

دامنه و آشنایی با برخی توابع مهم

منظور از دامنه یعنی حدود ورودی یا به عبارت بهتر تصویر تابع روی محور x ها، دامنه را با D_f نمایش می-

دهیم.

به نکات زیر توجه کنید.

$$D_f = \mathbb{R} \quad \leftarrow \quad f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots - 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid q = 0\} \quad \leftarrow \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (\text{p و q چند جمله‌ای}) - 2$$

$$D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\} \quad \leftarrow \quad f(x) = \sqrt[n+1]{g(x)} - 3$$

$$D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\} \quad \leftarrow \quad f(x) = \sqrt[n]{g(x)} - 4$$

$$D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\} \quad \leftarrow \quad f(x) = \lfloor g(x) \rfloor \quad f(x) = |g(x)| \quad f(x) = \cos g(x) \quad , \quad f(x) = \sin g(x) - 5$$

تست (1) اگر $x = -1$ در دامنه‌ی $f(x) = \frac{x-2}{ax^2-ax+a-1}$ نباشد، دامنه‌ی این تابع کدام است؟

$$R = [-1, 1] \quad (1)$$

$$R = [-1, 0] \quad (2)$$

$$R = [-1, 0, 1] \quad (3)$$

$$R = [-1] \quad (4)$$

تست ۲) دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{x-1}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۱۰

تست ۳) دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4-|x-1|}}{x^2-1}$ به صورت $[a, b] - [c, d]$ است. حاصل $a + b + c + d$ کدام است؟

کدام است؟

(۱) -۱

(۲) ۰

(۳) ۱

(۴) ۲

تست ۴) دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x}} + \sqrt{\frac{-x}{x+2}}$ کدام بازه است؟

(۱) $(-3, 0)$

(۲) $[-2, -3]$

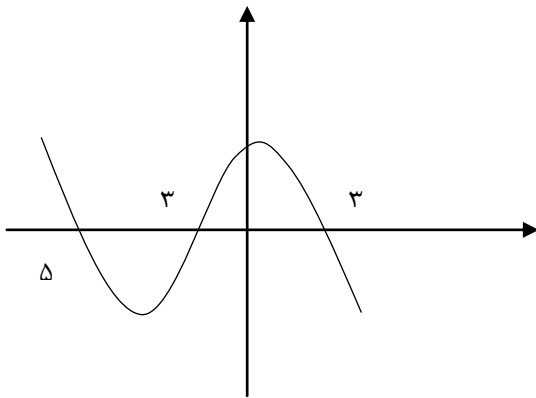
(۳) $(0, 2]$

(۴) $[-2, -\infty)$

تست ۵) چه عدد در دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{|x-1|}{2|x|-|x+1|}$ قرار دارند.

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) صفر

تست ۶) شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{x + f(x)}$ کدام است؟



- (۱) $[-1 \text{ و } 1]$
- (۲) $[-3 \text{ و } 2]$
- (۳) $[-4 \text{ و } -3] \cup [1 \text{ و } 2]$
- (۴) $[-3 \text{ و } 0] \cup [1 \text{ و } 2]$

تست ۷) اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ بازه‌ی $[-1 \text{ و } 2]$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) -۱
- (۴) ۲

تست ۸) اگر $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$ دامنه‌ی تابع $f(-x)$ کدام است؟

(۱) $x \leq -1$

(۲) $x \geq -1$

(۳) $x \leq 1$

(۴) $x \geq 1$

تمرین ۱) اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{mx-1}{2x^2-n-m}$ و $g(x) = \frac{1}{|x|+2}$ با هم برابرند، کدام گزینه صحیح

است؟

(۱) $m = \frac{1}{8}$

(۲) $m = -\frac{1}{8}$

(۳) $m < \frac{1}{8}$

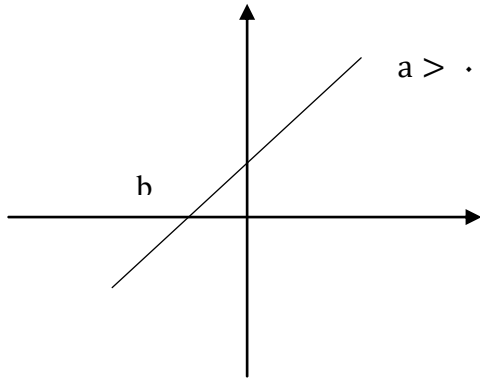
(۴) $m < -\frac{1}{8}$

تمرین ۲) اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + ax + b}$ بازه‌ی $[-1, 2]$ باشد و بدانیم دامنه‌ی تابع

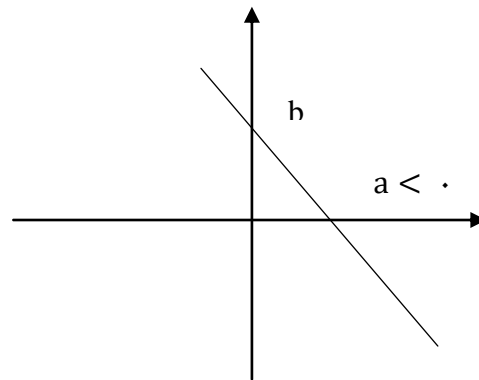
$g(x) = \frac{dx}{2x^2 - cx + d}$ به صورت $R = [a, b]$ می‌باشد، $d - ac$ کدام است؟

تابع خط $f(x) = ax + b$

$y = ax + b$ را تابع خط گوییم که در آن a شیب خط و b عرض از مبدا است. با توجه به این که $a > 0$ یا $a < 0$ است. یکی از حالات زیر رخ می‌دهد.



صعودی



نزولی

تست ۹) تابع خطی $F(x) = (x - m)(x - n) + (m + n)x^2$ از نقطه‌ی $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ می‌گذرد، $f(5)$

کدام است؟

۵ (۱)

۱۰ (۲)

-۵ (۳)

۰ (۴)

تست ۱۰) در یک تابع خطی $f(1) = 5$ و $f(3) = -9$ است. اگر دامنه‌ی این تابع $D = [0 \text{ و } 4]$

باشد، برد تابع کدام است؟

(۱) $[-9 \text{ و } 5]$

(۲) $[-16 \text{ و } 12]$

(۳) $[-12 \text{ و } 16]$

(۴) $[-5 \text{ و } 9]$

تمرین ۳) دامنه‌ی تابع خطی f به صورت $[2 \text{ و } -1]$ و برد آن $[2 \text{ و } -2]$ است، کدام یک از نقاط زیر

روی نمودار تابع f نمی‌تواند باشد؟

(۱) $(1 \text{ و } \frac{2}{3})$

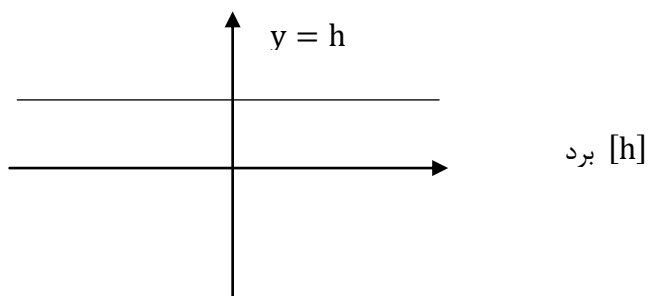
(۲) $(0 \text{ و } -\frac{2}{3})$

(۳) $(1 \text{ و } -\frac{2}{3})$

(۴) $(\frac{1}{3} \text{ و } 1)$

تابع ثابت $f(x) = k$

هر تابع به شکل $y = k$ که فقط یک عضو در برد وجود دارد را تابع ثابت گوییم:



تست (۱۱) هرگاه $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{2x^2-x-1}$ تابع ثابت باشد، $\frac{a^2+b^2}{f(2)}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) ۱

(۴) ۲

تمرین (۴) چه تایم ثابت $f: A \rightarrow B$ داریم که $A = \{3, 4, 5\}$ و $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و به ازای هر x در A ،

شرط $x \leq f(x) \leq 200$ برقرار باشد؟

(۱) ۰

(۲) ۱

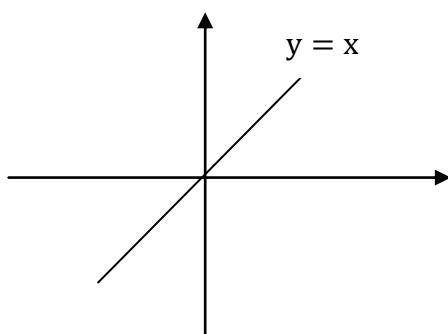
(۳) ۲

(۴) ۳

تابع همانی $f(x) = x$

هر تابع که در آن مقدار ورودی با مقدار خروجی یکسان باشد را تابع همانی گوئیم: $f(x) = x$

دامنه با برد برابر است و نمودار آن به صورت روبه‌رو است.



