روشهای انتگرال

تهیه و تنظیم: علیرضا سهرابی، کارشناس ارشد ریاضی

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$$

$$\int \sin x \ dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c = \ln |\sec x| + c$$

Integral Methods

Author: Alireza Sohrabi

ارشدن
ISBN : 978-622-09-1905-6
9 786220 919056

روش‌های انتگرال

تهیه و تنظیم:

علی‌رضا سهرابی

کارشناس ارشد ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

سرشناسه	: سهرابی، علی‌رضا، ۱۳۵۲-
عنوان و نام پدیدآور	: روش‌های انتگرال/گردآوری و تالیف علی‌رضا سهرابی.
مشخصات نشر	: تهران: موسسه آموزشی تالیفی ارشدان،۱۴۰۴.
مشخصات ظاهری	: [۸۱]ص.
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۰۹-۱۹۰۵-۶
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
یادداشت	: کتابنامه: ص. [۸۱].
موضوع	: حساب انتگرال -- راهنمای آموزشی (عالی) Calculus, Integral -- Study and teaching (Higher) انتگرال -- مسائل و تمرین‌ها و غیره (عالی) Integrals -- Problems, exercises, etc. (Higher)
رده بندی کنگره	: QA۳۰۹
رده بندی دیویی	: ۵۱۵/۴۳۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی	: ۱۰۲۵۲۴۵۶
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: فیپا

مؤسسه آموزشی تألیفی ارشدان

■ نام کتاب:	**روش‌های انتگرال**
■ تهیه و تنظیم:	**علی‌رضا سهرابی**
■ ناشر:	آموزشی تألیفی ارشدان
■ ویرایش:	اول
■ نوبت چاپ:	اول ۱۴۰۴
■ حروفچینی و صفحه آرایی:	www.irantypist.com
■ طراح و گرافیست:	www.irantypist.com
■ شابک:	۹۷۸-۶۲۲-۰۹-۱۹۰۵-۶
■ شمارگان:	۱۰۰۰
■ مرکز خرید آنلاین:	www.arshadan.com www.arshadan.net
■ مرکز پخش و توزیع:	۰۲۱۴۷۶۲۵۵۰۰
■ قیمت:	۱۸۰۰۰۰ تومان

پیشگفتار ناشر:

به نام ایزد دانا که آغاز و انجام از آن اوست

هرگز دل من زعلم محروم نشـــــد کم ماند زاســرار که مفهوم نشد
اکنون که به چشم عقل در می نگرم معلومم شد که هیچ معلوم نشد

ای دانای بی همتا، ای بخشنده ایی که ناخواسته عطا فرمایی و هر نیازمندی را به عدالت بی‌نیاز گردانی، مگر اینکه نالایق باشد و آن عنایت را به باژگونه از دست دهد. در عرصه پیشرفت تکنولوژی در هزاره سوم، هنوز نیاز بر مطالعه کتاب در کنار استفاده از منابع کامپیوتری و اینترنت احساس می شود. از این بابت خوشحالیم که می توانیم در جهت اعتلای علم، دانش و فرهنگ کشور قدمی هر چند کوچک برداریم.

و من الله التوفیق
دکتر شمس الدین یوسفیان
مدیر مسئول انتشارات ارشدان

پیشگفتار

در این کتاب سعی بر آن شده است که از روش‌های گوناگون و تکنیک‌های متفاوت انتگرال‌گیری برای به دست آوردن انتگرال نامعین یا تابع اولیه استفاده شود. به دست آوردن انتگرال نامعین، در برخی از دانشجویان و همچنین دانش‌آموختگان به خصوص رشته‌های فنی و مهندسی و سایر رشته‌ها در دروس ریاضیات عمومی تا حدودی با چالش همراه است. لذا تصمیم به تالیف این کتاب گرفتم.

در این کتاب حالت‌های ممکن در انتگرال گیری و تعدادی از تکنیک‌های مناسب برای این کار یعنی بدست آوردن انتگرال نامعین، همراه با مثال‌ها و نمونه‌های مفید توضیح داده شده است. فرمول‌های انتگرال‌گیری از طریق قضایایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال به وجود آمده‌اند. به دلیل کاربردی بودن روش‌ها و مطالب این کتاب، از اثبات قضایا خودداری شده است. همچنین برای خودآزمایی، در پایان هر فصل، تمرین‌هایی آورده شده است. امید است که خوانندگان محترم این کتاب، استفاده‌های لازم را از مطالب آن برده و موفقیت‌های مورد نیاز را بدست آورند.

عناوین

فصل اول: انتگرال نامعین ۹

تعریف ۹

۱-۱- انتگرال معین: (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) ۹

۱-۲- روش کلی در انتگرال‌گیری ۱۰

۱-۳- روابط مهم ۱۳

۱-۴- برخی از مفاهیم و روابط پایه ۱۵

۱-۵- تمرین‌های فصل اول ۲۴

فصل دوم: انتگرال جزء به جزء ۲۷

۲-۱- رابطه مهم در انتگرال جزء به جزء ۲۷

۲-۲- تمرین‌های فصل دوم ۳۴

فصل سوم: تکنیک‌های دیگر در انتگرال‌گیری ۳۷

۳-۱- ساده‌سازی انتگرال با جانشینی متغیرها ۳۷

۳-۲- انتگرال کسرهای گویا ۳۹

۳-۳- انتگرال توابع گویای مثلثاتی ۴۷

۳-۴- انتگرال‌هایی که با توابع مثلثاتی معکوس مرتبطند ۴۹

۳-۵- انتگرال‌هایی که با توابع هیپربولیک معکوس مرتبطند ۵۲

۳-۶- محاسبه انتگرال، از طریق جانشینی با توابع مثلثاتی ۵۵
۳-۷- تمرین‌های فصل سوم ۶۴
فصل چهارم: جواب تمرین‌ها ۶۹
جواب تمرین‌های فصل اول ۶۹
جواب تمرین‌های فصل دوم..... ۷۰
جواب تمرین‌های فصل سوم ۷۱
چند تمرین حل‌شده ۷۳
منابع و مراجع ۸۱

فصل اول: انتگرال نامعین

تعریف

مراحل بدست آوردن ضد مشتق یک انتگرال مفروض، محاسبه انتگرال نامعین نامیده می‌شود. یعنی تابعی چون F که مشتقش تابع داده شده f باشد، در این حالت به انتگرال f، انتگرال نامعین گفته می‌شود و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

۱-۱- انتگرال معین: (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال)

اگر f یک تابع پیوسته با مقدار حقیقی روی بازه بسته [a,b] باشد، آنگاه اگر ضد مشتق f یعنی F معلوم باشد، انتگرال f روی آن بازه مساوی است با:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به ما اجازه می‌دهد تا از ضد مشتق برای محاسبه مقدار انتگرال استفاده کنیم.

معمولا پیدا کردن ضد مشتق تابع f، کار آسانی نیست و نیاز دارد به استفاده از روش‌ها و تکنیک‌های انتگرال‌گیری. این تکنیک‌ها عبارتند از:

۱. انتگرال از طریق تغییر متغیر.
۲. انتگرال به وسیله تغییر متغیر مثلثاتی.
۳. انتگرال‌گیری جزء به جزء.
۴. انتگرال از طریق تجزیه کسرها.

روش سوم در فصل دوم به تفضیل توضیح داده شده است. روش‌های اول، دوم و چهارم در فصل سوم همراه با مثال‌ها، بیان گردیده است. در این فصل هم در مورد فرمول کلی انتگرال و بعضی از روابط مهم و مفاهیم پایه، بحث و گفتگو شده است.

