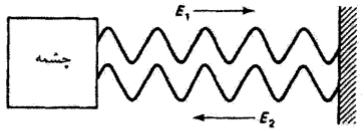
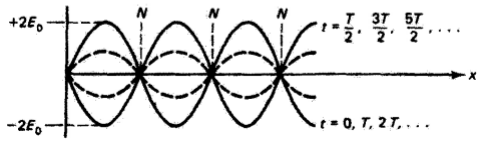
# فیزیک نور موجی

جلسه چهارم

# فصل دوم

برهم نهی امواج



# اصل برهم نهی

$$\begin{cases} \psi_1 \\ \psi_2 \end{cases} \longrightarrow \psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$\psi = a\psi_1 + b\psi_2$$

**اصل برهم نهی:** جابجایی برایند، حاصل جمع جابجایی های مستقل از یکدیگر موج های ترکیب شونده است.

# برهم نهش امواج الکترومغناطیسی

در حالت کلی، سمتگیری میدان های الکتریکی یا مغناطیسی را باید در نظر گرفت. برای مثال، برهم نهی موج هایی که میدان های الکتریکی شان عمود برهم باشند، نتیجه ای متفاوت با برهم نهی موج های با میدان های موازی خواهد داشت.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

# برهم نهش امواج با بسامد یکسان

$$E = E_{\circ} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t + \varphi_{\circ})$$

$$E = E_{\circ} \sin(\omega t + \alpha) \qquad \alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{\circ}$$

$$\alpha_{۲} - \alpha_{۱} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_{۲} - \mathbf{r}_{۱}) + (\varphi_{\circ ۲} - \varphi_{\circ ۱})$$

اختلاف فاز دو موج هم بسامد وقتی به یک نقطه از فضا می رسند.

اختلاف راه

اختلاف فاز اولیه

# برهم نهش امواج با بسامد یکسان

$$E_1 = E_{01} \sin(\omega t + \alpha_1)$$

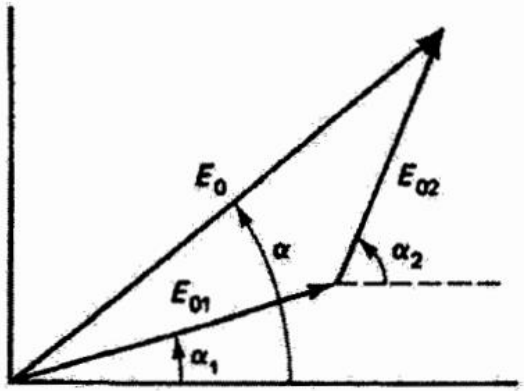
$$E_2 = E_{02} \sin(\omega t + \alpha_2)$$

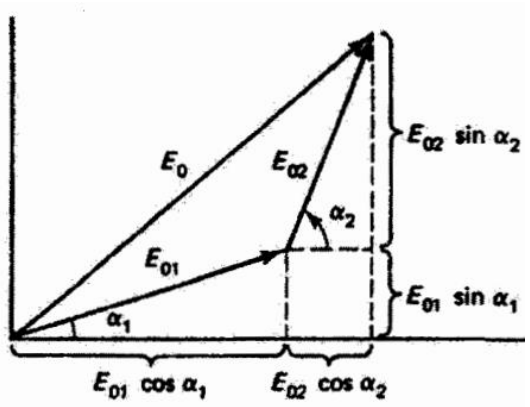
$$E_R = E_1 + E_2 = E_{01} \sin(\omega t + \alpha_1) + E_{02} \sin(\omega t + \alpha_2)$$

$$\sin(A + B) \equiv \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$E_R = (E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2) \sin \omega t + (E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2) \cos \omega t$$

# برهم نهش امواج با بسامد یکسان




$$E_\circ \cos\alpha = E_{\circ_1}\cos\alpha_1 + E_{\circ_2}\cos\alpha_2$$

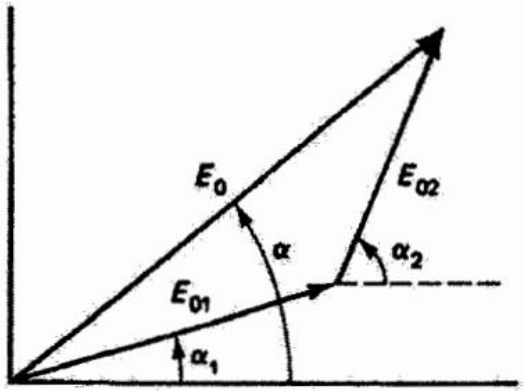
$$E_\circ \sin\alpha = E_{\circ_1}\sin\alpha_1 + E_{\circ_2}\sin\alpha_2$$

$$E_R = E_\circ \cos\alpha \sin\omega t + E_\circ \sin\alpha \cos\omega t$$

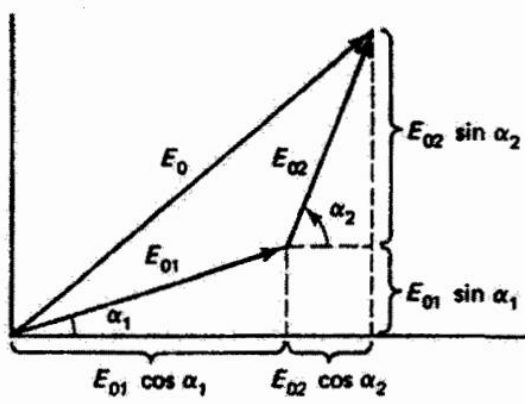
$$E_R = E_\circ \sin(\omega t + \alpha)$$