نیم‌ساز ربع اول و سوم

تست ۱۳) تابع $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 + 2x + 2}$ همانی است. $a + b + c$ کدام است؟

(۱)

(۲) ۴

(۳) ۲

(۴) -۱

تست ۱۴) اگر f تابع همانی و g تابعی ثابت باشد و داشته باشیم $\frac{g(2)f(2) + g(4)f(4)}{g(-1) + f(-2)}$ آن گاه $g\left(\frac{2}{5}\right)$ و

$f\left(\frac{5}{2}\right)$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) -۵

(۳) ۱

(۴) صفر

تمرین ۵) دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x^2 + ax + b}$ به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{1/2\}$ می‌باشد و تابع

$g(x) = \frac{mx^2 + 2x + n - 5}{m + p}$ همانی است، حاصل $\frac{2m + p + n}{a + b}$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) -۵

(۳) ۴

(۴) -۴

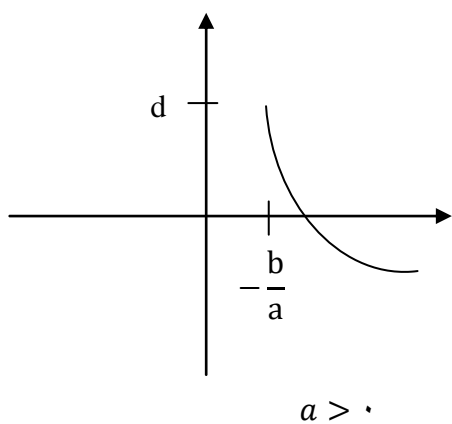
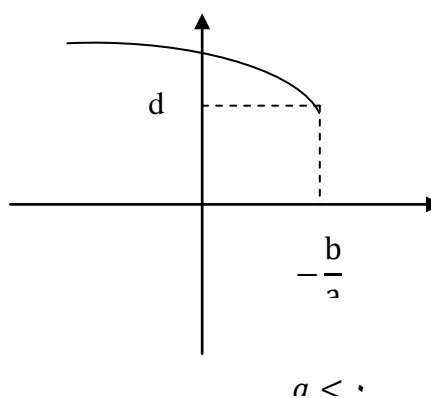
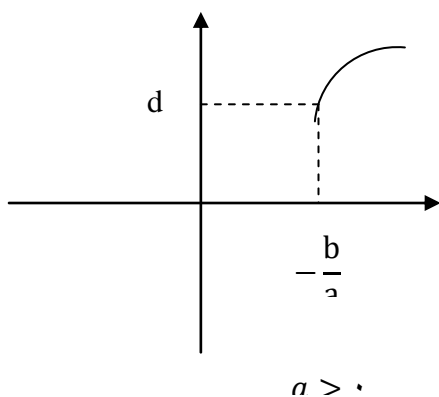
تابع رادیکالی $f(x) = \sqrt{ax + b} + d$

دامنه‌ی این نوع توابع $x \geq -\frac{b}{a}$ است. برای رسم این توابع به یکی از دو شکل زیر عمل کنید.

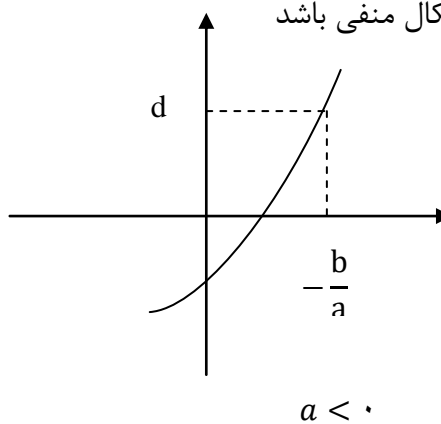
(۱) عددگذاری ← اعدادی را در نظر بگیرید که زیر رادیکال مربع کامل شود پس رسم کنید.

(۲) در رسم نمودار تابع $y = \sqrt{ax + b} + d$ نقطه‌ی $(-\frac{b}{a}, d)$ ابتدا نمودار است که با توجه به علامت a

داریم.



اگر ضریب رادیکال منفی باشد



تست ۱۵) نمودار تابع $y = -\sqrt{x-1} + 1$ خط $y + x = 2$ را در چند نقطه قطع می‌کنند؟

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

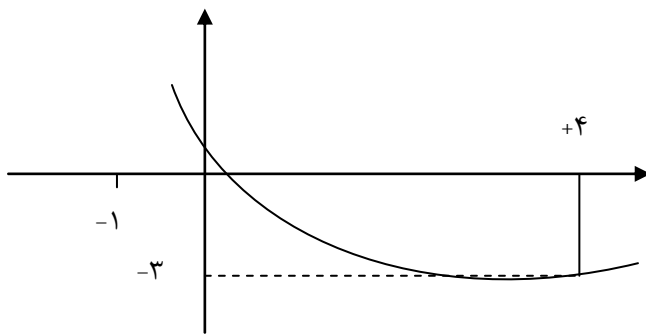
تست ۱۶) شکل زیر نمودار تابع $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ است. طول از مبدأ نمودار تابع کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)



تمرین ۶) اگر $f(x) = a^2 + \sqrt{\frac{a}{2}x + 2}$ و مجموعه مقادیری از x که به ازای آن تابع f قابل تعریف

است، بازه‌ی $[-\infty, 2]$ باشد، برد تابع f کدام است؟

$[1, \infty)$ (۱)

$[9, \infty)$ (۲)

$[4, \infty)$ (۳)

$[16, \infty)$ (۴)

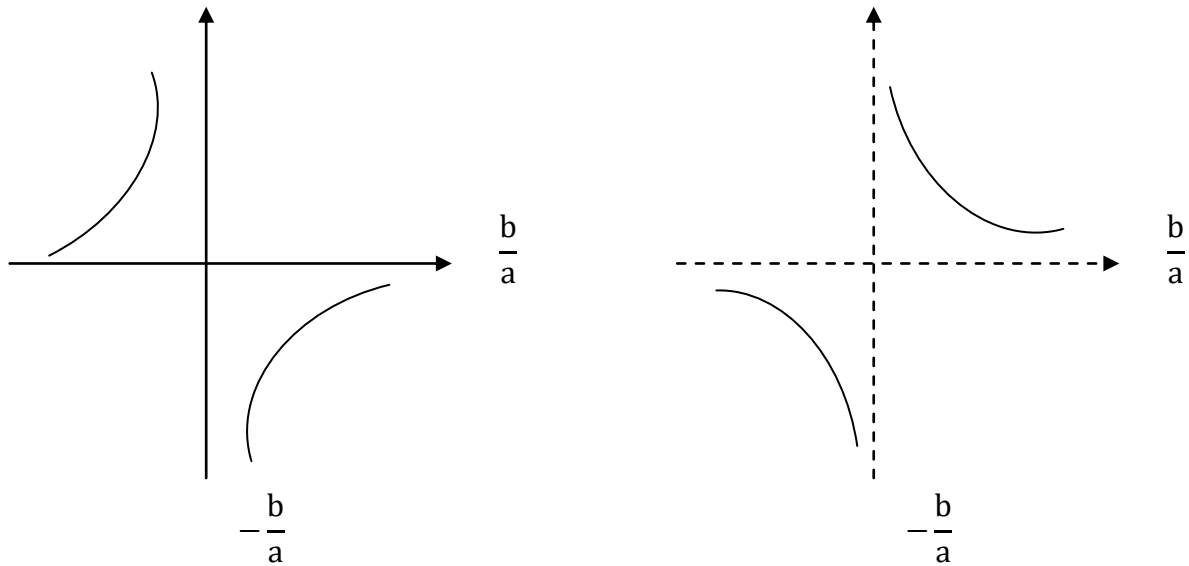
تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ موسوم به هموگرافیک

مهمترین ویژگی توابع هموگرافیک نمودار آن است. قبل از آن به دامنه و برد دقت کنید.

