

مدیریت تحصیلات تکمیلی

دانشکده ‍: علوم پایه

گروه: ریاضی

‍‍‍

پایان‌نامه

برای دریافت درجه دکتری در رشته ریاضی محض

گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

**بازیابی فاز توسط قاب‌ها و تصویرها**

استاد راهنما:

**دکتر اصغر رحیمی**

اساتید مشاور:

**دکتر محمدرضا عظیمی**

 دکتر محمدعلی حسنخانی فرد

پژوهشگر:

فاتح اکرمی

شهریور ماه 1401

تعهد نامه‌ی اصالت اثر

اینجانب فاتح اکرمی تعهد می‌کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب بوده و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقرارت تنها ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرکی هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه مراغه می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو

امضاء و تاریخ

چکیده

در این رساله، نتایجی جدید در بازیابی فاز و نرم توسط بردارها و تصاویر در فضای هیلبرت با بعد متناهی و نامتناهی حقیقی ارائه خواهیم‌داد. سپس نشان خواهیم ‌داد که چه وقت ابرفضاها کار بازیابی نرم را انجام می‌دهند.

همچنین، نشان خواهیم ‌داد خانواده‌ی قاب‌های بازیاب نرم $\left\{f\_{i}\right\}\_{i=1}^{m}$ در $R^{ n}$در خانواده‌ی$m\leq 2 n-2$ -عضوی از مجموعه‌ی بردارها در $R^{ n}$ برای هر عدد متناهی n چگال نیست و همچنین خانواده‌های بردارهایی که کار بازیابی نرم را در $l^{2}$ انجام می‌دهند، در خانواده‌های بردارها در $l^{2}$ چگال نیستند. در ادامه نشان خواهیم ‌داد که اگر پایه‌ی ریس کار بازیابی نرم را در $l^{2}$ انجام دهد، آن‌گاه باید یک دنباله‌ی متعامد باشد. مطالبی هم در خصوص بازیابی فاز (نرم) توسط تصاویر ارائه می‌کنیم. همچنین به تعدادی از سوالات حل نشده درباره‌ی بازیابی ضعیف قاب‌ها که مدت‌ها در مقالات مطرح بوده‌اند، پاسخ خواهیم ‌داد:

بردارهای بازیاب ضعیف فاز به شکل $\left\{x\_{i}\right\}\_{i=1}^{2}$ در$R^{2}$ و بردارهای بازیاب ضعیف فاز به شکل $\left\{x\_{i}\right\}\_{i=1}^{4}$ در $R^{3}$ را به طور کامل طبقه‌بندی می‌کنیم.

 نشان می‌دهیم قاب‌های بازیاب ضعیف فاز در $R^{ n}$ کل فضای $R^{ n}$ را تولید می‌کنند.

 مثالی از مجموعه‌هایی از بردارها ارائه می‌کنیم که بازیاب ضعیف فازند ولی ابرفضاهای متعامد آنها بازیاب ضعیف فاز نیستند.

 قاب‌های بازیاب ضعیف فاز را مشخصه‌سازی می‌کنیم و تفاوت بازیاب فاز و بازیاب ضعیف فاز را روشن می‌سازیم.

 مشخص می‌کنیم چه زمانی قاب‌های بازیاب ضعیف فاز، بازیاب نرم هستند. در ادامه، مفهوم بازیابی ضعیف فاز توسط تصاویر را معرفی می‌کنیم و خواص اساسی آن را توسعه می‌دهیم.

 در انتها نتایجی در مورد قاب‌های بازیاب ضعیف فاز در $R^{ n}$ و نیز قاب‌های بازیاب ضعیف فاز شامل بردارهای واحد نشان داده شده ‌است.

برای اینکه نشان دهیم که نتایج ما بهترین نتایج ممکن هستند چندین مثال آورده شده ‌است.

