

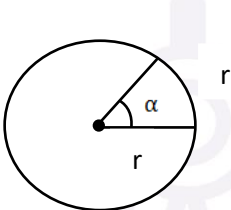
## موضوع: مثلثات

### مثلثات

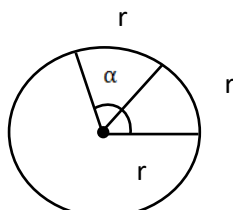
واحدهای اندازه‌گیری زاویه و روابط بین آن‌ها:

1- درجه: زاویه مرکزی مقابل کمانی از دایره که  $\frac{1}{360}$  محیط است.

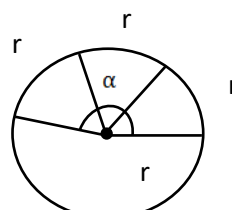
2- رادیان: زاویه مرکزی که طول کمان مقابل آن برابر شعاع دایره باشد زاویه ی 1 رادیان نامیده می‌شود معادل  $57/3^\circ$  درجه.



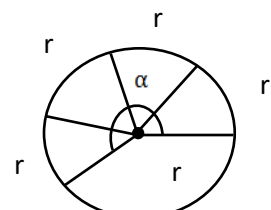
$\alpha = 1 \text{ rad}$



$\alpha = 2 \text{ rad}$



$\alpha = 3 \text{ rad}$



$\alpha = 4 \text{ rad}$

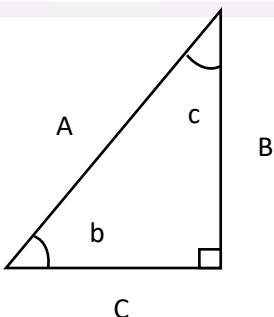
نحوه به دست آوردن درجه با رادیان:

$$\frac{\text{درجه}}{180} = \frac{\text{رادیان}}{\pi} \rightarrow \frac{\pi D}{180} = R$$

$$57/3 \times 2 = 114.6^\circ$$

مثال 1:  $67/5$  درجه چند رادیان است.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث:



$$\sin b = \frac{B}{A}, \quad \cos b = \frac{C}{A}$$

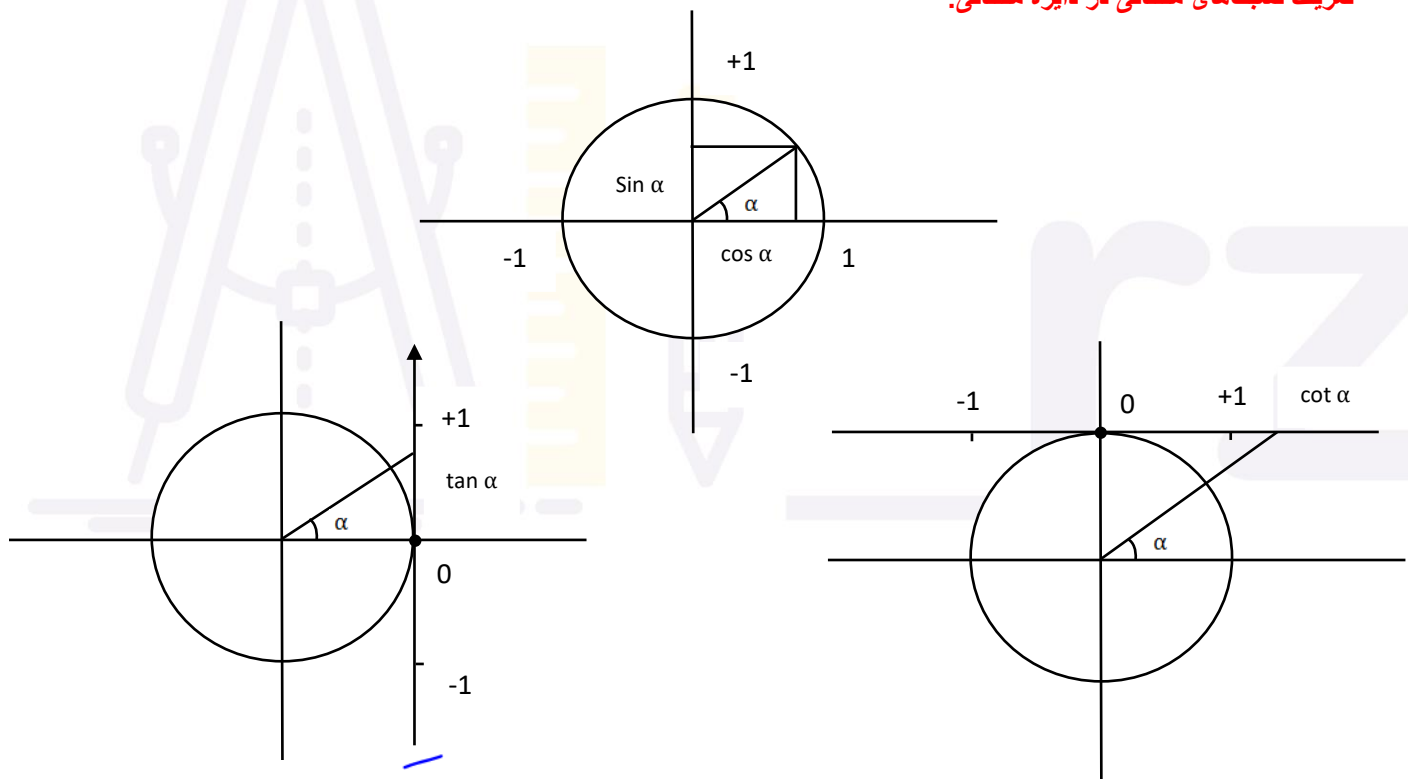
$$\tan b = \frac{B}{C}, \quad \cot b = \frac{C}{B}$$

## موضوع: مثلثات

نسبت‌های مثلثاتی

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	
	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	
Sinx	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	sin
Cosx	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	cos
Tanx	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ن	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	tan
Cotx	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	ن	cot

تعریف نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی:



tan = تعریف نشده

tan = تعریف نشده

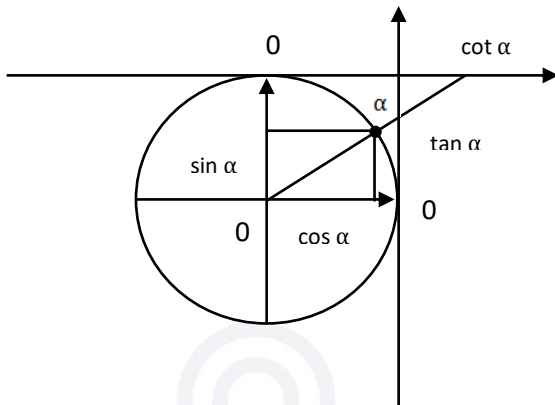
cot = تعریف نشده

cot = تعریف نشده

## موضوع: مثلثات

علامت و وضعیت یکنوایی نسبت های مثلثاتی در ربع های مختلف:

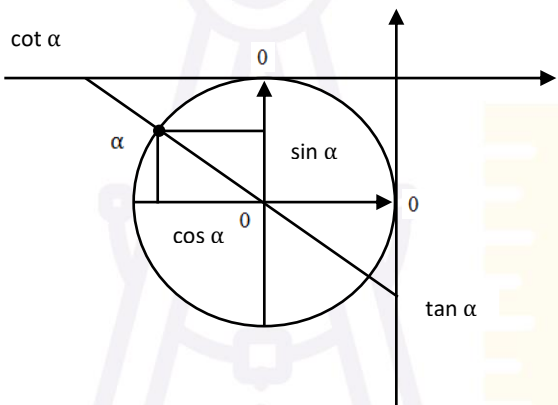
### ناحیه ی اول



$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{0}$$

وضعیت یکنوایی	علامت	
صعودی	+	$\sin \alpha$
نزولی	+	$\cos \alpha$
صعودی	+	$\tan \alpha$
نزولی	+	$\cot \alpha$

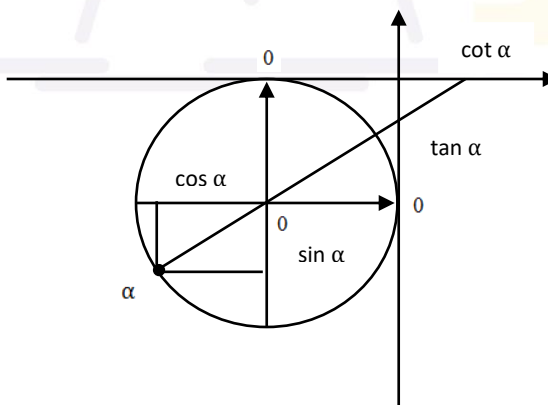
### ناحیه ی دوم



$$\frac{90^\circ}{180^\circ} \quad \frac{1}{-1}$$

وضعیت یکنوایی	علامت	
نزولی	+	$\sin \alpha$
نزولی	-	$\cos \alpha$
صعودی	-	$\tan \alpha$
نزولی	-	$\cot \alpha$

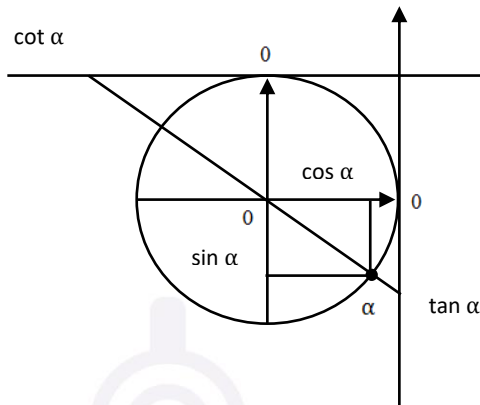
### ناحیه ی سوم



$$\frac{180^\circ}{270^\circ} \quad \frac{-1}{-1}$$

وضعیت یکنوایی	علامت	
نزولی	-	$\sin \alpha$
صعودی	-	$\cos \alpha$
صعودی	+	$\tan \alpha$
نزولی	+	$\cot \alpha$

## موضوع: مثلثات



ناحیه ی چهارم  
۲۷۰  
۰  
۱  
۰

علامت	وضعیت یکنوایی
$\sin \alpha$	-
$\cos \alpha$	+
$\tan \alpha$	-
$\cot \alpha$	-

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

نسبت های مثلثاتی:  $\sin \alpha = \cos \alpha$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\cos(\alpha) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = +\sin(\alpha) \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha) \\ \cos(2\pi + \alpha) = \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha) \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \tan(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \\ \cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \\ \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(2\pi + \alpha) = \tan(\alpha) \\ \cot(2\pi + \alpha) = \cot(\alpha) \end{cases}$$

## موضوع: مثلثات

1- مثال‌های زیر را حل کنید.