۱-۲- روش کلی در انتگرال‌گیری

در این روش از فرمول کلی انتگرال نامعین استفاده شده است. در اینجا به دست آوردن انتگرال نامعین و یا تابع اولیه مد نظر ماست. بنابراین سعی می‌کنیم تابع مورد نظر را به صورت حاصلضرب یک تابع در مشتق آن تابع تجزیه کنیم. بطوری که بتوانیم به رابطه زیر نزدیک شویم:

$$\int u^n \, du = \int u^n u' \, dx$$

$n \in Q$ $\quad$ $du=u'dx$ $\quad$ $n\neq -1$

وقتی که تابع به حالت مورد نظر تجزیه شود، از مشتق تابع صرف نظر کرده و نمای تابع را با عدد یک جمع می‌کنیم. سپس آنرا تقسیم بر نمای تابع به

اضافه یک می‌کنیم. وعبارت حاصل با مقدار ثابت C جمع می‌شود، که همان تابع اولیه مورد نظر ماست:

$$\int \boldsymbol{u^n}\, \boldsymbol{u'} dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (1)$$

$n \neq -1$, $n \in Q$

مثال ۱

برای به دست آوردن انتگرال نامعین زیر داریم:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

حل:

داریم:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= \int x(x^2+1)^{-1/2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int 2x(x^2+1)^{-1/2} dx$$

کسر داخل انتگرال را در عدد2 ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم. همانطور که در عبارت بالا مشاهده می‌شود2x مشتق عبارت داخل پرانتز می‌باشد. که پس از ساده‌کردن حاصل انتگرال فوق به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{2}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}+1} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

مثال ۲

مطوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{xdx}{x^2-1}$$

حل:

صورت و مخرج انتگرال را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می کنیم:

$$\int \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-1}\ , u = x^2-1\ , du = 2x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{-1}\,(2x)dx$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2-1| + C$$

در قسمت‌های بعد در مورد روابط مهم در انتگرال بحث خواهیم کرد. که یکی از آنها فرمول زیر می‌باشد:

$$\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$$

در حالت خاص رابطه (۱) بصورت زیر می باشد:

$$\int \boldsymbol{x^n}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

مثال ۳

انتگرال نامعین زیر را به دست آورید.

$$\int \sqrt[9]{x}\,dx = \int x^{1/9}dx = \frac{x^{\frac{1}{9}+1}}{\frac{1}{9}+1} + C = \frac{9}{10}\sqrt[9]{x^{10}} + C$$

مثال ۴

برای بدست آوردن انتگرال نامعین زیر، بسط‌دادن عبارت داخل انتگرال و استفاده از انتگرال جمله به جمله، کاری طولانی و وقت‌گیر است. بنابراین از حالت کلی انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$\int (ax+b)^{\boldsymbol{n}}\,dx$$

$$\int (ax+b)^{\boldsymbol{n}}\,dx = \frac{1}{a}\int a(ax+b)^{n}\,dx$$

عبارت داخل انتگرال را در a ضرب و بر آن تقسیم می کنیم.a مشتق عبارت داخل پرانتز است.

طبق فرمول انتگرال رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\int (ax+b)^{\boldsymbol{n}}dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \text{ a} \neq 0$$

۱-۳- روابط مهم

روابط مهم و فرمولهای استاندارد انتگرال نامعین که اکثرا مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت زیر است: (در تمامی روابط زیرu تابعی از x است.)

$$\int udu = u + C$$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ n≠-1

$$\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$$

$$\int e^u\, du = e^u + C$$

$\int adu = au + C$ a یک عدد ثابت است.

$\int a^u\, du = \frac{a^u}{lna} + C\ a \neq 1\,, a > 0$

$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} tan^{-1} \frac{u}{a} + C$ a≠0

$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$ a>0

انتگرال توابع مثلثاتی:

$$\int sinu\, du = -cosu + C$$

$$\int cosu\, du = sinu + C$$

$$\int tanu\, du = ln|secu| + C$$

$\int cotu\, du = ln|sinu|$+C

$$\int csecu\, du = ln|cscu - cotu| + C$$

$$\int secu\, du = ln|secu + tanu| + C$$

$$\int sinhu\, du = coshu + C$$

$$\int coshu\, du = sinhu + C$$

$$\int sech^2 u\, du = tanh\, u + C$$

$$\int csech^2 u\, du = -coth\, u + C$$

$$\int \sec^2 u\, du = tanu + C$$

$$\int csec^2 u\, du = -cotu + C$$

۱-۴- برخی از مفاهیم و روابط پایه

- توابع لگاریتمی و نمایی:

تابع لگاریتمی (تعریف):تابع زیر را تابع لگاریتمی طبیعی می نامند. که دامنه آن تمام اعداد مثبت می باشد.

$$lnx = \int_1^x \frac{1}{z} dz\, , x > 0$$

Lnx، لگاریتم x در مبنای e (عدد نپر) می باشد. $log_e^x = lnx$

تابع فوق مشتق‌پذیر است و مشتق آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_x(lnx) = \frac{1}{x}$$

در حالت کلی تر و بنا بر قاعده زنجیری مشتق، اگر u تابعی از x باشد، آنگاه:

$$D_x(lnu) = \frac{1}{u}\ D_x u\ , u(x) > 0$$

تابع نمایی: تابع نمایی، معکوس تابع لگاریتمی طبیعی است و به صورت $\boldsymbol{e^x}$ و یا exp(x) نشان داده می‌شود. یعنی

$$x = lny \ \Leftrightarrow\ y = e^x$$

دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد مثبت می باشد. مشتق تابع نمایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_x(e^x) = e^x$$

در حالت کلی تر و بنا بر قاعده زنجیری مشتق، اگر u تابعی از x باشد،

$$D_x(e^u) = e^u D_x u$$

از تعاریف مشتق توابع نمایی و لگاریتمی طبیعی، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$$

$$\int e^u\, du = e^u + C$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی:

اگر u تابعی از x و مشتق‌پذیر باشد، برای مشتق این توابع خواهیم داشت:

$$D_x(sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u \,, |u| < 1 \; D_x u = u'(x)$$

$$D_x(cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u \,, |u| < 1$$

$$D_x(tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u$$

$$D_x(cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} D_x u$$

توابع هیپربولیک:

توابع هیپربولیک از توابع پرکاربرد در ریاضیات هستند. که بر حسب e^x, e^{-x} به صورت زیر تعریف می شوند:(گاهی اوقات به آنها توابع هذلولوی هم گفته می‌شود.)

$$sinh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \,, sech\, x = \frac{1}{cosh\, x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$tanh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \,, csech\, x = \frac{1}{sinh\, x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$coth\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

مشتق توابع هیپربولیک:

اگر u تابعی از x و مشتق‌پذیر باشد، برای مشتق این توابع داریم:

$$D_x(\sinh u) = \cosh u \, D_x u \;\; D_x u = u'(x)$$

$$D_x(\cosh u) = \sinh u \, D_x u$$

$$D_x(\tanh u) = sech^2 u \, D_x u$$

$$D_x(\coth u) = -csech^2 u \, D_x u$$

مشتق توابع هیپربولیک معکوس:

$$D_x(\sinh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \, D_x u$$

$$D_x(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u \, , u > 1$$

$$D_x(\tanh^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2} D_x u \, , |u| < 1$$

$$D_x(\coth^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2} D_x u \, , |u| > 1$$

توابع هیپربولیک معکوس را برحسب لگاریتم‌های طبیعی هم می‌توان بیان کرد. این روش به ما کمک می کند تا بتوانیم جواب برخی از انتگرال‌ها را بصورت لگاریتم بنویسیم.

$$\sinh^{-1} x = ln(x + \sqrt{x^2+1}\,) \;\; , x \epsilon \, R$$

$$cosh^{-1}x = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \ , x \geq 1$$

$$tanh^{-1}x = \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x} \ , |x| < 1$$

$$\coth^{-1}x = \frac{1}{2} ln \frac{x+1}{x-1} \ , |x| > 1$$

انتگرال جمله به جمله:

$$\int [f(u) + g(u) + h(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du + \int h(u)du$$

مثال ۵

مطوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int sin^3x \, dx$$

حل:

از اتحادهای مثلثاتی استفاده می‌کنیم

$$sin^2x = 1 - cos^2x$$

$$\int sin^3x \, dx = \int sinx \, sin^2x \, dx$$

$$= \int (sinx(\ 1 - cos^2x))dx$$

$$= \int (sinx - sinxcos^2x)dx$$

$$= \int sinx\, dx - \int sinxcos^2x\, dx$$

$$= cosx + C_1 + \int (-sinx)cos^2x\, dx$$

$$= cosx + \ C_1 + \frac{1}{3}cos^3x + C_2$$

$$\int sin^3x\, dx = cosx + \frac{1}{3}cos^3x + C$$

نکته: توجه کنید که مجموع دو مقدار ثابت C_1 و C_2 مقدار ثابت C است. در این کتاب، در کلیه تمرین‌ها و مثال‌ها مجموع دو یا چند مقدار ثابت در محاسبه انتگرال نا معین را مقدار ثابت C در نظر می‌گیریم.