واژه‌های کلیدی:

اسپارک کامل، به‌طور متناهی اسپارک کامل، بازیابی فاز، بازیابی نرم، قاب‌های هم‌جوش، قاب‌های هیلبرت حقیقی

پیش‌گفتار

مفهوم قاب‌ها در فضای هیلبرت تفکیک پذیر ابتدا توسط دافین Duffin و شفرSchaeffer و در زمینه‌ی سری‌های فوریه غیرهارمونیک معرفی ‌شد [28].

قاب‌ها خاصیت آکندگی دارند که کاربرد آنها را در عمل بیشتر از پایه‌ها ممکن می‌سازد. در بسیاری از کاربردهای مهندسی، فاز یک سیگنال در طول جمع آوری و فرایند کم و بیش از بین می‌رود. این امر نیاز به روش‌هایی جهت بازیابی فاز سیگنال‌ها را ایجاب می‌نماید. مهندسان بیش از یک قرن در مورد بازیابی فاز مطالعه داشته‌اند. ولی از منظر ریاضی حدود 15 سال است که بازیابی فاز مورد بررسی و مطالعه‌ی ریاضی‌دانان قرار گرفته است. بازیابی فاز یکی از حوزه‌هایی است که امروزه مورد مطالعه و کاربرد بسیار قرار دارد. از جمله‌ی این کاربردها می‌توان به دانش نور و بینایی، کریستالوگرافی با استفاده از اشعه‌ی ایکس، میکروسکوپی الکترون و نظریه‌ی همدوسی اشاره کرد (برای نمونه مراجع [36-34,32-30]را ببینید).

کاربردهای دیگر این موضوع شامل تصویربرداری نجومی [31] ، برش‌نگاری با استفاده از اشعه‌ی ایکس [26]

تصویربرداری انکساری [8]و تکنولوژی شناخت گفتار [37,7]می‌باشد. در دهه1950 میلادی، این فن‌آوری بازیابی فاز بود که باعث شد واتسن Watson و کریک Crickکشف کنند$DNA$ به شکل مارپیچ جفتی است و برنده جایزه نوبل گردند. برش نگاری با استفاده از اشعه‌ی ایکس، شاید مشهورترین کاربرد بازیابی فاز است. فیزیک‌دانان، کریستال را در معرض اشعه‌ی ایکس قرار می‌دهند تا ساختار مولکولی آنها را تعیین کنند. ابتدا، اشعه‌ی ایکس به‌طور مکرر همانند چرخش کریستال به آن داده می‌شود، وقتی این اشعه به اتم‌های کریستال برخورد می‌کند، در بسیاری از جهت‌ها و الگوها منکسر می‌شود. الگوهای انکسار وابسته به توان دوم قدرمطلق تبدیل فوریه‌ی جسم خواهد بود.

 بازیابی فاز برای قاب‌های فضای هیلبرت اولین بار در مرجع [6] معرفی شد و به سرعت تبدیل به یک موضوع مهم برای تحقیق گردید. هر چند اکثر کارها در زمینه‌ی بازیابی فاز در فضای هیلبرت نامتناهی مختلط صورت گرفته، ولی مقالات بسیار کمی در موضوع بازیابی فاز در فضای هیلبرت حقیقی نوشته‌شده، برای مثال به مرجع [9] رجوع شود. در مرجع [9]

 برخی مفاهیم مانند «اسپارک کامل» و «به‌طور متناهی اسپارک کامل» معرفی و تعمیم داده شده ‌است که با مثال‌هایی آنها را ملموس‌تر خواهیم ‌کرد. بازیابی فاز هم برای بردارها و هم برای زیرفضاها (تصاویر ) در هر فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر تعریف شده‌است.

قاب‌های هم‌جوش یک موضوع در حال توسعه از نظریه‌ی قاب‌ها با کاربردهایی در ارتباطات و فرآیند توزیع است. قاب‌های هم‌جوش توسط کاسازا Casazza و کوتینیاک Kutyniok در [19] معرفی ‌شد و در مقاله‌ی مشترک آنها با لی Li [22]توسعه‌ی بیشتری پیدا کرد.

