

شبیه‌سازی یک بعدی

۱,۲ مقدمه

اگر یک عضو سازه‌ای یک بعدی حول محور خودش متقارن باشد و بارگذاری نی به صورت متقارن اعمال گردد، می‌تواند به صورت یک ستون یک بعدی ایده‌آل با استفاده از یک خط معادل شبیه‌سازی شود. اگر این سازه‌ی متقارن نیز تحت بارهای جانبی قرار گیرد، می‌تواند با استفاده از یک خط معادل یک بعدی ایده‌آل شود. (شکل ۱,۲). ایده‌آل‌سازی تیر ستون برای بارهای محوری و جانبی در شکل (۱,۲) نشان داده شده است. قابل ذکر است که این ایده‌آل‌سازی، یک جمع آثار^۱ خطی از اثرات ستون و تیر می‌باشد و رفتار غیرخطی را که منجر به اثراتی مانند کمانش^۲ می‌گردد، در نظر نمی‌گیرد.

شکل (۱,۲) یک شمع را تحت بارهای محوری و جانبی نشان می‌دهد. این شمع می‌تواند مانند یک مسئله‌ی کلاسیک خمش تیر و ستون تحلیل شود. از این رو، ابتدا فرم بسته^۳ی راه‌حل‌ها برای مسئله‌ی خمش تیر را که معمولاً به منظور تحلیل شمع‌های تکی^۴ مدفون در خاک‌های ارتجاعی^۵ و تحت بارگذاری جانبی استفاده شده‌اند، ارائه خواهیم کرد. سپس در فصل بعدی، یک توضیح مختصر از راه‌حل‌های فرم بسته و عددی را برای یک دال دو بعدی روی خاک ارتجاعی خطی همانند راه‌حل‌هایی که برای تحلیل دال‌های فونداسیون^۶، پی‌های گسترده^۷ و سازه‌های مشابه دیگر معرفی خواهیم کرد.

۲,۲ تیرها با مدل خاک فنری

تیرها و دال شکل‌پذیر قرار گرفته روی خاک، می‌توانند شامل رفتار ترکیبی پیچیده بین سازه و شالوده‌ی خاک شوند. مدل ساده‌ی فنر که معمولاً برای در نظر گرفتن رفتار خاک استفاده می‌شود، به وسیله‌ی وینکлер^۸ [۱] ارائه شد؛ این مدل توسط اولر^۹، فاس^{۱۰} و زیمرمن^{۱۱} نیز استفاده شده است [۲]. مدل فنر بر اساس این فرض

¹ Superposition² Buckling³ Closed-form⁴ Single pile⁵ Elastic⁶ Foundation slabs⁷ Rafts⁸ Winkler⁹ Euler¹⁰ Füß¹¹ Zimmerman

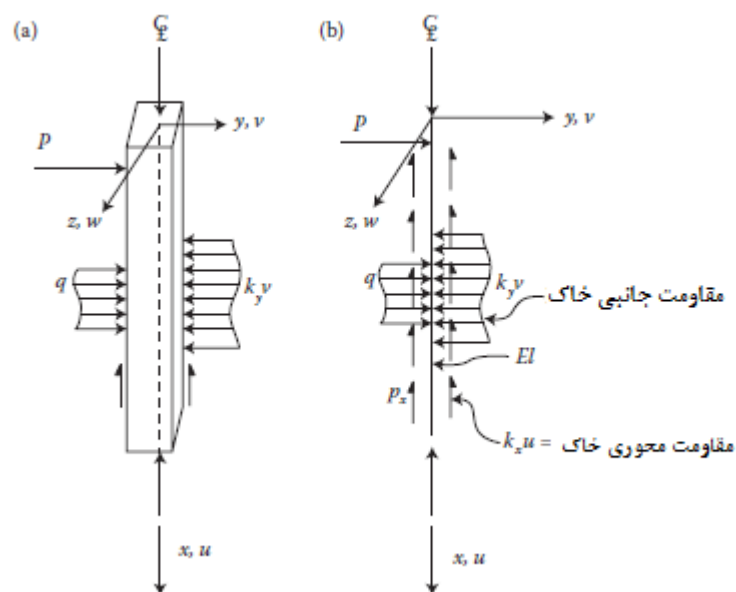
است که رفتار خاک می‌تواند با استفاده از مجموعه‌ای از فنرهای مستقل که اغلب به صورت ارتجاعی خطی در نظر گرفته می‌شوند، مدل شود (شکل ۲،۲). از آنجایی که رفتار خاک اغلب غیرخطی و ترکیبی است، مدل وینکلر به عنوان یک روش تقریبی ارائه‌ی پاسخ خاک در نظر گرفته می‌شود. تعدادی از مقالات [۹-۲] نیز از مدل خاک وینکلر استفاده نموده‌اند.