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{d}{c} \right\} \quad \text{برد } R = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

برای رسم نیز ابتدا دو مجانب تابع $y = \frac{a}{c}, x = -\frac{d}{c}$ را رسم می‌کنیم سپس نقطه‌ی برخورد با محور

y ها را به دست می‌آوریم تابع به یکی از اشکال زیر خواهد بود.

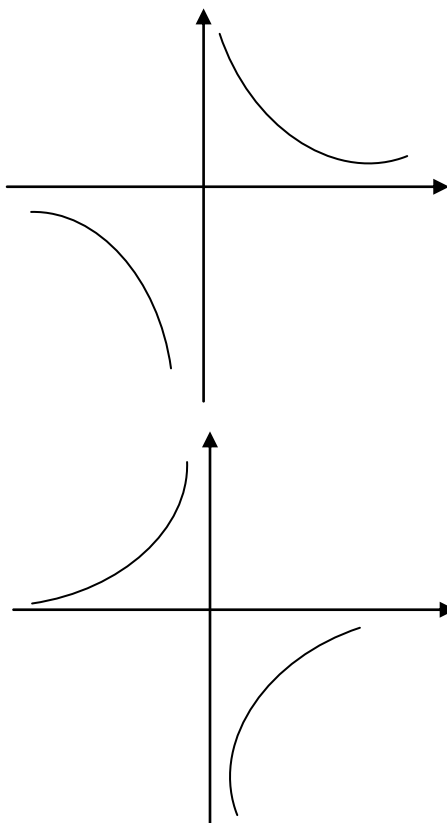


مثال) نمودار تابع $y = \frac{x+1}{x-6}$ را رسم کنید.

$$y = \frac{h}{x}$$

$$h > 0$$

$$h < 0$$



حالت خاص

تست (۱۷) تابع با ضابطه‌ی $y = ax + b + \frac{2x^2}{x+1}$ هموگرافیک است که محور x ها را در نقطه‌ی

$x = 1$ قطع می‌کند، $a + 2b$ کدام است؟

۱ (۱)

۰ (۲)

۲ (۳)

-۲ (۴)

تست ۱۸ دامنه‌ی تابع گویای $f(x) = \frac{2x-5}{x+k}$ برابر با $\mathbb{R} - \{3\}$ است. نمودار این تابع از کدام نواحی محورهای مختصات عبور می‌کند.

(۱) هر ۴ ناحیه

(۲) اول، دوم و چهارم

(۳) اول، دوم و سوم

(۴) اول، سوم و چهارم

تمرین ۷ کدام یک از توابع زیر گویا نیست؟

$$f(x) = \frac{x}{2x+3} \quad (۱)$$

$$G(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{3x^2-4} \quad (۲)$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x}+x}{x^4+2x+1} \quad (۳)$$

$$k(x) = x^2 \quad (۴)$$

تساوی در تابع

دو تابع را مساوی گوییم هرگاه

الف) دامنه‌ی برابر داشته باشند.

ب) به ازای هر ورودی مشترک، خروجی یکسان داشته باشند.

تست ۱۹) در کدام گزینه در تابع با هم برابرند؟

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 2x^2} \\ g(x) = |x| \sqrt{x-2} \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} \\ g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x^2 - 2} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x\sqrt{x-2}}{|x|} \\ g(x) = \pm \sqrt{x-2} \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2\sqrt{x-2}}{|x|} \\ g(x) = x^2 \sqrt{x-2} \end{cases} \quad (۴)$$

تست ۲۰) با کدام دامنه در تابع و مساوی است؟

R (۱)

(۱, ∞) (۲)

R⁺ (۳)

(-۱, ∞) (۴)

تست ۲۱) اگر در تابع $f(x) = \frac{5}{x+2}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم برابر باشند، مقدار $a + d$ کدام است؟

۸ (۱)

۹ (۲)

۱۰ (۳)

تست ۲۲) کدام دو تابع برابرند؟

$$g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-1} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad (۱)$$

$$g(x) = \sqrt{x} \sqrt{1-x} \quad f(x) = \sqrt{x - x^2} \quad (۲)$$

$$g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x+2} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} \quad (۳)$$

$$g(x) = x - 2 \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} \quad (۴)$$

تمرین ۸) کدام دو تابع با هم مساوی‌اند؟

$$g(x) = \sqrt{x|x|} \quad , \quad f(x) = (\sqrt{x})^2 \quad (۱)$$

$$g(x) = \sqrt{|x|} x \sqrt{|x|} \quad , \quad f(x) = \sqrt{x|x|} \quad (۲)$$

$$g(x) = (\sqrt{x})^2 \quad , \quad f(x) = x \quad (۳)$$

$$g(x) = (\sqrt{x})^2 \quad , \quad f(x) = \sqrt{x^2} \quad (۴)$$

جزو صحیح $[x]$

الف) مفهوم: هر عدد حقیقی یک قسمت اعشار و یک قسمت صحیح دارد به قسمت صحیح جزء صحیح

گوییم و با $[]$ نمایش می‌دهیم.

$$[2/5] = 2$$

$$[-3/5] = -4$$

مثال) اگر $|x| \leq |x + 3|$ باشد، آنگاه حاصل $[2x + 5]$ چیست؟

ب) ویژگی‌های جزء صحیح:

$$[x] = x \quad \leftarrow \quad x \in \mathbb{Z} - 1$$

$$[2x + 5] = 2x + 5 \quad \rightarrow$$

$$k \leq x \leq k + 1 \quad \leftarrow \quad [x] = k - 2$$

$$[x]^2 - 5[x] + 6 = 0 \quad \rightarrow$$

$$0 \leq g(x) - [g(x)] < 1 - 3$$

$$y = 2x - 3[x] \xrightarrow{\text{برد}}$$

$$y = 2x - [3x] \xrightarrow{\text{برد}}$$

$$n \in \mathbb{Z} \rightarrow [x + n] = [x] + n - 4$$

مثال) معادلات زیر را حل کنید.

$$[x + [x + [x]]] = 3 \quad \left[\frac{3x + 1}{x} \right] = 5 \quad [2x + 1] = 0$$

-5

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad [-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال) اگر $[x - 3] + [4 - x]$ ، x به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۶- اگر قسمت اعشار $p_x = x$ و قسمت اعشار $p_y = y$ در این صورت

$$0 \leq p_x + p_x < 1 \rightarrow [x + y] = [x] + [y]$$

$$1 \leq p_x + p_x < 2 \rightarrow [x + y] = [x] + [y] + 1$$

در این صورت حتماً ۱ یا ۰ $[x + y] = [x] - [y] =$

مثال) معادله‌ی زیر چند جواب دارد؟

$$[2x^2 + 2] - [x^2 - x + 1] - [x^2 + x + 1] = 2$$

۷- بسط زیر براس $[nk]$ مهم است.