موج برایند $E_R$ موج هماهنگ دیگری است با بسامد یکسان $\omega$ و با دامنهٔ $E_\circ$ و فاز $\alpha$

# برهم نهش امواج با بسامد یکسان

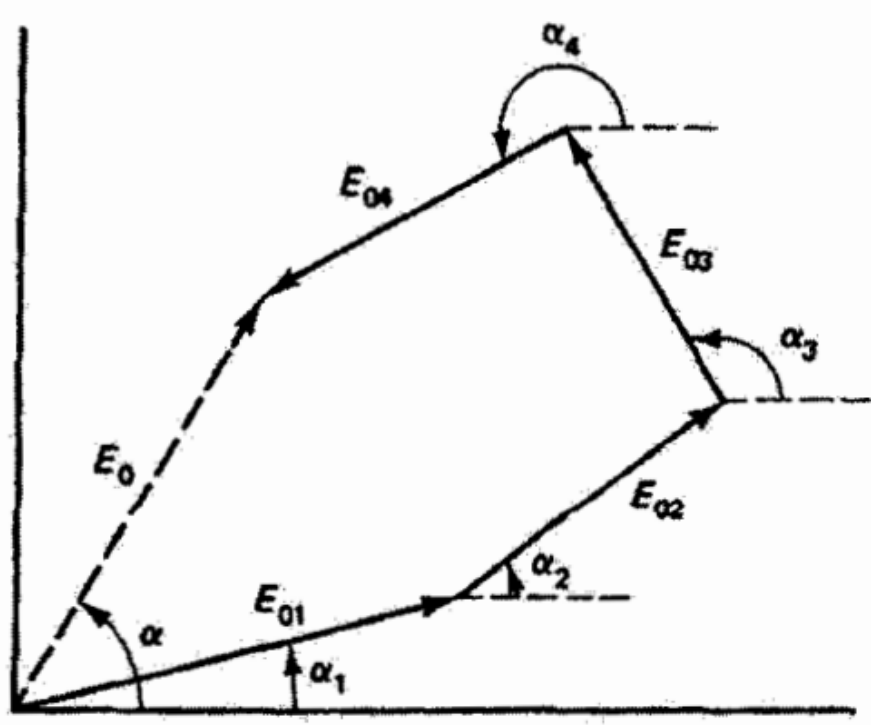



$$E_{\circ}^{2} = E_{\circ_1}^{2} + E_{\circ_2}^{2} + 2E_{\circ_1}E_{\circ_2}\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$




$$\tan\alpha = \frac{E_{\circ_1}\sin\alpha_1 + E_{\circ_2}\sin\alpha_2}{E_{\circ_1}\cos\alpha_1 + E_{\circ_2}\cos\alpha_2}$$

# برهم نهش $N$ موج با بسامد یکسان




$$E_0^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0_i} \sin\alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0_i} \cos\alpha_i\right)^2$$

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0_i}^2 + 2\sum_{j>i}^{N}\sum_{i=1}^{N} E_{0_i}E_{0_j}\cos(\alpha_j - \alpha_i)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{0_i}\sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^{N} E_{0_i}\cos\alpha_i}$$

# مثال

نتیجهٔ برهم‌نهش امواج هماهنگ زیر را تعیین کنید:

$$E_1 = 7\sin(\omega t + \pi/3)$$

$$E_2 = 12\cos(\omega t + \pi/4)$$

$$E_3 = 20\sin(\omega t + \pi/5)$$

# حل مثال

$$E_۲ = ۱۲\sin(\omega t + \pi/۴ + \pi/۲) = ۱۲\sin(\omega t + ۳\pi/۴)$$

$$E_{\circ}^{۲} = \left[۷\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) + ۱۲\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) + ۲۰\sin\left(\frac{\pi}{۵}\right)\right]^{۲} + \left[۷\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right) + ۱۲\cos\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) + ۲۰\cos\left(\frac{\pi}{۵}\right)\right]^{۲}$$

$$E_{\circ}^{۲} = ۲۶٫۳۰۳^{۲} + ۱۱٫۱۹۵^{۲}$$

$$E_{\circ} = ۲۸٫۶$$

# حل مثال

$$\tan\alpha = \frac{۲۶٫۳۰۳}{۱۱٫۱۹۵} \quad \text{و} \quad \alpha = ۱٫۱۷ \text{ (رادیان)}$$

$$E_{\circ} = ۲۸٫۶ \sin(\omega t + ۱٫۱۷) = ۲۸٫۶ \sin(\omega t + ۰٫۳۷۲\pi)$$

# چشمه های کاتوره ای و همدوس

چشمه های با فازهای کاتوره ای و دامنه و بسامد یکسان

$\alpha_i - \alpha_j$ ⟵ کاتوره‌ای

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0_i}^2 + 2\sum_{j>i}^{N}\sum_{i=1}^{N} E_{0_i}E_{0_j}\cos(\alpha_j - \alpha_i)$$

$$\sum_{j>i}^{N}\sum_{i=1}^{N} E_{0_i}E_{0_j}\cos(\alpha_j - \alpha_i) \longleftarrow \text{صفر}$$