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(330^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\left(\frac{71\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{14\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

نکات بسیار مهم:

در اعداد کسری که برای رادیان استفاده می‌شود:

\* اگر عدد صورت کسر یکی کمتر از مخرج باشد ← در ناحیه **دو** قرار دارد.

$$\frac{1}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3}{4}$$

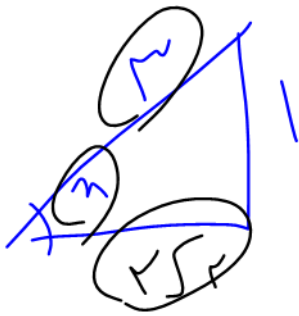
\* اگر عدد صورت کسر یکی بیشتر از مخرج باشد ← در ناحیه **سه** قرار دارد.

$$\frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

\* اگر عدد صورت کسر دو برابر و یکی کمتر از مخرج باشد ← در ناحیه **چهار** قرار دارد.

$$\frac{11\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}$$

## موضوع: مثلثات



$$\sin x = -\frac{1}{3} \quad \text{در ربع سوم}$$

$$\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan x = +\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cot x = +2\sqrt{2}$$

3- مثال‌های زیر را حل کنید.

$$\cot = -\frac{4}{3} \quad \cos(x) < 0$$

$$\sin x = +\frac{4}{5}$$

$$\cos x = -\frac{3}{5}$$

$$\tan x = -\frac{4}{3}$$

تست‌های مبانی مثلثات

1-  $A = \sin 12 + \cos 12$  در کدام محدوده قرار دارد.

$$A < -1 \quad (4)$$

$$-1 < A < 0 \quad (3)$$

$$0 < A < 1 \quad (2)$$

$$A > 1 \quad (1)$$

$$0/1 = 1/1$$

2- در بازه  $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6}$  کدام نامساوی درست است.

$$\sin^3 x < \cos^3 x \quad (2)$$

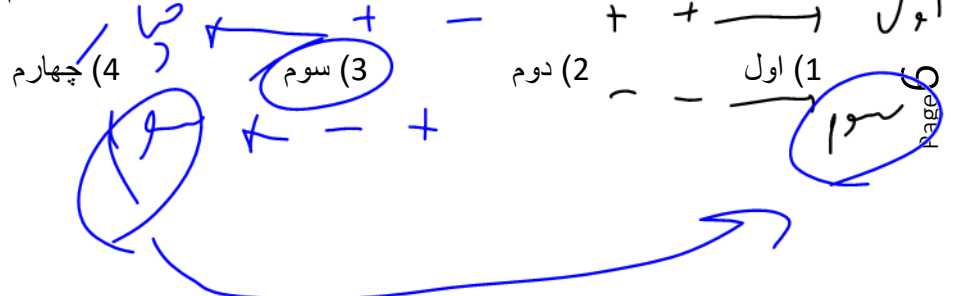
$$\cos^3 x > \cos x \quad (4)$$

$$\sin^3 x > \sin x \quad (1)$$

$$\cos x > \cos^2 x \quad (3)$$

$$\sin + \cos$$

3-  $\sin \alpha \cos \alpha > 0$  و  $\cos \alpha \cot \alpha < 0$  آن‌گاه انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه دایره مثلثاتی است.



موضوع: مثلثات

$\sin x + \tan x < 0$  و  $\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0$  انتهای کمان؟  
 $(0, \frac{\pi}{2})$  و  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

$126^\circ = \sin 126^\circ = \frac{\sqrt{5}}{2}$  (1) اول  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  - (2) دوم  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  - (3) سوم  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  - (4) چهارم  $\frac{\sqrt{5}}{2}$   
 $\tan 126^\circ = \frac{1}{\cos x} + \tan x$  حاصل  $\sin x = \frac{8}{17}$  و  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  -5

$\frac{5}{3}$  (4)  $\frac{3}{5}$  (3)  $-\frac{3}{5}$  (2)  $-\frac{5}{3}$  (1)  
 $-\frac{17}{10} - \frac{1}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}$   
 $\sin(-\frac{41\pi}{3}) + \cos(\frac{107\pi}{6}) - 6$  چند برابر  $\sqrt{3}$  است.

$1$  (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $0$  (3)  $-1$  (4)  
 $\frac{\sin 225^\circ \times \cos 30^\circ + \cos 135^\circ \times \sin 60^\circ}{\tan 210^\circ \times \cot 60^\circ - \cot 240^\circ \times \tan 330^\circ}$  حاصل -7  
 برابر کدام است.

$-\frac{3\sqrt{6}}{4}$  (1)  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$  (2)  $0$  (3) تعریف نشده (4)

$-\sin(10^\circ)$

حاصل  $\frac{3 \sin(-\frac{13\pi}{2} + \alpha) + 2 \cos(17\pi - \alpha)}{3 \tan(\frac{15\pi}{2} - \alpha) - 2 \cot(\alpha - 15\pi)}$  برابر؟ -8

$5 \cos \alpha$  (4)  $5 \sin \alpha$  (3)  $-5 \cos \alpha$  (2)  $-5 \sin \alpha$  (1)

$+1 \cot(10\pi - \alpha)$



## موضوع: مثلثات

$$\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

9- به ازای  $x = \frac{\pi}{12}$  کدام است؟  $\frac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 5x}$

$$\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{\sin}{\cos} = \frac{-1 - \sqrt{2} + 1}{-1 - \sqrt{2} + 1} = \frac{-\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

10- اگر  $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$  حاصل  $\frac{\cos 202/5 + \cos 112/5}{\cos 337/5 - \cos 67/5}$  برابر کدام است.

$$\frac{\sin}{\cos} = \frac{\sqrt{2} - 1}{-\sqrt{2} - 1} \quad (4) \quad \frac{-\sqrt{2} + 1}{-\sqrt{2} + 1} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \quad (1)$$

11-  $\cos x = \frac{1-m}{6}$  و  $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$  باشد برای  $m$  چند مقدار صحیح وجود دارد.

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1-m}{6} \leq \frac{1}{2}$$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

12- اگر جواب نامعادله  $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 0$  روی دایره مثلثاتی نشان دهیم چه کسری از دایره را پوشش می دهد.

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$\frac{1}{12} \quad (1)$$



## موضوع: مثلثات

### اتحاد های مثلثاتی

روش های خودمونی:

$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} = \cos x$   
 $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\frac{1}{\sin x}} = \csc x$

پارت 1: ضابطه X دادن ← ضابطه x خواستن ←

تست 1: حاصل عبارت  $\frac{\sin x \cos 3x}{\sin 2x} - \cos 2x$  کدام است؟

$-\frac{1}{2}$  (4)

$\sin x$  (3)

$\cos x$  (2)

$+\frac{1}{2}$  (1)

تست 2: اگر انتهای کمان x در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد حاصل عبارت  $\sqrt{1 + \cot^2 x} - \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$  کدام است؟

$\cot x$  (4)

$\tan x$  (3)

$-\cot x$  (2)

$-\tan x$  (1)

$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

تست 3: اگر  $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  حاصل  $\frac{\cos 3x + \sin 2x \sin x}{\sin 3x - \sin 2x \cos x}$  کدام است؟

$\cot 3x$  (4)

$\cot x$  (3)

$\tan 3x$  (2)

$\tan x$  (1)

4- اگر  $A - B = \frac{\pi}{6}$  باشد حاصل  $\frac{2 \sin(A+B) - 1}{4 \cos A \cos B}$  کدام است.

1 (4)

$\frac{1}{2}$  (3)

$\tan A$  (2)

$\tan B$  (1)

5- به ازای کدام A تساوی  $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \tan^4 x - 1$  یک اتحاد است.