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right]$$

$$[2x] =$$

$$[3x] =$$

مثال) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right] = 12$$

تست ۲۳) اگر $6 = [x + 4[x]] + [x + 3[x]]$ باشد، مقدار x کدام است؟

(۱) $x \in [2, 4]$

(۲) $x \in [3, 3]$

(۳) $x \in [2, 4]$

(۴) $x \in [0, 1]$

تست ۲۴) معادله $k = [x + 5] + [x + 4[x]]$ دارای جواب است، k کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۱۵

(۲) ۱۶

(۳) ۱۷

(۴) ۱۸

تست ۲۵) مجموعه جواب معادله $3 = [x] - [2x]$ را بدست آورید؟

(۱) $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$

(۲) $[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$

(۳) $(2, 3)$

(۴) $[2, 3]$

تست ۲۶) مجموعه جواب معادله‌ی $[x] - [2x] = 0$ را بدست آورید؟

(۱) $\left[0, \frac{1}{2}\right)$

(۲) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

(۳) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

(۴) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

تست ۲۷) مجموعه جواب معادله‌ی $[x] - [-x] = 7$ چیست؟

(۱) $\left[\frac{7}{2}\right]$

(۲) $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

(۳) $(3, 4)$

(۴) $[3, 4)$

تست ۲۸) حاصل $\left[\frac{3n+7}{n+2}\right]$ برای کلیه‌ی مقادیر طبیعی n کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۲

(۴) ۱

تست ۲۹) معادله‌ی $2x^2 - 5x + 2 = \frac{1}{[x] + [-x]}$ چند ریشه دارد؟

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

(۴) بی شمار

تست ۳۰) اگر $5 = [x + \frac{1}{2}] - [x + \frac{3}{2}] + [x]$ باشد مقادیر قابل قبول x کدام است؟

(۱) (۴ و ۵)

(۲) [۴ و ۵]

(۳) (۲ و ۳)

(۴) [۲ و ۳]

تست ۳۱) مساحت ناحیه‌ای نمودار $[y] = [x] + 2$ کدام است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

تست ۳۲) اگر $[x] = [y] = ۳$ حاصل $\left[\frac{x+۲y}{۳}\right]$ کدام است؟

۲ (۱)

(۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

تست ۳۳) اگر $[x+y] = [x] + [y+۱]$ آن گاه حدود $x+y - [x+۱] - [y]$ کدام است؟

(۱) $[۰ و ۱)$

(۲) $[-۱ و ۰)$

(۳) $[-۱ و ۰]$

(۴) $[۰ و ۱]$

تمرین ۹) اگر $\left[\frac{۵-x}{۲}\right] = -۳$ ، آن گاه حاصل $\left[\frac{۲x-۴}{۳}\right]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۰ (۴)

تمرین ۱۰) اگر $[x^2 - 7x] = [x^2 - 5x] = 2$ ، مقدار $[x^2 - 6x + 1]$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

تمرین ۱۱) دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x-2}{[x]+[-x]}$ کدام است؟

\emptyset (۱)

\mathbb{Z} (۲)

$\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۳)

\mathbb{R} (۴)

نامعادلات جزء صحیحی

الف) $[x] \leq k \rightarrow x \leq k + 1$

ب) $[x] < k \rightarrow x < k$

ج) $[x] > k \rightarrow x \geq k + 1$

د) $[x] \geq k \rightarrow x \geq k$

تست ۳۴ دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{(2[x] + 1)(1 - [x])}$ کدام است؟

(۱) $[-\frac{1}{2}, 1]$

(۲) $[0, 1]$

(۳) $[0, 2]$

(۴) $[-\frac{1}{2}, 2]$

تست ۳۵ مجموعه جواب نامعادله $|[x] - 1| \leq 3$ بازه‌ی $[a, b)$ است. بیشترین مقدار $b - a$

چيست؟

(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۷

(۴) ۶

تست ۳۶ مجموعه جواب نامعادله $x \leq 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ چند عدد طبیعی و زوج را شامل نمی‌شود؟

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی شمار

تمرین ۱۲ دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{8-[x]}}{\sqrt{[x]-2}}$ برابر کدام است؟

(۱) $(2, 8]$

(۲) $(2, 9)$

(۳) $[3, 8]$

(۴) $[3, 9)$

نمودار توابع جزء صحیحی

برای رسم نمودارهای شامل جزء صحیح یکی از ۳ حالت زیر رخ می‌دهد.

الف) $y = [f(x)]$ (کل تابع درون جزء صحیح)

۱- $f(x)$ را رسم کنید.

۲- خطوط افقی $y = k \in \mathbb{Z}$ را رسم کنید.

۳- بین دو خط افقی را به خط پایین تصویر کنید.

$$y = [x]$$

$$y = [\sin x]$$

$$y = [|x| - 1]$$

$$y = [x^2]$$

ب) $y = f([x])$ فقط درون جزء صحیح باشد.

۱- $f(x)$ را رسم کنید

۲- خطوط عمودی $x = k$ را رسم کنید.

۳- از نقاط برخورد تابع با $x = k$ یک واحد به سمت راست خط افقی رسم کنید.

$$y = [x]^2 - 2[x]$$

$$y = \sin[x]$$

$$y = |[x]|$$

ج) اگر x هم درون جزء باشد هم بیرون جز در این صورت

الف) یا بازه ؟؟؟؟؟ کنید

ب) یا از عبارت جزء صحیح دار شروع کنید تابع را تشکیل دهید.

$$y = x - [x]$$

$$y = x + [x]$$

$$y = x[x]$$

$$y = x \left[\frac{x}{2} \right] + 1$$

نکته: برای رسم $y = [ax + b]$ با توجه به آن که ضریب x برابر a است، با فرضیه‌ی را به طول $\frac{1}{a}$ انجام می-

دهیم.

نکته: در حل تست‌ها عدد گذاری فراموش نشود.

تست ۳۷) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 2 \left[\frac{x}{2} \right] + 1$ ، $x \in [-2, 6]$ از چند پاره خط مساوی هم

تشکیل شده است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

تست ۳۸) مساحت سطح محصور بین نمودار توابع $y = -x$ و $y = -2x$ در بازه‌ی

$\left[-1, \frac{1}{2} \right]$ کدام است؟

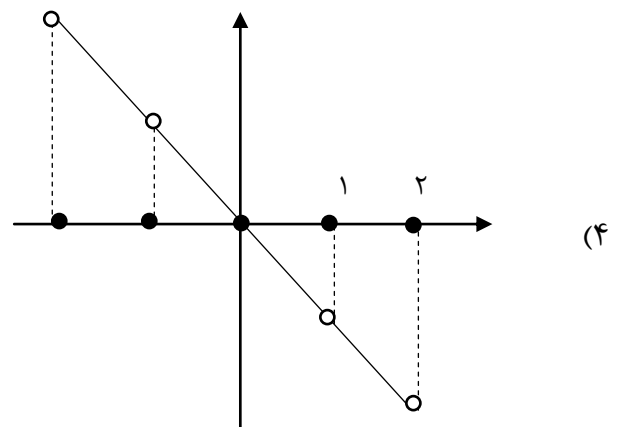
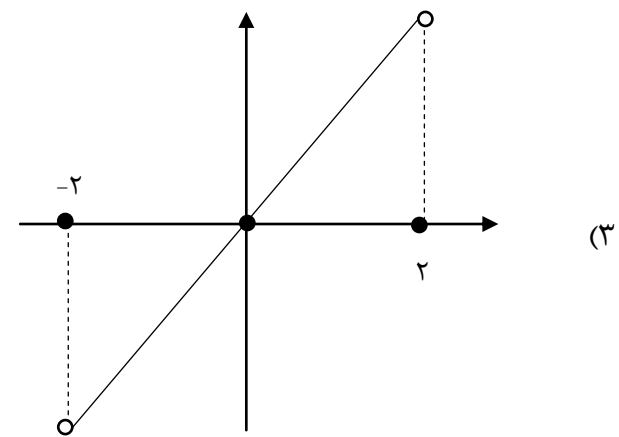
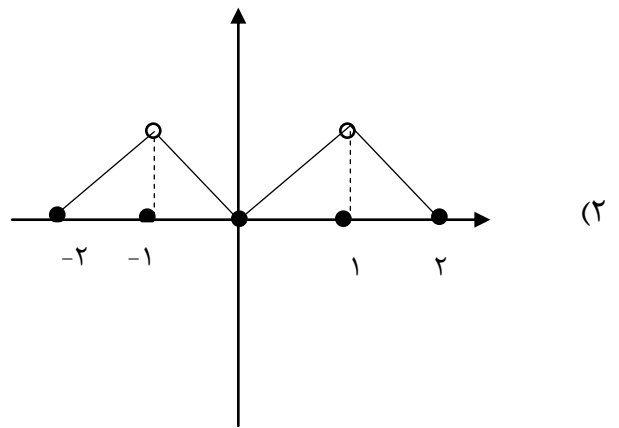
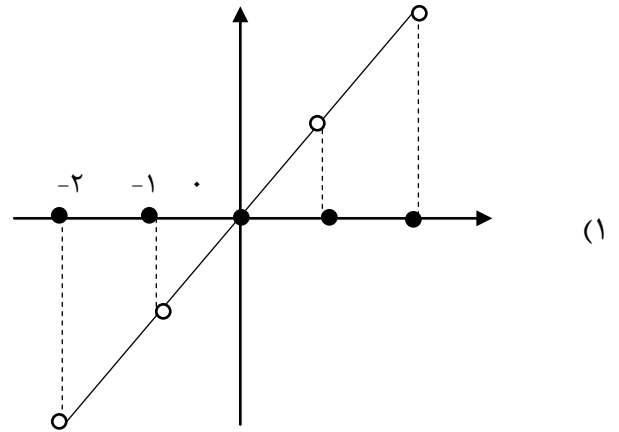
$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{1}{4}$ (۲)