مثال ۶

مطوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{7x-1}$$

حل:

فرض می‌کنیم که:

$$7x - 1 = u \implies du = 7dx$$

$$\int \frac{dx}{7x-1} = \frac{1}{7}\int \frac{7dx}{7x-1}$$

$$= \frac{1}{7}ln|7x-1| + C$$

مطابق رابطه: $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$، انتگرال فوق دست می‌آید.

مثال ۷

مطوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int x5^{(x^2+1)}dx$$

حل:

فرض می‌کنیم:

$$x^2 + 1 = u \implies du = 2xdx$$

$$\int x5^{(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int 2x5^{(x^2+1)}dx\ , a = 5 > 0$$

$$= \frac{5^{x^2+1}}{2ln5} + C$$

مطابق رابطه: $\int a^u\, du = \frac{a^u}{lna} + C$، انتگرال فوق به دست می‌آید.

مثال ۸

مطلوب است مشتق توابع زیر:

$$f(x) = x^3\, tan^{-1}(\frac{x}{4})$$

حل:

از طریق مشتق توابع معکوس مثلثاتی:

$$f'(x) = 3x^2\, tan^{-1}(\frac{x}{4}) + x^3 \frac{1}{1+\frac{x^2}{16}}(\frac{1}{4})$$

$$= 3x^2\, tan^{-1}(\frac{x}{4}) + \frac{4x^3}{16+x^2}$$

$$g(x) = sinh^{-1}\sqrt{x^3}$$

حل:

از طریق مشتق توابع هیپر بولیک معکوس:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{x^3}\right)^2+1}}(\frac{3}{2}\sqrt{x})$$

$$= \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x^3+1}}$$

$$h(x) = ln\left(x+\sqrt{x}\right) + e^{sin^2x}$$

حل:

مشتق تابع لگاریتمی و نمایی:

$$D_x(lnu) = \frac{1}{u}\, D_x u\, , D_x(e^u) = e^u D_x u$$

$$h'(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x+\sqrt{x}} + 2cosxsinx(e^{sin^2x})$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+1}{2(x\sqrt{x}+x)} + (e^{sin^2x})sin2x$$

۱-۵- تمرین‌های فصل اول

الف- در تمرین‌های زیر انتگرال نامعین را بدست آورید.

(۱) $\int \frac{1}{\sqrt[10]{x^3}}\, dx$

(۲) $\int \frac{5}{6} x^{2} \sqrt{x}\, dx$

(۳) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3+1}}\, dx$

(۴) $\int cos^3 x\, dx$

(۵) $\int (\boldsymbol{sin7x + xcosx^2})\boldsymbol{dx}$

(۶) $\int \frac{dx}{8+x^2}$

(۷) $\int x\, tan(1+5x^2)\, dx$

(۸) $\int \frac{x}{(3x^2+7)^9} dx$

ب- در تمرین‌های زیر انتگرال‌های معین را محاسبه کنید.

(۹) $\int_2^5 x.\sqrt[3]{x^2}\, dx$

(۱۰) $\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+3} dx$

(۱۱) $\int_{-1}^2 \frac{2x^2}{(x^3+5)} dx$

ج- مشتق توابع مفروض زیر را بیابید:

(۱۲) $f(x) = ln(tanx^2)$

(۱۳) $f(x) = 2\, sin^{-1}\sqrt{x}$

(۱۴) $f(x) = cot^{-1} e^{3x}$

(۱۵) $f(x) = ln\sqrt{x^2+1} + cos^{-1}(sinx)$

(۱۶) $f(x) = tanh^{-1}(sece^{x})$

(۱۷) $f(x) = cosh^{-1}(3x + 1)$

(۱۸) $f(x) = sin^{-1}(tanh\, x^{2})$

(۱۹) $f(x) = e^{\sqrt{x^{3}+1}} + cos^{2}x$

(۲۰) $f(x) = coth^{-1}(cosh\, x)$

فصل دوم: انتگرال جزء به جزء

۲-۱- رابطه مهم در انتگرال جزء به جزء

یکی از روش‌هایی که در انتگرال‌گیری بسیار مفید واقع می‌شود، انتگرال‌گیری جزء به جزء بوده و از طریق فرمول دیفرانسیل حاصلضرب بدست می‌آید:

$$d(uv) = udv + vdu$$

و از آنجا

$$udv = d(uv) - vdu$$

با انتگرال گرفتن از دو طرف خواهیم داشت:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (۱)$$

رابطه فوق فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء نامیده می شود.

برای u و dv جانشینی باید انتخاب کرد که مستقیما قابل انتگرال‌گیری باشد و u تابعی است که مشتق آن تابع ساده‌تری می‌باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱

انتگرال زیر را بدست آورید:

$$\int xcosx\, dx$$

حل:

فرض می‌کنیم:

$$u = x\,, dv = cosx\, dx$$

(طبق رابطه(۱) فرمول انتگرال جز به جز):

$$\boldsymbol{v} = sinx\,, du = dx$$

بنابراین:

$$\int xcosx\, dx = xsinx - \int sinx\, dx$$

$$= xsinx + cosx + C$$

نکته

در اکثر موارد وقتی که انتگرال شامل حاصلضرب توابع، لگاریتم و توابع مثلثاتی معکوس باشد، انتگرال جزء به جزء کاربرد دارد.

مثال ۲

مطلوبست انتگرال زیر:

$$\int cot^{-1}x\, dx$$

حل:

اگر فرض کنیم که:

$$u = cot^{-1}x \, , dv = dx$$

در این صورت طبق رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$du = \frac{-dx}{1+x^2} \, , v = x$$

$$\int cot^{-1}x \, dx = xcot^{-1}x + \int \frac{xdx}{1+x^2}$$

$$= \; xcot^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

مثال ۳

مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int x^n lnx \, dx$$

حل:

فرض می‌کنیم:

$$u = lnx \, , dv = x^n dx \;\Longrightarrow$$

$$du = \frac{dx}{x} \, , v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int x^n lnx\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} lnx - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} lnx - \frac{1}{n+1} \int x^n\, dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} lnx - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$$

در برخی موارد ممکن است از دو مرتبه انتگرال جزء به جزء در مراحل انتگرال‌گیری استفاده کنیم.

(به مثال ۴ توجه کنید).

مثال ۴

مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int e^x\, sinx\, dx$$

حل:

فرض کنیم:

$$u = e^x\, , dv = sinxdx$$

در این صورت داریم:

$$du = e^x dx\; v = -cosx$$

$$\int e^x \, sinx \, dx = -e^x cosx - \int e^x cosx \, dx$$

در طرف راست تساوی فوق مجبوریم دوباره انتگرال‌گیری جزء به جزء را بکار بریم. فرض می‌کنیم

$$dv' = cosx \, dx \, , u' = e^x$$

$$\Longrightarrow \; v' = sinx \, , du' = e^x dx$$

از آنجا خواهیم داشت:

$$\int e^x \, sinx \, dx = -e^x cosx + e^x sinx \, dx - \int e^x sinx \, dx$$

$$2\int e^x \, sinx \, dx = e^x \, (sinx - cosx) + C'$$

$$\int e^x \, sinx \, dx = \frac{1}{2} e^x (sinx - cosx) + C$$

دقت کنید که در اینجا طرف دوم تساوی فوق بر عدد ۲ تقسیم شده است. بنابراین

$$C = \frac{C'}{2}$$

مثال ۵

مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int x e^{3x} dx$$

حل:

فرض می‌کنیم که:

$$u = x\,, dv = 3e^{3x}dx$$

$$\Longrightarrow\ v = e^{3x}\,, du = dx$$

بنابراین:

$$\int xe^{3x}dx = xe^{3x} - \int e^{3x}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\int 3xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}(\,xe^{3x} - \int e^{3x}\,dx)$$

$$= \frac{1}{3}(\,xe^{3x} - \frac{1}{3}\int 3e^{3x}\,dx)$$

$$= \frac{1}{3}(\,xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x}) + C$$

$$\frac{1}{3}\,e^{3x}(x - \frac{1}{3}) + C$$

مثال ۶

انتگرال نامعین زیر را به دست آورید:

$$\int tanh^{-1}x\,dx$$

حل:

فرض کنید: $u = tanh^{-1}x$ و $dv = dx$ در این صورت داریم:

$$du = \frac{1}{1-x^2}dx\ , v = x$$

$$\int tanh^{-1} x\, dx = x\, tanh^{-1} x - \int \frac{x}{1-x^2} dx$$

$$= \boldsymbol{x}\, tanh^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2} dx$$

$$= x\, tanh^{-1} x + \frac{1}{2} ln(1-x^2) + C$$

۲-۲- تمرین‌های فصل دوم

الف- در تمرین‌های زیر انتگرال نامعین را محاسبه کنید.

