بسم الله الرحمن الرحیم

نام درس:

فیزیک پیش دانشگاهی

مدرس:

یحیوی

منبع:

فیزیک هالیدی، جلد اول، ویرایش دهم

ارزشیابی:

۱. فعالیت کلاسی و حضور در کلاس: ۲ نمره
۲. میان ترم : ۸ نمره
۳. پایان ترم: ۱۰ نمره

سر فصل ها:

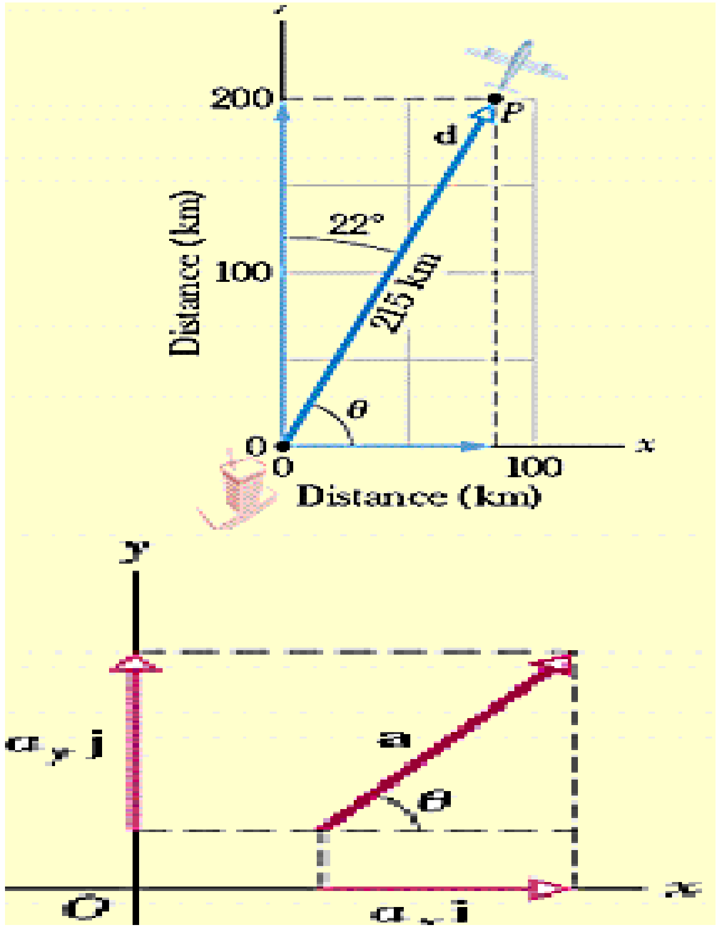
۱. بردارها

۲. سینماتیک

۳. دینامیک

۴. کار، توان، انرژی

۵. مرکز جرم و اندازه حرکت



فصل اول:

مقدمه ای بر بردارها

❑ اهمیت بردارها:

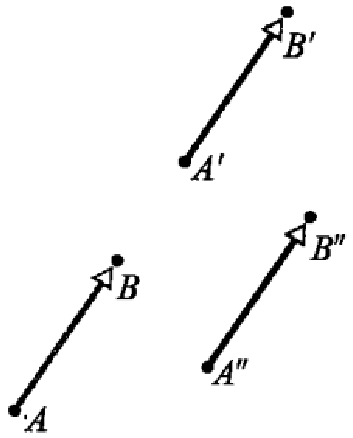
- ❖ فیزیک با تعداد زیادی کمیت سر و کار دارد که هم اندازه و هم جهت دارند.
- ❖ برای توصیف این کمیت‌ها به زبان ریاضی خاصی – زبان بردارها – نیاز دارد.
- ❖ هر نوع جهت گیری یا هدایتی مبتنی بر بردارها است.

بردارها و اسکالرها (نرده ای ها)

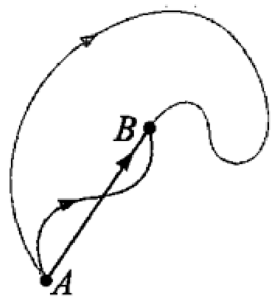
- کمیتهایی که با یک **عدد** و یک یکا به طور کامل مشخص می شوند و از این رو فقط **دارای بزرگی** هستند *کمیتهای نرده ای* می گویند. مانند طول، زمان، چگالی، جرم، انرژی و دما و ...

- کمیتهایی که علاوه بر **اندازه** دارای **جهت** هستند *کمیتهای برداری* نام دارند مانند نیرو، سرعت، شتاب، جابجایی و ...

- **محاسبات مربوط به کمیتهای نرده ای** قواعد **معمولی جبر** است در صورتی که محاسبات مربوط به کمیت های برداری به صورت دیگری تعریف می شود.

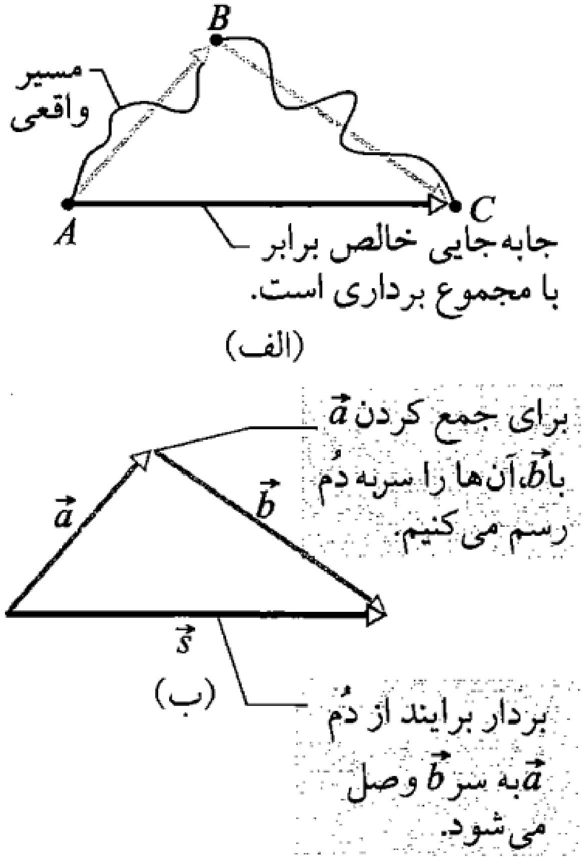


(الف)