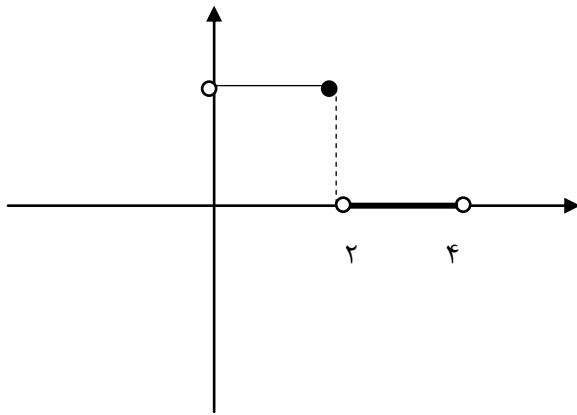
$\frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{1}{16}$ (۴)

تست ۳۹) نمودار تابع $f(x) = 2x[x] - x$ در بازه $[-2, 2]$ کدام است؟



تست ۴۰) شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = [ax] + b$ است. $a + b$ کدام است؟



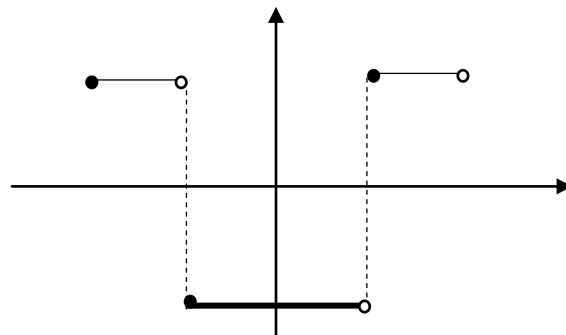
(۱) ۱

(۲) ۲

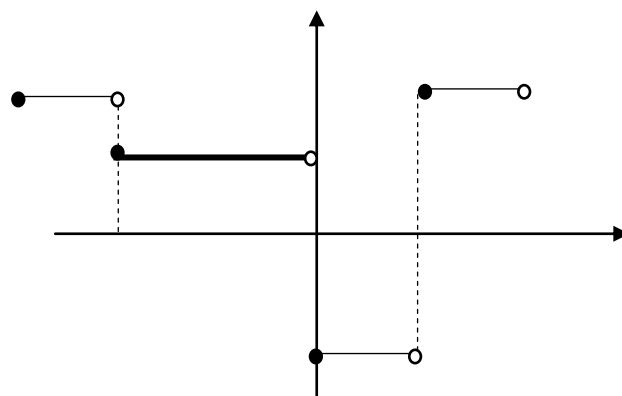
(۳) ۱/۵

(۴) ۲/۵

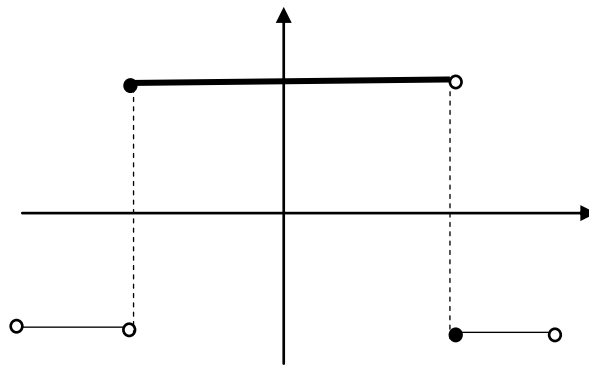
تمرین ۱۳) نمودار تابع $y = ۲ \lfloor [۳x] \rfloor - ۱$ به ازای $-\frac{1}{۴} \leq x \leq \frac{1}{۴}$ کدام است؟



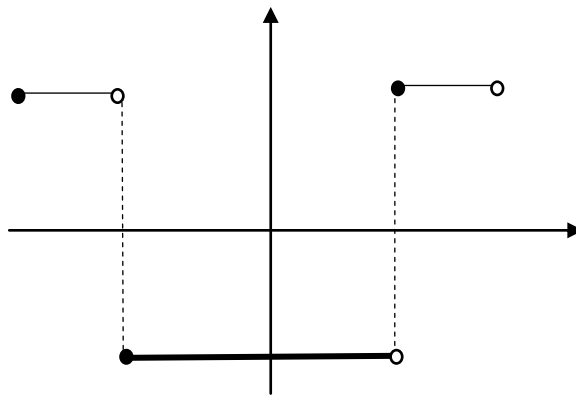
(۱)



(۲)



f



f

(گارگاه تست)

تست (۴۱) برای تابع سمیو ثابت $f(x) = ax + b$ ، رابطه‌ی $f(p + q) = f(p) + f(q)$ برقرار است.

تابع چگونه است؟

(۱) یک به یک

(۲) غیر خطی

(۳) ثابت

(۴) دارای برد $[a, \infty)$

تست (۴۲) اگر f تابعی خطی باشد و $f(x) = f(1) + 2fx + 5x$ مقدار $f(v)$ کدام است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۲۵

(۳) ۳۰

(۴) ۳۵

تست (۴۳) اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{(2a + 6)x^2 + 2bx + 10}$ بازه‌ی $[-5, \infty)$ باشد، مقدار

$a + b$ کدام است؟

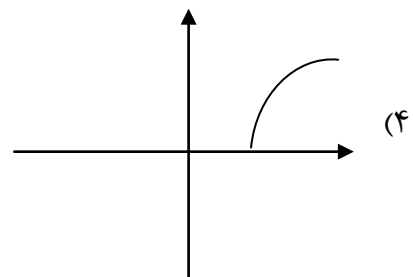
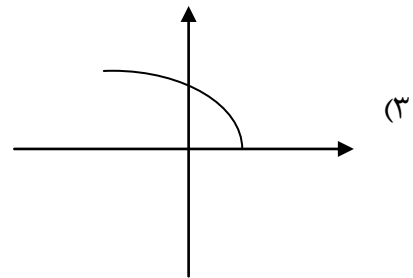
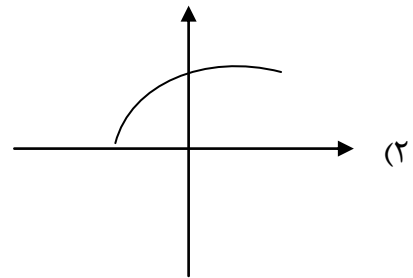
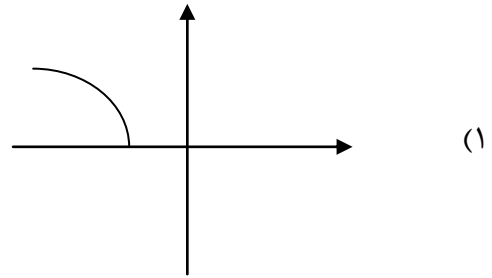
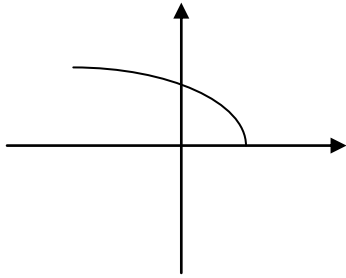
(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) ۴