۱،۲،۲ معادلات حاکم برای تیرها با مدل وینکلر

در مدل وینکلر، جابه‌جایی یک نقطه از خاک، v ، در راستای y ، به صورت یک تابع خطی از فشار خاک، p ، در آن نقطه فرض می‌شود و به صورت رابطه‌ی زیر می‌باشد:

$$p = k_0 v \quad (۱،۲)$$

برای پاسخ ارتجاعی خطی، k_0 مشخصه (سختی)^{۱۲} خاک در راستای y را نشان می‌دهد (شکل ۲،۲)؛ واحدهای k_0 ، به صورت واحد‌های نیرو بر مکعب واحدهای طول هستند. این عبارت با نام‌های مختلفی از جمله مدول‌های بستر^{۱۳}، ضریب واکنش بستر^{۱۴} و مدول‌های فنر با بعد واحدهای نیرو بر مکعب واحدهای طول اشاره می‌شود. مدل وینکلر در ابتدا برای محاسبه‌ی تنش‌ها و تغییرشکل‌ها زیر سیستم‌های راه آهن استفاده شد.

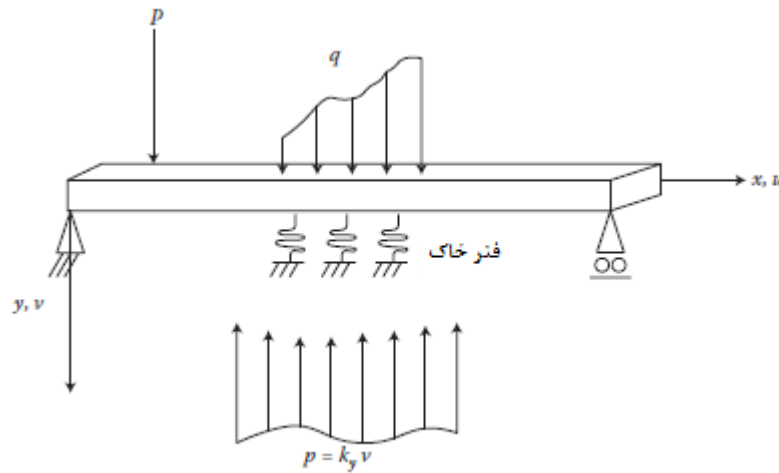


شکل ۱،۲ ایده‌آل‌سازی یک بعدی شمع (a) شمع (طول) (b) شمع ایده‌آل شده

¹² Stiffness

¹³ Subgrade modulus

¹⁴ Coefficient of subgrade reaction



شکل ۲,۲ تیر یک بعدی

به دلیل این که خاک به عنوان یک جسم جامد در نظر گرفته می‌شود، ممکن است تعریف مدل پیوسته، نیازمند بیش از یک ثابت باشد؛ حتی برای رفتار ساده‌ی خطی ارتجاعی و همسان^{۱۵}، دو ثابت مانند مدول یانگ^{۱۶}، E ، و نسبت پواسون^{۱۷}، ν ، یا مدول برشی، G ، و مدول بالک، K ، مورد نیاز است. بنابراین، برای یک محیط دو بعدی یا سه بعدی، رفتار ترکیبی بین پاسخ‌های عمودی و افقی شامل می‌شود. با این وجود، مدل وینکلر تنها رفتار عمودی را در نظر می‌گیرد و اثر ترکیبی در راستای افقی نادیده گرفته می‌شود. بنابراین، مدل وینکلر تنها می‌تواند یک پاسخ تقریبی را برای مواد پیوسته فراهم کند. ولاس洛夫^{۱۸} و لئونتیف^{۱۹} [۵] مدل وینکلر را با به کار گیری محیط ارتجاعی خطی با E و ν و در نتیجه افزایش اثر ترکیبی، اصلاح نمودند. در ادامه، تیرهای شکل‌پذیر را در نظر می‌گیریم؛ تیرهای صلب به دلیل کاربرد محدود آن‌ها در اجرا مورد بررسی قرار نمی‌گیرند.