 تعیین اینکه چه زمانی ‌مجموعه‌ای از زیرفضاها مانند $\left\{w\_{k}\right\}\_{k=1}^{m}$ که بازیاب فاز هستند دارای این خاصیت باشند که مجموعه‌ی متمم زیرفضاها $\{w\_{k}^{⊥} \}\_{k=1}^{m}$ هم بازیاب فاز باشد، منجر به تعریف بازیابی نرم گردید.

 مفهوم بازیابی ضعیف فاز، حالت ضعیف شده از بازیابی فاز است و فقط برای بردارها تعریف شده ‌است ( [12,11]).

 در این رساله، مفهوم بازیابی ضعیف فاز توسط تصاویر را تعریف می‌کنیم و مطالعه‌ی دقیقی از بازیابی فاز توسط بردارها

 و تصاویر را خواهیم ‌داشت. بخش‌های دیگر این رساله به قرار زیرند: ابتدا تعاریف و پیش‌زمینه‌های مورد نیاز را ارائه می‌کنیم. در فصل 1 قاب‌های هم‌جوش بازیاب فاز و نرم بررسی شده ‌است و ابرفضاها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. فصل 2 در خصوص مفاهیم اسپارک کامل، به طور متناهی اسپارک کامل و بازیابی نرم است. مطالبی در مورد بازیابی (ضعیف) فاز و بازیابی نرم توسط تصاویر در فصل 3 ارائه شده ‌است. در این فصل مفهوم بازیابی ضعیف فاز توسط تصاویر را معرفی می‌کنیم. فصل 4 هم در باب بازیابی ضعیف فازها ‌است.

 مقاله‌های زیر از این رساله استخراج شده ‌است:

[1] اکرمی، فاتح. رحیمی، اصغر. دارابی، بیاض. حسنخانی فرد، محمدعلی. قاب‌های بازیاب ضعیف فاز روی

فضای هیلبرت حقیقی $R^{3}$ و $R^{4}$ موجک‌ها و جبر خطی، دانشگاه ولیعصر رفسنجان، در دست چاپ.

 [2] F. Akrami, P. G. Casazza, M. A. Hasankhani Fard, A. Rahimi, A note on

 norm retrievable real Hilbert space frames. 2022, J. Math. Anal. Appl. (517)2, (2023) 126620.

[3] P. G. Casazza, F. Akrami, A. Rahimi, Fundamental results on weak phase

retrieval. 2021, arXiv:2110.06868.

[4] P. G. Casazza, F. Akrami, A. Rahimi, A note on phase (norm) retrievable real Hilbert space fusion frames. Inter. J. Wavelets, Multiresolution and Infor. Proc. 2022, https://doi.org/10.1142/S0219691322500400.

[5] F. Akrami, A. Rahimi, A note on (weak) phase retrievable real Hilbert space frames. The 9th Seminar on Harmonic Analysis and Applications, 27-28 Jan 2022, Amirkabir University of Technology.

[6] A. Rahimi, F. Akrami, Phase (norm) retrieval and weak phase retrieval in real Hilbert space. The 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 24-26 Aug 2022, Baku, Azerbaijan.

[7] A. Rahimi, F. Akrami, A note on Phase (norm) retrievable real Hilbert space frames. The 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 24-26 Aug 2022, Baku, Azerbaijan.

فهرست

چکیده صفحه آ

 پیشگفتار صفحه آ

۱. قاب‌های هم‌جوش و ابرفضاها صفحه ۱

۱.۱ پیش‌نیازها صفحه ۱

2. 1 قاب‌های هم‌جوش بازیاب فاز (نرم) صفحه ۸

۱.۳ ابرفضاها صفحه ۱۸

۲. اسپارک کامل، به‌طور متناهی اسپارک کامل و بازیابی نرم صفحه ۲۳

۲.۱ بازیابی نرم صفحه ۲۳

۳. بازیابی (ضعیف) فاز و بازیابی نرم توسط تصاویر صفحه ۳۷

۳.۱ بازیابی فاز (نرم) توسط تصاویر صفحه ۳۷

۳.۲ بازیابی ضعیف فاز توسط تصاویر صفحه ۴۲

۳.۳ ابرفضاهای متمم متعامد هر قاب بازیاب ضعیف فاز لزوما بازیاب ضعیف فاز نیستند صفحه ۴۶