تست ۴۴) اگر نمودار تابع $y = \sqrt{ax + b}$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = \sqrt{bx + a}$ کدام

است؟



تست (۴۵) اگر دو تابع $f = [(1, b), (3, c)]$ و $g = [(0, b), (1, 2)]$ با هم برابر باشند،

$a + b + c$ کدام است؟

۳ (۱)

۵ (۲)

۷ (۳)

۹ (۴)

تست (۴۶) اگر دو تابع $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & x \neq 3 \\ b & x = a \end{cases}$ با هم برابر باشند، آن گاه $2a - b$ کدام است؟

۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

تست (۴۷) معادله $x^2 - 3x + x = 2$ چند جواب دارد؟

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

تست ۴۸) معادله $\left[\frac{5x+6}{4}\right] = \frac{2x+1}{2}$ چند ریشه دارد؟

(۱) بی شمار

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

تست ۴۹) دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4[x]-[x]^2}}$ را مجموعه A و برد تابع $g(x) = [3x] - 3[x]$ را

مجموعه‌ی B می‌نامیم، $A \cup B$ کدام است؟

(۱) $[0, 4)$

(۲) $\{0, 1, 2, 3\}$

(۳) $[1, 4) \cup \{0\}$

(۴) $[1, 3]$

تست ۵۰) برد تابع $f(x) = [\sin x] + [\cos x]$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

تست (۵۱) اگر $\left[\frac{6}{p}\right] + \left[-\frac{6}{p}\right] = 0$ باشد، p چه مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۴ (۱)

۸ (۲)

۶ (۳)

۱۲ (۴)

تست (۵۲) مجموعه جواب معادله $\left[x - \frac{3}{2}\right] \left[x + \frac{1}{2}\right] = -1$ بازه $[a, b)$ است، $\frac{a+b}{2}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۱)

۱ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۲ (۴)

تست (۵۳) طول بازه $\sqrt{[2x]} < \sqrt{2}$ نامعادله $\sqrt{[2x]}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۱)

۱ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۲ (۴)

تابع یک به یک

تابع $f(u)$ را یک به یک گوئیم هرگاه هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌ی دوم یکسان نباشد. در ضمن اگر تابعی یک به یک باشد و مؤلفه‌ی دوم برابر داشته باشد حتماً مؤلفه‌های اول هم برابر است.

$$f(u) = f(v) \xrightarrow{\text{یک به یک } f} u = v$$

به نکات زیر توجه و به حل تست‌های بعد از آن دقت کنید:

- ۱- توابع ثابت، خط تقارن دار و متناوب یک به یک نیست.
- ۲- توابع درجه‌ی زوج یک به یک نیست.
- ۳- هر تابعی به جز توابع ثابت با محدود کردن دامنه یک به یک می‌شود.
- ۴- خطوط افقی توابع یک به یک را فقط در یک نقطه قطع می‌کنند.
- ۵- مهم‌ترین تابع جهت محدود کردن و یک به یکی تابع درجه‌ی ۲ است.

نکته:

تست ۵۴) اگر رابطه‌ی $\{(۳ و ۲) و (a و ۵) و (۳ و a^2 - a) و (b و ۲) و (-۱ و ۴)\}$ تابع یک به یک باشد؟ دوتایی (a, b) کدام است؟

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (۴)$$

تست ۵۵) تابع $y = x^2 + 4x + 3$ در کدام باره‌ی زیر یک به یک است؟

(۱) $(-\infty, 5)$

(۲) $(-\infty, -3)$

(۳) $(-1, -\infty)$

(۴) $(-4, -\infty)$

نکته:

تست ۵۶) تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 1 \\ x + a & x < 1 \end{cases}$ یک به یک است هرگاه

(۱) $a \geq 1$

(۲) $a > 1$

(۳) $a < 1$

(۴) $a < 1$

تست ۵۷) تابع $y = \frac{ax+1}{2x+a-3}$ به ازای چه مقدار a یک به یک نیست؟

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳) بی شمار

(۴) ۲

نکته:

تست ۵۸ هرگاه تابع $f(x)$ تابعی یک به یک باشد، آن گاه معادله $f(x^2 + x) - f(x^2 + 1) =$

• دارای چند ریشه است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

(۴) بی شمار

تست ۵۹ تابع $f(x) = \left| \frac{x}{2} + a \right|$ در بازه $(-2, 1)$ یک به یک است، حدود a کدام است؟

$\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ (۱)

$\mathbb{R} - \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ (۲)

$\mathbb{R} - (-4, 2)$ (۳)

$[-4, 1]$ (۴)

تست ۶۰ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ ax^2 & x < 0 \end{cases}$ روی دامنه خود یک به یک باشد آن گاه a و

b کدام می توانند باشند؟ ($a \neq 0$)

$a > 0, b = 1$ (۱)

$a > 0, b = 0$ (۲)

$a < 0, b = 2$ (۳)

$$a < 0, b = -1 \quad (۴)$$

تست (۶۱) اگر f و g در تابع یک به یک باشد، کدام یک از توابع زیر دامنه‌ی خود همواره یک به

یک است؟

$$f + g \quad (۱)$$

$$f \times g \quad (۲)$$

$$\frac{f}{g} \quad (۳)$$

$$f \circ g \quad (۴)$$

تمرین (۱۴) کدام تابع یک به یک است؟

$$f(x) = (x - 2)|x - 2| \quad (۱)$$

$$f(x) = x - \sqrt{x} \quad (۲)$$

$$f(x) = \left[\frac{|x|}{|x|+1} \right] \quad (۳)$$

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} \quad (۴)$$

اعمال جبری

چهار عمل اصلی مابین توابع دقت کنید و همچنین به یافتن دامنه

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$(kf)(x) = k f(x) \quad D_{kf(x)} = D_{f(x)}$$

تست ۷۲) اگر $f(x) = 3\sqrt{6-2x}$ و $g(x) = 3\sqrt{6-2x}$ آن گاه دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

$$(-\infty, 3] - \left[-\frac{1}{3}\right] \quad (۱)$$

$$(-\infty, 3] - \frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$(-\infty, 3] - \left[-\frac{1}{3}, 2\right] \quad (۳)$$

$$(-\infty, 3] - \left[-\frac{1}{3}, 2\right] \quad (۴)$$

تست ۷۳) اگر $f = \{(0, -1), (1, 0), (2, 1), (4, 5)\}$ باشد، آن گاه تابع $\frac{f}{f-1}$ از چند زوج مرتب تشکیل

شده است؟

$$۱ \quad (۱)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۴)$$

تست ۷۴) اگر $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ و $f \{(1,2), (3,1)\}$ آن گاه تابع $\frac{g}{g-3}$ کدام می تواند باشد؟

(۱) $\{(1, \frac{-1}{3}), (2, \frac{2}{5})\}$

(۲) $\{(1, -\frac{1}{3}), (3, -\frac{1}{3})\}$

(۳) $\{(1, -\frac{1}{3}), (4, 0)\}$

(۴) $\{(3, \frac{1}{3}), (-1, 1), (-2, \frac{1}{3})\}$

تست ۷۵) اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ 1-x^2 & x > 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -2x & x > 1 \\ x^2 + 2 & x \geq 1 \end{cases}$ آن گاه ضابطه‌ی $f-g$ کدام

است؟

تست ۷۶) اگر $f(x) = \sqrt{x+4}\sqrt{x-4}$ و $g(x) = \sqrt{x-4}\sqrt{x-4}$ و $4 \leq x \leq x$ باشد، ضابطه‌ی تابع