۲,۲,۲ معادلات حاکم برای تیرهای شکل‌پذیر

برای یک تیر دو بعدی، مدول‌های بستر، k_0 (معادله‌ی (۱,۲))، در عرض تیر، b ، ضرب می‌شود:

$$k = k_0 b \quad (۲,۲)$$

بعد k به صورت واحدهای نیرو بر مجذور واحدهای طول می‌باشد.

تیر می‌تواند تحت نیروهای مختلفی از جمله بارهای گسترده (q) و نقطه‌ای (P) قرار بگیرد (شکل ۲,۲). بنابراین، فشار موثر بر تیر برابر $(p - q)b$ است؛ که در آن p مقاومت خاک می‌باشد.

معادله‌ی دیفرانسیل غالب برای تیر می‌تواند به صورت زیر به دست بیاید.

¹⁵ Isotropic
¹⁶ Young's module
¹⁷ Poisson's ration
¹⁸ Vlaslov
¹⁹ Leontiev

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = pb \quad (3,2)$$

با جایگزینی $p=k_0v$ و $k=k_0b$ رابطه‌ی (۳,۲) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = k_0v \cdot b = kv \quad (4,2)$$

حال، رابطه‌ی بین لنگر خمشی، M ، و جابه‌جایی، v ، می‌تواند بدین صورت توصیف شود:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -M \quad (5,2)$$

که در آن EI سختی خمشی^{۲۰} و I ممان اینرسی تیر می‌باشند. با دو بار مشتق گرفتن از رابطه‌ی (۵,۲) نسبت به x ، عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -\frac{d^2 M}{dx^2} \quad (6,2)$$

با جایگزینی رابطه‌ی (۴,۲) داریم:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv = 0 \quad (7,2 \text{ الف})$$

یا

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + (kv - q) = 0 \quad (7,2 \text{ ب})$$

که q به عنوان بار جانبی گسترده به کار گرفته شده است (شکل ۲,۲).

به علاوه با دو بار مشتق گرفتن از رابطه‌ی (۴,۲) داریم

$$\frac{d^4 M}{dx^4} + \frac{k}{EI} M = 0 \quad (8,2)$$

که در آن d^2v/dx^2 از رابطه‌ی (۵,۲) جایگزین شده است.

۳,۲,۲ راه‌حل

فرم بسته‌ی راه‌حل برای v در معادله‌ی (۷,۲) را می‌توانیم به شکل زیر بیان نماییم:

$$v = (A \cos 1x + B \sin 1x)e^{1x} + (C \cos 1x + D \sin 1x)e^{-1x} \quad (9,2)$$

²⁰ Flexural (Bending) stiffness

که در آن A، B، C و D ضرایب ثابت می‌باشند که با اعمال شرایط مرزی^{۲۱} تعیین می‌شوند، و

$$1 = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad \text{or} \quad \frac{k}{EI} = 41^4 \quad (۱۰,۲)$$

این تعریف از λ ، اثرات واکنش بستر و سختی خمشی (EI) را که مشخصه‌ی سازه (تیر) است، در نظر می‌گیرد. بعد واحد λ ، معکوس واحدهای طول است و معکوس آن، مشخصه‌ی طول سیستم تیر-خاک می‌باشد. اگر تیر در مقایسه با خاک بسیار سخت‌تر باشد، مشخصه‌ی طول بزرگ است که منجر به جابه‌جایی بزرگ‌تر تیر برای یک فاصله‌ی قابل توجه از نقطه‌ای که بار به آن اعمال شده است، می‌گردد. در نقطه‌ی مقابل، وقتی مشخصه‌ی طول کوچک‌تر و تیر نسبت به خاک نرم‌تر باشد، جابه‌جایی در نزدیکی منطقه‌ی اعمال بار متمرکز می‌شود.

راه‌حل v (رابطه‌ی (۹,۲)) شامل دو عبارت با رشد نمایی است، در حالی که دو عبارت دیگر کاهش نمایی نسبت به فاصله را نشان می‌دهند. ضرایب A، B، C و D را می‌توان از طریق شرایط مرزی موجود تعیین کرد. در مورد نحوه‌ی به دست آوردن A، B، C و D وقتی که معادله‌ی تیر برای شمع‌ها با شرایط مرزی استفاده می‌شود، بحث خواهیم کرد.

