توزیعهای احتمال پیوسته

توزیع نرمال

$$P(X=x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\delta}\right)}$$

☜ M میانگین و δ انحراف معیار

$-\infty < x < +\infty$

$P(X=3)=\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\cdot$ ☜ **حل این انتگرال مشکل است**

$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\delta}\right)^2}.dx$

توزیع نرمال استاندارد

با استفاده از تغییر متغیر $Z=\frac{X-M}{\delta}$ توزیع نرمال را تبدیل به نرمال استاندارد میکنیم.

$$P(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$P(Z\geq 5)=\int_{5}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}z^2}.dz$$

☜ **جواب این انتگرال از جدول نرمال استاندارد بدست می آوریم.**

- **مثال**

در صورتی که متغیر Z دارای توزیع نرمال باشد؛ مقادیر زیر را حساب کنید.

- **حل**

☜ به وسیله جدول محاسبه می کنیم.

$P(Z<-1)=0/1587$

$P(Z<2/20)=0/9861$

$P(Z<1/25)=0/8944$

$P(Z>1/25)=1-p(Z\leq 1/25)=1-0/8944=0/1056$

$P(1/5<Z<2)=P(Z<2/00)-P(Z<1<50)=0/9772-0/9332=0/044$

✓

احتمال اینکه یک متغیر پیوسته برابر با عدد ثابت باشد صفر است.

$P(X = C) = 0$

C مقدار ثابت، X متغیر پیوسته

- **مثال**

$$(|Z| < 2)$$

- **حل**

$$P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) \Rightarrow 0/09772 - 0/0228 = 0/9544$$

- **مثال**

اگر X متغیری نرمال با میانگین M=100 و انحراف معیار $\delta = 5$ باشد. احتمال $P(X > 110)$ چقدر است؟

- **حل**

$$P(X > 110) = P\left(\frac{X-M}{\delta} > \frac{110-100}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0/8869 = 0/1131$$

- **مثال**

پیچی به تصادف از خط تولید برداشته می شود. دارای طولی برابر *X* است. که به طور نرمال برحسب میلی متر با میانگین *M=78/3* و انحراف معیار $\delta = 5$ توزیع شده است. اگر قرار باشد پیچهای بلندتر از ۸۰ میلی متر دور ریخته شود چه نسبتی از محصول ضایع میشود.

- **حل**

$$P(X>80)=P\left(\frac{X-M}{\delta}>\frac{80-78/3}{1/4}\right)=P(Z>1/21)=1-P(Z\leq 1/21)=1-0/08869=0/1131$$

- **مثال**

دستگاه پر کننده شیشه های نوشابه به طوری تنظیم شده که ۹۵۲ میلی لیتر نوشابه را به داخل شیشه می ریزند. این میزان نوشابه دارای توزیع نرمال با میانگین ۹۵۲ میلی لیتر و انحراف معیار ۴ میلی لیتر است. مطلبوست:

الف) احتمال اینکه شیشه ای بین ۹۵۲ تا ۹۵۶ میلی لیتر نوشابه داشته باشد.

ب) چند درصد از بطری ها حاوی ۹۴۸ تا ۹۵۶ میلی لیتر نوشابه هستند.

- **حل**

الف)

$$P(952<X<956)=P(\frac{952-952}{4}<\frac{X-M}{\delta}<\frac{956-952}{4})=$$
$$P(0<Z<1)=P(Z<1)-P(Z<0)\Rightarrow 0/8413-0/5=0/3413$$

ب)

$$P(948<X<956)=P(\frac{948-952}{4}<\frac{X-M}{\delta}<\frac{956-952}{4})=$$
$$P(-1<Z<1)=P(Z<1)-P(Z<-1)\Rightarrow 0/8413-0/1587=0/6826$$

استفاده معکوس از جدول نرمال استاندارد

- **مثال**

تقاضاهای هفتگی برای بنزین در پمپ بنزین به صورت نرمال با میانگین ۲۵۰۰۰۰ لیتر و انحراف معیار ۸۰۰۰۰ لیتر توزیع شده است. چه میزان لیتر بنزین در هفته باید در پمپ بنزین وجود داشته باشد که مطمئن شویم که احتمال تمام شدن بنزین فقط ۲٪ است؟