(۱) $\int xsin6x\, dx$

(۲) $\int \sqrt[3]{x}\ lnx\, dx$

(۳) $\int xtan^{-1}x\, dx$

(۴) $\int x4^{x}\, dx$

(۵) $\int sin^{-1}\, x\, dx$

(۶) $\int \frac{6x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$

ب- در تمرین‌های زیر انتگرال معین را محاسبه کنید.

(۷) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin3xcosx\, dx$

(۸) $\int_{-1}^{2} \ln(x+3)\, dx$

(۹) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sec^4 x\, dx$

(۱۰) $\int_{0}^{1} x sin^{-1} x\, dx$

فصل سوم: تکنیک‌های دیگر در انتگرال‌گیری

۳-۱- ساده‌سازی انتگرال با جانشینی متغیرها

با جانشینی برخی از متغیرها می‌توان انتگرال مفروض را ساده نمود. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱

مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\int x^5 \sqrt{x^2+4}\, dx$$

حل:

فرض می‌کنیم:

$$z = \sqrt{x^2+4}$$

بنابراین داریم:

$$z^2 = x^2 + 4 \;\rightarrow\; 2zdz = 2xdx$$

و از آنجا:

$$\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx = \int (x^2)\,{}^2\sqrt{x^2+4}\,xdx$$

$$= \int (z^2-4)\,{}^2z(zdz)$$

$$= \int (z^6-8z^4+16z^2)dz = \frac{1}{7}z^7 - \frac{8}{5}z^5 + \frac{16}{3}z^3 + C$$

$$= \frac{1}{105}z^3(15z^4-168z^2+560) + C$$

$$= \frac{1}{105}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}[15(x^2+4)^2 - 168(x^2+4) + 560] + C$$

$$= \frac{1}{105}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}(15x^4-48x^2+128) + C$$

از جانشینی عکس یک متغیر نیز می‌توان استفاده کرد:

مثال ۲

مطلوبست انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$$

حل:

جانشینی عکس متغیر:

$$x = \frac{1}{t} \implies dx = -\frac{dt}{t^2}\,, t \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = \int \frac{\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t\sqrt{\frac{1+4t-4t^2}{t^2}}}}$$

$$= \int \frac{dt}{\frac{t}{|t|}\sqrt{1+4t-4t^2}} = \pm \int \frac{dt}{\sqrt{1+4t-4t^2}}$$

اگر مقدار مثبت را محاسبه کنیم: (t>0)

$$= \pm \int \frac{dt}{\sqrt{2-(1-4t+4t^2)}}$$

$$= \pm \int \frac{dt}{\sqrt{2-(2t-1)^2}} = \pm sin^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

طبق روابط انتگرال در فصل اول:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C \text{ a>0}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = sin^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= sin^{-1}(\frac{\frac{2}{x}-1}{\sqrt{2}}) + C = \pm sin^{-1}\left(\frac{2-x}{x\sqrt{2}}\right) + C$$

۳-۲- انتگرال کسرهای گویا

به طور کلی در این روش با انتگرال عباراتی به صورت زیر سر و کار داریم:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

در این حالت اگر درجه صورت کمتر از درجه مخرج نباشد، برای انجام این کار صورت کسر را تقسیم بر مخرج آن می‌کنیم، تا کسری بدست آید که درجه صورتش از درجه مخرج کمتر باشد. به مثال ۳ توجه کنید:

مثال ۳

$$\int \frac{x^4 - 10x^2 + 2x + 24}{x^2 - 4} dx$$

پس از تقسیم صورت بر مخرج کسر و انتگرال‌گیری جمله به جمله داریم:

$$\int (x^2 - 6 + \frac{2x}{x^2 - 4}) dx = \int x^2 dx - \int 6dx + \int \frac{2x}{x^2 - 4} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 6x + \int 2x(x^2 - 4)^{-1} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 6x + ln|x^2 - 4| + C$$

در حالتی که درجه صورت از مخرج کمتر باشد، مخرج را به چند عامل تجزیه کرده و $\frac{f(x)}{g(x)}$ را به صورت مجموع چند کسر می‌نویسیم. مثال زیر:

مثال ۴

مطوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{x - 2}{x^3 - x} dx$$

پس از تجزیه مخرج کسر:

$$\frac{x-2}{x^3-x} \equiv \frac{x-2}{x(x-1)(x+1)} \Longrightarrow$$
$$\frac{x-2}{x(x-1)(x+1)} \equiv \frac{M}{x} + \frac{N}{x-1} + \frac{P}{x+1}$$

پس از ساده کردن و معادل قرار دادن صورت‌های دو طرف، به رابطه زیر می‌رسیم که یک اتحاد است.

$$\Longrightarrow \; x-2 \equiv M(x-1)(x+1) + Nx(x+1) + Px(x-1)$$

جملات را دسته‌بندی می‌کنیم. بنابراین: در طرف راست اتحاد بالا

$$x-2 \equiv (M+N+P)x^2 + (N-P)x - M$$

برای اینکه اتحاد فوق برقرار باشد، باید ضریب‌های متناظر در دو طرف با هم برابر باشند:

$$M+N+P=0$$

$$N-P=1$$

$$-2=-M$$

از آنجا مقادیر M و N وP بدست می‌آید:

$$M=2\,, N=-\frac{1}{2}\,, P=-\frac{3}{2}$$

بنابراین جواب انتگرال مورد نظر به صورت زیر در می آید:

$$\int \frac{x-2}{x^3-x}dx = \int (\frac{M}{x} + \frac{N}{x-1} + \frac{P}{x+1})dx = \int (\frac{2}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+1})dx$$

$$= \int \frac{2}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= 2ln|x| - \frac{1}{2}ln|x-1| - \frac{3}{2}ln|x+1| + C$$

$$= ln\frac{x^2}{x+1\sqrt{(x-1)(x+1)}} + C$$

ممکن است در برخی موارد مخرج کسر به عامل‌هایی تجزیه شود که از درجه دوم باشند. مثال زیر:

مثال ۵

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^2+2x-3}{(x+1)(x^2+2x-2)}dx$$

حل:

کسر داخل انتگرال را به صورت مجموع چند کسر جزئی می‌نویسیم:

$$\frac{x^2+2x-3}{(x+1)(x^2+2x-2)} \equiv \frac{Mx+N}{x^2+2x-2} + \frac{P}{x+1}$$

پس از ساده کردن و معادل قرار دادن صورت‌های دو طرف، به رابطه زیر می‌رسیم. رابطه زیر یک اتحاد است.

$$x^2+2x-3 \equiv (Mx+N)(x+1) + P(x^2+2x-2)$$

پس از دسته‌بندی جملات در طرف راست تساوی بالا داریم:

$$x^2 + 2x - 3 \equiv (M + P)x^2 + (M + N + 2P)x + N - 2P$$

ضرایب متناظر با هم برابر هستند:

$$M + P = 1$$

$$M + N + 2P = 2$$

$$N - 2P = -3$$

از حل دستگاه سه معادله و سه مجهول بالا داریم:

$$M = -\frac{1}{3}\ , N = -\frac{1}{3}\ , P = \frac{4}{3}$$

و از آنجا با جایگذاری مقادیر M و N و P :

$$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)(x^2 + 2x - 2)} dx = \int \left(\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)x + \left(-\frac{1}{3}\right)}{x^2 + 2x - 2} + \frac{\frac{4}{3}}{x + 1}\right) dx$$

$$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)(x^2 + 2x - 2)} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 2} dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x + 1} dx$$

در کسر $\frac{x+1}{x^2+2x-2}$، صورت و مخرج را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم. عبارت (2x+2) مشتق مخرج کسر می‌باشد. با استفاده از فرمول $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$ در فصل اول:

$$\int \frac{x^2+2x-3}{(x+1)(x^2+2x-2)}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-2}dx + \frac{4}{3}\ln(x+1)$$

$$= \frac{-1}{6}ln|x^2+2x-2| + \frac{4}{3}\ln|x+1| + C$$

$$= ln\left|\frac{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[6]{x^2+2x-2}}\right| + C$$

همچنین ممکن است بعضی از عامل‌های درجه دوم در مخرج کسر، پس از تجزیه، تکراری باشند. مثال زیر:

مثال ۵

انتگرال نامعین زیر را به دست آورید.

$$\int \frac{(x-3)dx}{x(x^2-4x+6)^2}$$

حل:

کسر داخل انتگرال را به صورت مجموع کسرهای جزئی می‌نویسیم:

$$\frac{x-3}{x(x^2-4x+6)^2} \equiv \frac{M}{x} + \frac{Nx+P}{(x^2-4x+6)^2} + \frac{Qx+R}{x^2-4x+6}$$

دو طرف رابطه فوق را در کوچک‌ترین مخرج مشترک ضرب می‌کنیم:

$$x-3 \equiv M(x^2-4x+6)^2 + x(Nx+P) + x(x^2-4x+6)(Qx+R)$$

$$x-3 \equiv M(x^4+16x^2+36-8x^3+12x^2-48x) + Nx^2+Px+\ Qx^4-4x^3Q+6x^2Q+Rx^3-4Rx^2+6xR$$

$$x-3 \equiv (M+Q)x^4\ +(-8M-4Q+R)x^3$$

$$+(28M+N+6Q-4R)x^2$$

$$+(-48M+P+6R)x+36M$$

از اتحاد بالا به معادلات زیر می‌رسیم:

$$M+Q=0\,,$$

$$-8M-4Q+R=0$$

$$28M+N+6Q-4R=0$$

$$-48M+P+6R=1$$

$$36M=-3$$

از حل معادلات فوق پارامترهای مورد نظر به دست می‌آید:

$$M=-\frac{1}{12}\,,N=\frac{1}{2}\,,P=-1\,,Q=\frac{1}{12}\,,R=-\frac{1}{3}$$

بنابراین داریم: (انتگرال جمله به جمله).

$$\int \frac{(x-3)dx}{x(x^2-4x+6)^2} = \int \frac{-1}{12x}dx + \int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)x-1}{(x^2-4x+6)^2}dx$$

$$+\int \frac{\frac{1}{12}x-\frac{1}{3}}{x^2-4x+6}dx$$

$$=\frac{-1}{12}ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{x-2}{(x^2-4x+6)^2}dx+\frac{1}{12}\int\frac{x-4}{x^2-4x+6}dx$$

$$=\frac{-1}{12}ln|x|+\frac{1}{4}\int\frac{2x-4}{(x^2-4x+6)^2}dx$$

$$+\frac{1}{24}\int\frac{2x-8}{x^2-4x+6}dx$$

$$=\frac{-1}{12}ln|x|-\frac{1}{4(x^2-4x+6)}+\frac{1}{24}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+6}dx$$

$$-\frac{1}{24}\int\frac{4dx}{x^2-4x+6}$$

$$=\frac{-1}{12}ln|x|-\frac{1}{4(x^2-4x+6)}+\frac{1}{24}ln|x^2-4x+6|$$

$$-\frac{4}{24}\int\frac{dx}{(x-2)^2+2}\ ,u=x-2\ ,a=\sqrt{2}$$

$$=\frac{-1}{12}ln|x|-\frac{1}{4(x^2-4x+6)}+\frac{1}{24}ln|x^2-4x+6|$$

$$-\frac{1}{6}(\frac{1}{\sqrt{2}}tan^{-1}(\frac{x-2}{\sqrt{2}}))+C$$

دقت کنید محاسبه $\int \frac{dx}{(x-2)^2+2}$ مربوط به انتگرال توابع معکوس مثلثاتی است که در قسمت (۳-۴) توضیح داده شده است: (x^2-4x+6 به صورت مربع کامل نوشته شده است)

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = tan^{-1}\frac{u}{a}+C \ , a \neq 0$$

در نهایت داریم:

$$\int \frac{(x-3)dx}{x(x^2-4x+6)^2} = \frac{1}{12}ln\frac{\sqrt{x^2-4x+6}}{|x|} - \frac{1}{4(x^2-4x+6)} - \frac{1}{6\sqrt{2}}tan^{-1}(\frac{x-2}{\sqrt{2}}) + C$$

۳-۳- انتگرال توابع گویای مثلثاتی

برای انتگرال‌گیری از توابع گویای مثلثاتی بخصوص sinx و cosx از جانشینی متغیر بصورت زیر استفاده می‌شود:

$$t = tan\frac{x}{2}$$

توابع sinx و cosx را بر حسب متغیر t بدست می‌آوریم.

از اتحادهای مثلثاتی نصف زاویه، استفاده می‌کنیم:

$$1+cos2x = 2cos^2x \implies 1+cosx = 2cos^2(\frac{x}{2})$$

$$cosx = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{sec^2(\frac{x}{2})} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + tan^2(\frac{x}{2})} - 1 = \frac{2}{1 + t^2} - 1$$

و از آنجا:

(i) $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$sinx = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(\frac{x}{2}) \Longrightarrow sinx = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}$$

$$sinx = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right).\frac{1}{sec^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

بنابراین خواهیم داشت:

(ii) $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$

همچنین:

$$t = tan\frac{x}{2} \Longrightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 + tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$$

(iii) $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

مثال ۶

مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{5}{1-sinx}dx$$

حل:

از روابط (i) و (ii) و (iii) داریم:

$$\int \frac{5}{1-sinx}dx = \int \frac{5}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{5(1+t^2)}{(1-t)^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{10}{(1-t)^2}\,dt = \frac{-10}{-(1-t)} + C$$

$$= \frac{10}{1-t} + C = \frac{10}{1-tan\frac{x}{2}} + C$$

۳-۴- انتگرال‌هایی که با توابع مثلثاتی معکوس مرتبطند

از طریق روابط مشتق توابع معکوس مثلثاتی که در فصل اول گفته شد، فرمول‌های انتگرال نامعین این توابع به دست می‌آید.

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = sin^{-1}u + C\ ,\int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = cos^{-1}u + C$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = tan^{-1} u + C \ , \int \frac{-du}{1+u^2} = cot^{-1} u + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = sec^{-1} |u| + C$$

مثال ۷

مطلوب است انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{-4x^2+12x-8}$$

مخرج کسر را بازنویسی کرده تا بصورت زیر در آید:

$$\int \frac{dx}{-4x^2+12x-8} = \int \frac{dx}{1-4x^2+12x-9}$$

$$= \int \frac{dx}{1-(4x^2-12x+9)}$$

$$= \int \frac{dx}{1-(2x-3)^2} \ , u = 2x-3$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{1-(2x-3)^2} = \frac{1}{2} sin^{-1}(2x-3) + C$$

مثال ۸

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{2x+9}{x^2+6x+10} dx$$

حل:

مخرج کسر را باز نویسی کرده و آنرا بصورت یک مربع کامل در می‌آوریم. و انتگرال فوق را بصورت مجموع دو انتگرال می‌نویسیم.

$$x^2 + 6x + 10 = u \implies du = (2x + 6)dx$$

$$\int \frac{2x+9}{x^2+6x+10} dx = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10} dx + \int \frac{3}{(x+3)^2+1} dx$$

$$\int \frac{2x+9}{x^2+6x+10} dx = ln|\, x^2 + 6x + 10| + 3 \int \frac{1}{(x+3)^2+1} dx$$

$$= ln|\, x^2 + 6x + 10| + 3\, tan^{-1}(x + 3) + C$$

$$u = x + 3$$

در حالات کلی‌تر، روابط دیگری هم برای انتگرال‌گیری وجود دارند:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = sin^{-1}\frac{u}{a} + C \ , \int \frac{-du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = cos^{-1}\frac{u}{a} + C \ \ a > 0$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = tan^{-1}\frac{u}{a} + C \ , \int \frac{-du}{a^2+u^2} = cot^{-1} u + C \ , a \neq 0$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \, , a > 0$$

مثال ۹

مطلوب است انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-9x^2}}$$

حل:

داریم: $a = \sqrt{7}$ $\qquad u = 3x\,,$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{\sqrt{7-(3x)^2}}$$

$$= \frac{1}{3} sin^{-1}\frac{3x}{\sqrt{7}} + C$$

مطابق روابط حالات کلی‌تر در قسمت (۳-۴).

۳-۵- انتگرال‌هایی که با توابع هیپربولیک معکوس مرتبطند

با توجه به فرمول‌های مشتق توابع هیپربولیک معکوس، در فصل اول، روابط انتگرال‌گیری آنها به صورت زیر خواهد بود.

