبه‌ای به جرم $m_۱ = ۲$ Kg که روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی قرار دارد، به جعبه دیگری به جرم $m_۲ = ۱۰$ Kg متصل شده است. نیروی رو به بالایی F = ۲۰ N بر جعبه دوم وارد می‌شود.

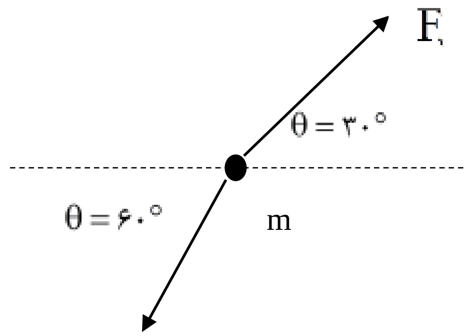
(الف) شتاب

(ب) کشش نخ را به دست آورید. (راهنمایی به مثال (۴- ۲) مراجعه شود.



۲۰- جسمی به جرم m مطابق شکل تحت تاثیر روی نیروی $F_۱$ و $F_۲$ قرارداد. اگر $m=۱۰kg$ و $F_۱=۱۲N$ و $F_۲=۲۰N$ باشد، بردار شتاب جسم را به دست آورید.

(راهنمایی به مثال (۴- ۲۴) مراجعه شود.)



۲۱- چگونه می‌تواند به وسیله طنابی که با نیروی $۴۰۰N$ پاره می‌شود، یک ۶۰ کیلوگرمی را از پشت‌بام پایین آورد، بدون آن که طناب پاره شود؟ (راهنمای: به مثال (۴- ۲۶) مراجعه شود.)

۲۲- یک بالن تحقیقاتی با جرم کل $۶۰۰Kg$ در راستای قائم با شتاب $۵m/s^۲$ به فرود می‌آید. چقدر از وزنه‌های تعادل باید از بالون بیرون ریخته شود تا بالون با شتاب برابر با $۵m/s^۲$ به طرف بالا پیدا می‌کند؟ فرض کنید نیروی رو به بالایی که از طرف هوا بر بالون وارد می‌شود (نیروی شناوری) بر اثر کاهش جرم تغییر نمی‌کند. (راهنمایی: به مثال (۴- ۲۸) مراجعه شود.)

۲۳- جسمی به جرم $۶Kg$ روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی با کف آسانسور زاویه ۳۰° می‌سازد، به طرف پایین می‌لغزد. شتاب جسم را نسبت سطح شیب‌دار در حالت‌های زیر پیدا کنید.

(الف) آسانسور با سرعت ثابت حرکت کند.

(ب) با شتاب منفی $a=۴m/s^۲$ (کند شونده) بالا می‌رود.

(ج) با شتاب مثبت $a=۴m/s^۲$ (تندد شونده) بالا می‌رود.

(د) کابل آسانسور پاره می‌شود.

(هـ) نیروی وارد بر جسم از طرف سطح شیب‌دار در هر ۴ حالت فوق را به دست آورید.

(راهنمایی: به مثال (۴- ۲۹) مراجعه شود.)

سؤالات چهار گزینه ای فصل چهارم

۱- جسمی روی سطح افقی میزی به حال سکون قرار دارد. بنا به قانون .... نیوتون برای این جسم، $\vec{N} = -\overrightarrow{mg}$ (N نیروی عمودی تکیه گاه) است.

الف) اول　　　ب) دوم　　　ج) سوم　　　د) اول و دوم

۲) دو نیروی عمود بر هم ۶۰N و ۲۵N بر جسم ساکن به جرم ۲۶kg وارد می شوند. سرعت جسم پس از ۴S چند متر بر ثانیه می شود؟

الف) ۱۰　　　ب) ۱۲/۵　　　ج) ۱۵　　　د) ۲۰

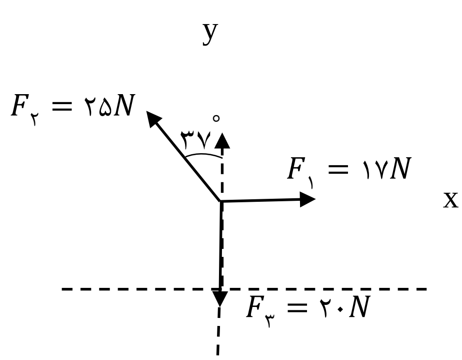
۳- دو نیرو به بزرگی های ۱۵N و ۲۵N که با هم زاویه‌ی ۶۰ درجه می سازند را همزمان به یک جسم وارد می‌کنیم. اگر شتاب جسم برابر $۲\frac{m}{s^۲}$ شود، جرم جسم چند کیلوگرم است؟

الف) ۲۵　　　ب) ۱۷/۵　　　ج) ۱۴　　　د)۷

۴- اگر نیروی F به جسمی به جرم m شتاب ۹ دهد، چه نیروی به جسم $\frac{۳}{۲}m$ شتاب $\frac{۵}{۴}a$ می دهد؟

الف)$\frac{۵}{۶}F$　　　ب)$\frac{۶}{۵}F$　　　ج) $\frac{۱۵}{۸}$F　　　د)$\frac{۸}{۱۵}F$

۵- شکل زیر، نیروهای وارد بر جسمی به جرم ۴kg را نشان می دهد. شتاب جسم چند متر بر مجذور ثانیه است؟



الف) ۲/۵

ب) ۲

ج) ۱

د) ۰/۵

۶- جسمی به جرم ۸/۵ kg از حال سکون شروع به حرکت می کند و سپس از پیمودن مسافت ۲۵ متر به سرعت $\frac{m}{s}$ ۱۰می‌رسد. برآیند نیروهای وارد بر این جسم، چند نیوتون است؟