-2 (4)

-1 (3)

1 (2)

2 (1)

$\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \tan^4 x - 1$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} - 1$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^4 x}$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^4 x}$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)}{\cos^4 x}$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x}{\cos^4 x}$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 0$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A+1}{\cos^2 x} = 0$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A+1}{\cos^2 x} = 0$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A+1}{\cos^2 x} = 0$   
 $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A+1}{\cos^2 x} = 0$

## موضوع: مثلثات

$$a = 1$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

6- اگر بدانیم  $\tan a = \frac{a+3}{4}$  و  $\cot b = \frac{2b}{a-2}$  آنگاه کدام رابطه بین  $a$  و  $b$  برقرار است.

$$a = \frac{2-b}{3b+4} \quad (4)$$

$$a = \frac{b-2}{3b+4} \quad (3)$$

$$a = \frac{3b+4}{2-b} \quad (2)$$

$$a = \frac{3b+4}{b-2} \quad (1)$$

## پارت دو

• ضابطه میدن ولی زاویه دار! عین آدم حل می‌کنیم  
عین آدم حل نمی‌کنیم

1- حاصل  $-\cos^2(3^\circ) - \sin^2(-3^\circ) + \tan(27^\circ) \cot(-27^\circ)$  کدام است.

$$2 \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

$$\sin(0) = \sin(0)$$

2- حاصل  $\left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}\right)^2 - \left(\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}\right)^2$  کدام است.

$$-2 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$-\sqrt{2} \quad (1)$$

3- حاصل  $(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1)$  به ازای  $x = \frac{7\pi}{12}$  کدام است.

$$-2 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\sin(0) = \sin(0)$$

4- حاصل عبارت  $p = \sin a \cdot \cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 4a$  به ازای  $a = 5/625^\circ$  کدام است.

$$\frac{1}{8} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin(0) = \frac{1}{2} \sin(0)$$

$$\frac{1}{2} \sin(0) = \frac{1}{2} \sin(0)$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

موضوع: مثلثات

$$\frac{1}{2} - \sin \frac{\pi}{8} = \frac{22}{10}$$

5- حاصل عبارت  $(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{8})(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{3\pi}{8})$  کدام است.

$$\frac{1}{4} (4)$$

$$\frac{1}{2} (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (1)$$

قضیه مثل آدم حل نکردن (مثل فرشته:)

$$\sin \theta \begin{cases} 0/9 & 0 < \theta < 60 \\ 0/95 & 60 < \theta < 70 \\ 0/99 \approx 1 & 70 \leq \theta < 80 \\ & 80 \leq \theta < 90 \end{cases}$$

در زیر آن را

$$\begin{aligned} 1) \sin 35^\circ &= 0/0 + 0/68 = 0/08 \\ 2) \sin 20^\circ &= 0/0 - 0/15 = 0/15 \\ 3) \sin 32/5^\circ &= 0/0 + 0/12 = 0/12 \\ 4) \sin 15^\circ &= 0/22 \\ 5) \sin 130^\circ &= \sin(50^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0/68 = 0/18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \sin 40^\circ &= \\ 7) \sin 25^\circ &= \\ 8) \sin 115^\circ &= \\ 9) \sin 11^\circ &= \\ 10) \tan 20^\circ &= \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4} (4)$$

$$\frac{1}{4} (3)$$

$$-\frac{1}{2} (2)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$

7- حاصل  $\sin^2(\frac{\pi}{8})$  کدام است.

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4} (4)$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4} (3)$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2} (2)$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2} (1)$$

8- حاصل عبارت  $4 \cos 40^\circ - \frac{1}{\cos 20^\circ}$  کدام است. (ریاضی خارج ۹۶)

$$2 (4)$$

$$\sqrt{3} (3)$$

$$1 (2)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$

## موضوع: مثلثات

9- حاصل عبارت  $2 + \frac{1}{\cos 20^\circ}$  کدام است. (ریاضی ۸۷)

- $4 \sin 40^\circ$  (4)       $2 \cos 40^\circ$  (3)       $4 \cos 40^\circ$  (2)       $2 \sin 40^\circ$  (1)

10- ساده شده عبارت  $\cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$  کدام است.

- $\frac{16}{\sin 6^\circ}$  (4)       $\frac{1}{\sin 6^\circ}$  (3)       $\frac{1}{8 \sin 6^\circ}$  (2)       $\frac{1}{16 \sin 6^\circ}$  (1)

11- خلاصه شده کسر  $\frac{\sin^2 7x - \sin^2 2x}{\sin 5x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{54}$  کدام است. (ریاضی ۹۱)

- $\sqrt{3}$  (4)      1 (3)       $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)       $\frac{1}{2}$  (1)

12- ساده شده عبارت  $\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$  کدام است. (ریاضی ۸۵)

- $2 \cos 20^\circ$  (4)       $2 \sin 20^\circ$  (3)       $\cos 20^\circ$  (2)       $\sin 20^\circ$  (1)

13- حاصل  $\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$  کتانژانت کدام زاویه است.

- $75^\circ$  (4)       $67/5^\circ$  (3)       $7/5^\circ$  (2)       $15^\circ$  (1)

## موضوع: مثلثات

حرف‌هایی راجع به  $\tan x$

$\tan x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 27^\circ$	$\tan x = 2 \rightarrow x = 64^\circ$
$\tan x = \frac{1}{3} \rightarrow x = 18^\circ$	$\tan x = 3 \rightarrow x = 72^\circ$
$\tan x = \frac{1}{4} \rightarrow x = 14^\circ$	$\tan x = 4 \rightarrow x = 76^\circ$
$\tan x = \frac{1}{5} \rightarrow x = 11^\circ$	$\tan x = 5 \rightarrow x = 79^\circ$

$\sin x = \tan x$   
 در  $x < 25^\circ$

\*

$$\tan a = \frac{3}{2} \approx \sqrt{2} \Rightarrow a = 55^\circ$$

$$\tan a = \frac{2}{3} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 35^\circ$$

پارت 3

• همه چی تابلو است!

1- با فرض  $\cos(9\pi - a) = \frac{\sqrt{3}}{-2}$  و این که  $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$  مقدار  $\tan a$  کدام است.

- $\frac{1}{3}$  (1)       $-\frac{1}{3}$  (2)       $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (3)       $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (4)

قضیه مثلث:

$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} - 2$  باشد  $\sin^4 x + \cos^4 x$  کدام است.

- $1$  (1)       $\frac{1}{2}$  (2)       $\frac{1}{4}$  (3)       $\frac{1}{8}$  (4)

موضوع: مثلثات

3-  $\sin x (\cos x - \sin x) = -1$  حاصل  $\cos(2x - \frac{\pi}{4})$  کدام است.

- (1)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (2) 3 (3) صفر (4)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4- در مثلث ABC رابطه  $\tan(\hat{B} + 30^\circ) \tan(\hat{C} + 30^\circ) = 1$  برقرار است. آنگاه:

- (1)  $\hat{A} = 150^\circ$  (2)  $\hat{A} = 120^\circ$  (3)  $\hat{A} = 60^\circ$  (4)  $\hat{A} = 30^\circ$

5- اگر  $\tan(a + b) = x$  و  $\tan(a - 2b) = y$  باشد  $\cot 3b$  کدام است.

- (1)  $\frac{1+xy}{x+y}$  (2)  $\frac{1+xy}{x-y}$  (3)  $\frac{x+y}{1+xy}$  (4)  $\frac{x+y}{1-xy}$

اگر هیچ کدام از پارت‌ها نبود به فرمول‌ها رجوع می‌کنیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} \Rightarrow \tan x \times \cot x = 1$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{یا} \quad \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

موضوع: مثلثات

فرمول‌های نه چندان محبوب

$$\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

$$\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 + \cos a}$$

تست‌های اتحادهای مثلثاتی

1- اگر  $a$  در ناحیه چهارم و  $\cos a = \frac{3}{7}$  باشد مقدار  $\cot a$  کدام خواهد بود.

$$\frac{-3\sqrt{10}}{10} \quad (4)$$

$$\frac{-3\sqrt{10}}{20} \quad (3)$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{10} \quad (2)$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{20} \quad (1)$$

2- برای زاویه حاده  $a$  رابطه  $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - a\right) = \frac{5}{13}$  برقرار است. مقدار  $\tan a + \cot a$  کدام است.

$$\frac{156}{313} \quad (4)$$

$$\frac{313}{156} \quad (3)$$

$$\frac{60}{169} \quad (2)$$

$$\frac{169}{60} \quad (1)$$

3- با فرض  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{16}$  و  $\sin(8\alpha + 9\beta) = \frac{12}{13}$  مقدار  $\cot \beta$  کدام است.

$$\frac{13}{12} \quad (4)$$

$$\frac{12}{5} \quad (3)$$

$$\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$\frac{12}{13} \quad (1)$$

4- اگر  $\cot x = \frac{3}{2}$  باشد حاصل عبارت  $\frac{5 \sin x + 2 \cos x}{3 \cos x - \sin x}$

$$\frac{16}{7} \quad (4)$$

$$\frac{15}{7} \quad (3)$$

$$\frac{13}{7} \quad (2)$$

$$\frac{12}{7} \quad (1)$$



موضوع: مثلثات

5- حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$  با فرض  $\tan 15^\circ = 0/28$  کدام است. (تجربی ۹۴)

- $\frac{16}{9}$  (4)       $\frac{9}{16}$  (3)       $\frac{-9}{16}$  (2)       $\frac{-16}{9}$  (1)

6- اگر  $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم مثلثاتی باشد حاصل  $\cot(\frac{3\pi}{2} + 2x)$  کدام است.

- $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$  (4)       $2\sqrt{5}$  (3)       $4\sqrt{5}$  (2)       $-4\sqrt{5}$  (1)

7- اگر  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$  حاصل  $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$  کدام است.

- $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (4)      2 (3)       $\sqrt{2}$  (2)       $2\sqrt{2}$  (1)

8- اگر  $\tan a = \frac{1}{2}$  حاصل عبارت  $\frac{\sin 3a - \sin a}{\cos a - \cos 3a}$  کدام است. (ریاضی ۸۸)

- $\frac{3}{4}$  (4)       $-\frac{1}{4}$  (3)       $\frac{1}{4}$  (2)       $-\frac{1}{2}$  (1)

9- اگر  $\tan \beta = \frac{1}{2}$  و  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$  مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است. (تجربی ۹۴)

- 0/8 (4)      0/75 (3)      0/6 (2)      0/49 (1)

10- اگر  $\tan \alpha = 2$  و  $\tan \beta = \frac{1}{3}$  مقدار  $\tan(2\alpha - \beta)$  کدام است.

- 2 (4)       $\frac{1}{2}$  (3)      -2 (2)      -3 (1)

موضوع: مثلثات

۱۱- اگر  $\tan x = \frac{4}{3}$  باشد مقدار  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$  کدام است. (تجربی ۹۶)

- $-\frac{3}{4}$  (1)  $-\frac{3}{2}$  (2)  $\frac{4}{3}$  (3)  $\frac{3}{2}$  (4)

۱۲- ماکسیمم عبارت  $3 \sin^2 x - 4 \cos^2 x + 1$  کدام است.