۴. قاب‌های بازیاب ضعیف فاز صفحه ۴۹

۴.۱ بازیابی ضعیف فاز توسط بردارها صفحه ۴۹

۴.۲ مجموعه‌های بازیاب ضعیف فاز مولد کل فضا صفحه ۵۶

۴.۳ مشخصه‌سازی قاب‌های بازیاب ضعیف فاز $\left\{x\_{i}\right\}\_{i=1}^{2 n-2}$ در $R^{ n}$ صفحه ۵۸

۴.۴ طبقه‌بندی قاب‌های بازیاب ضعیف فاز در $R^{2}$ صفحه ۶۱

۴.۵ قاب‌های بازیاب ضعیف فاز در $R^{3}$ و $R^{4}$ صفحه ۷۱

۴.۶ قاب‌های شامل بردارهای واحد صفحه ۹۱

۴.۷ قاب‌های با درایه‌های 1 و ۱- صفحه ۹۳

 ۴.۸ قاب‌های بازیاب ضعیف فاز در $R^{ n}$ صفحه ۹۶

 مراجع صفحه ۹۷

 واژه نامه فارسی به انگلیسی صفحه ۱۰۲

 واژه نامه انگلیسی به فارسی صفحه ۱۰۵

منابع

 [1]اکرمی، فاتح. رحیمی، اصغر. دارابی، بیاض. حسنخانی فرد، محمدعلی.

 قاب‌های بازیاب ضعیف فاز روی فضای هیلبرت حقیقی $R^{3}$ و $R^{4}$

موجک‌ها و جبر خطی، دانشگاه ولیعصر رفسنجان، در دست چاپ.

[2] F. Aboutorabi Goudarzi, M. S. Asgari, New characterizations

of fusion bases and Riesz fusion bases in Hilbert spaces. Linear. Topolo. Alg., 2015, (4)2, 131-142.

[3]

F. Akrami, P. G. Casazza, M. A. Hasankhani Fard, A. Rahimi. A note

 on norm retrievable real Hilbert space frames. J. Math. Anal. Appl. 2021, (517)2, (2023) 126620.

[4]

R. Balan, P. G. Casazza, D. Edidin, On signal reconstruction without phase. Appl. Comput. Harmonic Anal. 2006, (20)3, 345-356.

[5]

C. Becchetti, L. P. Ricotti, Speech recognition theory and $C^{++}$ implementation. Wiley. 1999,

[6]

M. A. Bogan, et al. Single particle x-ray diffractive imaging. Nano, Lettr, 2008, (8)1, 310-316.

[7]

S. Botelho-Andrade, P. G. Casazza, D. Cheng, J. Haas, T. T. Tran, Phase retrieval in $l^{2}${R}). 2018, arXiv:1804.01139v1.

 [8]

S. Botelho-Andrade, P. G. Casazza, D. Cheng, J. Haas, T. T. Tran, J. C. Tremain, Z. Xu, Phase retrieval by hyperplanes. Contemp. Math., Amer. Math. Soc. Frames and harmonic analysis, 21�31, 2018, 706, Providence, RI.

[9]

S. Botelho-Andrade, P. G. Casazza, D. Ghoreishi, S. Jose, J. C. Tremain, Weak phase retrieval and phaseless reconstruction. 2016, arXiv:1612.08018.

[10]

S. Botelho-Andrade, P. G. Casazza, H. V. Nguyen, J. C. Tremain, Phase retrieval versus phaseless reconstruction. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, (436)1, 131-137.

[11]

J. Cahill, P.G. Casazza, I. Daubechies, Phase retrieval in infinite dimensional Hilbert spaces. Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B, 2016, 3, 63-76.