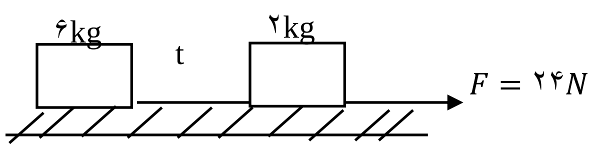
الف) ۳۲ ب) ۱۷ ج) ۲۵ د) ۵

۷- جسمی به جرم ۱۵kg در حال سقوط آزاد است. برآیند نیروهای وارد بر جسم، چند نیوتون است؟

$$g = ۹/۸\frac{m}{s^۲}$$

الف) ۱۵۰ ب) ۱۳۵ ج) ۱۴۷ د) ۹۸

۸- مطابق شکل روبه‌رو، دو جسم را با نیروی افقی $\vec{F}$ روی سطح افقی صافی می کشیم. به ترتیب شتاب چند $\frac{m}{s^۲}$ و نیروی کشش نخ (t) چند نیوتون می شود؟



الف) ۳ و ۱۸

ب) ۳ و ۱۲

ج) ۱ و ۱۸

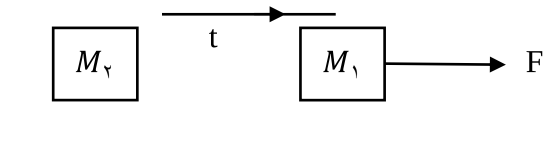
د) ۱ و ۱۲

۹- نیروی ۱۰ نیوتونی به جسمی شتاب $a\frac{m}{s^۲}$ و نیروی ۱۴ نیوتونی به آن شتاب $(a + ۲۰)\frac{m}{s^۲}$ می دهد. به ترتیب جرم جسم چند کیلوگرم و a چند $\frac{m}{s^۲}$ می باشد؟

الف) ۲ و ۴ ب) ۳ و۵ ج) ۳ و ۴ د) ۲ و ۵

۱۰- در شکل روبه‌رو، دو جسم به جرم های $M_۱ = ۳kg$ و $M_۲ = ۲kg$ که به وسیله‌ی نخ سبکی به هم بسته شده اند با نیروی F= ۱۰N بر روی سطح افقی بدون اصطکاک کشیده می شوند. در این صورت نیروی کشش نخ (t) چند نیوتون است؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۲ د) ۴



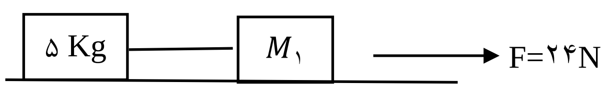
۱۱- نیروی F به جرم m شتاب a و به جرم (۱ + m) کیلوگرم شتاب $\frac{۲}{۳}a$ می دهد . m چند کیلوگرم است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) $\frac{۲}{۳}$ د) ۲

۱۲- در شکل داده شده اگر نیروی کشش نخ بین دو وزنه ۱۰N باشد $M_۱$ چند کیلوگرم است؟

(نیروی اصطکاک را ناچیز عرض کنید.)

الف) ۱۰ ب) ۷ ج) ۶ د) ۵



پاسخنامه چهار گزینه ای فصل چهار

۱) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۲) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۳) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۴) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۵) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۶) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۷) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۸) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۹) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۱۰) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۱۱) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۱۲) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فصل ۵

حرکت پرتابی (یک نوع حرکت دوبعدی)

حرکت پرتابی (یک نوع حرکت دوبعدی)

قبل از تعریف حرکت پرتابی، در مورد حرکت دوبعدی توضیح داده می‌شود. برای محاسبه حرکت دوبعدی، نیاز به معرفی و محاسبه سه بردار حرکت در دو بعد شامل بردار مکان دوبعدی، بردار سرعت دوبعدی و بردار شتاب دوبعدی داریم.

توصیف حرکت دوبعدی جسم

برای توصیف حرکت یک جسم در دو بعد در هر لحظه t سه کمیت دوبعدی تعیین می‌شود:

(الف) بردار مکان دوبعدی جسم (ب) بردار سرعت دوبعدی جسم (ج) بردار شتاب دوبعدی جسم

(الف) بردار مکان دوبعدی جسم $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

(۹۵)

که x مکان افقی و y مکان عمودی یا ارتفاع جسم است.

(ب) بردار سرعت دوبعدی جسم

$$\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}$$

(۹۶)

که V_x مؤلفه افقی سرعت در هر لحظه t و V_y مؤلفه عمودی سرعت در هر لحظه t می‌باشد.

(ج) بردار شتاب دوبعدی جسم

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$$

(۹۷)

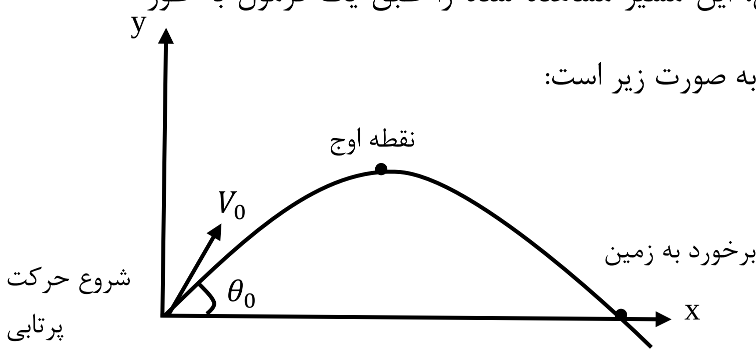
که a_x مؤلفه افقی شتاب در هر لحظه t و a_y مؤلفه عمودی شتاب در هر لحظه t است.

۵ – ۱ – تعریف حرکت پرتابی

حرکت پرتابی، یک نوع حرکت دوبعدی است. در حرکت پرتابی، یک جسم تحت زاویه θ نسبت به افق پرتاب می‌شود که زاویه θ بین صفر تا ۱۸۰ درجه می‌باشد. اگر $\theta = 90°$ باشد، حرکت پرتابی به حرکت آزاد (سقوط آزاد و صعود آزاد) تبدیل می‌شود که در فصل سوم بررسی شد.

۵ – ۲ – نمایش حرکت پرتابی

جسمی که تحت زاویه θ_0 نسبت به افق با سرعت اولیه V_0 پرتاب می‌شود، روی یک مسیر مطابق شکل دیده می‌شود که در آخر همین فصل، این مسیر مشاهده شده را طبق یک فرمول به طور دقیق محاسبه می‌کنیم. مسیر مشاهده شده به صورت زیر است:



مؤلفه‌های سرعت اولیه به صورت زیر هستند:

$$V_{0x} = V_0 cos\theta_0$$
(۹۸)

$$V_{0y} = V_0 sin\theta_0$$
(۹۹)

۵ – ۳ – تجزیه حرکت پرتابی

همان‌طور که در مقدمه بیان شد، حرکت پرتابی یک حرکت دوبعدی است که کمیت‌های حرکت پرتابی به صورت دوبعدی زیر هستند.