- 6 (1) 8 (2) 3 (3) 4 (4)

۱۳- اگر عبارت  $\tan x + \cot x = -2$  باشد حاصل  $\sin^4(x) + \cos^2(x)$  کدام است.

- 1 (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$  (3)  $\frac{3}{4}$  (4)

۱۴- اگر  $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{1}{f(x)}$  باشد  $f(x)$  چقدر است.

- $\sin x$  (1)  $\cos x$  (2)  $\frac{1}{2} \sin x$  (3)  $\frac{1}{2} \cos x$  (4)

۱۵-  $\frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b} \times A = \tan b$  باشد A کدام است.

- $\tan a$  (1)  $\cot a$  (2)  $\sin a$  (3)  $\cos a$  (4)

۱۶- اگر  $\frac{\sin^2 x - 2 \cos^2 x + 1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 1} = 4$  مقدار  $\tan^2 x$  کدام است.

- 2 (1)  $\frac{2}{5}$  (2)  $\frac{5}{2}$  (3) 1 (4)

موضوع: مثلثات

17- مجموع ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$  کدام است.

- 1/25 (1) 1/5 (2) 1/75 (3) 2 (4)

18- حاصل  $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$  برابر کدام است.

- 1 (1) 1/5 (2) 2 (3) 2/5 (4)

19- اگر  $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$  باشد مقدار  $\tan x + \cot x$  چقدر است.

- 2/9 (1) 4/9 (2) 9/2 (3) 9/4 (4)

20- اگر  $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2}$  باشد حاصل  $\tan 4x$  کدام می‌تواند باشد.

- 3/√7 (1) √7/3 (2) √7 (3) 4/7 (4)

21- اگر  $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = 2$  حاصل  $\frac{1}{\sin x \cos x}$  کدام است.

- 65/8 (1) -65/8 (2) 17/4 (3) -17/4 (4)

22- اگر  $\sin x + \cos x = 1$  حاصل  $\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$  کدام است.

- 1/2 (1) √2 (2) 2 (3) 1 (4)

موضوع: مثلثات

23- حاصل  $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$  کدام است.

- (1)  $\frac{1}{3}$  (2)  $\frac{1}{4}$  (3)  $-\frac{1}{4}$  (4)  $-\frac{1}{3}$

24- حاصل  $2(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 1$  به ازای  $x = \frac{\pi}{24}$  کدام است.

- (1)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)  $-\frac{1}{2}$  (3)  $\frac{1}{2}$  (4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

25- اگر  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 2$  مقدار  $\cot x$  برابر کدام است.

- (1)  $\frac{5}{4}$  (2)  $\frac{5}{2}$  (3)  $\frac{3}{2}$  (4)  $\frac{3}{4}$

26-  $\tan x - \cot x = 6$  باشد حاصل  $\tan 2x - \cot 2x$  برابر کدام است.

- (1)  $\frac{10}{3}$  (2)  $-\frac{8}{3}$  (3)  $-\frac{10}{3}$  (4)  $\frac{8}{3}$

27-  $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$  حاصل  $\sin^3 x + \cos^5 x$  چقدر است. (M.p)

- (1)  $-\frac{3\sqrt{2}}{8}$  (2)  $\frac{3\sqrt{2}}{8}$  (3)  $-\frac{\sqrt{2}}{8}$  (4)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$

28- برد تابع  $y = |\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|$  کدام است. (M.p)

- (1)  $[0, 2]$  (2)  $[1, 2]$  (3)  $[\sqrt{2}, 2]$  (4)  $[2, 2\sqrt{2}]$

موضوع: مثلثات

29- حاصل  $\cos x \cos 2x \cos 4x$  به ازای  $\frac{\pi}{9}$  برابر کدام است.

$\frac{\sqrt{2}}{8}$  (4)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$  (3)

$\frac{1}{8}$  (2)

$\frac{1}{4}$  (1)

30- رابطه  $\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x - 1} = a \sin x + b \cos x + c$  برای هر  $x$  برقرار است حاصل  $a + b + c$  کدام است.

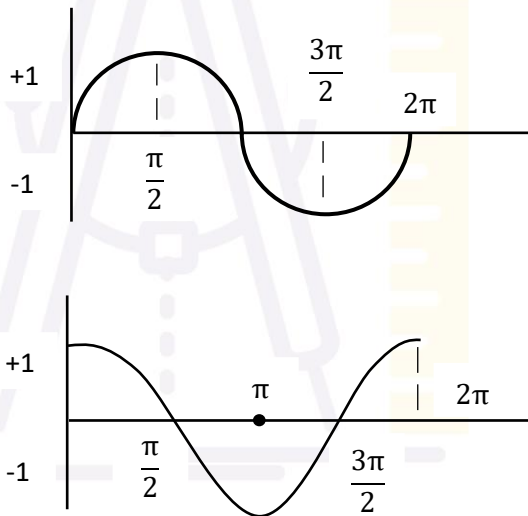
3 (4)

2/5 (3)

2 (2)

1/5 (1)

نمودار توابع مثلثاتی:

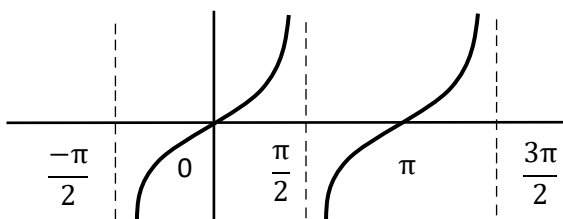


$a \sin(bx) + C$

$T = 2\pi$

$a \cos(bx) + C$

$T = 2\pi$



$a \tan(bx) + C$

$T = \pi$



## دوره تناوب:

اگر دوره تناوب تابع  $f(x)$  برابر  $T$  باشد دوره تناوب تابع  $y = Af(ax+b) + B$  که  $a$  عددی غیر صفر است برابر  $\frac{T}{|a|}$  است.

$f(x) = \sin x$	$T = 2\pi$	$f(x) = A \sin(ax+b) + c$	$T = \frac{2\pi}{ a }$
$f(x) = \cos x$	$T = 2\pi$	$f(x) = A \cos(ax+b) + c$	$T = \frac{2\pi}{ a }$
$f(x) = \tan x$	$T = \pi$	$f(x) = A \tan(ax+b) + c$	$T = \frac{\pi}{ a }$
$f(x) = \sin^2 x$	$T = \pi$	$f(x) = A \sin^2(ax+b) + c$	$T = \frac{\pi}{ a }$
$f(x) = \cos^2 x$	$T = \pi$	$f(x) = A \cos^2(ax+b) + c$	$T = \frac{\pi}{ a }$

## تابع متناوب:

تابع  $f$  را متناوب می نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند  $T$  موجود باشد به طوری که برای هر  $x \in D_f$  داشته باشیم:

$$x \pm T \in D_f, \quad f(x \pm T) = f(x)$$

**تست ۱:** دوره تناوب تابع های زیر را حساب کنید.

$$\sin^2 x - \sin^4 x = \sin^2 (1 - \sin^2) = \sin^2 \cos^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

$2\pi$  (4)       $\pi$  (3)       $\frac{\pi}{2}$  (2)       $\frac{\pi}{4}$  (1)

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 + \cos^2)^2 - 2\sin^2 \cos^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$2\pi$  (4)       $\pi$  (3)       $\frac{\pi}{2}$  (2)       $\frac{\pi}{4}$  (1)

## موضوع: مثلثات

$$\sin^2 2x \cos^2 2x$$

$$\pi (4)$$

$$\frac{\pi}{4} (3)$$

$$\frac{\pi}{8} (2)$$

$$\frac{\pi}{2} (1)$$

$$|\sin x \cos x \cos 2x|$$

$$\pi (4)$$

$$\frac{\pi}{2} (3)$$

$$\frac{\pi}{4} (2)$$

$$\frac{\pi}{8} (1)$$

$$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x$$

$$\frac{\pi}{4} (4)$$

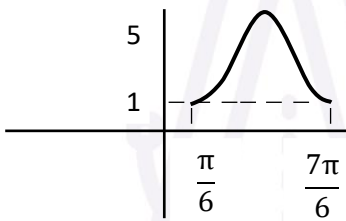
$$\frac{\pi}{2} (3)$$

$$\pi (2)$$

$$2\pi (1)$$

$$a \cos(bx + c) + d$$

مثال 1: شکل زیر تبدیل یافته  $y = \cos x$  است. معادله آن را بنویسید.



$$y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$$

تست های نمودار مثلثاتی:

1) اگر ماکسیمم تابع  $f(x) = a \cos bx + c$  برابر 6 و دوره تناوب آن برابر  $\frac{\pi}{2}$  باشد و نمودار تابع از نقطه

$(\frac{\pi}{12}, 4)$  بگذرد مقدار مینیمم تابع کدام عدد می تواند باشد؟

$$-4 (4)$$

$$-3 (3)$$

$$-2 (2)$$

$$-1 (1)$$

$$a + c = 6$$

$$\frac{a}{2} + c = 4$$

$$\frac{a}{2} = 2$$

$$a = 4$$

$$c = 2$$

$$f(x) = 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

موضوع: مثلثات

2- اگر  $ab$  عدد مثبت و ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x) = a \sin bx + c$  به ترتیب 8 و 0 باشد و کوچکترین ریشه مثبت  $f$  برابر 6 باشد دوره تناوب تابع کدام است.

$$a = 4$$

24 (4)

18 (3)

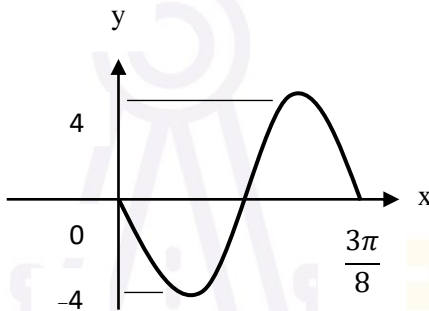
12 (2)