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = sinh^{-1} u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = cosh^{-1} u + C\,, u > 1$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \begin{cases} tanh^{-1} u + C\,, |u| < 1 \\ coth^{-1} u + C\,, |u| > 1 \end{cases}$$

مثال ۱۰

انتگرال زیر را بدست آورید:

$$\int \frac{3}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx$$

حل:

اگر عبارت زیر رادیکال در مخرج را باز نویسی کرده و آنرا به صورت مربع کامل بنویسیم، داریم:

$$\int \frac{3}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx = \int \frac{3}{\sqrt{9x^2+6x+1+1}}dx$$

$$= \int \frac{3}{\sqrt{(3x+1)^2+1}}dx \,, D_x(3x+1) = 3$$

$$= sinh^{-1}(3x+1) + C$$

مثال۱۱

مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

حل:

عبارت داخل رادیکال در مخرج را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+4-1}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}} \,, u = x-2$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}} = cosh^{-1}(x-2) + C$$

حالات کلی‌تر برای روابط قسمت (۳-۵) به صورت زیر است:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = sinh^{-1}\frac{u}{a}+C \; a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = cosh^{-1}\frac{u}{a}+C \; , u > a > 0$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}tanh^{-1}\frac{u}{a}+C \; , |u| < a \\ \frac{1}{a}coth^{-1}\frac{u}{a}+C \; , |u| > a \end{cases} \quad a \neq 0 \, , u \neq a$$

مثال ۱۲

مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+8x+11}}$$

حل:

مخرج کسر زیر رادیکال را به صورت مربع کامل می‌نویسیم.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+8x+11}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+8x+1+10}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(4x+1)^2+10}} \; u = 4x+1 \, , a = \sqrt{10}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{\sqrt{(4x+1)^2+10}}$$

$$= \frac{1}{4} sinh^{-1} \frac{4x+1}{\sqrt{10}} + C$$

مثال ۱۳

مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{25x^2 - 9}$$

حل:

صورت و مخرج کسر را باید در عد ۵ ضرب کنیم. زیرا:

$$\int \frac{dx}{25x^2 - 9} = \frac{1}{5} \int \frac{5dx}{25x^2 - 9} \ , u = 5x \ , a = 3$$

$$\int \frac{dx}{25x^2 - 9} = \frac{1}{5} cosh^{-1}(\frac{5x}{3}) + C$$

مطابق روابط حالات کلی‌تر در قسمت (۵-۳) جواب انتگرال‌ها به دست می‌آید.

۳-۶- محاسبه انتگرال، از طریق جانشینی با توابع مثلثاتی

در این روش به انتگرال‌هایی بر خورد می‌کنیم که شامل عبارات زیر هستند:

$$\sqrt{a^2 - u^2} \ , \sqrt{a^2 + u^2} \ , \sqrt{u^2 - a^2}$$

ابتدا با یک مثال انتگرال شامل $\sqrt{a^2 - u^2}$ را بررسی می‌کنیم:

مثال ۱۴

مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$$

حل:

فرض می‌کنیم:

$$x = 2sin\varphi \,, 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x > 0 \implies -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$$

$$x < 0 \implies dx = 2cos\varphi \, d\varphi$$

و از آنجا، طبق اتحادهای مثلثاتی و روابط انتگرال در فصل اول:

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4sin^2\varphi} = 2\sqrt{cos^2\varphi} = 2cos\varphi$$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{2cos\varphi}{4sin^2\varphi}(2cos\varphi \, d\varphi)$$

$$= \int cot^2\varphi d\varphi$$

$$= \int (csec^2\varphi - 1)d\varphi = -cot\varphi - \varphi + C$$

مقدار φ , $cot\varphi$ از طریق زیر و با توجه به یکی از اتحادهای مثلثاتی، به دست می‌آیند:

$$\frac{x}{2} = sin\varphi \ , -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \implies \varphi = sin^{-1}(\frac{x}{2})$$

$$x > 0 \text{ یا } x < 0 \implies cot\varphi = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

به دلیل اینکه:

$$1 + cot^2\varphi = \frac{1}{sin^2\varphi} \implies 1 + cot^2\varphi = \frac{1}{\frac{x^2}{4}}$$

$$cot^2\varphi = \frac{4}{x^2} - 1 \implies cot\varphi = \frac{\pm\sqrt{4-x^2}}{|x|}$$

جواب نهایی به صورت زیر خواهد شد:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

در این حالت انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^2+u^2}$ می‌باشد:

مثال ۱۵

انتگرال نامعین زیر را به دست آورید:

$$\int \sqrt{x^2+7}\, dx$$

حل:

فرض می‌کنیم:

$$x = \sqrt{7}tan\varphi$$

$$x \geq 0 \implies 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$x < 0 \implies -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$dx = \sqrt{7}\, sec^2\varphi\, d\varphi$$

$$\sqrt{x^2+7} = \sqrt{7tan^2\varphi + 7} = \sqrt{7sec^2\varphi} = \sqrt{7}sec\varphi$$

$$\int \sqrt{x^2+7}\, dx = \int \sqrt{7}sec\varphi(\sqrt{7}sec^2\varphi\, d\varphi)$$

$$= 7\int sec^3\varphi\, d\varphi$$

برای محاسبه $\int sec^3\varphi\, d\varphi$ از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$dv = sec^2\varphi\, d\varphi\, , u = sec\varphi$$

$$v = tan\varphi\, , du = sec\varphi\, tan\varphi\, d\varphi$$

$$\int sec^3\varphi\, d\varphi = sec\varphi\, tan\varphi - \int sec\varphi\, tan^2\varphi\, d\varphi$$

$$\int sec^3\varphi\, d\varphi = sec\varphi\, tan\varphi - \int sec\varphi\, (sec^2\varphi - 1)\, d\varphi$$

$$\int sec^3\varphi\, d\varphi = sec\varphi\, tan\varphi - \int sec^3\varphi d\varphi + \int sec\varphi\ \ d\varphi$$

$$2\int sec^3\varphi\, d\varphi = sec\varphi\, tan\varphi + ln|sec\varphi + tan\varphi| + C_1$$

$$\int sec^3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} sec\varphi\, tan\varphi + \frac{1}{2} ln|sec\varphi + tan\varphi| + C_1/2$$

$$\int \sqrt{x^2+7}\, dx = \frac{7}{2} sec\varphi\, tan\varphi + \frac{7}{2} ln|sec\varphi + tan\varphi| + \frac{7C_1}{2}$$

در عبارت فوق $\frac{7C_1}{2}$ را مقدار ثابت C در نظر می‌گیریم.

اگر بخواهیم $sec\varphi$ را به دست بیاوریم، داریم:

$$sec\varphi = \sqrt{1 + tan^2\varphi}$$

$$tan\varphi = \frac{x}{\sqrt{7}} \implies sec\varphi = \sqrt{1 + \frac{x^2}{7}}$$

$x \geq 0$ یا $x < 0$

$$\int \sqrt{x^2+7}\,dx = \frac{7}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{7}}.\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+\frac{7}{2}ln\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{7}}+\frac{x}{\sqrt{7}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+7} + +\frac{7}{2}ln\left|\sqrt{x^2+7}+x\right| - \frac{7}{2}ln\sqrt{7} + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+7} + +\frac{7}{2}ln\left|\sqrt{x^2+7}+x\right| + \boldsymbol{C}_2$$

در اینجا هم مجددا مقدار ثابت $(-\frac{7}{2}ln\sqrt{7}+C)$ را C_2 فرض می‌کنیم.