۳,۲ شمع‌های تحت بار جانبی (یک بعدی)

همانطور که در قبل بیان شد، یک شمع تحت بار جانبی می‌تواند به صورت یک تیر روی شالوده‌ی خاک تحلیل شود که معمولاً به صورت ارتجاعی خطی ایده‌آل شده و توسط مدل وینکلر ارائه می‌گردد.

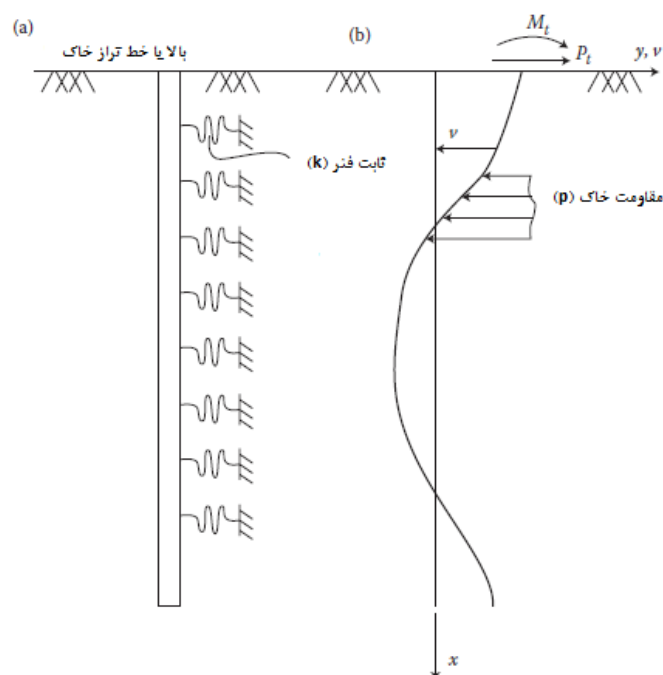
شکل (b۳,۲) یک شماتیک از یک شمع یک بعدی را تحت یک لنگر M_t و بار P_t در بالای شمع یا خط تراز خاک نشان می‌دهد. با فرض این که بتوان خاک را به وسیله‌ی فنر ارتجاعی خطی ارائه نمود، یک مجموعه از این فنرها در شکل (a۳,۲) در امتداد طول شمع نشان داده شده‌اند. حال یک علامت قراردادی برای مسئله در نظر می‌گیریم که برای کمیت‌های مختلف مانند فشار خارجی، p ، نیروی برشی، V ، لنگر خمشی، M ، گرادیانت یا شیب، S و خیز یا جابه‌جایی، v ، در شکل (۴,۲) نشان داده شده است.

راه‌حل تحلیلی یا فرم بسته برای جابه‌جایی، v ، در شمع نیز می‌تواند مانند تیر (رابطه‌ی (۹,۲)) بیان شود.

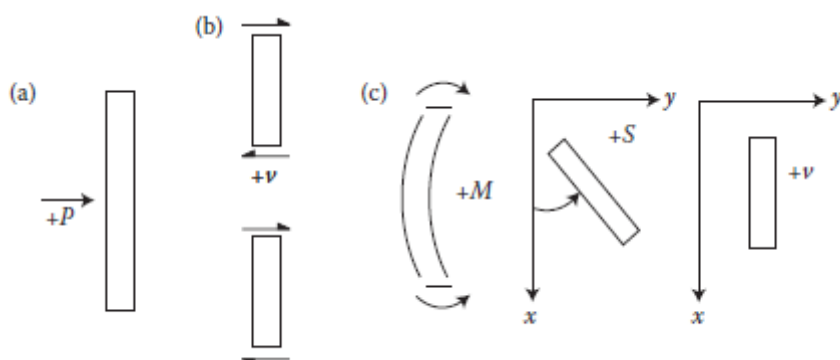
۱,۳,۲ ضرایب A، B، C و D بر اساس شرایط مرزی

شرایط مرزی معمولاً به صورت جابه‌جایی، v و/یا مشتقات v می‌باشند. از این رو، ثابت‌های A، B، C و D با استفاده از شرایط مرزی با استفاده از رابطه‌ی (۹,۲) تعیین می‌گردند. ما راه‌حل‌های زیر را بر اساس شرایط مرزی، ابتدا برای شمع‌های بسیار بلند با طول بی‌نهایت در نظر می‌گیریم.