در حرکت پرتابی، تنها نیرویی که به جسم در فضا وارد می‌شود، نیروی وزن mg رو به پایین است.

بنابراین طبق قانون دوم نیوتن و با در نظر گرفتن محور y رو به بالا، خواهیم داشت:

$$F = ma \tag{۱۰۰}$$

که نیروی F وارد بر جسم، $-mg$ می‌باشد.

$$-mg = ma \tag{۱۰۱}$$

$$a = -g \tag{۱۰۲}$$

بنابراین، شتاب جسم دارای دو مؤلفه زیر است:

$$a_x = 0 \tag{۱۰۳}$$

$$a_y = -g \tag{۱۰۴}$$

از طرفی به کمک مؤلفه افقی شتاب $a_x = 0$ ، مؤلفه‌های افقی سرعت و مکان هم به صورت زیر تعیین می‌شوند:

مؤلفه افقی سرعت ثابت $\quad V_x = V_{0x} = V_0 cos\theta_0$

(۱۰۵)

مؤلفه افقی مکان $\quad x = V_x t = V_{0x} t = V_0 cos\theta_0 t$

(۱۰۶)

از طرف دیگر، به کمک مؤلفه عمودی شتاب ثابت $a_y = -g$ ، مؤلفه‌های عمودی سرعت و مکان (ارتفاع) تعیین می‌شوند:

مؤلفه عمودی سرعت $$\mathrm{V_y} = -gt + V_{0y}$$

(۱۰۷)

مؤلفه عمودی مکان (ارتفاع) $$\mathrm{y} = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t$$

(۱۰۸)

۵ – ۴ – معادله مسیر حرکت پرتابی

قبل از محاسبه معادله مسیر حرکت پرتابی، دو نقطه حرکت پرتابی که دارای اهمیت می‌باشند را معرفی می‌کنیم. یکی از این نقاط، نقطه اوج است که در نقطه اوج، $V_y = 0$ است، ولی $\mathrm{V_x}$ با V_{0x} برابر است.

به کمک $V_y = 0$ می‌توان زمان اوج و ارتفاع اوج جسم پرتاب شده را محاسبه کرد.

زمان اوج

برای محاسبه زمان اوج جسم پرتابی، در رابطه (۱۰۷)، $V_y = 0$ قرار می‌دهیم و t همان زمان اوج ($t_{\text{اوج}}$) می‌شود.

$$\mathrm{V_y} = -gt + V_{0y}$$
$$0 = -gt_{\text{اوج}} + V_{0y}$$

(۱۰۹)

$$gt_{\text{اوج}} = V_{0y}$$

(۱۱۰)

$$t_{\text{اوج}} = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{V_0 sin\theta_0}{g}$$

(۱۱۱)

ارتفاع اوج حرکت پرتابی

قبل از محاسبه ارتفاع اوج، دو معادله دیگر برای مؤلفه عمودی حرکت پرتابی به کمک رابطه‌های (۱۰۷) و (۱۰۸) معرفی می‌کنیم.

رابطه (۱۰۸) با کمی تغییر به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$y = \left(\frac{\mathrm{V_y} + V_{0y}}{2}\right) t$$

(۱۱۲)

با حذف زمان t در رابطه‌های (۱۰۷) و (۱۱۲) خواهیم داشت:

$$\mathrm{V_y}^2 - V_{0y}^2 = -2gy$$

(۱۱۳)

که به رابطه مستقل از زمان حرکت شتاب ثابت معروف است.

برای محاسبه ارتفاع اوج حرکت پرتابی، در رابطه (۱۱۳)، $V_y = 0$ قرار می‌دهیم. در این صورت، y به عنوان ارتفاع اوج خواهد بود.

$$\mathrm{V_y}^2 - V_{0y}^2 = -2gy$$

$$0 - V_{0y}^2 = -2gy_{(\text{ارتفاع اوج})}$$

(۱۱۴)

ارتفاع اوج حرکت پرتابی $y = \frac{V_{0y}^2}{2g} = \frac{(V_0 sin\theta_0)^2}{2g}$

(۱۱۵)

معادله مسیر پرتابی

برای محاسبه معادله مسیر حرکت پرتابی یک جسم، از رابطه‌های (۱۰۶) و (۱۰۸) استفاده می-کنیم.

$$x = V_{0x}t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t$$

در رابطه (۱۰۶)، t را به صورت $\frac{x}{V_{0x}}$ در رابطه (۱۰۸) قرار می‌دهیم.

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_{0x}}\right)^2 + V_{0y}\left(\frac{x}{V_{0x}}\right)$$

(۱۱۶)

در رابطه‌های (۹۸) و (۹۹) نسبت مؤلفه‌های سرعت اولیه را به دست می‌آوریم.

$$\frac{V_{0y}}{V_{0x}} = \frac{V_0 sin\theta_0}{V_0 cos\theta_0} = tan\theta_0$$

(۱۱۷)

رابطه‌های (۹۸) و (۱۱۷) را در رابطه (۱۱۶) قرار می‌دهیم.

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_0 cos\theta_0}\right)^2 + (tan\theta_0)x$$

(۱۱۸)

با ساده‌سازی (۱۱۸) خواهیم داشت:

$$y = -\frac{gx^2}{2{V_0}^2 cos^2\theta_0} + x(tan\theta_0)$$

(۱۱۹)

معادله (۱۱۹) به شکل معادله زیر است:

$$y = -Ax^2 + Bx$$

(۱۲۰)

$$A = \overbrace{2{V_0}^2}^{g_0} cos^2\theta_0$$
(۱۲۱)

$$B = tan\theta_0$$
(۱۲۲)

که به معادله مسیر معروف است که معادله یک سهمی است. بنابراین مسیری که در حرکت پرتابی جسم با چشم مشاهده می‌کنیم.