(ب)

جمع بردارها به روش هندسی

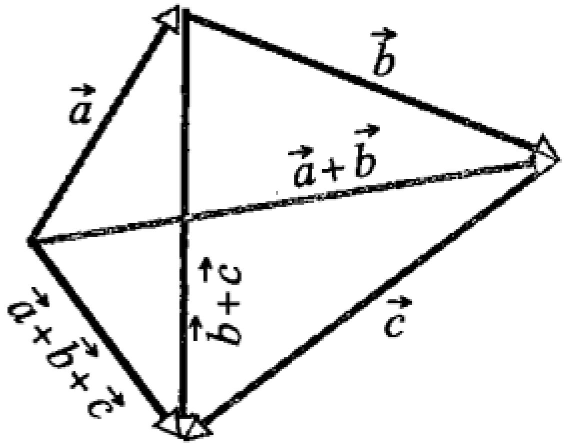


- ذره ای از A تا B حرکت می کند.
- سپس از B تا C حرکت می کند.
- جابه جایی خالص این دو جابه جایی، یک تک جابه جایی از A تا C است.
- AC مجموع برداری (برایند) بردارهای AB و BC است.
- این جمع یک جمع جبری معمولی نیست.

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

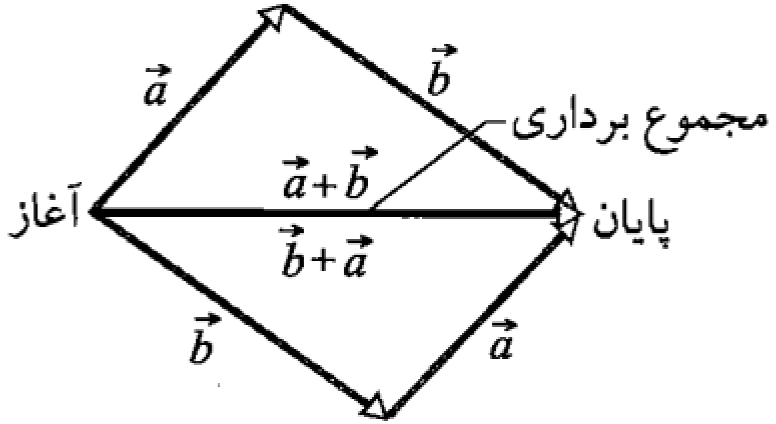
خواص جمع برداری

خاصیت شرکت پذیری دارد



$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (قانون شرکت‌پذیری)

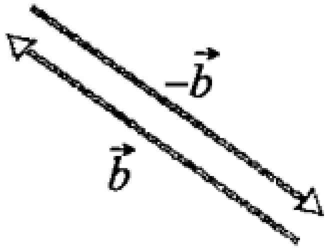
خاصیت جابه جایی دارد



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (قانون جابه‌جایی)

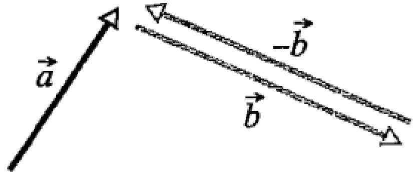
قرینه یک بردار و تفاضل دو بردار

قرینه یک بردار

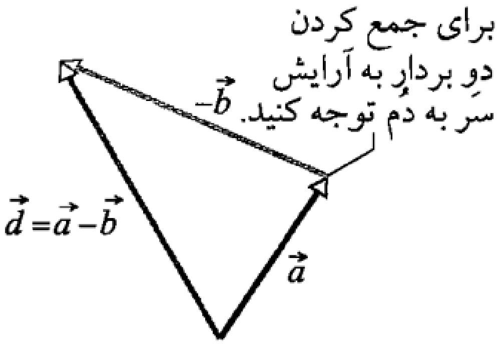


$$\vec{b} + (-\vec{b}) = \circ$$

تفاضل دو بردار



(الف)



(ب)

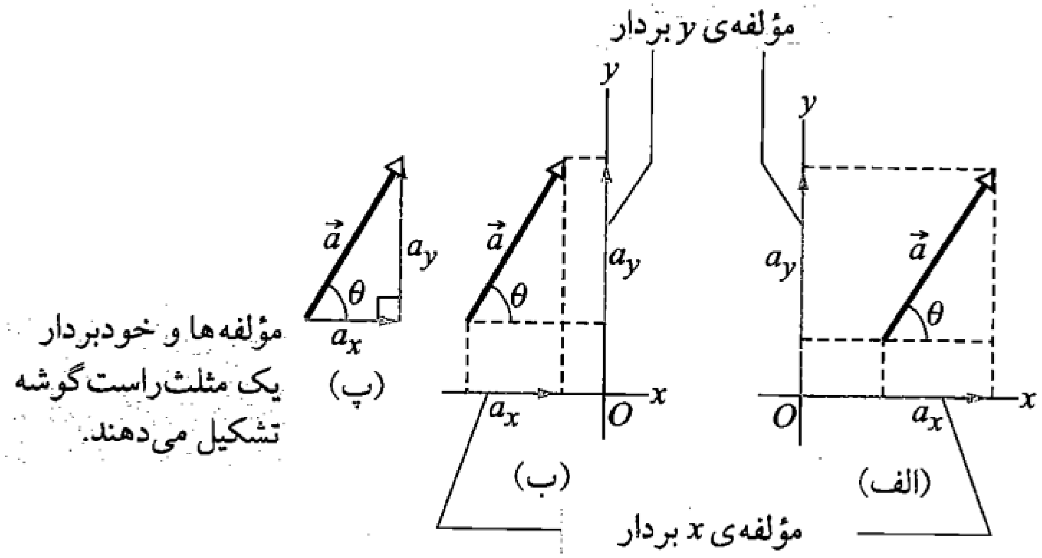
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