- **حل**

X تمام شدن بنزین

X تقاضای هفتگی

M=250/000

$\delta = 80/000$

P(x)=0/02

P(X>a)=0/02

$$P\left(\frac{X-M}{\delta} > \frac{a-250/000}{80/000}\right)=0/02$$

$$P(Z>Z_0)=0/02 \Rightarrow 1-P(Z<Z_0)=0/02 \Rightarrow P(Z<Z_0)=0/98 \Rightarrow Z_0 = 2/06$$

$$\frac{a-250/000}{80/000}=2/06 \Rightarrow a-250/000=80/000\times 2/06 \Rightarrow a=414/800 \cong 415$$

- **مثال**

یک دستگاه اتوماتیک پیچ هایی تولید می کند که قطر آن دارای توزیع نرمال است. با انحراف معیار ۰/۵ میلی لیتر دستگاه را باید بر روی چه میانگینی تنظیم کرد که فقط ۴٪ پیچها دارای قطری معادل ۲۵ میلی لیتر یا کمتر باشد؟

- **حل**

X قطر پیچ

δ=0/5

M=?

$P(X \leq 25)=0/04$

$$P\left(\frac{X-M}{\delta} \leq \frac{25-M}{0/5}\right)=0/04$$

$$P(Z \leq Z_0)=0/04 \Rightarrow Z_0 = -1/75 \Rightarrow \frac{25-M}{0/5} = -1/75$$

$$25-M=0/5\times 1/75 \Rightarrow M=25/875 \cong 26$$

- **مثال**

اگر توزیع قد افراد جامعه دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۷۰ و انحراف معیار ۵ باشد. آنگاه ۲/۵٪ بلندترین افراد جامعه حداقل دارای چه قدی هستند؟

- **حل**

M=170

$\delta=5$

X=%2/5

P(x)=%2/5

P(X≥a)=2/5

$P(\frac{X-M}{\delta} \geq \frac{a-170}{5})=2/5$

$P(Z \geq Z_0) = \frac{2}{5} \Rightarrow 1 - p(Z < Z_0) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(Z < Z_0) = 0/975 \Rightarrow Z_0 = 1/96$

$\frac{a-170}{5} = 1/96 \Rightarrow a - 170 = 1/96 \times 5 \Rightarrow a = 179/8$

تقریب توزیع دو جمله ای به نرمال

درصورتیکه n×p>5 باشد؛ توزیع دو جمله ای را به نرمال تقریب می زنیم.

میانگین دو جمله ای M=np

واریانس $\delta^2 = np(1-p)$

$Z=\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است و X = نرمال

- **مثال**

در یک بررسی از اهالی یک منطقه ۴٪ افراد بالغ معتاد به سیگار هستند، احتمال اینکه در یک نمونه ۲۵ تائی حداکثر ۵ نفر معتاد به سیگار باشند چقدر است؟

- **حل**

n=25

p= 0/4

n×p=25×0/4=10>5

$P(X\leq5)=p(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{5-10}{\sqrt{25 \times 0/4 \times 0/6}})$

$P(Z\leq\frac{-5}{\sqrt{2}})=P(Z\leq-2/04)=0/0207$

- **مثال**

عمر نوعی دستگاه توزیع نرمال با میانگین ۲۰۰۰۰ و انحراف معیار ۲۵۰۰ ساعت است.

الف) احتمال اینکه یک دستگاه خریداری شده بیش از ۲۶۰۰۰ ساعت عمر کند چقدر است؟

ب) اگر مهندسین به خواهند با ثابت نگه داشتن انحراف معیار میانگین عمر را بالا ببرند به طوری که ٪۶۷ دستگاهها حداقل ۲۰۰۰۰ ساعت کار کنند. مهندسین باید به چه میانگینی دست یابند؟

- **حل**

$P(X\geq 20000)=\%67$

$P(\frac{X-M}{\delta}\geq\frac{20000-M}{2500})=0/67$

$P(Z\geq Z_0)=0/67$

$1-p(Z\leq Z_0)=0/67$

$P(Z<Z_0)=1-0/67$

$P(Z<Z_0)=0/33\Rightarrow Z_0=-0/44$

$\frac{2000-M}{2500}=-0/44$

$20000-M=-0/44\times 2500\Rightarrow 21/100$

فاصله اطمینان (برآورد فاصله ای)