8 (1)

$$\frac{0+8}{2} = 4 = c$$

$$4 \sin bx + 4 = 0 \Rightarrow \sin bx = -1$$

3- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a \sin bx$  است. مقدار  $\frac{a}{b}$  کدام است؟



$$a = -4, b = \frac{16}{\pi}$$

$\frac{3}{4}$  (2)

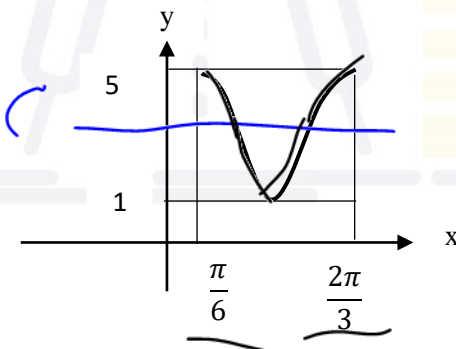
$\frac{4}{3}$  (4)

$-\frac{3}{4}$  (1)

$-\frac{4}{3}$  (3)

$$-\frac{4}{\frac{16}{\pi}} = -\frac{\pi}{4}$$

4- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $f$ ، تبدیل یافته  $y = \cos x$  است. مقدار  $f(\frac{\pi}{4})$  کدام است؟



$$f(0) = 5$$

$4\frac{1}{2}$  (2)

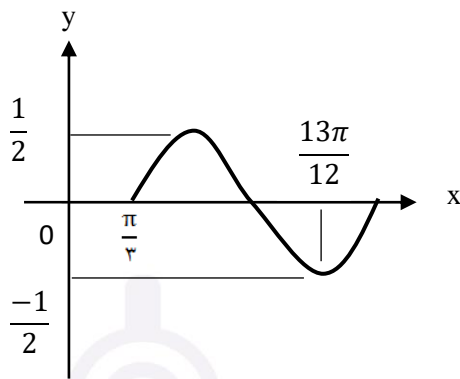
4 (4)

$4\frac{3}{4}$  (1)

$4\frac{1}{4}$  (3)

## موضوع: مثلثات

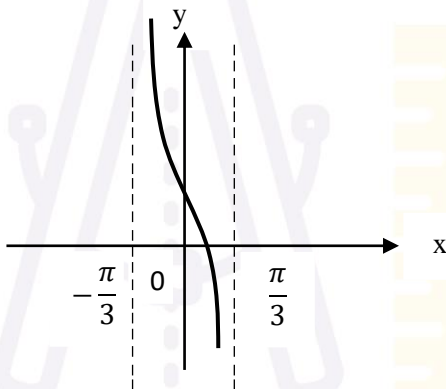
5- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = k \sin(ax + b)$  است. مقدار  $f(\pi)$  کدام است؟



(1)  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(3)  $-\frac{1}{4}$  (4)  $\frac{1}{4}$

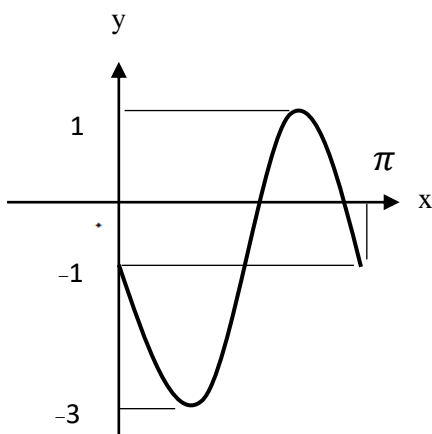
6- شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = 1 + \tan(ax)$  با دامنه‌ی مشخص شده است. مقدار  $f^{-1}(2)$  کدام است؟



(1)  $-\frac{\pi}{6}$  (2)  $-\frac{\pi}{8}$

(3)  $-\frac{\pi}{12}$  (4)  $-\frac{5\pi}{24}$

7- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $f$ ، تبدیل یافته‌ی  $y = \sin x$  است. مقدار  $f(-\frac{\pi}{6})$  کدام است؟

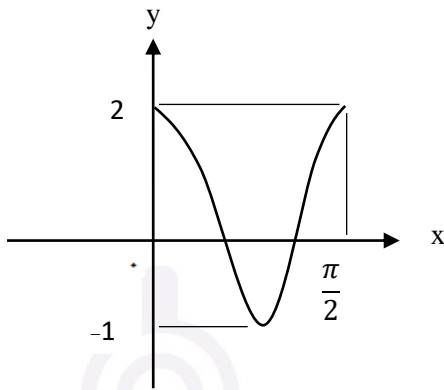


(1)  $\frac{1}{2}$  (2) صفر

(3)  $\sqrt{3} - 1$  (4)  $1 - \sqrt{3}$

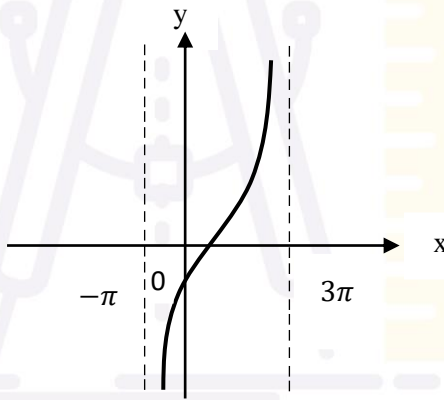
## موضوع: مثلثات

8- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a \cos bx + c$  است. مقدار  $abc$  کدام است؟



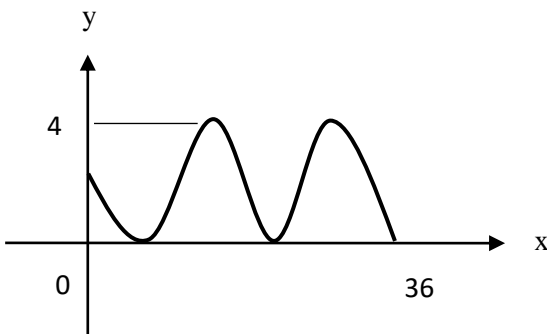
- (1) 1  
(2) 2  
(3) 3  
(4) 4

9- شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = \cot(ax + b)$  اگر  $b$  کوچکترین مقدار مثبت باشد،  $\frac{b}{a}$  کدام است؟



- (1)  $-\pi$   
(2)  $\pi$   
(3)  $-3\pi$   
(4)  $3\pi$

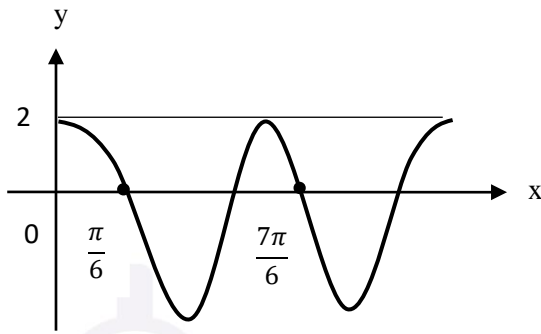
10- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a \sin(b\pi x) + c$  است. مقدار  $abc$  کدام است؟



- (1)  $-\frac{1}{4}$   
(2)  $\frac{1}{4}$   
(3)  $-\frac{1}{2}$   
(4)  $\frac{1}{2}$

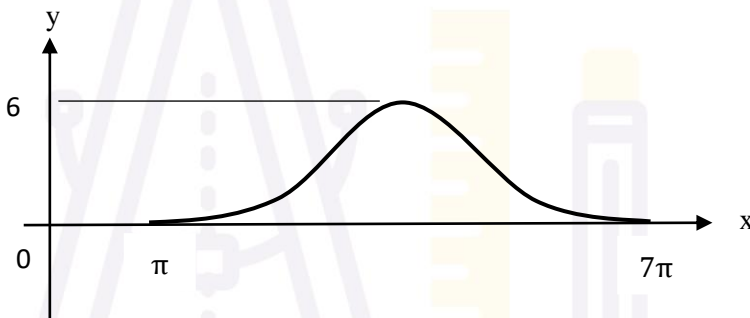
## موضوع: مثلثات

11- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = c + a \cos(bx)$  و  $b$  مثبت باشد، مقدار  $a + b - c$  کدام است؟



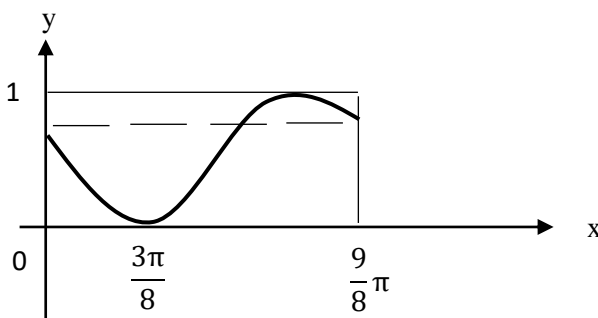
- (1) 8  
(2) 2  
(3) 6  
(4) 4

12- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $f$ ، تبدیل یافته‌ی  $y = \cos x$  است. مقدار  $f(0)$  کدام است؟



- (1) 1/5  
(2) 2  
(3) 3/5  
(4) 4

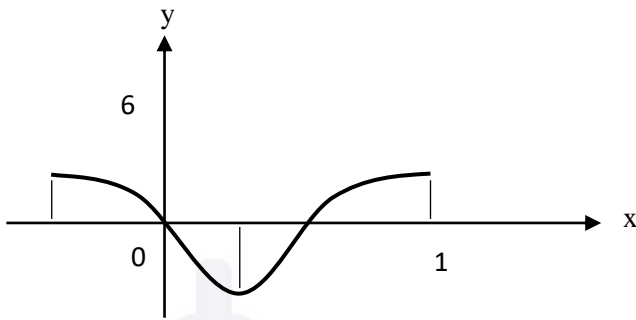
13- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $f$ ، تبدیل یافته‌ی  $y = \sin x$  است. مقدار  $f(\frac{17\pi}{24})$  کدام است؟



- (1)  $\frac{1}{4}$   
(2)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
(3)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
(4)  $\frac{3}{4}$