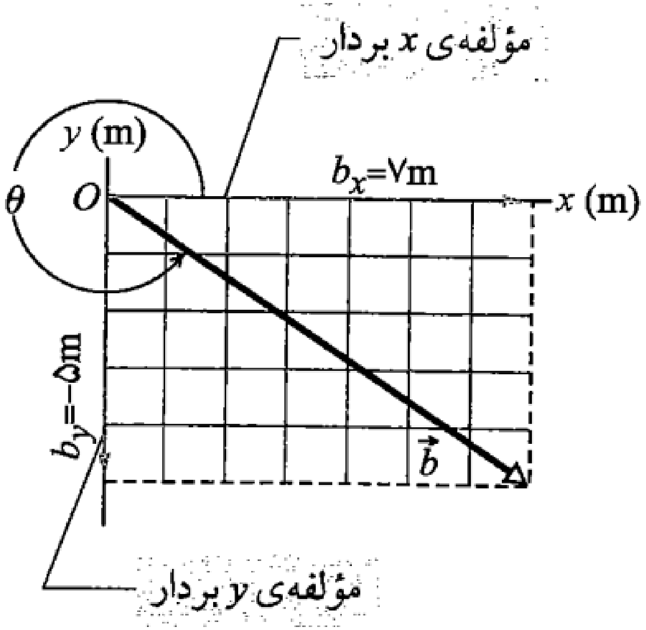
نکته مهم

- فقط بردارهای هم نوع را می توان جمع یا تفریق کرد.

مولفه های بردارها

- مولفه هر بردار، تصویر بردار بر روی یک محور است.
- تجزیه یک بردار، تعیین مولفه های آن بردار است.





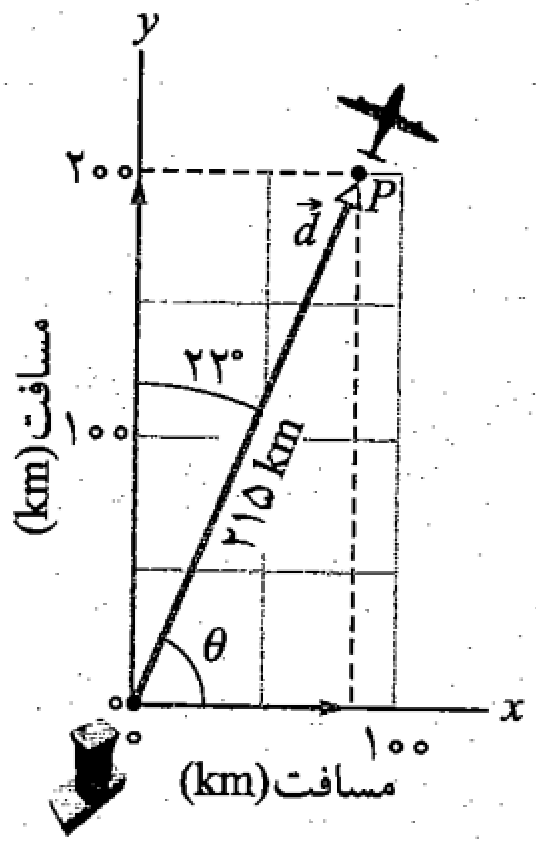
نمادگذاری مؤلفه‌ای

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{و} \quad a_y = a\sin\theta$$

نمادگذاری بزرگی ـ زاویه

$$a = \sqrt{a_x^۲ + a_y^۲} \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

مثال



$$\theta = ۹۰^\circ - ۲۲^\circ = ۶۸^\circ$$

هواپیمای کوچکی در یک روز ابری مسافت ۲۱۵ km را در جهت ۲۲ درجه‌ی خاور محور شمالی می‌پیماید. منظور این است که جهت به طرف شمال (یک راست به سوی شمال) نیست، بلکه از محور شمالی به اندازه‌ی ۲۲ درجه به سوی خاور چرخیده است. هواپیما از نقطه‌ی آغاز حرکتش چه مسافتی را به سمت شمال و چه مسافتی را به سمت خاور پیموده است؟

$$d_x = d\cos\theta = (۲۱۵\,\text{km})(\cos ۶۸^\circ) \Rightarrow$$

$$d_x = ۸۱\,\text{km}$$

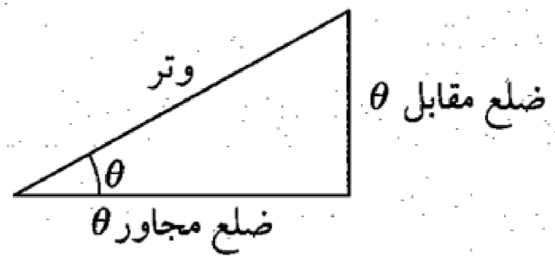
$$d_y = d\sin\theta = (۲۱۵\,\text{km})(\sin ۶۸^\circ) \Rightarrow$$

$$d_y = ۱۹۹\,\text{km} \approx ۲{,}۰ \times ۱۰^{۲}\,\text{km}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}}$$