با معادله مسیر طبق رابطه (۱۲۰) و به کمک رابطه‌های (۱۲۱) و (۱۲۲) نیز محاسبه می‌کنیم.

سرانجام با محاسبه معادله مسیر، می‌توانیم مسیر را روی صفحه کاغذ به صورت دقیق ترسیم کنیم.

۵ – ۵ – مثال‌های متنوع حرکت پرتابی

مثال (۵ – ۱) ثابت کنید بُرد پرتاب به صورت زیر است.

$$R = \frac{{V_0}^2}{g} sin^2\theta_0$$
(۱۲۳)

حل: در محل برخورد جسم پرتاب شده به زمین، ارتفاع y مساوی صفر است. در رابطه (۱۰۸)، $y = 0$ قرار می‌دهیم.

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t$$

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t$$

$$0 = t(-\frac{1}{2}gt + V_{0y})$$

$$0 = -\frac{1}{2}gt + V_{0y}$$

$$\frac{1}{2}gt = V_{0y}$$

زمان کل حرکت پرتابی $t = \frac{2V_{0y}}{g}$

(۱۲۴)

در رابطه (۱۰۶) نیز داشتیم:

$$x = V_{0x}t$$

رابطه (۱۲۴) را در رابطه (۱۰۶) قرار می‌دهیم و x به عنوان برد R نامیده می‌شود.

$$x = R = V_{0x}(\frac{2V_{0y}}{g})$$

(۱۲۵)

از رابطه‌های (۹۸) و (۹۹) در رابطه (۱۲۵) قرار می‌دهیم:

$$V_{0x} = V_0 cos\theta_0$$

$$V_{0y} = V_0 sin\theta_0$$

$$R = 2\frac{(V_0 cos\theta_0)(V_0 sin\theta_0)}{g}$$

$$2sin\theta_0 cos\theta_0 = sin2\theta_0 \qquad (۱۲۶)$$

(۱۲۷)

رابطه (۱۲۷) را در رابطه (۱۲۶) قرار می‌دهیم و داریم:

$$R = \frac{{V_0}^2 sin2\theta_0}{g}$$

(۱۲۸)

مثال (۵ – ۲). جسمی تحت زاویه °۴۵ با سرعت اولیه $^{m}/_{s}$ ۵ از روی زمین مسطح پرتاب شده است. بُرد پرتاب را به دست آورید.

حل:

$$V_0 = 5\,^{m}/_{s}$$

$$\theta_0 = 45°$$

$$sin2\theta_0 = sin2(45) = sin90° = 1$$

$$R = ?$$

$$g \cong 10\, {}^{m}/_{s^2}$$

$$R = \frac{{V_0}^2 sin2\theta_0}{g} = \frac{(5)^2 \times 1}{10}$$

$$R = \frac{25}{10} = 2/5m$$

مثال (۵ – ۳). برد جسمی ۵ متر می‌باشد و تحت زاویه °۳۰ از روی زمین مسطح پرتاب شده است. سرعت اولیه جسم را به دست آورید.

$$\theta_0 = 30°$$

$$g \cong 10\, {}^{m}/_{s^2}$$

$$V_0 = ?$$

$$sin2\theta_0 = sin2 \times 30 = sin60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0/85$$

$$R = 5m$$

$$R = \frac{{V_0}^2 sin2\theta_0}{g} \rightarrow 5 = \frac{{V_0}^2 \times 0/85}{10}$$

$$\rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{50}{0/85}} = \sqrt{\frac{5000}{85}} = 10\sqrt{\frac{50}{85}}\ {}^{m}/_{s}$$

مثال (۵ – ۴). در مثال (۵ – ۲)، زمان اوج و زمان کل حرکت پرتابی جسم را به دست آورید.

$$V_0 = 5\, {}^{m}/_{s}$$

$$\theta_0 = 45°$$

$$sin45 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0/7$$

$$V_y = -gt + V_{0y}$$

$$0 = -gt_{\text{اوج}} + V_{0y}$$

$$gt_{\text{اوج}} = V_{0y}$$

$$t_{\text{اوج}} = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{V_0 sin\theta_0}{g} = \frac{5sin45}{10}$$

$$\frac{5 \times 0/7}{10} = \frac{0/7}{2} = 0/35\ s$$

زمان کل پرتابی، دو برابر زمان اوج است.

$$t_{\text{کل}} = 2t_{\text{اوج}} = 2 \times 0/35 = 0/7\ s$$

مثال (۵ – ۵). جسمی با سرعت اولیه $^{m}/_{s}$ ۶ با زاویه ۳۰ درجه از روی زمین پرتاب شده است.

مطلوب است تعیین (الف) زمان اوج (ب) ارتفاع اوج (ج) زمان کل (د) مؤلفه افقی سرعت در اوج (ه) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت در لحظه برخورد به زمین.

حل: (الف)

$$V_0 = 6\ ^{m}/_{s}$$
$$\theta_0 = 30°$$
$$t_{\text{اوج}} = ?$$

زمان اوج $t = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{V_0 sin\theta_0}{g} = \frac{6sin30}{10} = \frac{6 \times 0/5}{10} = 0/3\ s$

حل: (ب)

ارتفاع اوج $y = \frac{{V_{0y}}^2}{2g} = \frac{(V_0 sin\theta_0)^2}{2g} = \frac{(6sin30)^2}{20} = \frac{(6 \times 0/5)^2}{20} = \frac{9}{20} = 0/45\ m$

حل: (ج)

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t$$
$$y = 0 \rightarrow t = \frac{2V_{0y}}{g} = \frac{2V_0 sin\theta_0}{g} = \frac{2 \times 6 \times 0/5}{10} \rightarrow t = 0/6\ s$$

که نشان می‌دهد t زمان کل دو برابر زمان اوج است.

حل: (د)

مؤلفه افقی سرعت در اوج $= V_x = V_{0x} = V_0 cos\theta_0 = 6 \times cos30 = 6 \times 0/85\ ^{m}/_{s} =$

$5/1\ ^{m}/_{s}$

حل: (ه)

مؤلفه افقی سرعت در لحظه برخورد به زمین $V_x = 5/1\ ^{m}/_{s}$

مؤلفه عمودی سرعت در لحظه برخورد به زمین $V_y = -gt + V_{0y} = -10 \times 0/6 + V_0 sin\theta_0$

$=$

$= -6 + 6 \times 0/5 = -6 + 3 = -3\, {}^{m}/_{s}$

مثال (۵ – ۶). توپی از روی زمین به هوا پرتاب می‌شود و در ارتفاع ۹ متری، سرعت توپ به صورت

$\vec{V} = (6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})({}^{m}/_{s})$ است. ارتفاع اوج را به دست آورید.