## موضوع: مثلثات

14- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = \cos(ax + \frac{1}{2})\pi$  است. مقدار  $a$  کدام است؟



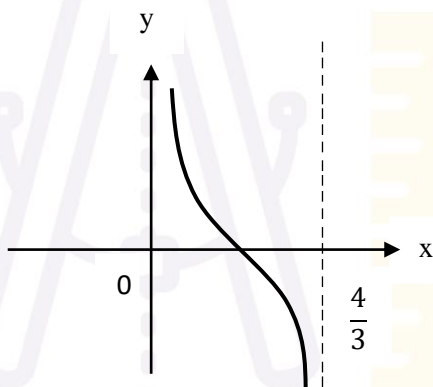
(2)  $\frac{3}{2}$

(1)  $\frac{1}{2}$

(4)  $\frac{7}{4}$

(3)  $\frac{2}{3}$

15- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \tan(ax + \frac{1}{2})\pi$  است. مقدار  $a$  کدام است؟



(2)  $-\frac{3}{2}$

(1)  $-\frac{3}{4}$

(4)  $\frac{3}{4}$

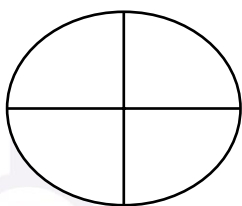
(3)  $\frac{3}{2}$

معادلات مثلثاتی:

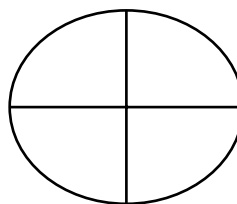
1-  $k$  دار

• گزینه‌ها رو رو دایره نشون بده و در معادله صدق بده:

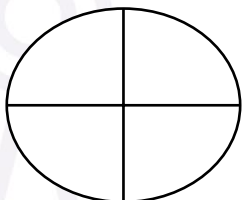
$k\pi$



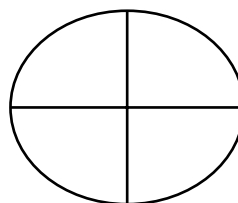
$k\pi + \frac{\pi}{2}$



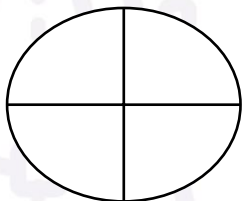
$\frac{k\pi}{2}$



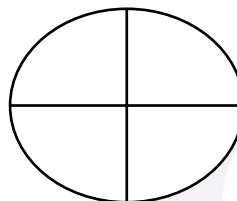
$k\pi \pm \frac{\pi}{6}$



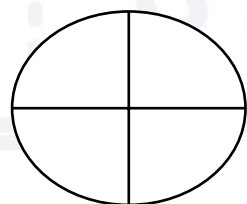
$2k\pi$



$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$



$\frac{k\pi}{4}$



★ اگر سخت بود به  $k$  عدد بده بر حسب درجه و ربع اول. برای اینکار کافیه!

موضوع: مثلثات

1- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = 1$  کدام است؟ (سنجش 94)

- (1)  $k\pi - \frac{\pi}{2}$  (2)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (3)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (4)  $2k\pi + \pi$

2- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$  به کدام صورت است؟ (تجربی 92)

- (1)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (2)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (3)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (4)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

3- جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$  کدام است؟ (تجربی 95)

- (1)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (2)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (3)  $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$  (4)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$

4- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$  با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

(تجربی خارج 98)

- (1)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (2)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (3)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (4)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

5- جواب کلی معادله  $\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$  به کدام صورت است؟

( $k \in \mathbb{Z}$ ) (تجربی 90)

- (1)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$  (2)  $2k\pi + \frac{\pi}{6}$  (3)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (4)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$



موضوع: مثلثات

6- جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$  کدام است؟ (تجربی 94)

- (1)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (2)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  (3)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$  (4)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$

7- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$  (تجربی خارج 97)

- (1)  $\frac{k\pi}{5}$  (2)  $\frac{2k\pi}{5}$  (3)  $k\pi + \frac{\pi}{5}$  (4)  $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

8- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan x \tan 3x = 1$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$

- (1)  $\frac{k\pi}{4}$  (2)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (3)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$  (4)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

9- جوابهای کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x = \sin x$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  بیان شده است. مجموعه

مقادیر  $i$  کدام است؟

- (1)  $\{7, 9\}$  (2)  $\{1, 3, 5\}$  (3)  $\{1, 4, 7\}$  (4)  $\{1, 5, 9\}$

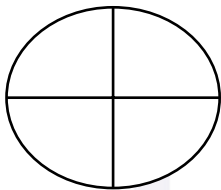
10- مجموعه جواب معادله  $\log(\sin x) - \log(\cos x) - \frac{1}{2} \log 3 = 0$  کدام است؟ (MP)

- (1)  $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$  (2)  $x = k\pi + \frac{2\pi}{3}$  (3)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (4)  $x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$

موضوع: مثلثات

معادلات اصلی:

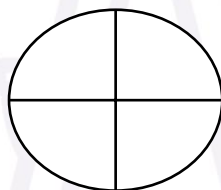
1- حل معادله  $\sin x = \sin a \leftarrow \sin x = a$



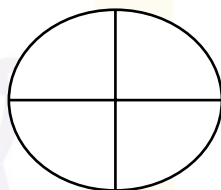
$$x = 2k\pi + a$$

$$x = 2k\pi + \pi - a$$

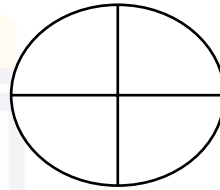
حالات خاص:



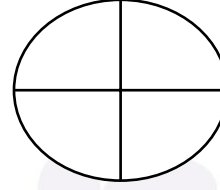
$$\sin x = 1$$



$$\sin x = -1$$



$$\sin x = 0$$



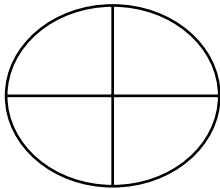
$$\sin^2 x = 1$$

مثال 1: معادله  $2 \sin x + 1 = 0$  را حل کنید.

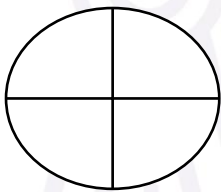
موضوع: مثلثات

2- حل معادله  $\cos x = \cos a \leftarrow \cos x = a$

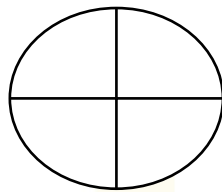
$$x = 2k\pi \pm a$$



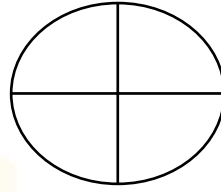
حالات خاص:



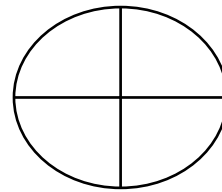
$$\cos x = 1$$



$$\cos x = -1$$



$$\cos x = 0$$



$$\cos^2 x = 1$$

مثال 2: معادله  $2 + \cos 2x = 3 \cos x$  را حل کنید.

حل چند معادله خاص:

مثال 3: معادله  $\sin x \cos x = 0$  را حل کنید.

موضوع: مثلثات

مثال 4: معادله  $\tan^2 x = 1$  را حل کنید.

مثال 5: معادله  $\sin x + \cos x = 1$  را حل کنید.

★ در هر جواب هر چهار معادله به صورت  $\sin x \pm \cos x = \pm 1$  داریم:  $\sin x = 0$  یا  $\cos x = 0$

مثال 6: معادله  $\sin^2 x = \frac{1}{4}$  را حل کنید.

★ جواب کلی همه معادلات  $\sin x = \pm \sin a$ ,  $\cos x = \pm \cos a$  و  $\tan x = \pm \tan a$  به صورت زیر

است:

$$x = k\pi \pm a$$

مثال 7: معادله  $\sin U = -\cos V$  را حل کنید.

موضوع: مثلثات

تست‌های معادلات مثلثاتی:

1- معادله  $(\sin x + 1)^2 - \frac{9}{4} = 0$  در بازه  $(0, \pi)$  چند ریشه دارد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

2- مجموعه ریشه‌های معادله  $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

- 1 (1)  $\frac{2\pi}{3}$  2 (2)  $\pi$  3 (3)  $\frac{4\pi}{3}$  4 (4)  $\frac{5\pi}{3}$

3- معادله  $\sin^4 x = \frac{1}{3}$  چند ریشه در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) صفر 4 (4)

4- معادله  $(\sin x - \frac{1}{2})(\sin x + \frac{1}{3})(\sin x - \frac{1}{4}) = 0$  در بازه  $[0, \frac{\pi}{2}, 2\pi)$  چند ریشه دارد؟

- 1 (1) 8 2 (2) 6 3 (3) 4 4 (4) 2

5- معادله  $\cos 2x \cos 3x = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

- 1 (1) 6 2 (2) 8 3 (3) 10 4 (4) 12

6- معادله  $(3 \sin x - 2)(3 \cos x - \sqrt{5}) = 0$  در فاصله  $0 \leq x \leq \pi$  چند ریشه متمایز دارد؟

- 1 (1) 2 2 (2) 3 3 (3) 4 4 (4) ریشه ندارد

موضوع: مثلثات

7- معادله  $2\sin^2 x + 3 = 3\cos^2 x + 4$  چند جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) صفر

8- معادله  $\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4}$  در بازه  $[\pi, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) صفر

9- معادله  $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

10- معادله  $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟ (MP)

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

11- مجموع ریشه‌های معادله  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$  در بازه  $[\pi, 2\pi]$  چند برابر  $\frac{\pi}{9}$  است؟

- 1 (1) 20 (2) 28 (3) 32 (4) 35

12- معادله  $\tan x + \cot x = \sqrt{3}$  چند ریشه در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) صفر

## موضوع: مثلثات

13- نقاط انتهایی جوابهای معادله  $2 \cot x + \tan x + 3 = 0$  روی یک دایره مثلثاتی رؤوس کدام چندضلعی است؟ (MP)