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0_i}^2 = NE_{0_1}^2$$

تابیدگی برایند $N$ چشمهٔ یکسان اما با فازهای کاتوره‌ای برابر است با مجموع تابیدگیهای انفرادی.

چشمه های همدوس از یک نوع

$\alpha$ها ⟵ برابر

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0_i}^2 + 2\sum_{j>i}^{N}\sum_{i=1}^{N} E_{0_i}E_{0_j}$$

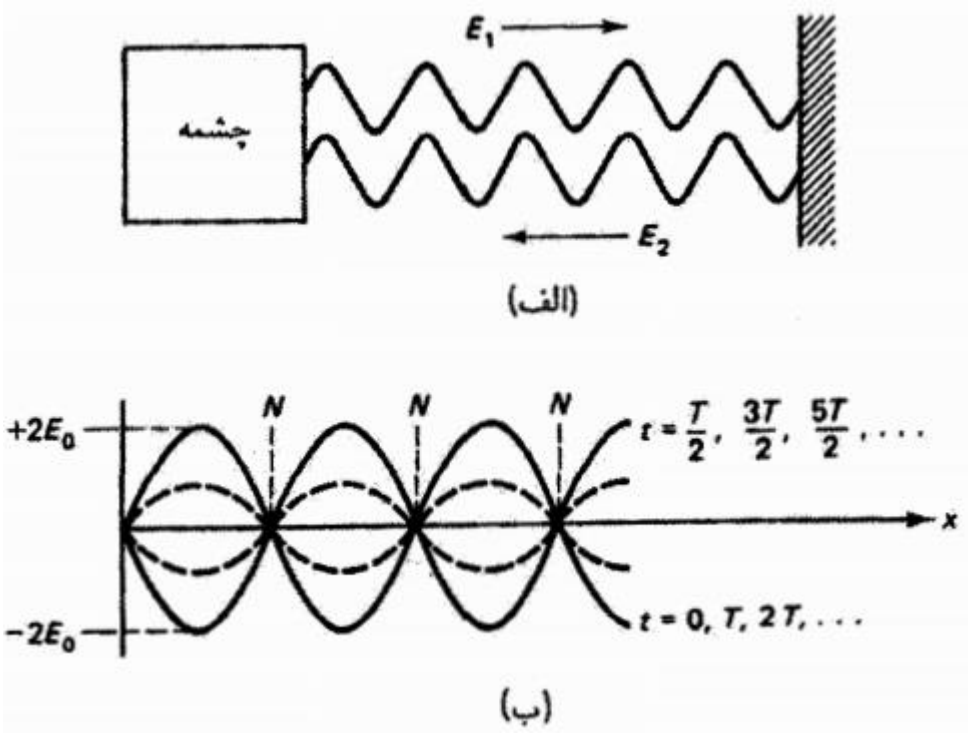
$$E_0^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0_i}\right)^2 = (NE_{0_1})^2 = N^2E_{0_1}^2$$

$$E_0 = NE_{0_1}$$

تابیدگی برایند $N$ چشمهٔ یکسان

همدوس، که همفاز با یکدیگر تابش می‌کنند، $N^2$ برابر تابیدگی هر یک از چشمه‌ها است.

# امواج ساکن




$$E_1 = E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$E_2 = E_0 \sin(kx + \omega t)$$

$$E_R = E_1 + E_2 = E_0 [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)]$$

$$\alpha = kx + \omega t \qquad \beta = kx - \omega t$$

$$\sin\alpha + \sin\beta \equiv 2 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$E_R = (2E_0 \sin kx) \cos\omega t$$ موج ساکن

# امواج ساکن

$$E_R = (۲E_۰ \sin kx)\cos \omega t \qquad E_R = A(x)\cos \omega t$$

$$A(x) = ۲E_۰ \sin kx$$

$$A(x) = ۰ \longrightarrow E_R = ۰$$
$$\sin kx = ۰$$

$$kx = \frac{۲\pi x}{\lambda} = m\pi, \qquad m = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots \qquad x = m\left(\frac{\lambda}{۲}\right) = ۰, \frac{\lambda}{۲}, \lambda, \frac{۳\lambda}{۲}, \ldots$$

گره موج ساکن

اندازهٔ نصف طول‌موج از هم فاصله دارند.