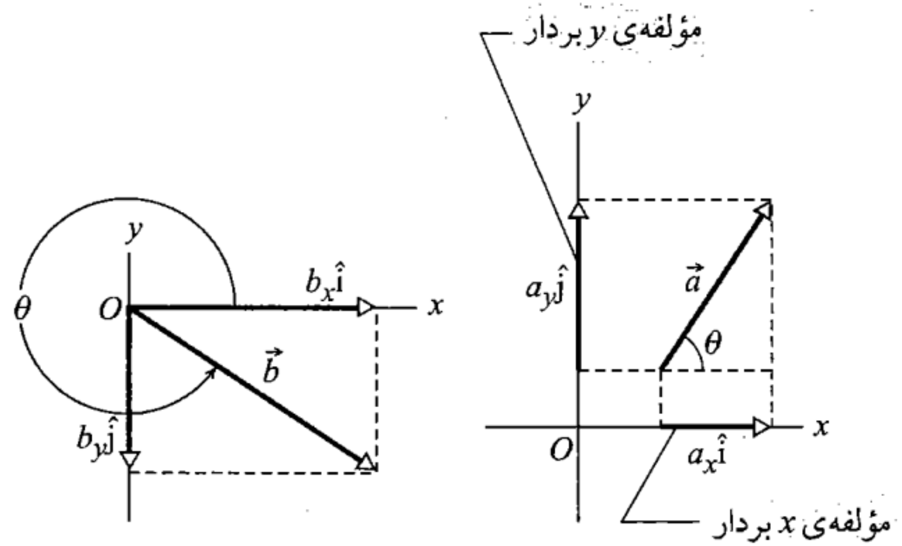
$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta}$$



بردارهای یکه

بردار یکه، برداری است که بزرگی‌اش به طور دقیق ۱ و دارای جهت ویژه‌ای است. این بـردار یکا و بُعد ندارد. تنها هدف از انتخاب بردار یکه مشخص کردن یک جهت است.

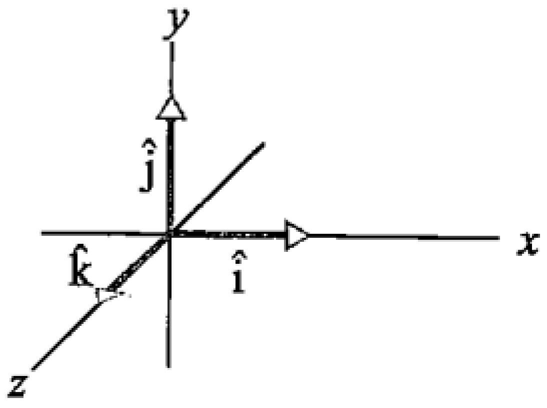


(ب) (الف)

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$$

بردارهای یکه در جهت محورها قرار دارند.



جمع کردن بردارها به کمک مؤلفه‌ها

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} r_x &= a_x + b_x \\ r_y &= a_y + b_y \\ r_z &= a_z + b_z \end{aligned}$$

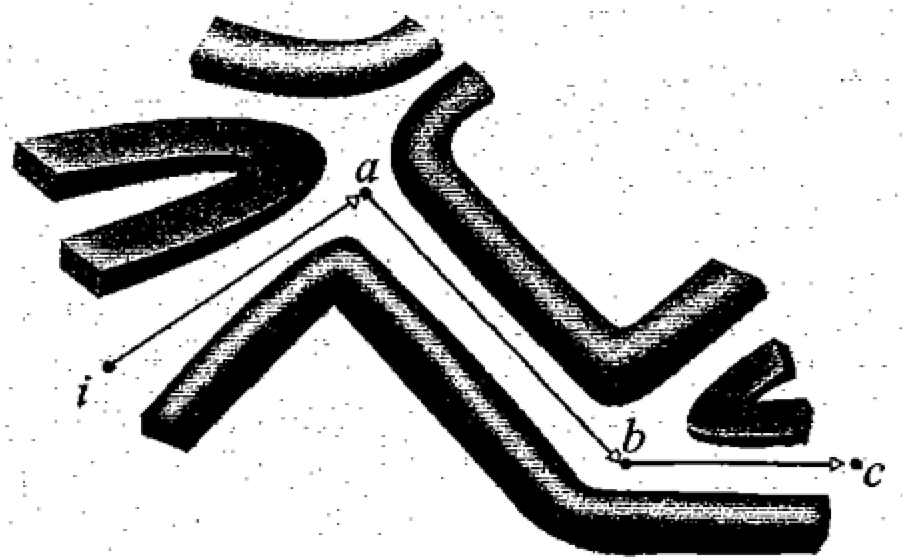
دو بردار به شرطی با هم برابرند که مؤلفه‌های متناظر آن‌ها با هم برابـر باشــند.

تفریق دو بردار به کمک مولفه ها

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Longrightarrow \begin{array}{l} d_x = a_x - b_x \\ d_y = a_y - b_y \\ d_z = a_z - b_z \end{array}$$

$$\vec{d} = d_x\hat{\mathrm{i}} + d_y\hat{\mathrm{j}} + d_z\hat{\mathrm{k}}$$

مثال



ما سه جابه‌جایی را انجام می‌دهیم:

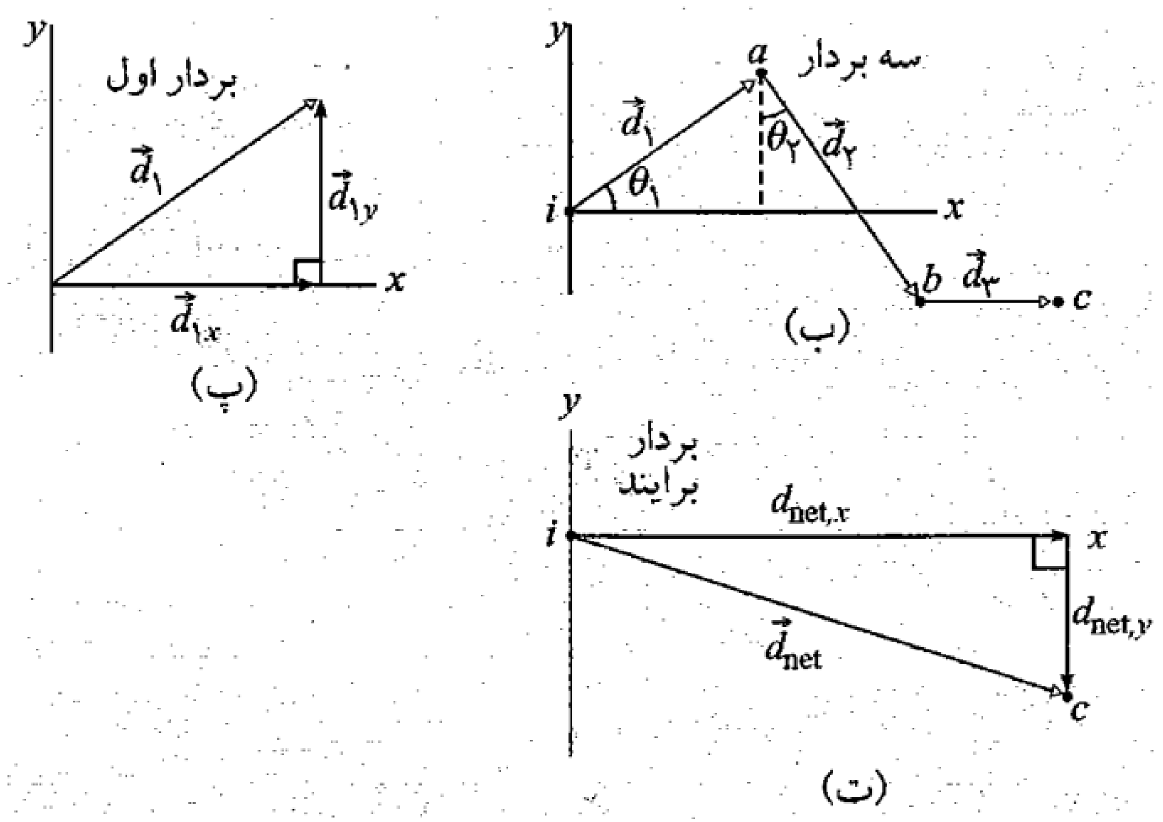
$$d_1 = 6{,}00\,\text{m} \qquad \theta_1 = 40^\circ$$

$$d_2 = 8{,}00\,\text{m} \qquad \theta_2 = 30^\circ$$

$$d_3 = 5{,}00\,\text{m} \qquad \theta_3 = 0^\circ$$

که در آن قسمت آخر با محور x موازی است. هنگام رسیدن به نقطه‌ی c، بزرگی و زاویه‌ی جابه‌جایی برایند ما $\vec{d}_{\text{net}}$، نسبت به نقطه‌ی i چیست؟

حل مثال



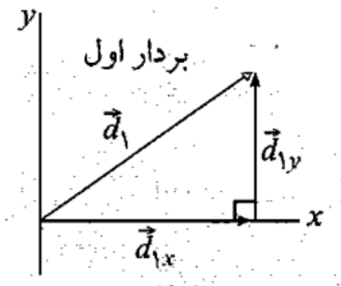
$$d_{۱x} = (۶٫۰۰\,\mathrm{m})\cos ۴۰^\circ = ۴٫۶۰\,\mathrm{m}$$

$$d_{۲x} = (۸٫۰۰\,\mathrm{m})\cos(-۶۰^\circ) = ۴٫۰۰\,\mathrm{m}$$

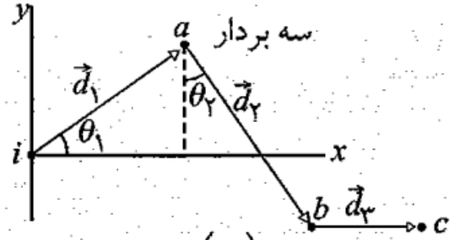
$$d_{۳x} = (۵٫۰۰\,\mathrm{m})\cos ۰^\circ = ۵٫۰۰\,\mathrm{m}$$

$$d_{net,x} = +۴٫۶۰\mathrm{m} + ۴٫۰۰\mathrm{m} + ۵٫۰۰\mathrm{m} = ۱۳٫۶۰\mathrm{m}$$

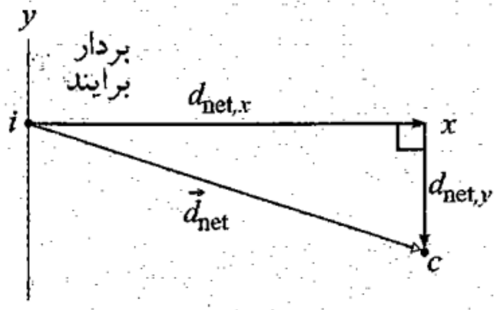
حل مثال



(پ)



(ب)



(ت)

$$d_{۱y} = (۶/۰۰\,\mathrm{m})\sin ۴۰^\circ = ۳/۸۶\,\mathrm{m}$$

$$d_{۲y} = (۸/۰۰\,\mathrm{m})\sin(-۶۰^\circ) = -۶/۹۳\,\mathrm{m}$$

$$d_{۳y} = (۵/۰۰\,\mathrm{m})\sin ۰^\circ = ۰\,\mathrm{m}$$

$$d_{۱net,y} = +۳/۸۶\,\mathrm{m} - ۶/۹۳\,\mathrm{m} + ۰\,\mathrm{m} = -۳/۰۷\,\mathrm{m}$$