حل: در ارتفاع ۹ متری قبل از اوج داریم:

$$V_x = 6\, {}^{m}/_{s}$$
$$V_y = 4\, {}^{m}/_{s}$$
$$V_y{}^2 - V_{0y}{}^2 = -2gy$$
$$(4)^2 - (V_{0y})^2 = -20 \times 9$$
$$V_{0y}{}^2 = 16 + 180$$
$$V_{0y}{}^2 = 196$$
$$V_{0y} = \sqrt{196}$$

از طرفی داریم:

$$V_y{}^2 - V_{0y}{}^2 = -2gy$$
$$0 - V_{0y}{}^2 = -2gy =$$

ارتفاع اوج $y = \frac{V_{0y}{}^2}{2g} = \frac{196}{20} m$

مثال (۵ – ۷). توپی را از روی زمین تحت زاویه °۳۰ با چه سرعت اولیه شوت کنیم که از روی دیواری به ارتفاع ۳ متر در فاصله افقی ۱۰ متری از محل شوت زدن قرار دارد، عبور کند؟

حل:

$$y = xtan\theta_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2 cos^2\theta_0}$$

$$3 = 10\frac{sin30}{cos30} - \frac{10\times(10)^2}{2V_0^2 cos^2 30}$$

$$3 = 10(\frac{0/5}{0/85}) - \frac{1000}{2(0/85)^2 V_0^2}$$

$$\frac{1000}{2(0/85)^2 V_0^2} = (\frac{0/5}{0/85} - 3)$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{1000}{2(0/85)^2(\frac{0/5}{0/85} - 3)}}\ {}^{m}/_{s}$$

مسائل فصل پنجم

۱- ثابت کنید زمان کل حرکت پرتابی جسم از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$t = \frac{2v_0 sin\theta_0}{g}$$

(راهنمایی: به مثال (۵ – ۱) مراجعه شود)

۲- جسمی تحت زاویه ۳۰ درجه با سرعت اولیه ۴ متر بر ثانیه از روی زمین مسطح پرتاب شده است. برد پرتاب را به دست آورید (راهنمایی: به مثال (۵ – ۲) مراجعه شود).

۳- زمان اوج در یک حرکت پرتابی جسمی ۳ ثانیه است. درصورتی‌که جسم تحت زاویه ۶۰ درجه پرتاب شده باشد، سرعت اولیه جسم را به دست آورید (راهنمایی: به مسئله ۱ مراجعه شود).

۴- ثابت کنید زمان کل پرتاب، دو برابر زمان اوج در حرکت پرتابی جسم است (راهنمایی: به مثال (۵ – ۴) مراجعه شود).

۵- جسمی با سرعت اولیه ۸ $m/_s$ تحت زاویه ۶۰ درجه از روی زمین پرتاب شده است. مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت در لحظه برخورد با زمین را به دست آورید (راهنمایی: به مثال (۵ – ۵) مراجعه شود).

۶- توپی از روی زمین به هوا پرتاب می‌شود و در ارتفاع ۱۶ متری، سرعت توپ $\vec{V} = (4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})(m/_s)$ است. سرعت اولیه توپ را به دست آورید (راهنمایی: به مثال (۵ – ۶) مراجعه شود).

۷- توپی از روی زمین تحت زاویه ۴۵ درجه با سرعت ۱۰ $m/_s$ شوت می‌شود. در فاصله افقی ۱۰ متری از محل شوت زدن، ارتفاع توپ را به دست آورید (راهنمایی: به مثال (۵ – ۷) مراجعه شود).

سؤالات چهار گزینه ای فصل پنجم

۱- پرتابه ای از روی زمین با سرعت اولیه $۱۲\frac{m}{s}$ و با زاویه‌ی ۳۰ درجه نسبت به افق به بالا پرتاب می شود. زمان کل پرتابه کدام است؟ $(g \simeq ۱۰\ {}^{m}/_{s^۲})$

الف)$۰/۶$ s ب) $۲/۴$ s ج) $۰/۸$ s د) $۱/۲$ s

۲- زمان اوج پرتابه ای که از روی زمین با سرعت اولیه‌ای تحت زاویه نسبت به افق به بالا پرتاب شده است، ۲ ثانیه است مؤلفه عمودی سرعت اولیه پرتابه را به دست آورید؟

الف) $۱۰\frac{m}{s}$ ب) $۲۰\frac{m}{s}$ ج) $۳۰\frac{m}{s}$ د) $۴۰\frac{m}{s}$

۳-ارتفاع اوج پرتابه ای که از روی زمین با سرعت اولیه $V_۰$ تحت زاویه ۳۰ درجه نسبت به افق بالا پرتاب شده است برابر ۲ متر می باشد سرعت اولیه $V_۰$ کدام است؟

الف) $\sqrt{۱۰}\ {}^{m}/_{s}$ ب) $۲\sqrt{۱۰}\ {}^{m}/_{s}$ ج) $۴\sqrt{۱۰}\ {}^{m}/_{s}$ د) $۳\sqrt{۱۰}\ {}^{m}/_{s}$

۴) سرعت پرتابه ای بعد از ۲ ثانیه ، $\vec{V} = ۲\hat{\imath} - \hat{\jmath}(\frac{m}{s})$ می باشد پرتابه کجا قرار دارد.

الف) قبل از اوج ب) در اوج ج) بعد از اوج د) در برخورد به زمین

۵) گلوله ای با سرعت افقی $V_۰$ ، از روی میزی می افتد. اگر ارتفاع میز ۱/۲ متر و فاصله افقی گلوله از پای میز در لحظه برخورد با زمین برابر ۱ متر باشد سرعت گلوله در لحظه افتادن کدام است؟

الف) $\frac{۳}{\sqrt{۶}}\ {}^{m}/_{s}$ ب) $\frac{۵}{\sqrt{۶}}\ {}^{m}/_{s}$ ج) $\frac{۷}{\sqrt{۶}}\ {}^{m}/_{s}$ د) $\frac{۹}{\sqrt{۶}}\ {}^{m}/_{s}$

۶) توپی از زمین تحت چه زاویه ای نسبت به افق پرتاب شود تا بیشترین برد را داشته باشد.

