10 – 7. اگر پنج ضلعی منتظم ABCDE در یک دایره محاط باشد و نقطه P بر روی  باشد، رابطه

PA + PD = PB + PC + PE را اثبات کنید.

در چهار ضلعی ABCDE، رابطه (1) یعنی (PA)(BC) = (BA)(PC) + (PB)(AC) با کمک قضیه بطلمیوس به دست می‌آید. (به شکل S7-10 رجوع کنید).

در چهار ضلعی BPCD، رابطه (2) یعنی (PD)(BC) = (VD)(PB) + (PC)(BD) به دست می‌آید. از آن جا که BA=CD و AC=BD است، با افزودن (1) و (2)، رابطه زیر به دست می‌آید

(3) BC(PA + PD) = BA(PB + PC) + AC(PB + PC).

البته، از آن جا که ΔBEC متساوی‌الساقین است، رابطه زیر بر مبنای مسئله 7 – 7 به دست می‌آید



با جایگذاری مقادیر رابطه (4) در رابطه (3) می‌توان نوشت:



11 - 7. اگر پنج ضلعی منتظم ABCDEF در یک دایره محاط باشد و نقطه P بر روی  باشد، رابطه

PE + PF = PA + PB + PC + PD را اثبات کنید.

خطوط ترسیم شده میان نقاط A، E و C باعث ایجاد متساوی‌الاضلاع ΔAEC می‌شوند (شکل S7-11). رابطه زیر بر مبنای مسئله 8 – 7 به دست می‌آید

PE = PA + PC. (1)

به طور مشابه، در متساوی‌الاضلاع ΔBFD، این رابطه به دست می‌آید

(2) PF = PB + PD

با افزودن رابطه (1) و رابطه (2)، می‌توان نوشت:

PE + PF = PA + PB + PC + PD

12 – 7. متساوی‌الاضلاع ΔADC در بیرون از ضلع  دایره ΔABC ترسیم شده است. نقطه P بر روی  است.  را به گونه‌ای بیابید که BD = PA + PB+ PC باشد.

نقطة P باید تلاقی  با دایره محیطی ΔADC باشد. بنابراین  است. (به شکل S7-12 رجوع کنید).

از آن جا که APCD یک چهارضلعی چرخشی است، با استفاده از قضیه بطلمیوس، رابطه ذیل به دست می‌آید

(1) (PD)(AC) = (PA)(CD) + (PC)(AD)

از آن جا که ΔADC متساوی‌الاضلاع است، می‌توان از رابطه (1) نوشت

(2) PD = PA + PC

البته خواهیم داشت

(3) BD = PB + PD

بنابراین با جایگذاری مقدار (2) در (3) می‌توان نوشت

BD = PA + PB = PC

13 – 7. خط ترسیم شده از رأس A متساوی‌الاضلاع ΔABC با  در نقطه D و دایره محیطی در P تلاقی پیدا می‌کند.  را اثبات کنید.

همان گونه که در شکل S7-13نشان داده شده،  است. از آن جا که ΔABC متساوی‌الاضلاع است،  و   خواهند بود. بنابراین،  است.

لذا،  و  هستند.

یا

(1) (PA)(PD) = (PB)(PC)

اکنون،

(2) PA = PB + PC است (به راه‌حل 8 – 7 رجوع کنید).

(3) (PB)(PC) = PD(PB + PC) = (PD)(PB) + (PD)(PC)

اکنون، از تقسیم هر عبارت رابطه (3) بر (PB)(PD)(PC)، این رابطه به دست می‌آید



**چالش 1.** اگر BP = 5 و PC = 20 باشد، AD را پیدا کنید.

پاسخ: 21

**چالش 2.** اگر  باشد، شعاع دایره را در چالش 1 پیدا کنید.

پاسخ: 

14 – 7. نسبت را بر اساس اضلاع یک چهار ضلعی چرخشی بیان کنید.

در دایره محیطی چهار ضلعی ABCD، نقاط P و Q را به گونه‌ای انتخاب نمایید که همانند شکل S7-14، PA = DC و QD = AB باشد.

با استفاده از قضیه بطلمیوس در خصوص چهار ضلعی ABCP می‌توان نوشت:

(1) (AC)(PB = (AB)(PC) + (BC)(PA)

به طور مشابه، با استفاده از قضیه بطلمیوس در خصوص چهار ضلعی BCDQ می‌توان نوشت:

(2) (BD)(QC) = (DC)(QB) + (BC)(QD)



در نهایت، با تقسیم (1) بر (2) و جایگذاری مقادیر تمامی عبارات مندرج در Q و P، این رابطه به دست می‌آید



15 – 7. نقطه P در داخل متوازی‌الاضلاع ABCD انتخاب شده به گونه‌ای که  مکمل  است.

اثبات کنید (AB)(AD) = (BP)(VP) + (AP)(CP) است (شکل S7-15).

در ضلع  متوازی‌الاضلاع ABCD،  را ترسیم کنید به گونه‌ای که رابطه زیر به دست آید

(1) DP = AP’ و CP = BP’

از آن جا که  مکمل  و   است،  مکمل  خواهد بود. بنابراین، چهار ضلعی BP’A[ چرخشی است.

اکنون با استفاده از قضیه بطلمیوس برای چهار ضلعی BP’AP می‌توان نوشت

(AB)(P’P) = (BP)(AP’) + (AP)(BP’)

از رابطه (1) می‌توان نوشت

(2) (AB)(P’P) = (BP)(AP’) + (AP)(BP’)



بنابراین، PDAP’ یک متوازی‌الاضلاع (22#) و P’P = AD (#21b) است.

لذا، از رابطه (2) می‌توان نوشت

(AB)(AD) = (BP)(VP) + (AP)(CP)

16 – 7. یک مثلث محاط در دایره‌ای به شعاع 5، دارای دو ضلع به اندازه‌های 5 و 6 است. اندازه ضلع سوم مثلث را بیابید.

روش 1: در S7-16a، متوجه خواهید شد که دو امکان برای در نظر گرفتن این مسئله وجود دارند. هم ΔABC و هم ΔABC’ محاط در مثلث O هستند که مقادیر اضلاع آن عبارتند از AB = 5، و AC = AC’ = 6. اکنون باید اندازه‌های BC و BC’ را پیدا کرد.

قطر  را ترسیم کنید که اندازه آن 10 است و  ،  و  را نیز رسم کنید.  خواهد بود.

موردی را در نظر بگیرید که در آن  در ΔABD دقیق است.

در راست ΔACD، DC = 8 است و در راست ΔABD،  است.

با استفاده از قضیه بطلمیوس در قبال چهار ضلعی ABCD، می‌توان نوشت:



اکنون موردی را در نظر بگیرید که در آن منفرجه است درست مانند ΔABC’. در راست ΔAC’D، DC’ = 8 است.

با استفاده از قضیه بطلمیوس در قبال چهار ضلعی ABDC’، می‌توان نوشت:



روش 2: در شکل‌های S7-16b و S7-16c، شعاع‌های  و  را رسم کنید. هم‌چنین، خطی از نقطه A قائم بر  در نقطه D رسم کنید.



**چالش.** نتیجه این مسئله را به سایر مثلث‌ها تعمیم دهید.

پاسخ:  که در آن R شعاع دایره محیطی بوده و اضلاع b و c مشخص هستند.