²¹ Boundary condition



شکل ۳،۲ شمع تحت بار جانبی و حالت تغییر شکل یافته. (a) مقاومت خاک توسط فنرها؛ (b) شماتیک شمع تغییر شکل یافته؛
Pt: بار اعمالی در بالای شمع و Mt: لنگر اعمالی در بالای شمع.



شکل ۴،۲ علامت قراردادی (a) بار مثبت؛ (b) برش مثبت و (c) لنگر مثبت، M، شیب مثبت، S، جابه‌جایی مثبت، v.

۲،۳،۲ شمع در طول بی‌نهایت

برای طول بی‌نهایت (شکل ۵،۲)، عبارت‌های $A \cos \lambda x$ و $B \sin \lambda x$ (معادله‌ی (۹،۲)) بسیار کوچک خواهند شد. از این رو، ضرایب A و B تقریباً برابر صفر هستند. بنابراین، راه‌حل تنها وابسته به دو عبارت انتهایی از رابطه‌ی (۹،۲) خواهد شد که مطابق آن

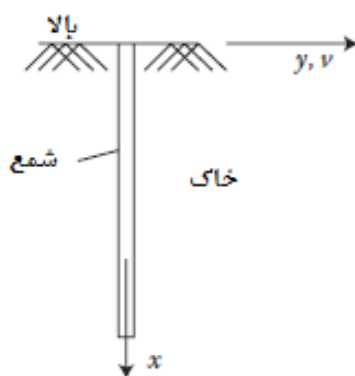
$$v = e^{-\lambda x}(C \cos \lambda x + D \sin \lambda x) \quad (۱۱،۲)$$

اکنون می‌توانیم راه‌حل‌های مربوط به شمع‌ها شامل بارها و/یا لنگرهای مشخص و شرایط مرزی معلوم را به دست آوریم.

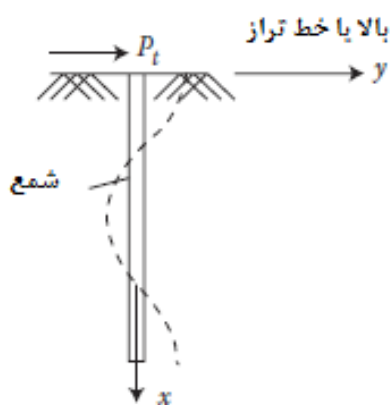
۳,۳,۲ بار جانبی در بالا

برای یک بار متمرکز، P_t ، در بالا، که در سطح زمین یا خط تراز قرار دارد (شکل (۶,۲))، وقتی که شمع در قسمت بالایی (در راستای افقی) آزادانه حرکت می‌کند و لنگر، $M_t=0$ ، که مشتق دوم در نقطه‌ی $x=0$ ، $(d^2v/dx^2)=0$ است یا

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (۱۲,۲)$$



شکل ۵,۲ شمع در طول بی‌نهایت



شکل ۶,۲ شمع با بار جانبی در قسمت بالا

مشتق اول v نسبت به x به صورت زیر می باشد

$$\frac{dv}{dx} = 1e^{1x}(A \cos 1x - A \sin 1x) + B \sin 1x + B \cos 1x + 1e^{-1x}(-C \cos 1x + C \sin 1x - D \cos 1x - D \sin 1x) \quad (13,2)$$

مشتق دوم v نیز به دست می آید:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 21^2e^{1x}(-A \sin 1x + B \cos 1x) + 21^2e^{-1x}(C \sin 1x - D \cos 1x) \quad (14,2)$$

از آن جایی که دو عبارت اول صفر هستند، رابطه ی بالا می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 21^2e^{-1x}(C \sin 1x - D \cos 1x) \quad (14,2)$$

در $x=0$, $\sin \lambda x=0$, $\cos \lambda x=1$ و $e^{-\lambda x}=1$ ؛ بنابراین با استفاده از رابطه ی (12,2) می توانیم بنویسیم:

$$2EI1^2(-D) = 0, \quad \text{لذا} \quad D = 0$$

زیرا EI و λ^2 نمی توانند صفر باشند.