$(f+g)(x)$ چیست؟

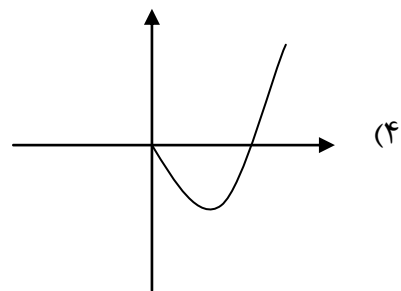
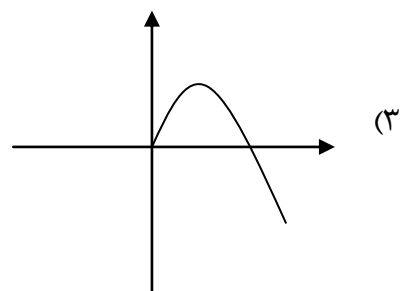
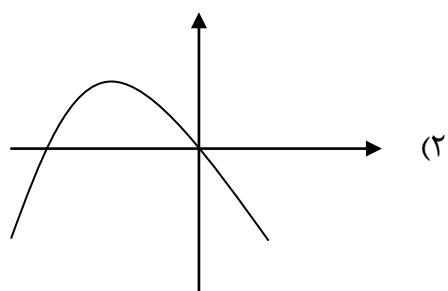
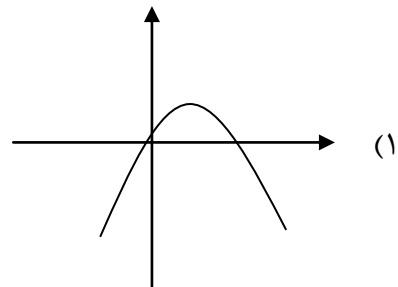
(۱) $2 + \sqrt{x+4}$

(۲) $2 - \sqrt{x-4}$

(۳) ۴

(۴) -۴

تست ۷۷) اگر $f(x) = \sqrt{x} + x$ و $g(x) = \sqrt{x} - x$ آن گاه نمودار تابع $(f \times g)(x)$ کدام است؟



تست ۷۸) اگر $f(x) = 2 - |x + 1|$ و $g(x) = x + |x|$ آنگاه برد تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟

(۱) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

(۲) $(-1, \infty)$

(۳) $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

(۴) $(0, \infty)$

تست ۷۹) اگر $f = \{(-2, 2), (0, -2), (2, 0)\}$ آنگاه تابع $\frac{2}{f^2}$ کدام است؟

(۱) $\left\{\left(-2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

(۲) $\left\{\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}$

(۳) $\left\{\left(4, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}$

(۴) $\left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

تمرین ۱۵) اگر $g = \{(-1, 1), (2, 0), (1, 2)\}$ و $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع

$2g - 3f$ کدام است؟

(۱) ۱۰

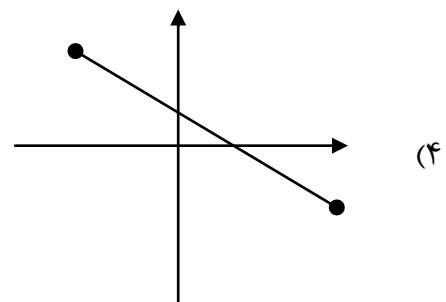
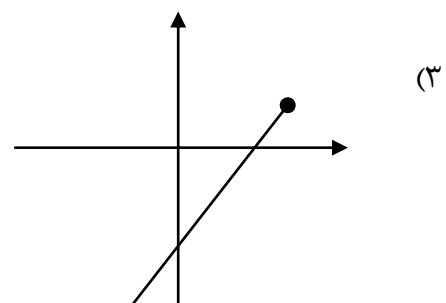
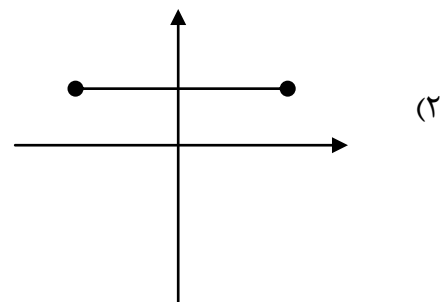
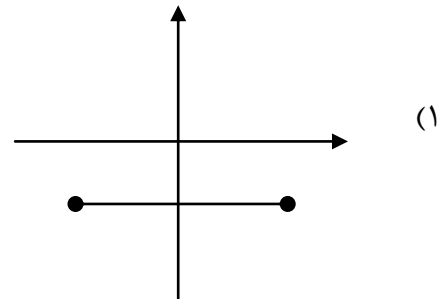
(۲) ۱۱

(۳) ۱۲

(۴) ۱۳

تمرین ۱۶) تابع‌های خطی «نابرابر f , g را با دامنه‌ی $[-2, 4]$ و برد $[-3, 2]$ در نظر بگیرید. نمودار

تابع $h(x) = f(x) + g(x)$ با دامنه‌ی $[-2, 4]$ کدام است؟



(کارگاه تست)

تست ۸۰) تابع $f(x) = |x-1| + |x+a|$ به ازای کدام مقادیر وی $[2, \infty)$ یک به یک است؟

(۱) $a \geq -1$

(۲) $a \geq -2$

(۳) $-2 \geq a \geq -1$

(۴) $a \leq -1$

تست ۸۱) اگر $f(x) = (a-3)x^2 + 2x - 3$ روی \mathbf{R} وارون پذیر باشد، مقدار $af(2)$ کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۳

(۳) ۶

(۴) ۹

تست ۸۲) کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

(۱) $f(x) = x + \sqrt{x}$

(۲) $g(x) = x - \sqrt{x}$

(۳) $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$

(۴) $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$

تست ۸۳) اگر تابع f یک به یک باشد، معادله‌ی $f\left(\frac{x-2}{2x}\right) - f\left(\frac{2x-1}{x}\right) = 0$ چند ریشه دارد؟

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

تست ۸۴) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq a \\ 2x + 17 & x < a \end{cases}$ یک به یک باشد، حدود a چیست؟

$a \leq -3$ یا $a \geq 5$ (۱)

$-3 \leq a \leq -5$ (۲)

$a \geq 5$ (۳)

$a \leq -3$ (۴)

تست ۸۵) اگر $g(x) = f(3x - 4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ ، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

تست ۸۶) اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ باشد، آنگاه حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

تست ۸۷) ضابطه‌ی وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

$y = \frac{x}{1-|x|} \quad |x| < 1$ (۱)

$y = \frac{x}{|x|-1} \quad |x| > 1$ (۲)

$y = \frac{1-|x|}{|x|} \quad |x| > 1$ (۳)

$y = \frac{|x|-1}{x} \quad |x| > 1$ (۴)

تست ۸۸) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در یک بازه صعودی است. ضابطه‌ی معکوس

آن در این بازه، کدام است؟

$-x + 7 \quad x > 8$ (۱)

$\frac{1}{3}x + 2 \quad x > 3$ (۲)

$x + 7 \quad x > -4$ (۳)

$\frac{1}{3}x - 1 \quad -4 < x < 8$ (۴)

تست ۸۹) با فرض $f(x) = x|x|$ مجموعه جواب نامعادله $f^{-1}(x) \geq f(x)$ کدام است؟

(۱) $[-1, 0] \cup [1, \infty)$

(۲) $[-1, 1]$

(۳) $(-\infty, -1] \cup [0, 1)$

(۴) $(-\infty, +\infty)$

تست ۹۰) اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & x \geq 1 \\ 2x + 2 & x < 1 \end{cases}$ باشد، $f^{-1}(0) + f^{-1}(5)$ کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۱۰

