بسمه تعالی

مجموع توانهای درجات رئوس

استاد راهنما:

دکتر مجید میرزا وزیری

ارائه دهنده:
مصطفی محققی نژاد

مجموع توان n ام درجات $D^{\{n\}}(G)$: بازای گراف دلخواه G با درجات رئوس $d(v_i)$ مجموع توان n ام بصورت زیر تعریف کنید:

$$D^{\{n\}} = \sum_{v \in V(G)} deg^n(v)$$

پس:

$$D^{\{0\}} = \nu$$

$$D^{\{1\}} = 2\varepsilon$$

و رابطه زیر که قبلا در سمینار درسی با استفاده از تعداد مجموعه های مستقل از اندازه ۳ یا $\Gamma_3(G)$ ارائه شد:

$$\boldsymbol{D}^{\{2\}} = 2\left(\boldsymbol{K}_3^{\boldsymbol{G}} + \Gamma_3(G) - \binom{\boldsymbol{\nu}}{3} + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\nu} - 1)\right)$$

A_i: فرض کنید A_i تعداد رئوسی از گراف G باشد که درجه i دارند

همچنین فرض کنیدگراف G دارای تنوع
درجات بصورت $t_1, t_2, \ldots, t_\theta$ است.

پس رئوس هر گراف را می توان بصورت زیر افراز کرد:

$$A_{t_1}, A_{t_2}, \ldots, A_{t_\theta}$$

واضح است که ارتباط بین افرازهای اخیر و $\boldsymbol{D^{\{n\}}}$ چگونه است:

$$D^{\{n\}} = \sum_{v \in V(G)} deg^n(v) = \sum_{i=1}^{\theta} t_i^n A_{t_i}$$

اگر $\boldsymbol{\theta = 1}$ یعنی گراف $\boldsymbol{r}$-منتظم باشد داریم:

$$\boldsymbol{D^{\{n\}} = \sum_{i=1}^{1} t_i^n A_{t_i} = r^n v} \qquad \mathrm{n} \geq 0$$

واضح است که ارتباط بین افرازهای اخیر و $\boldsymbol{D^{\{n\}}}$ چگونه است:

$$D^{\{n\}} = \sum_{v \in V(G)} deg^n(v) = \sum_{i=1}^{\theta} t_i^n A_{t_i}$$

اگر $\boldsymbol{\theta = 2}$ یعنی گراف دارای ۲ نوع درجه $\boldsymbol{\delta,\Delta}$ باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A_\delta} + \boldsymbol{A_\Delta} = \nu \\ \delta . \boldsymbol{A_\delta} + \Delta . \boldsymbol{A_\Delta} = 2\varepsilon \end{cases}$$

که می توان از این دستگاه ۲ معادله و ۲ مجهول A_Δ, A_δ را بدست آورد و مابقی $D^{\{n\}}$ ها را از رابطه زیر حساب کرد:

$$\boldsymbol{D^{\{n\}} = \delta^n . A_\delta + \Delta^n . A_\Delta} \qquad \boldsymbol{n} \geq 2$$

در مسئله قبل با داشتن $D^{\{0\}} = \boldsymbol{\nu}, D^{\{1\}} = 2\boldsymbol{\varepsilon}$ توانستیم برای هر $\boldsymbol{n} \geq 2$ مقدار $D^{\{n\}}$ را بدست آوریم.

حال ادعا می کنیم اگر در گرافی که تنوع $\boldsymbol{\theta}$ از درجات رئوس را داشته باشد، با داشتن $D^{\{0\}}, D^{\{1\}}, \ldots, D^{\{\theta-1\}}$ می توان $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{\theta}$ $D^{\{n\}}$ را حساب کرد.

به این منظور دستگاه دوم را بصورت زیر بازنویسی کنید:

$$\begin{cases} A_\delta + A_\Delta = \nu \\ \delta . A_\delta + \Delta . A_\Delta = 2\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_\delta \\ A_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{\{0\}} \\ D^{\{1\}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_\delta \\ A_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{\{0\}} \\ D^{\{1\}} \end{bmatrix}$$

برای حل دستگاه داریم:

$$Det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \Delta \end{bmatrix}\right) = \Delta - \delta \neq 0$$

که نشان میدهد حتما معکوس پذیر است.