در $x=0$, نیروی برشی $V=P_t$ است؛ لذا مشتق سوم v به صورت زیر می باشد:

$$\frac{d^3v}{dx^3} = 21^3e^{1x}(-A \sin 1x + B \cos 1x - A \cos 1x - B \sin 1x) + 21^3e^{-1x}(-C \sin 1x + D \cos 1x + C \cos 1x + D \sin 1x) \quad (14,2)$$

با توجه به این که $A=B=D=0$ و در $x=0$, $\sin \lambda x=0$, $\cos \lambda x=1$ و $e^{-\lambda x}=1$ ؛ بنابراین:

$$2EI1^3(C) = P_t \quad (15,2)$$

$$C = \frac{P_t}{2EI1^3}$$

سپس، حل خاص برای تغییر شکل، v ، به صورت زیر ارائه می گردد:

$$v = \frac{P_t e^{-1x}}{2EI1^3} \cos 1x \quad (16,2)$$

با جایگذاری k از معادله ی (10,2) در معادله ی (16,2)، به رابطه ی زیر می رسیم:

$$v = \frac{2P_t 1e^{-1x}}{k} \cos 1x \quad (17,2)$$

کمیت‌های مختلف برای تحلیل و طراحی از رابطه‌ی (۱۷,۲) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\text{لنگر} \quad M = \frac{4P_t l^3 EI e^{-lx}}{k} \sin lx \quad (b\ ۱۷,۲)$$

$$\begin{aligned} \text{نیروی برشی} \quad V &= \frac{4P_t l^4 EI e^{-lx}}{k} (\cos lx - \sin lx) \\ &= P_t e^{-lx} (\cos lx - \sin lx) \end{aligned} \quad (c\ ۱۷,۲)$$

$$\text{مقاومت خاک} \quad p = 2P_t l e^{-lx} (-\cos lx) \quad (d\ ۱۷,۲)$$

برای ساده کردن روابط بالا، مقادیر زیر را در آن‌ها قرار می‌دهیم:

$$A_1 = e^{-lx} (\cos lx + \sin lx) \quad (a\ ۱۸,۲)$$

$$B_1 = e^{-lx} (\sin lx - \cos lx) \quad (b\ ۱۸,۲)$$

$$C_1 = e^{-lx} \cos lx \quad (c\ ۱۸,۲)$$

$$D_1 = e^{-lx} \sin lx \quad (d\ ۱۸,۲)$$

سپس کمیت‌های مختلف موردنظر می‌توانند به شکل ساده شده بیان شوند:

$$v = \frac{2P_t l}{k} C_1 \quad (a\ ۱۹,۲)$$

$$\frac{dv}{dx} = S = -\frac{2P_t l^2}{k} A_1 \quad (b\ ۱۹,۲)$$

$$M = \frac{P_t}{1} D_1 \quad (c\ ۱۹,۲)$$

$$V = P_t B_1 \quad (d\ ۱۹,۲)$$

$$p = -2P_t 1C_1 \quad (e19,2)$$

۴,۳,۲ لنگر در قسمت بالا

یک لنگر M_t اعمال شده در قسمت بالای شمع یا خط تراز خاک را در نظر بگیرید (شکل (۷,۲)). شرایط مرزی در قسمت بالا یا خط تراز را به صورت زیر قرار دهید:

۱. در $M=M_t, x=0$ است که نشان می‌دهد در این موقعیت $d^2v/dx^2=M_t$ می‌باشد.

۲. در $P_t=0, x=0$ است که نشان می‌دهد در این موقعیت $EI (d^3v/dx^3)=M_t$ می‌باشد.