(1) مستطیل (2) دوزنقه (3) مثلث (4) شش ضلعی

14- معادله  $2 \sin^3 x + \cos^2 2x = \sin x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟ (MP)

(1) 8 (2) 7 (3) 6 (4) 5

15- معادله  $\cot\left(\frac{\pi}{3} \cos(2\pi x)\right) = \sqrt{3}$  در بازه  $[0, 2]$  چند ریشه دارد؟ (MP<sup>+</sup>)

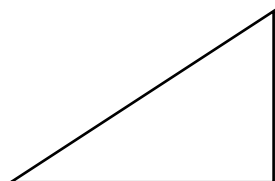
(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4



## موضوع: مثلثات

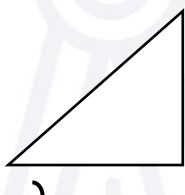
### کاربرد مثلثات در هندسه

1- برای زاویه ماده  $a$  در مثلث قائم الزاویه



$$\sin a = \frac{B}{A} \quad \cos a = \frac{C}{A} \quad \tan a = \frac{B}{C} \quad \cot a = \frac{C}{B}$$

2- قضیه مساحت و سینوسها در مثلث

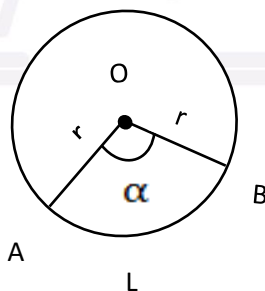


$$s = \frac{1}{2} AC \sin b = \frac{1}{2} BC \sin a = \frac{1}{2} AB \sin c$$

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

\*در هر چهار ضلعی دلخواه مساحت برابر نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین آنهاست.

3- طول کمان مساحت قطاع در دایره

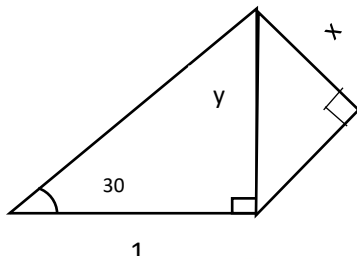


$$AB \text{ کمان} = L = \frac{a}{2\pi} \times \text{محیط دایره} = \frac{a}{2\pi} \times 2\pi r = ar = L$$

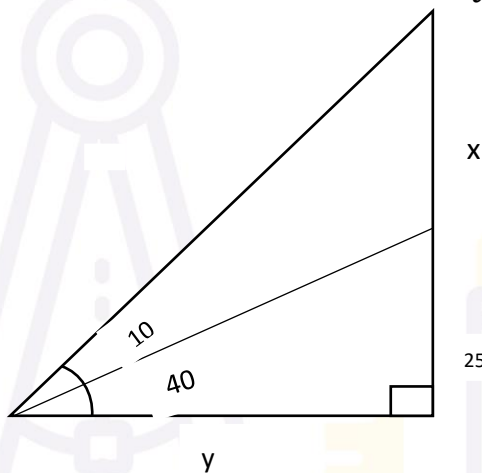
$$AB \text{ شعاع} = S = \frac{a}{2\pi} \times \text{مساحت دایره} = \frac{a}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} ar^2$$

## موضوع: مثلثات

**مثال ۱-** در شکل روبرو  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$  مقدار  $x$  را بیابید.



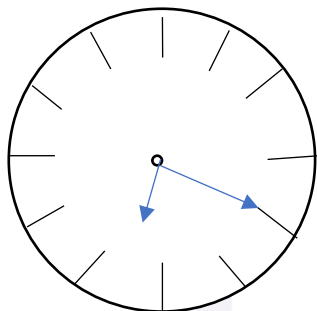
**مثال ۲** در شکل رو به رو مقدار  $x$  را بیابید.  $\tan 50^\circ = \frac{6}{5}$



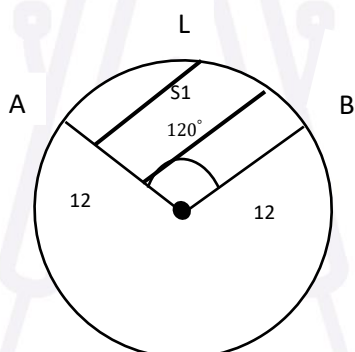
**مثال ۳** در مثلثی که زاویه‌های ۴۵ و ۶۰ درجه دارد اگر طول کوچکترین ضلع ۶ باشد طول ضلع متوسط را بیابید.

موضوع: مثلثات

**مثال ۴** زاویه بین عقربه‌های ساعت و شار و دقیقه شمار را در ساعت ۶ و ۲۰ دقیقه بیابید.

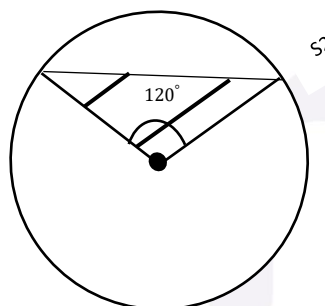


**مثال ۵** دایره‌ای به شعاع ۱۲، در اختیار داریم مقادیر زیر را حساب کنید.



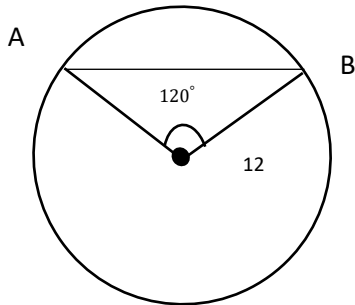
$S1 =$

$L1 =$

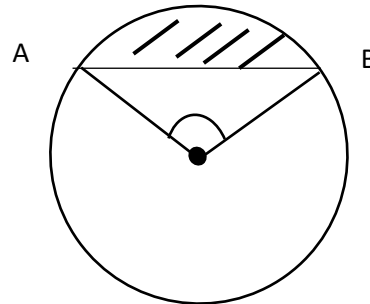


$S2 =$

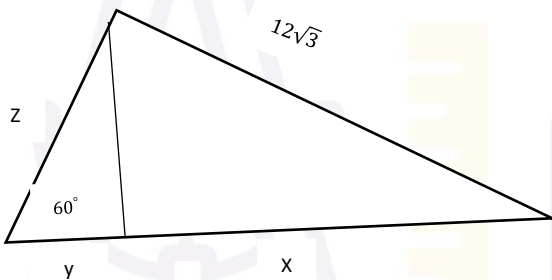
## موضوع: مثلثات



AB=



S3=



### تست‌های کاربردی مثلثات در هندسه

1- در شکل رو به رو مقدار  $x+y+z$  برابر کدام است؟

32 (2

28(1

40 (4

36 (3

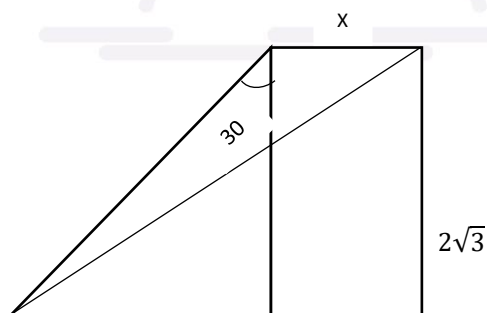
2- در شکل رو به رو طول قطر رسم شدهی دوزنقه برابر  $2\sqrt{7}$  است . مقدار  $x$  کدام است؟

2 (2

$\sqrt{2}$ (1

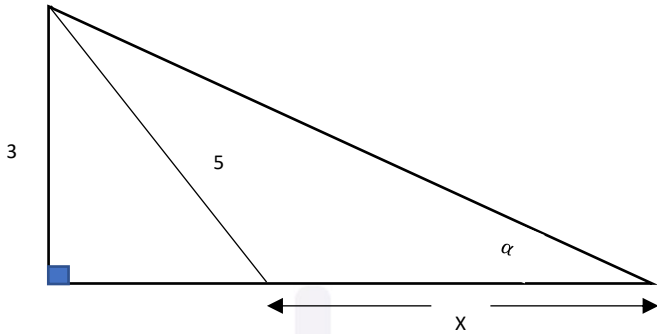
3 (4

$2\sqrt{2}$  (3



## موضوع: مثلثات

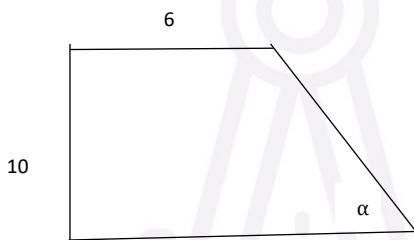
3- در شکل رو به رو  $\tan \alpha = \frac{1}{4}$  است. مقدار  $x$  برابر کدام است؟



5(1) 6(2)

7(3) 8(4)

4- در شکل رو به رو  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$  است. طول قاعدهی بزرگتر دوزنقه برابر کدام است؟



24(1) 30(2)

32(3) 36(4)

5- مساحت دوزنقهی متساوی الساقین که طول دو قاعدهی آن 8 و 12 و یکی از زوایای آن 60 درجه است، کدام است؟

$20\sqrt{3}$  (4)

$20\sqrt{2}$  (3)

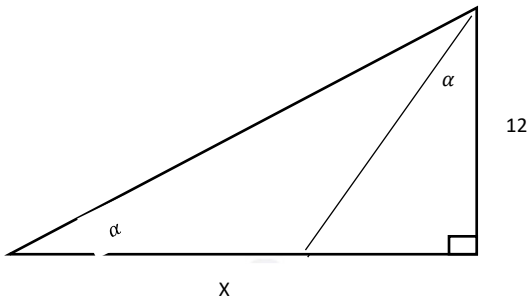
$18\sqrt{3}$  (2)

$18\sqrt{2}$  (1)