الف) ۳۰ درجه　　　ب) ۴۵ درجه　　　ج) ۶۰ درجه　　　د۹ ۹۰ درجه

۷) گلوله ای از روی میزی تحت زاویه نسبت به میز به بالا پرتاب می شود در لحظه برخورد به زمین کدام کمیت صفر است (مبدأ را روی زمین در نظر بگیرید.)

الف) مؤلفه عمودی سرعت　　　ب) ارتفاع اولیه

ج) ارتفاع در لحظه برخورد به زمین　　　د) سرعت در لحظه برخورد به زمین

۸- معادله مسیر پرتابه ای که با سرعت اولیه تحت زاویه نسبت به افق پرتاب شده است کدام است.

الف) سهمی　　ب) قسمتی از مسیر دایره ای　　ج) قسمتی از مسیر بیضی　　د) خطی

۹) پرتابه ای از بام ساختمانی به ارتفاع ۶ متر با سرعت اولیه ۴ m/s تحت زاویه ۶۰ درجه نسبت به بام ساختمان پرتاب شده است. زمان کل پرتابه حدود چند ثانیه است؟

الف) ۱ ثانیه　　　ب) ۲ ثانیه　　　ج) ۳ ثانیه　　　د) ۴ ثانیه

۱۰-توپی با سرعت اولیه افقی از روی بام ساختمانی می افتد و ۲ ثانیه طول می کشد تا به زمین برسد ارتفاع تقریبی ساختمان کدام است؟($g \simeq ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

الف) ۵ متر　　　ب) ۱۰ متر　　　ج) ۱۵ متر　　　د) ۲۰ متر

پاسخنامه چهار گزینه ای فصل پنجم

۱) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۲) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۳) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۴) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۵) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۶)

۷) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۸) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۹) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

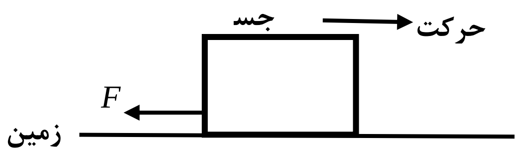
۱۰) گزینه‌ی (د) صحیح است.

فصل ۶

نیروهای اصطکاک

تعریف نیروی اصطکاک و انواع نیروهای اصطکاک

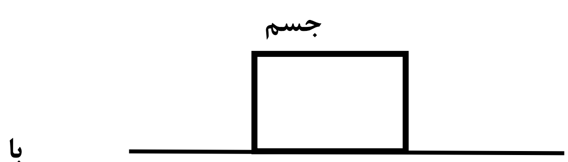
درصورتی‌که جسم حرکت کند خلاف جهت حرکت جسم، بین جسم و زمین نیرویی که از حرکت جلوگیری می‌کند به نیروی اصطکاک معروف است و آن را با F نشان می‌دهیم.



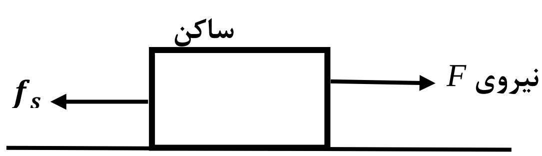
دو نوع نیروی اصطکاک داریم. یکی از این نیروها، معروف به نیروی اصطکاک ایستایی f_s است. دیگری، نیروی اصطکاک جنبشی f_k است.

۶ – ۱ – نیروی اصطکاک ایستایی f_s

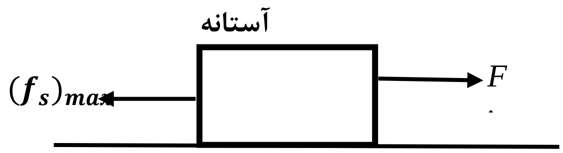
جسمی را روی زمین با اصطکاک به حالت ساکن در نظر می‌گیریم.



حال به جسم ساکن، نیرویی افقی به سمت راست وارد می‌کنیم و جسم ساکن بماند. در این صورت، نیرویی افقی برابر و مخالف نیروی افقی که به جسم به سمت راست وارد کرده‌ایم به جسم وارد می‌شود که آن را نیروی اصطکاک ایستایی f_s می‌نامیم.



نیروی F شخص را طوری زیاد می‌کنیم تا جسم در آستانه حرکت قرار گیرد. بنابراین، بیشترین نیروی اصطکاک $(f_s)_{max}$ به جسم وارد می‌شود.



بیشترین نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی عکس‌العمل سطح طبق رابطه زیر متناسب است.

$$(f_s)_{max} = \mu_s N$$
(۱۲۹)

در سطح افقی داریم:

$$N = mg$$
(۱۳۰)

در سطح شیب‌دار داریم:

$$N = mgcos\theta$$
(۱۳۱)

بنابراین، بیشترین نیروی اصطکاک ایستایی در سطح افقی به صورت زیر است:

$$(f_s)_{max} = \mu_s mg$$
(۱۳۲)

و بیشترین نیروی اصطکاک ایستایی در سطح شیب‌دار به صورت زیر است:

$$(f_s)_{max} = \mu_s mgcos\theta$$
(۱۳۳)

که θ زاویه شیب سطح شیب‌دار با افق است.