(۳) ۷

(۴) ۹

تست ۹۱) اگر $f(x) = f^{-1}(5)$ باشد، حاصل $f(1399)$ کدام است؟

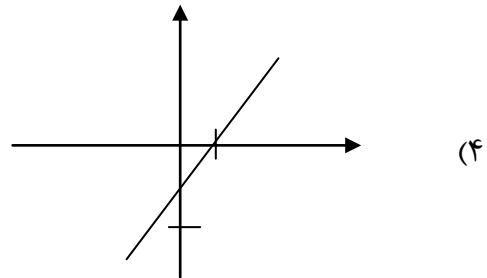
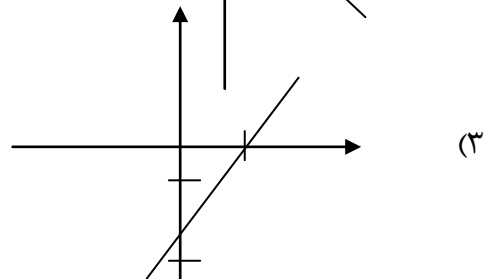
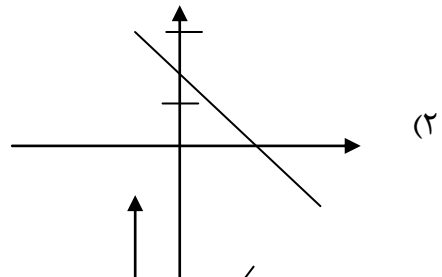
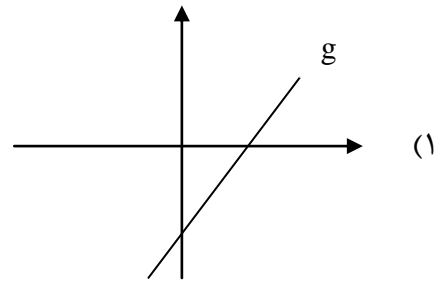
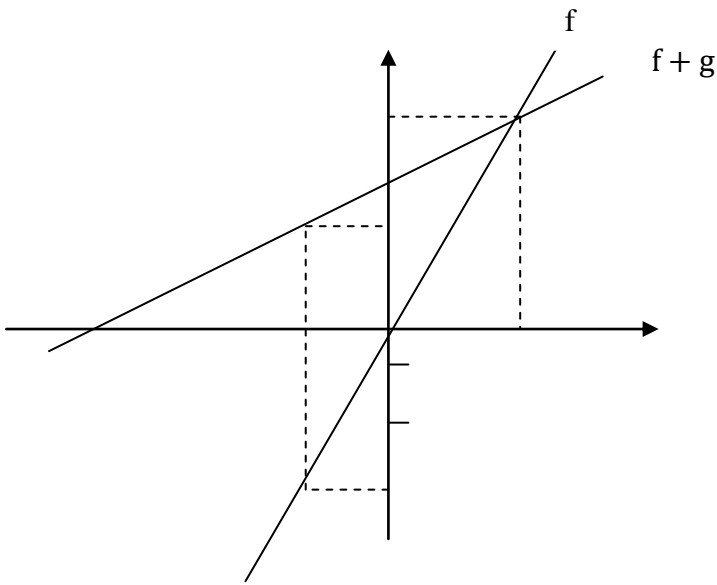
(۱) ۱۳۹۷

(۲) ۱۳۹۸

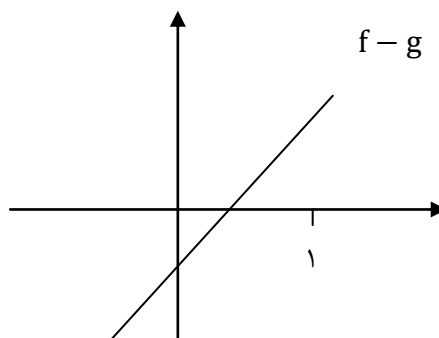
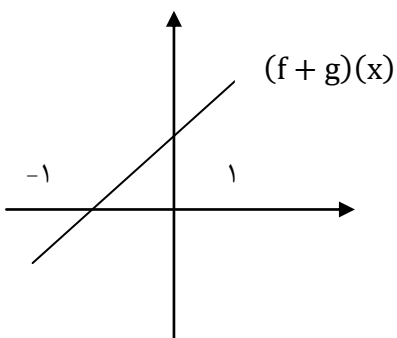
(۳) ۱۳۹۹

(۴) ۱۴۰۰

تست ۹۲) اگر نمودارهای f و $f + g$ به شکل روبه‌رو باشند، نمودار g کدام است؟

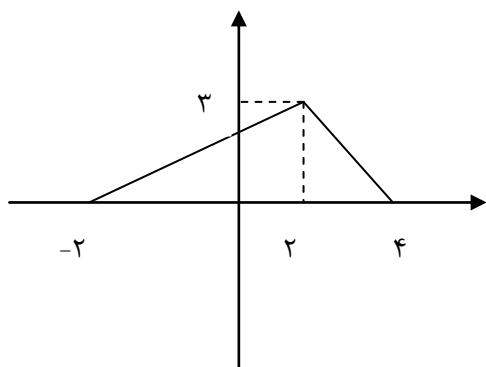


تست ۹۳) با توجه به نمودار توابع خطی مقابل، حاصل $g(-۳)$ کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) -۵
- (۳) -۱
- (۴) ۵

تست ۹۴) اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، دامنه‌ی $y = \frac{f(4-x)}{f(2x)}$ کدام است؟



(۱) $[0, 2)$

(۲) $(0, 2]$

(۳) $(0, 2] - \{1\}$

(۴) $[0, 2] - \{1\}$

تست ۹۵) اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x + 1| + 1$ آن گاه برد تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

(۱) $[0, 1)$

(۲) $[0, 2)$

(۳) $[0, \infty)$

(۴) $[1, \infty)$

تست ۹۶) در تابع معکوس پذیر $f(x) = \frac{\frac{m}{3}x + 5}{4x - 2}$ نمودار f و f^{-1} بر هم منطبق هستند، $f^{-1}(1)$ کدام

است؟

(۱) $3/5$

(۲) 3

(۳) $2/5$

(۴) 2

تست ۹۷ تابع $f(x) = ax^2 + 4x - 3$ با دامنه‌ی \mathbb{R} معکوس پذیر است. حاصل $4f^{-1}(a) +$

$$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

کدام است؟

(۱) -۱۰

(۲) -۴

(۳) -۶

(۴) -۸

تست ۹۸ تابع $f(x) = x + \sqrt{2x + a}$ مفروض است. اگر نمودار $f^{-1}(x)$ و خط $y = x - 2$ در نقطه-

ای به عرض ۳ متقاطع باشند، مقدار a کدام است؟

(۱) -۴

(۲) -۲

(۳) -۶

(۴) -۳

تست ۹۹ اگر $f\{(2,2), (-3,1), (a^2 + a, 2), (a, -1), (1,0)\}$ معکوس پذیر باشد، آنگاه تابع $\frac{f^{-1}}{f}$

چگونه است؟

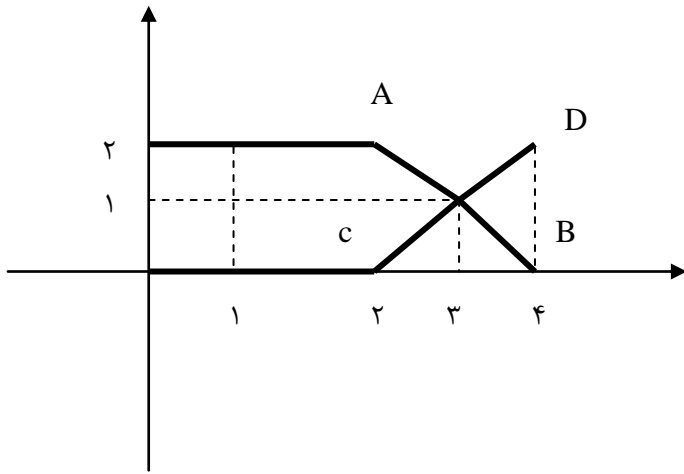
(۱) دو نقطه در ناحیه اول

(۲) یک نقطه در ناحیه اول

(۳) یک نقطه در ناحیه‌ی دوم

(۴) یک نقطه در ناحیه‌ی اول و یک نقطه روی محور x ها است.

تست ۱۰۰) با توجه به نمودار f و g در شکل مقابل، کدام گزینه صحیح نیست؟



(۱) $f + g$ تابع ثابت $g = 2$ است.

(۲) $f - g$ در بازه‌ی $[0, 2]$ تابع $f + g$ برابر است.

$$p_{\frac{f}{g}} = [2, 4] \quad (۳)$$

(۴) تابع g در دامنه‌اش صعودی و تابع f نزولی است.