که برای حل آن طرفین را در معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \Delta \end{bmatrix}$ ضرب می کنیم

$$\begin{bmatrix} A_\delta \\ A_\Delta \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta - \delta} \begin{bmatrix} \Delta & -1 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^{\{0\}} \\ D^{\{1\}} \end{bmatrix}$$

و با محاسبه A_δ, A_Δ ، از رابطه زیر $D^{\{n\}}$ بدست می آید:

$$D^{\{n\}} = \begin{bmatrix} \delta^n & \Delta^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_\delta \\ A_\Delta \end{bmatrix} \qquad n \geq 2$$

بنارابن بطور خلاصه می توان گفت: اگر گراف دارای ۲ نوع درجه δ,Δ باشد، آنگاه:

$$\begin{bmatrix} A_\delta \\ A_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \Delta \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} D^{\{0\}} \\ D^{\{1\}} \end{bmatrix}$$

$$D^{\{n\}} = [\delta^n \quad \Delta^n] . \begin{bmatrix} A_\delta \\ A_\Delta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D^{\{n\}} = [\delta^n \quad \Delta^n] . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \Delta \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} D^{\{0\}} \\ D^{\{1\}} \end{bmatrix}$$

اکنون فرض کنیم گراف دارای‌تنوع θ از درجات رئوس باشد،
و $D^{\{0\}}, D^{\{1\}}, \dots, D^{\{\theta-1\}}$ موجود باشند. حال با تشکیل
یک دستگاه می توان ابتدا $A_{t_1}, A_{t_2}, \dots, A_{t_\theta}$ و سپس بقیه
$D^{\{n\}}$ را بدست می آوریم:

گراف دارای‌تنوع θ از درجات رئوس است:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_\theta \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_\theta^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{\theta-1} & t_2^{\theta-1} & \dots & t_\theta^{\theta-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{t_1} \\ A_{t_2} \\ \vdots \\ A_{t_\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{\{0\}} \\ D^{\{1\}} \\ \vdots \\ D^{\{\theta-1\}} \end{bmatrix} \\ \\ D^{\{n\}} = [t_1^n \quad \mathrm{t}_2^{\mathrm{n}} \quad \dots \quad \mathrm{t}_\theta^n \,] . \begin{bmatrix} A_{t_1} \\ A_{t_2} \\ \vdots \\ A_{t_\theta} \end{bmatrix}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow D^{\{n\}} = [t_1^n \quad \mathrm{t}_2^{\mathrm{n}} \quad \dots \quad \mathrm{t}_\theta^n \,] . \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_\theta \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_\theta^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{\theta-1} & t_2^{\theta-1} & \dots & t_\theta^{\theta-1} \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} D^{\{0\}} \\ D^{\{1\}} \\ \vdots \\ D^{\{\theta-1\}} \end{bmatrix}$$

قرار دهید:

ماتریس واندرموند

$$V=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_\theta \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_\theta^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{\theta-1} & t_2^{\theta-1} & \dots & t_\theta^{\theta-1} \end{bmatrix}$$

پس:

$$D^{\{n\}}=[t_1^n \quad t_2^n \quad \dots \quad t_\theta^n].V^{-1}.\begin{bmatrix} D^{\{0\}} \\ D^{\{1\}} \\ \vdots \\ D^{\{\theta-1\}} \end{bmatrix}$$

Alexandre-Théophile Vandermonde

(28 February 1735 – 1 January 1796) موسیقی دان و
ریاضی دان فرانسوی ماتریس V را هنگام بدست آوردن چندجمله ای
ها با ضرایب مجهول، تعریف کرد.(چند جمله ای درونیاب لاگرانژ)

به همین علت آن را ماتریس واندرموند می گوییم.

می توان نشان داد که دترمینان ماتریس واندرموند عبارتست از:

$$\boldsymbol{Det(V) = \prod(t_i - t_j)}$$

و از آنجایی که t_iها درجات مختلف گراف هستند پس $Det(V) \neq 0$ و دارای معکوس است.

کارهای زیادی برای بدست آوردن معکوس ماتریس واندرموند انجام شده است.

بهترین آنها نوشتن ماتریس معکوس بصورت حاصلضرب دو ماتریس، یکی پایین مثلثی و دیگری بالا مثلثی است:

$$V_{2\times 2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{B_1} & \dfrac{1}{B_2} \end{pmatrix}, \qquad B_2 = -B_1 = x_2 - x_1,$$

$$V_{3\times 3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & x_1 x_2 \\ 0 & 1 & -(x_1 + x_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{x_1 - x_2} & \dfrac{1}{x_2 - x_1} & 0 \\ \dfrac{1}{B_1} & \dfrac{1}{B_2} & \dfrac{1}{B_3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} B_1 &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3), \\ B_2 &= (x_2 - x_1)(x_2 - x_3), \\ B_3 &= (x_3 - x_2)(x_3 - x_1), \end{aligned}$$

$$V_{4\times4}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x_1 & x_1x_2 & -x_1x_2x_3\\ 0 & 1 & -(x_1+x_2) & x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\\ 0 & 0 & 1 & -(x_1+x_2+x_3)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{x_1-x_2} & \dfrac{1}{x_2-x_1} & 0 & 0\\ \dfrac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} & \dfrac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} & \dfrac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} & 0\\ \dfrac{1}{B_1} & \dfrac{1}{B_2} & \dfrac{1}{B_3} & \dfrac{1}{B_4}\end{pmatrix}.$$

$$B_1=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4),\quad B_2=(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4),$$
$$B_3=(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4),\quad B_4=(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3),$$