فاصله اطمینان برای میانگین جامعه

❉n تعداد نمونه
❉x میانگین نمونه
❉δ^2 واریانس

❉M میانگین جامعه

❉δ^2 واریانس جامعه

$E=(\overline{X})=\overline{\overline{X}}=M$

$$Var=(\bar{X})=\frac{\delta^2}{n}$$

$$Z=\frac{\bar{X}-M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$$

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}<Z_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\propto$$

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}<\bar{X}-M<X+\frac{\delta}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\propto}{2}}$$

$$-\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}<-M<-\bar{X}+\frac{\delta}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

✓ فاصله اطمینان $\%(1-\alpha)$ ← $\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}<M<\bar{X}+\frac{\delta}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

حالتی که واریانس جامعه معلوم است

$$\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}>M<\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

حالتی که واریانس جامعه مجهول است

الف) n>30

$$\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}<M<\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

ب) n<30

$$\bar{X}-t^{(d)}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}<M<\bar{X}+t^{(d)}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

✓ D=n-1 درجه آزادی

✍پس به طور کلی در حالتی که واریانس جامعه مجهول و حجم نمونه کمتر از ۳۰ باشد توزیع Z به توزیع t با درجه آزادی d=n-1 تبدیل میشود.

- **مثال**

یک تولید کننده لامپ، لامپی تولید می کند که انحراف معیار طول آنها ۴۰ ساعت است. اگر یک نمونه تصادفی ۳۶ تائی دارای متوسط عمر ۸۷۰ ساعت باشد. یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای متوسط عمر تمام لامپ های تولیدی این کارخانه به دست آورید؟

- **حل**

n=36

$\bar{X} = 870$

δ=40

اطمینان ←

95%=1-α→α=0/05

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/05}{2}} = Z_{0/975} = 1/96$$

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$870 - \frac{1}{1/96\frac{40}{\sqrt{36}}} < M < 870 + 1/96\frac{40}{\sqrt{36}}$$

856/94<M<883/06

- **مثال**

اگر طول قد کارمندان یک اداره دارای توزیع نرمال باشد. یک نمونه ۵ تائی از کارمندان انتخاب شده به طوریکه میانگین نمونه ۱۷۰ و واریانس نمونه ۶۲/۵ می باشد. مطلوبست محاسبه فاصله اطمینان ٪۹۹ برای میانگین جامعه؟

- **حل**

n=5

$\bar{X} = 170$

$\delta^2 = 62/5$

در این جامعه مجهول، n<30 باید آماره Z تبدیل به t شود.

99%=1-α→α=0/01

$t_{1-\frac{0/01}{2}}^{(5-1)} = t_{0/995}^{(4)} = 4/60$

$\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(d)} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(d)} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$

$170\text{-}4/6 \frac{\sqrt{62/5}}{\sqrt{5}} < M < 170 + 4/6 \frac{\sqrt{62/5}}{\sqrt{5}}$

153/49<M<186/5

فاصله اطمینان برای اختلاف میانگین دو جامعه $(M_1\text{-}M_2)$

واریانس جامعه معلوم

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

واریانس جامعه مجهول

الف) $n_1, n_2 > 30$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

ب) $n_1, n_2 < 30$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

✓ درجه آزادی $d = n_1 + n_2 - 2$

واریانس جامعه مجهول و مساوی $(\delta_1^2 = \delta_2^2)$

الف) $n_1, n_2 > 30$

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<M_1-M_2<\bar{X}_1-\bar{X}_2+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

ب) $n_1, n_2 < 30$

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2-t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<M_1-M_2<\bar{X}_1-\bar{X}_2+t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

✓ درجه آزادی $S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

- **مثال**

دو شرکت A و B لامپ روشنایی تولید میکنند که به ترتیب دارای انحراف معیارهای ۲۷ و ۳۱ ساعت است. یک نمونه تصادفی ۴۰ تائی از لامپهای تولیدی هر شکت انتخاب میکنیم و به ترتیب متوسط طول عمر لامپ ها برای این دو نمونه را ۶۴۹ و ۶۳۵ به دست می آوریم.