$$d_{net} = \sqrt{d_{net,x}^{۲} + d_{net,y}^{۲}}$$

$$d_{net} = \sqrt{(۱۳/۶۰\,\mathrm{m})^۲ + (-۳/۰۷\,\mathrm{m})^۲} \Rightarrow$$

$$d_{net} = ۱۳/۹\,\mathrm{m}$$

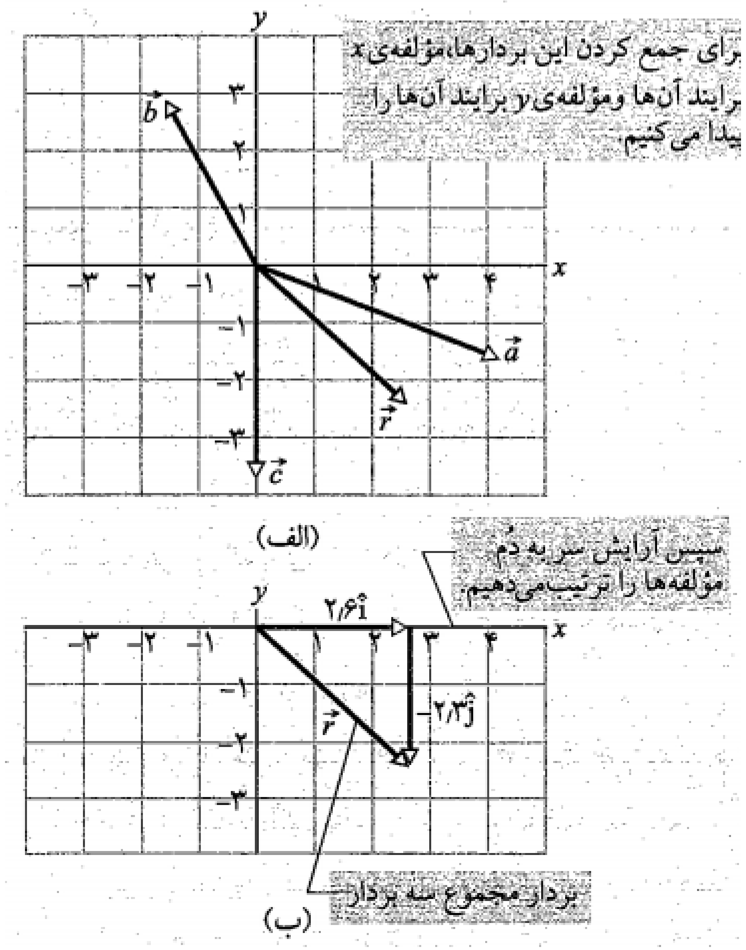
$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{d_{net,y}}{d_{net,x}}\right)$$

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{-۳/۰۷\,\mathrm{m}}{۱۳/۶۰\,\mathrm{m}}\right) \Rightarrow$$

$$\theta = -۱۲/۷^\circ$$

$$-۱۲/۷^\circ + ۱۸۰^\circ = ۱۶۷^\circ$$

مثال



شکل ۳–۱۷ الف سه بردار زیر را نشان می‌دهد:

$$\vec{a} = (۴٫۲\,\mathrm{m})\hat{i} - (۱٫۵\,\mathrm{m})\hat{j}$$

$$\vec{b} = (-۱٫۶\,\mathrm{m})\hat{i} + (۲٫۹\,\mathrm{m})\hat{j}$$

$$\vec{c} = (-۳٫۷\,\mathrm{m})\hat{j}$$

و

مجموع برداری این سه بردار $\vec{r}$، که آن هم در شکل رسم شده است، چیست؟

حل مثال

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$

$$r_x = ۴/۲\,\text{m} - ۱/۶\,\text{m} + ۰ = ۲/۶\,\text{m}$$

$$r_y = a_y + b_y + c_y$$

$$r_y = -۱/۵\,\text{m} + ۲/۹\,\text{m} - ۳/۷\,\text{m} = -۲/۳\,\text{m}$$

$$\vec{r} = (۲/۶\,\text{m})\hat{i} - (۲/۳\,\text{m})\hat{j}$$

$$r = \sqrt{(۲/۶\,\text{m})^{۲} + (-۲/۳\,\text{m})^{۲}} \Rightarrow$$

$$r \approx ۳/۵\,\text{m}$$

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{-۲/۳\,\text{m}}{۲/۶\,\text{m}}\right)$$

ضرب بردارها

ضرب کردنِ یک بردار در یک نرده‌ای

اگر بردار $\vec{a}$ را در نرده‌ای s ضرب کنیم، بردار جدیدی به دست می‌آید. بزرگی این بردار برابر با حاصل‌ضرب بزرگی بردار $\vec{a}$ در قدر مطلق s است. جهت این بردار، اگر s مثبت باشد همسو با بردار $\vec{a}$، و اگر s منفی باشد ناهمسو با بردار $\vec{a}$ است. برای تقسیم کردن بردار $\vec{a}$ بر s، بردار $\vec{a}$ را در $\frac{1}{s}$ ضرب می‌کنیم.