حال با یک مثال انتگرال شامل $\sqrt{u^2-a^2}$ را بررسی می‌کنیم:

مثال ۱۶

انتگرال نامعین زیر را به دست آورید:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-36}}$$

حل:

فرض می‌کنیم:

$$x = 6sec\varphi$$

$$x > 6 \implies 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$x < -6 \implies \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$dx = 6\sec\varphi tan\varphi\, d\varphi$$

$$\sqrt{x^2-36} = \sqrt{36sec^2\varphi - 36} = 6\sqrt{tan^2\varphi} = 6tan\varphi$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-36}} = \int \frac{6\sec\varphi tan\varphi\, d\varphi}{216sec^3\varphi.6tan\varphi}$$

$$= \frac{1}{216}\int cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{432}\int(1+cos2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{432}\left(\varphi + \frac{1}{2}sin2\varphi\right) + C$$

$$= \frac{1}{432}(\varphi + sin\varphi cos\varphi) + C$$

برای به‌دست آوردن $cos\varphi$ و $sin\varphi$ داریم:

$$x = 6sec\varphi = \frac{6}{cos\varphi} \Longrightarrow cos\varphi = \frac{6}{x}$$

$$sin\varphi = \sqrt{1-cos^2\varphi} = \pm\sqrt{1-\frac{36}{x^2}} = \frac{\pm\sqrt{x^2-36}}{|x|}$$

$$x > 6 \Longrightarrow 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi = sec^{-1}(\frac{x}{6})$$

$$x < -6 \Longrightarrow \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow \varphi = 2\pi - sec^{-1}(\frac{x}{6})$$

بنابراین برای جواب انتگرال، دو حالت و جود دارد:

$$1)\ \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-36}} = \frac{1}{432}\left(sec^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) + \left(\frac{6}{x}\right)\frac{\sqrt{x^2-36}}{x}\right) + C\ , x > 6$$

$$2)\ \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-36}} = \frac{1}{432}\left(2\pi - sec^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) + \left(\frac{6}{x}\right)\frac{\sqrt{x^2-36}}{x}\right) + C_1\ , x < -6$$

پس از ساده کردن عبارات فوق:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-36}} = \frac{1}{432}sec^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{\sqrt{x^2-36}}{72x^2} + C\ ,$$

$$x > 6 \qquad (I)$$

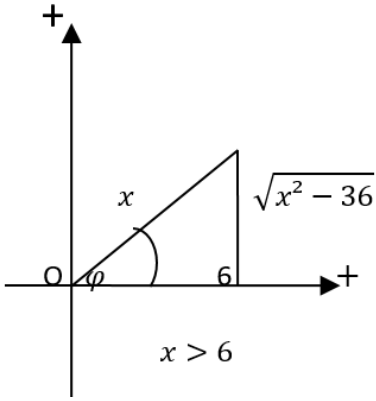
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-36}} = -\frac{1}{432}sec^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{\sqrt{x^2-36}}{72x^2} + C\ ,$$

$$x < -6 \qquad (II)$$

دقت کنید که در رابطه (2) فرض می‌کنیم که:

$$C = C_1 + \frac{\pi}{216}$$

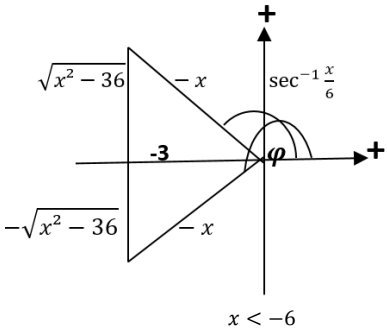
.



(شکل ۱-۳)

همانطور که می‌بینید در شکل (۱-۳) داریم: $x > 6$ و $cos\varphi = \frac{6}{x}$.

همچنین در شکل (۲-۳) برای حالت، $x < -6$ مقادیر sinφ و cosφ بدست آمده است.



شکل (۲-۳)

تا اینجا کلیه روش‌های مفید و حالات ممکن برای انتگرال‌گیری، همراه با مثال‌های مفید توضیح داده شده‌است. در فصل چهارم نیز، برای اطمینان خاطر به برخی از تمرین‌های پایان هر فصل، پاسخ داده شده است.

۳-۷- تمرین‌های فصل سوم

الف- در تمرین‌های زیر برای محاسبه انتگرال نامعین از جانشینی عکس استفاده کنید.

(۱) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

(۲) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2+4x-1}}$

(۳) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$

(۴) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

در تمرین شماره (۳) از جانشینی $\sqrt{x^2+2x-1} = t - x$ استفاده کنید.

در تمرین شماره (۴) از جانشینی $x=t^2$ استفاده کنید.

ب- انتگرال‌های نامعین زیر را به دست آورید. (توابع کسری)

(۱) $\int \frac{x^3+1}{x^2+x-2} dx$

(۲) $\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx$

(۳) $\int \frac{3t+1}{(t^2-4)^2} dt$

(۴) $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2} dx$

(۵) $\int \frac{(x^2+x+1)dx}{(2x+1)(x^2+1)}$

(۶) $\int \frac{16dx}{(4x^2+9)^2}$

ج- انتگرال‌های نامعین زیر را محاسبه کنید. (توابع گویای مثلثاتی)

(۱) $\int \frac{2}{3+4cosx} dx$

(۲) $\int \frac{dx}{sinx-cosx+3}$

(۳) $\int \frac{8dx}{3cos2x+1}$

(۴) $\int \frac{5dx}{sinx-2csecx}$

د- انتگرال‌های نامعین زیر را برحسب توابع معکوس مثلثاتی، بدست آوردید.

(۱) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$

(۲) $\int \frac{xdx}{x^4+16}$

(۳) $\int \frac{4dx}{(x-3)\sqrt{x^2-6x+8}}$

ه- انتگرال‌های نامعین زیر را برحسب توابع معکوس هیپربولیک، بدست آوردید. در تمرین‌های ۴ تا ۷ از روش جانشینی با توابع مثلثاتی استفاده کنید.

(۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

(۲) $\int \frac{dx}{4x-x^2-3}$

(۳) $\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^4+6x^2+5}}$

(۴) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+8}}$

(۵) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}}$

(۶) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\ dx$

(۷) $\int \frac{7dx}{(4x^2-9)^{3/2}}$

فصل چهارم: جواب تمرین‌ها

در این فصل جهت استفاده بیشتر و راحتی خوانندگان کتاب، جواب بعضی از تمرین‌ها داده شده است. البته از جواب تمرین‌های ساده‌تر صرف نظر کرده‌ایم. همچنین برای درک کامل‌تر چند تمرین حل شده هم آورده شده است.

جواب تمرین‌های فصل اول

الف)

(۱) $\frac{10}{7}\sqrt[10]{x^7}+C$

(۲) $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+1}+C$

(۴) $sinx-\frac{1}{3}sin^3x+C$

(۶) $\frac{1}{\sqrt{8}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{8}}+C$

(۷) $\frac{1}{10}ln|\sec(1+5x^2)|+C$

ب)

(۹) $\frac{25}{8}\sqrt[3]{25}-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

(۱۱) $\frac{2}{3}ln\frac{13}{4}$

ج)

(۱۴) $\frac{-3}{1+e^{6x}}\ e^{3x}$

(۱۵) $-e^{x}csece^{x}$

(۱۸) $2x\ sech\ x^{2}$

(۱۹) $\frac{3x^{2}}{\sqrt{x^{3}+1}}e^{\sqrt{x^{3}+1}}-sin2x$

جواب تمرین‌های فصل دوم

الف-

(۲) $\frac{3}{4}x.\sqrt[3]{x}\ lnx-\frac{9}{16}x.\sqrt[3]{x}$

(۳) $\frac{1}{2}tan^{-1}x(x^{2}+1)-\frac{1}{2}x+C$

(۴) $\frac{4^{x}}{ln4}(x-\frac{1}{ln4})$

(۵) $-6x^{2}\sqrt{1-x^{2}}-4(1-x^{2})^{\frac{3}{2}}+C$

ب-

(۸) $\frac{4}{3}$

(۷) $\frac{9}{16}$

جواب تمرین‌های فصل سوم

الف-

(۲) $\begin{cases} -sin^{-1}(\frac{1-2x}{x\sqrt{13}}) + C\ ,\ x > 0 \\ sin^{-1}(\frac{1-2x}{x\sqrt{13}}) + C\ , x < 0 \end{cases}$ 4) $2ln\left|\sqrt{x} - 1\right| + C$

ب-

(۱) $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{1}{3} ln\left|\frac{(x-1)^2}{x+2}\right| + C$

(۳) $\frac{5}{16(t+2)} - \frac{7}{16(t-2)} + \frac{1}{32} ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C$

(۵) $\frac{1}{10} ln|(x^2+1)(2x+1)^3 + \frac{2}{5} tan^{-1} x + C$

ج-

(۳) $\sqrt{2} ln\left|\frac{tanx+\sqrt{2}}{tanx-\sqrt{2}}\right| + C$

(۴) $5\, tan^{-1}(cosx) + C$

د-

(۲) $\frac{1}{8}\ tan^{-1}\frac{x^2}{4}+C$

(۳) $4\,sec^{-1}|x-3|+C$

ه-

(۲) $\begin{cases} tanh^{-1}(x+2)+C\ ,|x+2|<1 \\ coth^{-1}(x+2)+C\ \ ,|x+2|>1 \end{cases}$

(۶) $-\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}-sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+C$

(۷) $-\frac{7}{9}x(4x^2-9)^{-1/2}+C$

چند تمرین حل‌شده

(۱) $\int cos^3 x dx = ?$

حل:

از اتحادهای مثلثاتی استفاده می‌کنیم

$$cos^2 x = 1 - sin^2 x$$

$$\int cos^3 x\, dx = \int cosx\, cos^2 x\, dx$$

$$= \int (cosx(\ 1 - sin^2 x))dx$$

$$= \int (cosx - cosxsin^2 x)dx$$

$$= \int cosx\, dx - \int cosxsin^2 x\, dx$$

$$= sinx + C_1 - \int (cosx)sin^2 x\, dx$$

$$= cosx +\ C_1 - \frac{1}{3}cos^3 x + C_2$$

$$\int cos^3 x\, dx = cosx - \frac{1}{3}cos^3 x + C$$

همانطور که می‌دانید مجموع دو مقدار ثابت C_1 و C_2 مقدار ثابت C است.