مطلوبست فاصله اطمینان ۹۶٪ برای اختلاف متوسط طول عمر لامپ های دو شرکت؟

- **حل**

A	B
$n_1=40$, $\bar{X}_1=649$	$n_2=40$, $\bar{X}_2=635$
$\delta_1=27$	$\delta_1=27$

اطمینان ← $96\%=1-\alpha \rightarrow \alpha=0/04$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{1-\frac{0/04}{4}}=Z_{0/98}=2/06$$

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}}<M_1-M_2<\bar{X}_1-\bar{X}_2+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

$$649-635-2/06\sqrt{\frac{(27)^2}{40}+\frac{(31)^2}{40}}<M_1-M_2<649-635+2/06\sqrt{\frac{(27)^2}{40}+\frac{(31)^2}{40}}$$

$0/64 < M_1 - M_2 < 27/36$

- **مثال**

دو ماشین *A* و *B* جعبه های ۸ گرمی از یک ماده را بسته بندی می کنند.

انحراف معیار ورن بسته های پر شده به وسیله ماشین *A* و *B* به ترتیب ۴٪ و ۵٪ گرم است.

از جعبه های پرشده هز یک از ماشینها ۱۰۰ جعبه به تصادف انتخاب شده به طوریکه میانگین نمونه جعبه *A=8/18* و میانگین نمونه جعبه *B=8/15* به دست آمده فاصله اطمینان ۹۹٪ برای تفاضل میانگین وزنهای پر شده با دو ماشین *A* و *B* را بدست آورید.

- **حل**

$99\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 0/01$

اطمینان ← $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/01}{2}} = Z_{0/995} = 2/58$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

$$8/18 - 8/15 - 2/58\sqrt{\frac{(0/04)^2}{100} + \frac{(0/05)^2}{100}} < M_1 - M_2$$
$$< 8/18 - 8/15 + 2/58\sqrt{\frac{(0/04)^2}{100} + \frac{(0/05)^2}{100}}$$

$0/014 < M_1 - M_2 < 0/046$

- **مثال**

در یک نمونه ۲۰ تائی از دانشجویان دختر میانگین و انحراف معیار درس آمار به ترتیب ۴،۱۲ همین عناصر برای نمونه ۲۲تائی دانشجو پسر ۲،۱۱ به دست آمده است.

مطلوبست فاصله اطمینان ۹۰٪ برای اختلاف میانگین نمره ریاضی دانشجویان دختر و پسر؟

- **حل**

$$n_2 = 22 \quad \bar{X}_2 = 11 \quad \delta_2 = 2$$

پسر

$$n_1 = 20 \quad \bar{X}_1 = 12 \quad \delta_1 = 4$$

دختر

$\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2 < 30$

90%=1-α→α=10%

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}(n_1+n_2-2)} = t^{(40)}_{1-\frac{0/1}{2}} = t^{(40)}_{0/95} = 1/64$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

$$12 - 11 - 1/64\sqrt{\frac{(4)^2}{20}+\frac{(2)^2}{22}} < M_1 - M_2 < 12 - 11 + 1/64\sqrt{\frac{(4)^2}{20}+\frac{(2)^2}{22}}$$

-0/6<$M_1 - M_2 < 2/6$

- **مثال**

دو آزمایشگاه ۱ و ۲ به طور مستقل برای اندازه گیری چربی شیر پاستوریزه اقدام می نمایند. ۱۰ نمونه از آزمایشگاه یک با میانگین ۶ و واریانس ۴/۶۷ و ۸ نمونه از آزمایشگاه ۲ با میانگین ۷ و واریانس ۲/۵۷ به دست آمده با فرض نرمال بودن ۲ جمعیت و مساوی بودن واریانس ها یک فاصله اطمینان ۹۵٪ درصدی برای اختلاف میانگین چربی موجود در شیرهای دو کارخانه به دست آورید. (واریانس جامعه مجهول و مساوی)

- **حل**

$$n_2 = 2 \quad \bar{X}_2 = 7 \quad \delta_2 = 2/57$$

۲

$$n_1 = 10 \quad \bar{X}_1 = 6 \quad \delta_1 = 4/67$$

۱

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$\mathrm{S_p^2}=\frac{(10-1)4/67+(8-1)2/57}{10+8-2}=\mathrm{S_p^2}=3/75=S_p=1/937$$

95%=1-α→α=0/05%

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}^{(n_1+n_2-2)}}=t_{1-\frac{0/05}{2}}^{(16)}=t_{0/975}^{(16)}=2/12$$

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2-t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<M_1-M_2<\bar{X}_1-\bar{X}_2+t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$6-7-2/12\times 1/937\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}<M_1-M_2<6-7+2\times 1/937\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}$$