ضرب بردارها

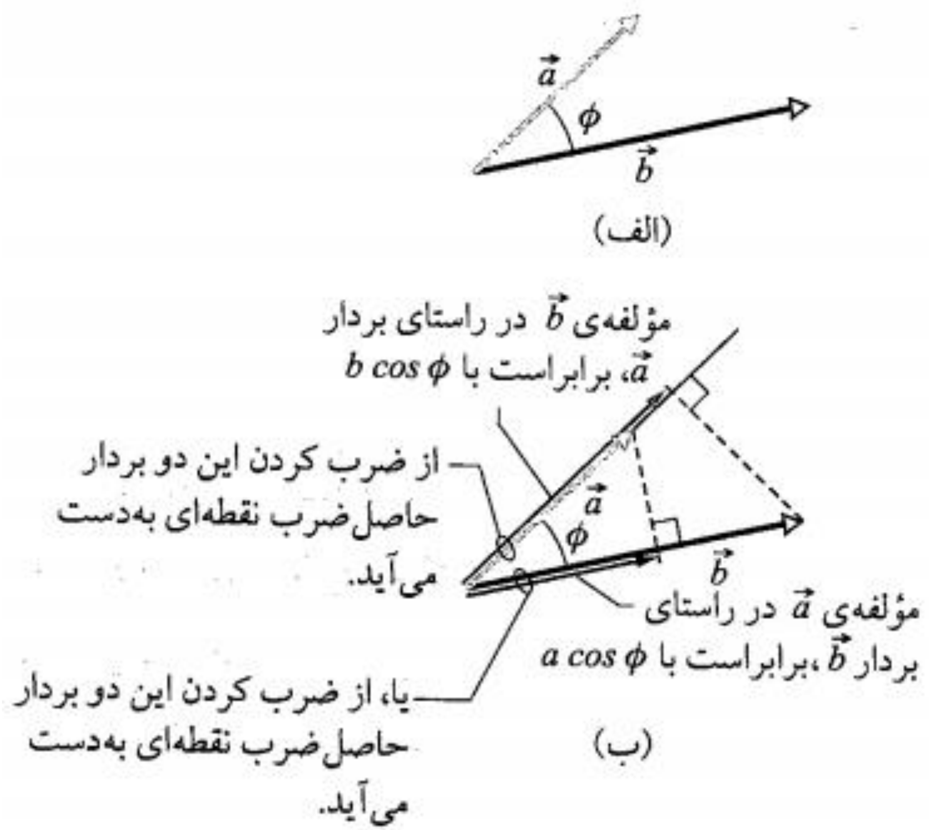
ضرب کردنِ یک بردار در یک نرده‌ای

اگر بردار $\vec{a}$ را در نرده‌ای s ضرب کنیم، بردار جدیدی به دست می‌آید. بزرگی این بردار برابر با حاصل‌ضرب بزرگی بردار $\vec{a}$ در قدر مطلق s است. جهت این بردار، اگر s مثبت باشد همسو با بردار $\vec{a}$، و اگر s منفی باشد ناهمسو با بردار $\vec{a}$ است. برای تقسیم کردن بردار $\vec{a}$ بر s، بردار $\vec{a}$ را در $\frac{1}{s}$ ضرب می‌کنیم.

ضرب کردن یک بردار در یک بردار

برای ضرب کردن یک بردار در یک بردار دو راه وجود دارد؛ حاصل یکی از این ضرب کردن‌ها یک مقدار نرده‌ای است (و ***ضرب نرده‌ای*** نامیده می‌شود)، و حاصل ضرب کردن دیگر یک بردار جدید است (و ***ضرب برداری*** نام دارد).

ضرب اسکالر (ضرب نرده ای)



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi$$

هرگاه زاویه‌ی میان دو بردار ϕ، صفر باشد، مؤلفه‌ی یک بردار بر روی بردار دیگر بیشینه است و در نتیجه، حاصل‌ضرب بردارها نیز بیشینه خواهد بود. هرگاه زاویه‌ی ϕ برابر با ۹۰ درجه باشد، مؤلفه‌ی یک بردار بر روی بردار دیگر صفر است و در نتیجه حاصل‌ضرب بردارها نیز صفر خواهد بود.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a\cos\phi)(b) = (a)(b\cos\phi) \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

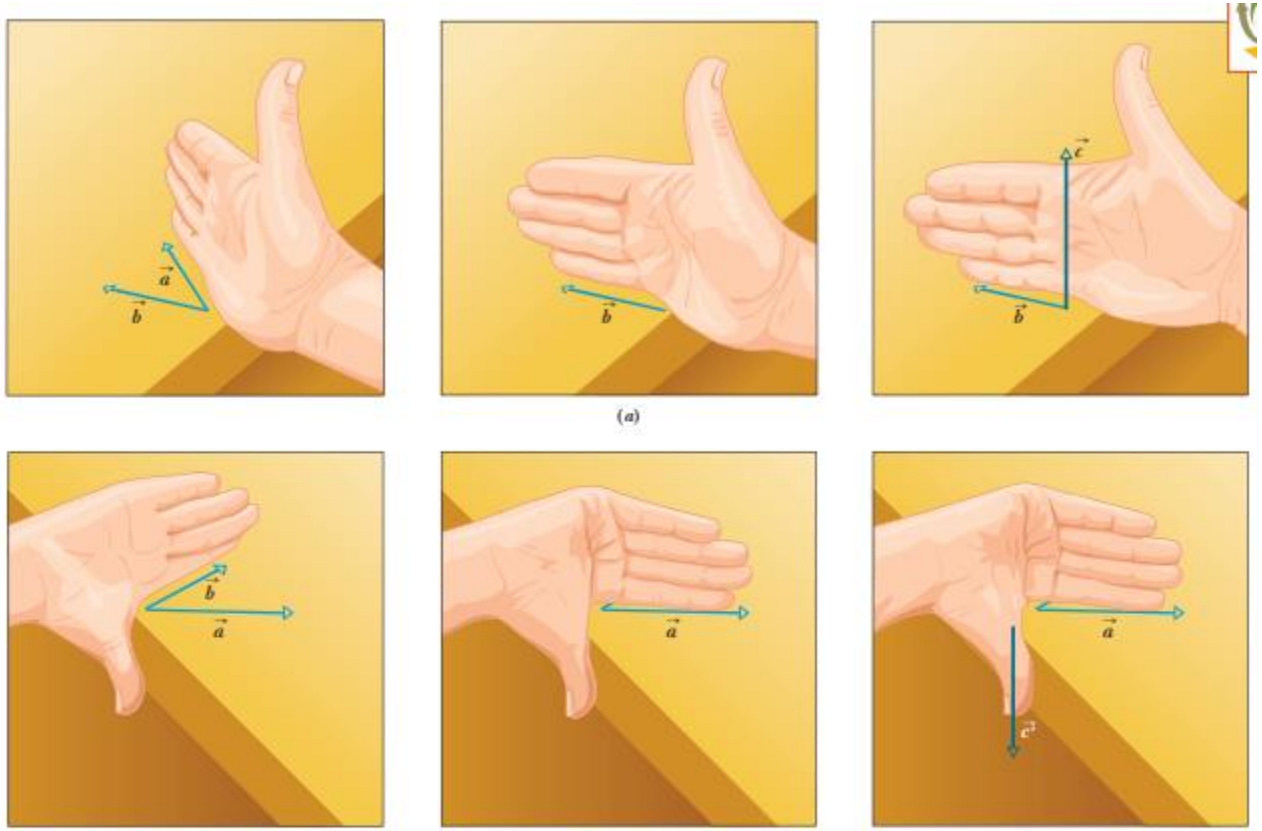
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