(۲) $\int sec^3x\, dx = ?$

حل:

فرض می‌کنیم: $u = secx$ و $dv = sec^2xdx$ بنابراین:

$$v = tanx\,, du = secx\, tanx\, dx$$

و از آنجا داریم:

$$\int sec^3x\, dx = secx\, tanx - \int secx\, tan^2x\, dx$$

$$\int sec^3x\, dx = secx\, tanx - \int secx(\, sec^2x - 1)\, dx$$

$$\int sec^3x\, dx = secx\, tanx - \int sec^3xd + \int secx\, dx$$

پس از ساده کردن:

$$2\int sec^3x\, dx = secx\, tanx + ln|secx + tanx| + 2C$$

$$\int sec^3x\, dx = \frac{1}{2}secx\, tanx + \frac{1}{2}ln|secx + tanx| + C$$

درستی رابطه زیر را تحقیق کنید:

$$\int sec^mx\, dx = \frac{sec^{m-2}xtanx}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int sec^{m-2}x\, dx$$

(اثبات رابطه فوق به عهده دانشجو.)

(۳) $\int \frac{dx}{1-sinx+cosx} =?$

حل:

از تغییر متغیر تانژانت نصف زاویه که در فصل سوم، قسمت (۳-۳) گفته شد و روابط (i) و (ii) و (iii) استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{1 - sinx + cosx} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(1+t^2) - 2t + (1-t^2)}$$

$$= 2\int \frac{dt}{2-2t} = \int \frac{dt}{1-t}$$
$$= -ln|1-t| + C$$

$$= -ln\left|1 - tan\frac{x}{2}\right| + C$$

(۴) $\int \frac{3dx}{-9x^2-6x+6} =?$

حل:

مخرج کسر را به صورت تفاضل مربع دو عبارت می‌نویسیم تا کسر داخل انتگرال را به روابط (۳-۵) فصل سوم نزدیک کنیم:

$$\int \frac{3dx}{-9x^2-6x+6} = \int \frac{3dx}{7-9x^2-6x-1}$$

$$=\int \frac{3dx}{7-(9x^2+6x+1)}$$

$$= \int \frac{3dx}{7-(3x+1)^2} \,, u = 3x+1 \,, a = \sqrt{7} \,, du = 3$$

$$\int \frac{3dx}{-9x^2-6x+6} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{7}} tanh^{-1}(3x+1) + C \,, |3x+1| < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{7}} coth^{-1}(3x+1) + C \,, |3x+1| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{3dx}{-9x^2-6x+6} = \frac{1}{2\sqrt{7}} ln \left| \frac{\sqrt{7}+3x+1}{\sqrt{7}-3x-1} \right| + C$$

مطابق روابط قسمت (۳-۵) فصل سوم. (حالات کلی‌تر در انتگرال‌هایی که با توابع هیپربولیک معکوس مرتبط هستند.)

(۵) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}}$

حل:

جانشینی عکس متغیر:

$$x = \frac{1}{t} \implies dx = -\frac{dt}{t^2}\ , t \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}} = \int \frac{\frac{-dt}{t^2}}{(\frac{1}{t^2})\sqrt{\frac{27}{t^2}+\frac{6}{t}-1}}$$

$$= -\int \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{27+6t-t^2}}dt$$

$$= -\int \frac{|t|dt}{\sqrt{27+6t-t^2}}$$

$$= \begin{cases} -\int \frac{tdt}{\sqrt{27+6t-t^2}} & t > 0 \\ \int \frac{tdt}{\sqrt{27+6t-t^2}} & t < 0 \ * \end{cases}$$

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{27+6t-t^2}} = \frac{-1}{2}\int \frac{(-2t+6)}{\sqrt{27+6t-t^2}}dt + 3\int \frac{dt}{\sqrt{27+6t-t^2}}$$

$$= \frac{-1}{2}.2\sqrt{27+6t-t^2} + 3\int \frac{dt}{\sqrt{27+9-(t^2-6t+9)}}$$

$$= -\sqrt{27+6t-t^2} + 3\int \frac{dt}{36-(t-3)^2}$$

$$= -\sqrt{27+6t-t^2} + 3\,sin^{-1}(\frac{t-3}{6}) + C$$

$$= -\sqrt{27+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}} + 3\,sin^{-1}(\frac{\frac{1}{x}-3}{6}) + C$$

$$= -\frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{\sqrt{x^2}} + 3\,sin^{-1}(\frac{1-3x}{6x}) + C$$

$$= -\frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{|x|} + 3\,sin^{-1}(\frac{1-3x}{6x}) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{|x|} - 3\,sin^{-1}(\frac{1-3x}{6x}) + C\ , x > 0 \\ \frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{|x|} + 3\,sin^{-1}(\frac{1-3x}{6x}) + C\ , x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x} - 3\,sin^{-1}(\frac{1-3x}{6x}) + C\ , x > 0 \\ \frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x} + 3\,sin^{-1}(\frac{1-3x}{6x}) + C\ , x < 0 \end{cases}$$

(۶) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}} = ?$

حل:

نکته: در این حالت اگر انتگرال شامل توان‌های کسری از یک متغیر x باشد، از تغییر متغیری استفاده می‌کنیم که توان آن کوچک‌ترین مخرج مشترک توان‌های کسری آن انتگرال باشد. بنابراین داریم:

$$x = t^6 \implies dx = 6t^5 dt$$

در عبارت‌های بالا، توان ۶ کوچک‌ترین مخرج مشترک توان‌های کسری ۱/۲ و ۱/۳ است.

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{x^{1/2}dx}{1+x^{1/3}} = \int \frac{t^3(6t^5dt)}{1+t^2}$$

$$= 6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt$$

پس از تقسیم صورت بر مخرج کسر داریم:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}} = 6\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1})dt$$

$$= 6(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t + \tan^{-1} t) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\,tan^{-1}(x^{1/6}) + C$$

(۷) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} =?$

در عبارت‌های زیر، توان ۴ کوچکترین مخرج مشترک توان‌های کسری ۱/۲ و ۱/۴ است.

$$x = t^4 \implies dx = 4t^3 dt$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{dx}{2x^{1/2}+x^{1/4}} = \int \frac{4t^3 dt}{2t^2+t}$$

پس از تقسیم صورت بر مخرج خواهیم داشت:

$$= \int \frac{4t^2 dt}{2t+1} = \int (2t - 1 + \frac{1}{2t+1}) dt$$

$$= t^2 - t + C + \frac{1}{2}\int \frac{2}{2t+1} dt$$

$$= t^2 - t + \frac{1}{2} ln|2t+1| + C$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = x^{1/2} - x^{1/4} + \frac{1}{2} ln\left|2\sqrt[4]{x}+1\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + \frac{1}{2} ln\left|2\sqrt[4]{x}+1\right| + C$$

مطلوب است محاسبه انتگرال زیر: (به عهده دانشجو)

$$\int \frac{\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt{x}-1} dx =?$$

با آرزوی موفقیت

منابع و مراجع

- Leithold, L, The Calculus with Analytic Geometry, Fourth Edition, Harper & Row,1981
- جورج توماس - راس فینی (۱۳۷۰)، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (جلد اول)، ترجمه سیامک کاظمی - مهدی بهزاد - علی کافی، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، شابک ۸-۰۵۳۶-۰۱-۹۶۴.
- Georg F. Becker. Hyperbolic functions. Read Books, Page xlviii.
- Stewart, James(2008). Calculus:Early. Transcendentals. Brooks/ Cole. ISBN:0-495-01166-5.