مثال (۶ – ۱). ثابت کنید برای جسمی که روی سطح شیب‌دار با زاویه شیب θ در آستانه حرکت است، ضریب اصطکاک ایستایی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\mu_s = tan\theta_s$$

حل:

در آستانه حرکت روی سطح شیب‌دار، طبق قانون اول نیوتن داریم:

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow (f_s)_{max} = mgsin\theta_s = 0$$

(۱۳۴)

از طرفی در رابطه (۱۳۳) در شرایط آستانه حرکت داریم:

$$(f_s)_{max} = \mu_s mgcos\theta_s$$

(۱۳۵)

رابطه (۱۳۵) را در رابطه (۱۳۴) قرار می‌دهیم:

$$\mu_s mgcos\theta_s - mgsin\theta_s = 0$$

$$\mu_s cos\theta_s - sin\theta_s = 0$$

$$\mu_s cos\theta_s = sin\theta_s$$

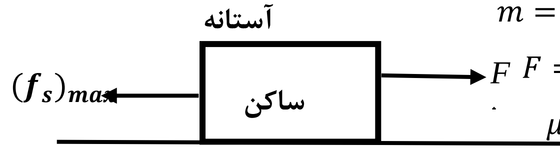
طرفین را به $cos\theta_s$ تقسیم می‌کنیم:

$$\mu_s = \frac{sin\theta_s}{cos\theta_s}$$

$$\mu_s = tan\theta_s$$

(۱۳۶)

مثال (۶ – ۲). جسمی به جرم ۲kg روی سطح افقی تحت تأثیر نیروی افقی ۴ نیوتن در آستانه حرکت قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی را به دست آورید.



$m = 2Kg$

$F = 4N$

$\mu_s = ?$

$g \cong 10\, {}^{m}/_{s^2}$

حل: طبق قانون اول نیوتن داریم:

$$F = (f_s)_{max} \tag{۱۳۷}$$

رابطه (۱۳۲) را در رابطه (۱۳۷) قرار می‌دهیم:

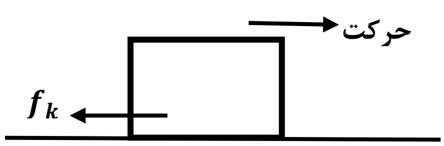
$$F = \mu_s mg$$

$$4 = \mu_s(2)(10)$$

$$\mu_s = \frac{4}{20} = 0/2$$

۶ – ۲ – نیروی اصطکاک جنبشی f_k

نیروی اصطکاک جنبشی f_k خلاف حرکت جسم بین جسم و زمین است.



نیروی اصطکاک جنبشی f_k طبق رابطه زیر با نیروی عکس‌العمل سطح N متناسب است.

$$f_k = \mu_s N \tag{۱۳۸}$$

که در سطح افقی $N = mg$ روی سطح شیب‌دار $N = mgcos\theta$ است.

مثال (۶ – ۳). ثابت کنید برای جسمی که روی سطح شیب‌دار با زاویه شیب θ_k با سرعت ثابت حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی μ_k طبق رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$\mu_k = tan\theta_k$$

(۱۳۹)

حل: از قانون اول نیوتن داریم:

$$f_k = mgsin\theta_k$$

(۱۴۰)

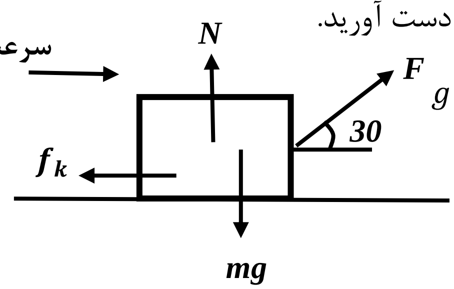
رابطه (۱۳۸) را در رابطه (۱۴۰) قرار می‌دهیم:

$$\mu_k mgcos\theta_k = mgsin\theta_k$$

$$\mu_k = \frac{sin\theta_k}{cos\theta_k}$$

$$\mu_k = tan\theta_k$$

مثال (۶ – ۴). جسمی به جرم ۲ کیلوگرم روی سطح افقی تحت تأثیر نیروی F که با افق زاویه ۳۰ درجه می‌سازد، با سرعت ثابت روی سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۴ حرکت می‌کند. نیروی F را به دست آورید.



$$g \cong 10\, {}^{m}/_{s^2}$$

$$m = 2Kg$$

$$\mu_k = 0/4$$

$$\theta_0 = 30°$$

$$F = ?$$

حل: طبق قانون اول نیوتن داریم:

$$F = \mu_s mg$$

$$Fcos30 = f_k$$

(۱۴۱)

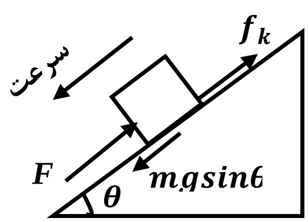
$$N + Fsin30 = mg$$

(۱۴۲)

رابطه‌های (۱۴۱) و (۱۴۲) را در رابطه (۱۳۸) قرار می‌دهیم:

$$Fcos30 = \mu_k(mg - Fsin30)$$
$$F(cos30 + \mu_k sin30) = \mu_k mg$$
$$F = \frac{\mu_k mg}{cos30+\mu_k sin30} = \frac{0/4\times2\times10}{0/85+0/4\times0/5}$$
$$F = \frac{8}{0/85+0/2} = \frac{8}{1/05}N$$

مثال (۶ – 5). به قطعه یخی به جرم ۲ کیلوگرم نیرویی موازی سطح شیب‌دار با زاویه شیب ۳۰ درجه رو به بالا وارد می‌کنیم. قطعه یخ با سرعت ثابت رو به پایین حرکت می‌کند و ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = 0/3$ است. F چقدر است؟



$$m = 2Kg$$
$$\mu_k = 0/3$$
$$\theta_0 = 30°$$
$$F = ?$$

حل: طبق قانون اول نیوتن داریم:

$$F + f_k = mgsin\theta$$

(۱۴۳)

$$f_k = \mu_k mgcos\theta$$

(۱۴۴)

رابطه (۱۴۵) را در رابطه (۱۴۴) قرار می‌دهیم:

$$F = mgsin\theta - \mu_k mgcos\theta = mg(sin\theta - cos\theta)$$

$$F = 20(0/5 - 0/3 \times 0/85)$$

$$F \cong 20(0/5 - 0/25) \cong 20 \times 0/25 \rightarrow F = 5\ N$$

مسائل فصل ششم

۱- جسمی به جرم ۴ کیلوگرم روی سطح شیب‌دار با زاویه شیب ۳۰ درجه در آستانه حرکت است. ضریب اصطکاک ایستایی را به دست آورید (راهنمایی: به مثال (۶ – ۱) مراجعه شود).