با توجه به این که $A=B=0$ است و در $x=0$ $\sin \lambda x = 0$ و $\cos \lambda x = 1$ می‌باشند؛ با جایگزینی این شرایط در معادله‌ی (c14,2) داریم:

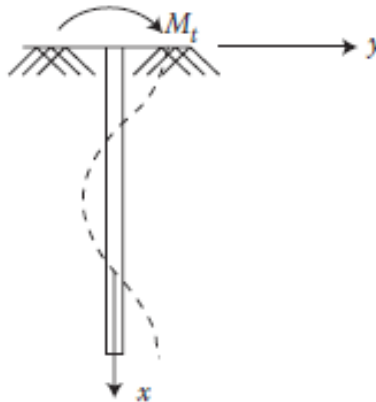
$$2EI\lambda^3 e^{-\lambda x}(D + C) = 0$$

بنابراین $D = -C$ خواهد شد. حال معادله‌ی (۱۱,۲) می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$v = Ce^{-\lambda x}(\cos \lambda x - \sin \lambda x) \quad (20,2)$$

با اعمال شرایط مرزی $M=M_t$ در $x=0$ داریم:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M_t \quad \text{at } x = 0$$



شکل ۷,۲ شمع با لنگر در قسمت بالا

با جایگزینی این رابطه در رابطه‌ی (a14,2)، مقدار لنگر $M_t = 2 EI \lambda^2 (-D)$ به دست می‌آید. بنابراین مقادیر ضرایب C و D به صورت $D = M_t/(2 EI \lambda^2)$ و $C = -M_t/(2 EI \lambda^2)$ می‌شوند.

با جایگزینی ضرایب C و D در معادله‌ی (۱۱,۲)، داریم:

$$v = \frac{M_t e^{-\lambda x}}{2EI\lambda^2} (\cos \lambda x - \sin \lambda x) \quad \text{or} \quad v = \frac{M_t}{2EI\lambda^2} B_1 \quad (a21,2)$$

در این حالت، سایر کمیت‌های موردنظر به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$S = -\frac{M_t}{EI\lambda} C_1 \quad (b21,2)$$

$$M = M_t A_1 \quad (c21,2)$$

$$V = -2M_t \lambda D_1 \quad (d21,2)$$

$$p = -2M_t \lambda^2 B_1 \quad (e21,2)$$

۵,۳,۲ شمع بدون چرخش در قسمت بالا

شکل (۸,۲) یک شماتیک از شرط بالا را نشان می‌دهد که در آن، شمع در قسمت بالا ثابت است. در این حالت، شرایط مرزی در قسمت بالا با استفاده از روابط زیر بیان می‌شوند:

$$1. \quad dv/dx=0, x=0$$

$$2. \quad V=P_t, x=0$$

با جایگزینی dv/dx در معادله‌ی (۱۳,۲)، داریم:

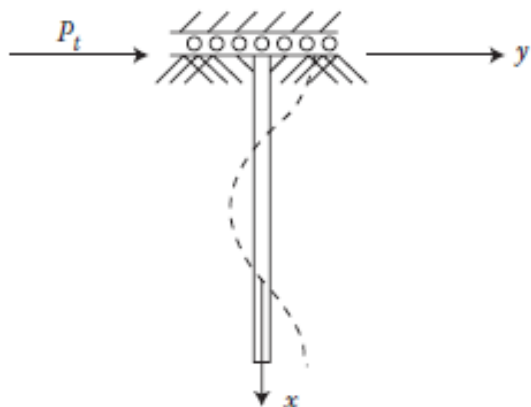
$$-C + D = 0$$

و

$$v = C e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (22,2)$$

شرط مرزی $V=P_t$ در $x = 0$ یا به شکل زیر است

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = P_t \quad \text{at } x = 0$$



شکل ۸,۲ شمع بدون چرخش در قسمت بالایی

حال با قرار دادن این شرط مرزی در رابطه‌ی (۲,۱۴) داریم:

$$2EI\lambda^3(2C) = P_t$$

بنابراین؛

$$C = \frac{P_t}{4EI\lambda^3}$$

با جایگزینی C در رابطه‌ی (۲,۱۱) داریم:

$$v = \frac{P_t e^{-\lambda x}}{4EI\lambda^3} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (2,23a)$$

یا

$$v = \frac{P_t \lambda e^{-\lambda x}}{k} (\cos \lambda x + \sin \lambda x)$$

یا

$$v = \frac{P_t \lambda}{k} A_1$$

سایر کمیت‌های مورد نظر به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$S = -\frac{P_t}{2EI\lambda^2} D_1 \quad (2,23b)$$

$$M=-\frac{P_t}{21}B_1\tag{c}\mathfrak{Z},\mathfrak{Z})$$

$$V=P_tC_1\tag{d}\mathfrak{Z},\mathfrak{Z})$$

$$p=-P_t1A_1\tag{e}\mathfrak{Z},\mathfrak{Z})$$