-2/35<$M_1-M_2<0/35$

فاصله اطمینان برای ثبت جامعه

n_1ثبت نمونه

P نسبت جامعه

الف) n>30

$$\mathrm{P}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}<P<P+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}$$

ب) n>30

$$\mathrm{P}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}<P<P+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}$$

✓ d=n-1 درجه آزادی

فاصله اطمینان برای اختلاف نسبت دو جامعه

الف) $\mathrm{n_1,n_2}>30$

$$P_1-P_2-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}<P_1-P_2<P_1-P_2+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

ب) $n_1, n_2 < 30$

$$P_1 - P_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_1}} < P_1 - P_2$$
$$< P_1 - P_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

✓ درجه آزادی $d=n_1+n_2-2$

- **مثال**

از بین ۱۷۰ کودک دبستانی که به تصادف انتخاب شده اند، ۳۰ نفر دارای دندانه شکسته است. یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای نسبت کودکانی که دندان شکسته دارند بیابید؟

- **حل**

n=170

$$P=\frac{30}{70} = 0/17$$

95%=1-α→α=0/05%

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/05}{2}} = Z_{0/975} = 1/96$$

$$P-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} < P < P + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}$$

$$0/17 - 1/96\sqrt{\frac{0/17(1-0/17)}{170}} < P < 0/17 + 1/96\sqrt{\frac{0/17(1-0/17)}{170}} \Rightarrow 0/11<P<0/23$$

- **مثال**

یک نمونه تصادفی ۲۰ نفره انتخاب و معلوم شده که ۱۵ نفر آنها به نوعی بیماری مبتلا هستند. یک نمونه تصادفی ۱۰ نفره از جمعیت دیگاری انتخب و معلوم شده که ۲ نفر آنها به همان بیماری مبتلا هستند. فاصله اطمینان ۹۹٪ برای P_1-P_2 *پیدا کنید؟*

- **حل**

$n_1, n_2 < 30$

$99\%=1-\alpha \to \alpha=0/01$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} = t_{1-\frac{0/01}{2}}^{(28)} = t_{0/995}^{(28)} = 2/76$$

$$P_2 = \frac{2}{10} = \frac{0}{2}$$

$$P_1 = \frac{15}{20} = \frac{0}{75}$$

$$P_1 - P_2\text{-}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_1}} < P_1 - P_2$$

$$< P_1 - P_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

$$0/75 - 0/2\text{-}2/76\sqrt{\frac{0/75(1-0/75)}{20} + \frac{0/2(1-0/2)}{10}} < P_1 - P_2$$

$$< 0/75 - 0/2 + 2/76\sqrt{\frac{0/75(1-0/75)}{20} + \frac{0/2(1-0/2)}{10}}$$

$0/12 < P_1 - P_2 < 0/98$

تمرین

۱) ٪۶۵ از کل افرادی که به فروشگاه مراجعه میکنند خرید میکنند. اگر در یک روز ۳۰ نفر به این فروشگاه مراجعه کنند؟

الف) حداقل ۲۲ نفر خرید کنند.

ب) کمتر از ۱۵ نفر خرید کنند.

ج) دقیقا ۲۰ نفر خرید کنند.

۲) توزیع نرمال با میانگین ۳۵ سال و انحراف معیار ۱۲ سال است. اگر خط مشی شرکت بازنشسته کردن تمام افرادی باشد که بیش از ۵۵ سال سن دارند چند درصد از کارگران بازنشسته می شوند.

۳) براساس تجربه مشخص شده که یک تلفنچی ۳٪ از تلفن ها را اشتباه وصل میک ند. اگر امروز ۱۵۰ تلفن وصل کرده باشد. مطلوبست:

ال) میانگین تلفنهایی که اشتباه وصل شده است.

ب) احتمال اینکه ۳ تلفن را اشتباه وصل کرده باشد.

ج) احتمال اینکه بیش از یک تلفن را اشتباه وصل کرده باشد.

۴) تابع احتمال توام دو متغیری x و y به صورت زیر است. ضریب همبستگی؟

X \ Y	0	1	2
-5	0/3	0/03	0/08
10	0/1	0	0/5

نویسنده:

ویدا شنتیا (استاد آمار و کاربرد آن در مدیریت. دانشگاه رودهن)