موضوع: مثلثات

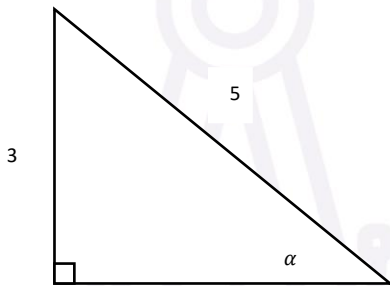
6- در شکل رو به رو  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  است. مقدار  $x$  برابر کدام است؟

- 8 (2) 7 (1)  
10 (4) 9 (3)



7- در شکل مقابل  $\tan \frac{\alpha}{2}$  برابر کدام است؟

- $\frac{1}{3}$  (2)  $\frac{1}{2}$  (1)  
 $\frac{1}{5}$  (5)  $\frac{1}{4}$  (3)



8- در شکل مقابل ارتفاع A از سطح زمین 14 متر است.  $\sin \theta$  برابر کدام است؟

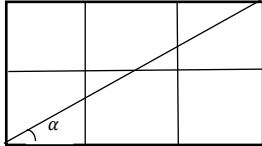
- $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$  (2)  $\sqrt{2} - 1$  (1)  
 $2 - \sqrt{2}$  (4)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (3)

9- در مثلث ABC،  $\sin \frac{A}{3} = \cos B$ ، اگر  $\hat{C} = 60^\circ$  باشد، آنگاه زاویه B کدام است؟

- $45^\circ$  (2)  $75^\circ$  (1)  
 $90^\circ$  (4)  $60^\circ$  (3)

## موضوع: مثلثات

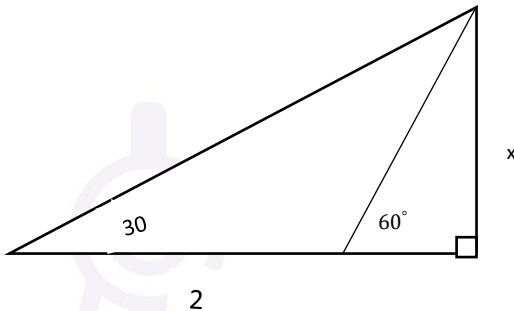
10- در شکل رو به رو مربع های کوچک به ضلع یک واحد هستند. مقدار  $\cos 2\alpha$  کدام است؟



$\frac{5}{7}$  (2)  $\frac{3}{7}$  (1)

$\frac{7}{13}$  (4)  $\frac{5}{13}$  (3)

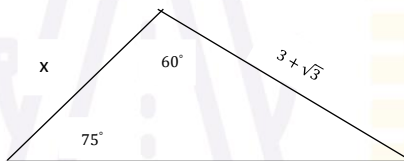
11- در شکل روبه رو مقدار  $x$  کدام است؟



$\sqrt{3}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (1)

$4\sqrt{3}$  (4)  $2\sqrt{3}$  (3)

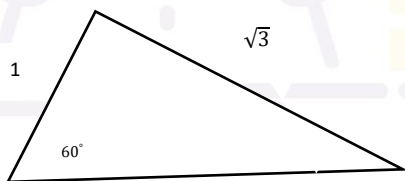
12- در شکل مقابل  $x$  کدام است؟



3 (2) 2 (1)

$2\sqrt{3}$  (4)  $3\sqrt{2}$  (3)

13- در شکل روبه رو مساحت مثلث برابر کدام است؟



$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (2)  $\sqrt{2}$  (1)

$\sqrt{3}$  (4)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (3)

14- در مثلث ABC، طول اضلاع مقابل رئوس A، B و C را به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $c$  نشان می دهیم. اگر  $c \sin \hat{A} = 1$ ،  $a \cos \hat{C} = 2$  باشد، کدام نتیجه گیری صحیح است.

$c \cos \hat{A} = \frac{1}{2}$  (4)

$a = \sqrt{3}$  (3)

$c = 3$  (2)

$b = 3$  (1)

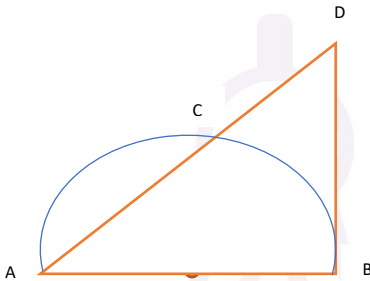


## موضوع: مثلثات

15- طول اضلاع مثلث قائم الزاویه برابر  $\sin x$  و  $\cos x$  است، ارتفاع مثلث به ازای کدام مقدار  $x$  ماکسیمم است؟

- (1)  $\frac{\pi}{3}$  (2)  $\frac{\pi}{4}$  (3)  $\frac{\pi}{6}$  (4)  $\frac{\pi}{8}$

16- در شکل روبه‌رو یک نیم‌دایره رسم شده است.  $BD$  بر دایره مماس است. اگر  $AD=4AC$  باشد، زاویه  $\alpha$  کدام است؟



- (1)  $30^\circ$  (2)  $45^\circ$   
(3)  $60^\circ$  (4)  $75^\circ$

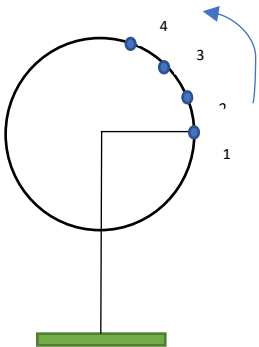
17- زاویه بین دو عقربه‌ی ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت 5:50 چند درجه است؟

- (1) 120 (2) 125 (3) 135 (4) 145

18- وقتی ساعت از 11 به 2 و 20 دقیقه تغییر می‌کند، عقربه‌ی ساعت‌شمار چند درجه چرخیده است؟

- (1) 85 (2) 95 (3) 100 (4) 105

19- چرخ و فلکی مطابق شکل روبه‌رو 40 کابین دارد. اگر در کابین شماره‌ی 3 باشیم پس از دوران



در مکان کدام کابین قرار می‌گیریم؟

- (1) 14 (2) 15  
(3) 16 (4) 17

## موضوع: مثلثات

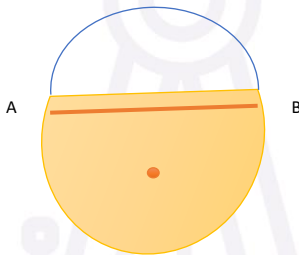
20- در دایره‌ای به شعاع 9 طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ی مرکزی 80 درجه، چقدر است؟

- $4\pi$  (1)       $6\pi$  (2)       $8\pi$  (3)       $16\pi$  (4)

21- در یک دایره وتر AB چنان است که زاویه‌ی مرکزی روبه‌روی آن 90 درجه است. طول کمان AB چند برابر طول وتر AB است؟

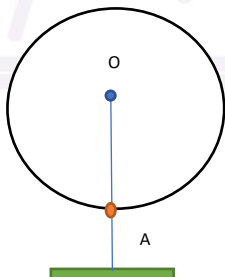
- $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$  (1)       $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$  (2)       $\frac{\pi}{2}$  (3)       $\frac{\pi}{4}$  (4)

22- در شکل روبه‌رو دایره‌ای به شعاع 6 رسم شده است. اگر فاصله‌ی مرکز دایره تا وتر AB برابر 3 باشد، مساحت ناحیه‌ی سایه زده برابر کدام است؟



- $12\pi + 6\sqrt{3}$  (1)       $12\pi + 9\sqrt{3}$  (2)  
 $24\pi + 6\sqrt{3}$  (3)       $24\pi + 9\sqrt{3}$  (4)

23- چرخ و فلکی مطابق شکل روبه‌رو به شعاع 20 متر مفروض است. فردی در کابین A که فاصله‌ی 1 متر از زمین دارد نشسته است. اگر چرخ و فلک 240 درجه دوران کند، ارتفاع او از سطح زمین چقدر خواهد شد؟



- 25 (1)      26 (2)  
30 (3)      31 (4)

## موضوع: مثلثات

24- یک ماهواره که با فاصله 800 کیلومتر از سطح زمین دور آن در یک مدار دایره‌ای می‌چرخد، از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B رسیده است. اگر زاویه‌ی AOB برابر 3 درجه باشد، این ماهواره تقریباً چه مسافتی را طی کرده است؟ مرکز زمین را O و شعاع آن را 6400 کیلومتر فرض کنید.

350(1) 366 (2) 277 (3) 412 (4)

25- طول برف پاک کن عقب اتومبیلی برابر 24 سانتی‌متر است ولی تیغه‌س پاک کننده‌ی آن فقط 18 سانتی‌متر می‌باشد. اگر مساحت ناحیه‌ای که برف پاک کن، تمیز می‌کند برابر  $225\pi$  باشد، این برف پاک کن هر بار کمائی با زاویه‌ی چند درجه را طی می‌کند؟

120(1) 135 (2) 150(3) 165 (4)

26- یک مخروط به شعاع قاعده‌ی 8 و ارتفاع 6 مفروض است. زاویه‌ی قطاع حاصل از شکل گسترده‌ی این مخروط چند درجه است؟

210(1) 245 (2) 260 (3) 288 (4)

27- در شکل روبه‌رو، یک تسمه، دو قرقره به شعاع‌های 6 و 2 را به هم وصل کرده است. اگر مجموع زوایایی که دو قرقره می‌چرخند 360 درجه باشد، مسافتی که تسمه حرکت کرده است چقدر است؟

$2\pi$ (1)  $\frac{5}{2}\pi$  (2)

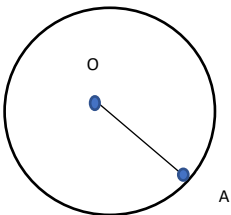
$3\pi$ (3)  $\frac{7}{2}\pi$  (4)



28- در شکل روبه‌رو زاویه‌ی بین امتداد خطوط OA و d برابر 30 درجه است. اگر فاصله‌ی نقاط O و A از خط d به ترتیب برابر 12 و 8 باشد، شعاع دایره کدام است؟

6(1)  $6\sqrt{3}$  (2)

8(3)  $8\sqrt{3}$  (4)



d