۲- جسمی به جرم ۳ کیلوگرم روی سطح افقی تحت تأثیر نیروی افقی ۶ نیوتن در آستانه حرکت است. ضریب اصطکاک ایستایی را به دست آورید (راهنمایی: به مثال (۶ – ۲) مراجعه شود).

۳- جسمی روی سطح شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه با سرعت ثابت رو به پایین در حرکت است. ضریب اصطکاک جنبشی را به دست آورید (راهنمایی: به مثال (۶ – ۳) مراجعه شود).

۴- جسمی به جرم ۴ کیلوگرم روی سطح افقی تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد که با افق زاویه ۶۰ درجه می‌سازد و با سرعت ثابت حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۵ می‌باشد. نیروی جلوبرنده F را به دست آورید (راهنمایی: به مثال (۶ – ۴) مراجعه شود).

۵- به قطعه یخی به جرم ۴ کیلوگرم نیرویی موازی سطح شیب‌دار با زاویه شیب ۴۵ درجه رو به بالای F وارد می‌کنیم. قطعه یخ با سرعت ثابت رو به پایین حرکت می‌کند و ضریب اصطکاک جنبشی $0/35$ است. نیروی F را به دست آورید.

سؤالات چهار گزینه ای فصل ششم

۱- به جسمی که جرم آن ۱۰kg می باشد و روی سطح افقی به حال سکون قرار دارد، نیروی افقی ۴۰N وارد می‌کنیم، اما جسم همچنان ساکن می ماند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی به ترتیب ۰/۵ و ۰/۳ باشد، نیروی اصطکاک وارد بر جسم در این حالت، چند نیوتون است؟

$g = ۱۰ \, {}^{m}/{}_{s^۲}$

الف) ۳۰ ب) ۵۰ ج) ۴۰ د) صفر

۲- جسمی به جرم ۱۲kg روی سطح شیب داری که با افق زاویه‌ی ۳۰ درجه می سازد، به حال سکون قرار دارد اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی به ترتیب ۰/۶ و ۰/۴ باشد، نیروی اصطکاک دارد بر جسم چند نیوتون است؟ $\sin ۳۰ = ۰/۵$ و $g = ۱۰ \, {}^{m}/{}_{s^۲}$

الف) صفر ب) $۳۶\sqrt{۳}$ ج) $۲۴\sqrt{۳}$ د) ۶۰

۳- جسمی به جرم ۲۰kg را روی سطح شیب داری که با افق زاویه‌ی ۳۷ درجه می سازد، قرار می دهیم. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی به ترتیب ۰/۵ و ۰/۳ باشد، نیروی اصطکاک وارد بر جسم چند نیوتون است؟

$\sin ۳۷ = ۰/۶$ و $g = ۱۰ \, {}^{N}/{}_{kg}$

الف) صفر ب) ۱۲۰ ج) ۴۸ د)۸۰

۴- نیروی افقی ۳۶N به جسم ۸ کیلوگرمی که روی سطح افقی ساکن است، وارد می کنیم. اگر ضریب اصطکاک برابر ۰/۲۵ باشد، جابه‌جایی جسم پس از ۵S چند متر می شود؟ $g = ۱۰ \, {}^{m}/{}_{t^۲}$

الف) ۲۵ ب) ۲۰ ج) ۳۰ د) ۱۲/۵

۵- جسمی را با سرعت افقی $۵۰ \,{}^{m}/_{s}$ روی سطح افقی پرتاب می کنیم. اگر ضریب اصطکاک جنبشی برابر ۱/۲۵ و $g = ۱۰ \,{}^{m}/_{s^{۲}}$ باشد، کدام گزینه‌ی زیر درست می باشد؟

الف) ضریب اصطکاک جنبشی نمی تواند از یک بزرگتر باشد.

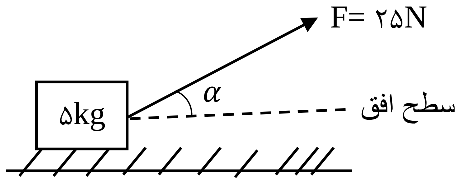
ب) جسم پس از پیمودن مسافت ۱۰۰ m روی سطح، می ایستد.

ج) برای محاسبه‌ی شتاب حرکت جسم روی سطح، باید جرم آن معلوم باشد.

د) جسم پس از ۳ ثانیه حرکت روی سطح، می ایستد.

۶) به جسمی نیروی $\vec{F}$ مطابق شکل روبه‌رو وارد می کنیم و جسم شروع به حرکت می کند. اگر ضریب (اصطکاک جنبشی برابر ۰/۴ باشد، شتاب حرکت چند متر بر مجذور در ثانیه می شود؟

$g = ۱۰ \,{}^{m}/_{s^{۲}}$, $\sin\alpha = ۰/۶$



الف) ۱/۵ ب) ۲

ج) ۱/۲ د) ۲/۵

۷- یک جسم روی سطح شیب داری که با افق زاویه‌ی ۳۰ درجه می سازد، با سرعت ثابت در حال پایین آمدن می باشد . ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح چقدر است؟

الف) $۰/۵$ ب) $\sqrt{۳}/_{۲}$ ج) $\sqrt{۳}$ د) $\sqrt{۳}/_{۳}$

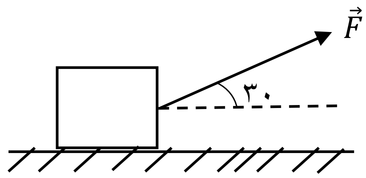
۸- نیروی F= ۵۰N مطابق شکل روبه‌رو به جسمی به جرم ۷/۵kg وارد می ود و جسم روی سطح افقی با سرعت ثابت در حرکت است. ضریب اصطکاک جنبشی چقدر است؟ $g = ۱۰ \,{}^{N}/_{kg}$, $\sin ۳۰ = ۰/۵$

الف) ۰/۵

ب) ۰/۷۵

ج) $\sqrt{۳}/۲$

د) $\sqrt{۳}/۳$



پاسخنامه چهار گزینه ای فصل ششم

۱) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۲) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۳) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۴) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۵) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۶) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۷) گزینه‌ی (د) صحیح است.

۸) گزینه‌ی (ج) صحیح است.