[12]

J. Cahill, P.G. Casazza, J. Jasper, L. M. Woodland, Phase retrieval and norm retrieval. 2014, arXiv:1409.8266.

[13]

J. Cahill, P.G. Casazza, J. Jasper, L. M. Woodland, Phase retrieval. 2015, arXiv:1510.07713.

[14]

J. Cahill, P.G. Casazza, J. Peterson, L. M. Woodland, Phase retrivial by projections.

Houston J. Math., 2016, (42)2, 537-558.

[15]

P.G. Casazza, The art of frame theory. Taiwanese J. Math, 2000, (4)2, 129-201.

[16]

P. G. Casazza, F. Akrami, A. Rahimi, Fundamental results on weak phase retrieval. 2021, arXiv:2110.06868.

[17]

P. G. Casazza, F. Akrami, A. Rahimi, A note on phase (norm) retrievable real Hilbert space fusion frames. Inter. J. Wavelets, Multiresolution and Infor. Proc., 2021, https://doi.org/10.1142/S0219691322500400.

[18]

P. G. Casazza, D. Cheng, Associating vectors in $C^{n}$ with rank 2 projections in $R^{ 2 n}$: with applications. 2017, arXiv:1703.02657.

[19]

P. G. Casazza, D. Ghoreishi, S. Jose, J. C. Tremain, Norm retrieval and phase Retrieval by projections. Axioms, 2017, 6, 1-15.

[20]

P. G. Casazza, D. Ghoreishi, Phase retrivial by projections in $\mathbb{R}^n$ requires $2n-2$ projections. 2021, arXiv:2012.10738.

[21]

P. G. Casazza, G. Kutyniok, Frames and subspaces. In Wavelets, Frames, and Operator Theory.

Contemp. Math., Amer. Math. Soc. 2004, 345, 87-113.

[22]

P. G. Casazza, G. Kutyniok, S. Li, Fusion frames and distributed processing. Appl. Comput. Harmon. Anal, 2008, 25, 114-132.

[23]

P. G. Casazza, J. C. Tremain, Phase retrivial and norm retrieval by vectors and projections. 2018, preprint.

[24]

P. G. Casazza, S. Xu, Controled scaling in Hilbert space frames for $R^{ 2}$. 2020, arXiv:2002.06396v1.

[25]

 O. Christensen, An introduction to frames and Riesz bases, Boston: Birkhauser. 2016.

[26]

M. Dierolf, et al. Ptychographic x-ray computed tomography at the nanoscale. Nature, 2010, 467, 436-440.

[27]

J. Drenth, Principles of protein x-ray crystallography, Springer. 2010.

[28]

R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. 1952, 72, 341-366.

[29]

D. Edidin, Projections and phase retrieval. Appl. Comput. Harmon. Anal, 2017, (42)2, 350-359.

[30]

J. R. Fienup, Reconstruction of an object from the modulus of its fourier transform. Optics Letters, 1978, 3, 27-29.

[31]

J. R. Fienup, Phase retrieval algorithms, A comparison. Applied Optics, 1982, (21)15, 2758-2768.

[32]

R. W. Harrison, Phase problem in crystallography J. Opt. Soc. Amer. A, 1993, 10, 1045-1055.

[33]

M. A. Hasankhani Fard, Norm retrievable frames in $R^{ n}$. Elec. J. Lin. Alg. 2016, 31, 425-432.

[34]

H. Hauptman, The direct method of x-ray crystallography. American Association for the Advancement of Science, 1986, (233)4760, 178-183.

[35]

G. Liu, Fourier phase retrieval algorithm with phase constraints, Signal Processing, 1990, (21)4, 339-347.

[36]

R. P. Millane, Phase retrieval in crystallography and optics, J. Opt. Soc. Amer. A, 1990, 7, 394-411.

[37]

J. G. Proakis, et al. Algorithms for statistical signal processing, Pentice Hall, 2002.