ضرب برداری

هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی یا پاد موازی باشند، داریم $\vec{a}\times\vec{b}=0$. بزرگی $\vec{a}\times\vec{b}$، که به‌صورت $|\vec{a}\times\vec{b}|$ نوشته می‌شود، وقتی بیشینه است که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند.

$$c = \vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\phi$$



$$\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})$$

$$a_x\hat{i}\times b_x\hat{i} = a_xb_x(\hat{i}\times\hat{i}) = 0$$

$$a_x\hat{i}\times b_y\hat{j} = a_xb_y(\hat{i}\times\hat{j}) = a_xb_y\hat{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z - b_ya_z)\hat{i} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{j} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{k}$$

مثال

زاویه‌ی ϕ میان بردارهای $\vec{a} = ۳/۰\hat{i} - ۴/۰\hat{j}$ و $\vec{b} = -۲/۰\hat{i} + ۳/۰\hat{k}$ چیست؟

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi$$

$$a = \sqrt{(۳/۰)^۲ + (-۴/۰)^۲} = ۵/۰۰$$

$$b = \sqrt{(-۲/۰)^۲ + (۳/۰)^۲} = ۳/۶۱$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (۳/۰\hat{i} - ۴/۰\hat{j}) \cdot (-۲/۰\hat{i} + ۳/۰\hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (۳/۰\hat{i}) \cdot (-۲/۰\hat{i}) + (۳/۰\hat{i}) \cdot (۳/۰\hat{k})$$

$$+ (-۴/۰\hat{j}) \cdot (-۲/۰\hat{i}) + (-۴/۰\hat{j}) \cdot (۳/۰\hat{k})$$

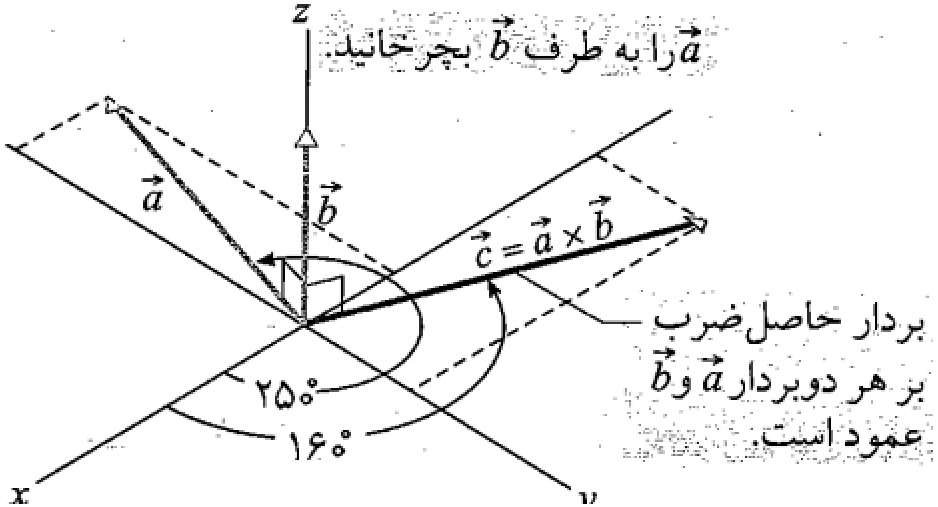
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -(۶/۰)(۱) + (۹/۰)(۰) + (۸/۰)(۰) - (۱۲)(۰) = -۶/۰$$

$$-۶/۰ = (۵/۰۰)(۳/۶۱)\cos\phi$$

$$\phi = \cos^{-۱}\frac{-۶/۰}{(۵/۰۰)(۳/۶۱)} \Rightarrow$$

$$\phi = ۱۰۹^\circ \approx ۱۱۰^\circ$$

مثال



در شکل ۳-۲۰، بردار $\vec{a}$، که در صفحه‌ی xy قرار دارد، دارای بزرگی ۱۸ واحد و زاویه‌ی آن نسبت به محور x مثبت ۲۵۰ درجه است. بردار $\vec{b}$ در جهت محور z مثبت قرار دارد و بزرگی‌اش ۱۲ واحد است. حاصل ضرب برداری $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ چیست؟

$$c = ab\sin\phi = (۱۸)(۱۲)(\sin ۹۰^\circ) = ۲۱۶$$

$$۲۵۰^\circ - ۹۰^\circ = ۱۶۰^\circ$$

مثال

اگر داشته باشیم $\vec{a} = ۳\hat{i} - ۴\hat{j}$ و $\vec{b} = -۲\hat{i} + ۳\hat{k}$، حاصل‌ضرب برداری $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ چیست؟

$$\vec{c} = (۳\hat{i} - ۴\hat{j}) \times (-۲\hat{i} + ۳\hat{k})$$

$$\vec{c} = ۳\hat{i} \times (-۲\hat{i}) + ۳\hat{i} \times ۳\hat{k} + (-۴\hat{j}) \times (-۲\hat{i}) + (-۴\hat{j}) \times ۳\hat{k}$$

$$\vec{c} = -۶(۰) + ۹(-\hat{j}) + ۸(-\hat{k}) - ۱۲\hat{i} \Rightarrow$$

$$\vec{c} = -۱۲\hat{i} - ۹\hat{j} - ۸\hat{k}$$