جلسه اول

الکترومغناطیس 1

فصل اول

آنالیز برداری (دستگاه مختصات متعامد)

دستگاه مختصات متعامد

سطوح $\begin{cases} q_1 = cte \\ q_2 = cte \\ q_3 = cte \end{cases}$ بردارهای یکه $\begin{cases} \hat{a}_1 \perp q_1 = cte \\ \hat{a}_2 \perp q_2 = cte \\ \hat{a}_3 \perp q_3 = cte \end{cases}$

شرط دستگاه های مختصات متعامد: $\hat{a}_i \cdot \hat{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

المان طول، سطح و حجم در دستگاه مختصات متعامد

$$S = S(q_1, q_2, q_3)$$

المان طول: $d\vec{s} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{s}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{s}}{\partial q_3} dq_3$

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial q_1} = \left| \frac{\partial \vec{s}}{\partial q_1} \right| \hat{a}_i \\ \left| \frac{\partial \vec{s}}{\partial q_1} \right| = h_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial s}{\partial q_i} = h_i \hat{a}_i}$$

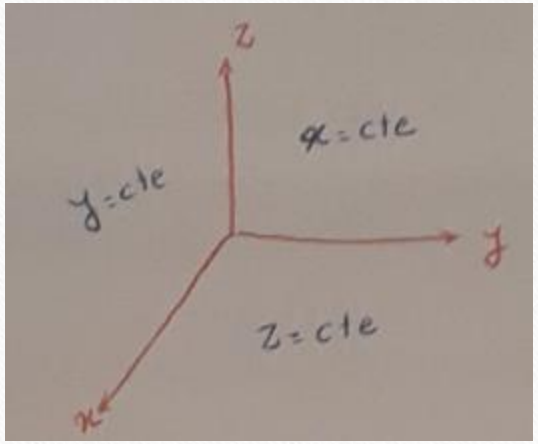
$$d\vec{s} = h_1 dq_1 \hat{a}_1 + h_2 dq_2 \hat{a}_2 + h_3 dq_3 \hat{a}_3 = \sum_{i=1}^{3} h_i dq_i \hat{a}_i$$

$\boxed{d\vec{s} = \sum_{i=1}^{3} h_i dq_i \hat{a}_i}$ «المان طول»

$$d\vec{A} = h_2 h_3 dq_2 dq_3 \hat{a}_1 + h_1 h_3 dq_1 dq_3 \hat{a}_2 + h_1 h_2 dq_1 dq_2 \hat{a}_3$$

$$dv = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

دستگاه مختصات دکارتی



$$\begin{cases} q_1 = x = cte \\ q_2 = y = cte \\ q_3 = z = cte \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \hat{i} \perp x = cte \\ \hat{a}_2 = \hat{j} \perp y = cte \\ \hat{a}_3 = \hat{k} \perp z = cte \end{cases}$$

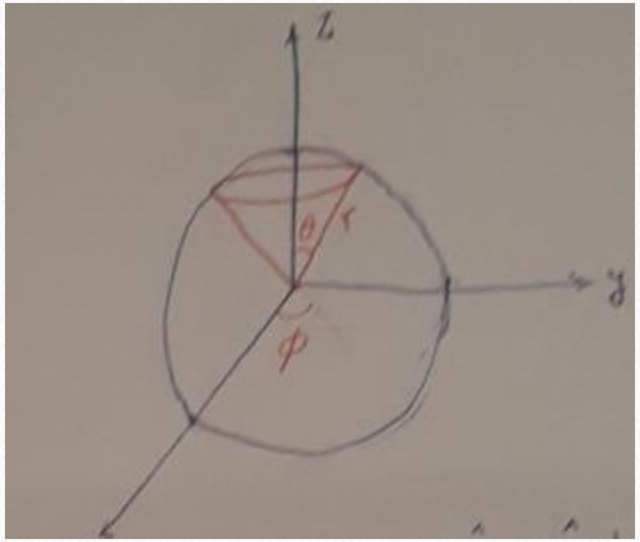
$$\vec{S} = x\,\hat{a}_1 + y\,\hat{a}_2 + z\,\hat{a}_3$$

$$d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

$$d\vec{A} = dy\,dz\,\hat{i} + dx\,dz\,\hat{j} + dx\,dy\,\hat{k}$$

$$dV = dx\,dy\,dz$$

دستگاه مختصات کروی



$$\begin{cases} \hat{a}_r = \hat{r} \perp r = cte \\ \hat{a}_\theta = \hat{\theta} \perp \theta = cte \\ \hat{a}_\phi = \hat{\phi} \perp \phi = cte \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{z}{r}\right) \\ \phi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\vec{S} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (r\sin\theta\cos\phi)\hat{i} + (r\sin\theta\sin\phi)\hat{j} + (r\cos\theta)\hat{k}$$

دستگاه مختصات کروی

$$h_i = \left|\frac{\partial \vec{S}}{\partial q_i}\right| \Rightarrow \begin{cases} h_r = \left|\frac{\partial \vec{S}}{\partial r}\right| = \left|\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}\right| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta} = 1 \\ h_\theta = \left|\frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta}\right| = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta} = r \\ h_\phi = \left|\frac{\partial \vec{S}}{\partial \phi}\right| = \left|-r\sin\theta\sin\phi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\,\hat{j}\right| = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_r = 1 \\ h_\theta = r \\ h_\phi = r\sin\theta \end{cases}$$

مثال

مطلوبست محاسبهٔ بردارهای یکه $\hat{r}$ ، $\hat{\theta}$ ، $\hat{\phi}$ برحسب بردارهای یکه دستگاه مختصات دکارتی:

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial q_i} = h_i \hat{a}_i \quad \Rightarrow \quad \hat{a}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{S}}{\partial q_i}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \dfrac{1}{h_r} \dfrac{\partial \vec{S}}{\partial r} \\ \hat{\theta} = \dfrac{1}{h_\theta} \dfrac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} \\ \hat{\phi} = \dfrac{1}{h_\phi} \dfrac{\partial \vec{S}}{\partial \phi} \end{cases} \qquad \begin{cases} h_r = 1 \\ h_\theta = r \\ h_\phi = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{S} = r\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

ادامه مثال

$$
\begin{cases}
\hat{r} = \dfrac{\partial \vec{S}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k} \\[2ex]
\hat{\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r}\left(r\cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} - r\sin\theta\,\hat{k}\right) = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k} \\[2ex]
\hat{\varphi} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(-r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{j}\right) = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}
$$

مثال 2

مطلوبست محاسبهٔ $\hat{i}$، $\hat{j}$، $\hat{k}$ برحسب بردارهای یکه دستگاه کروی

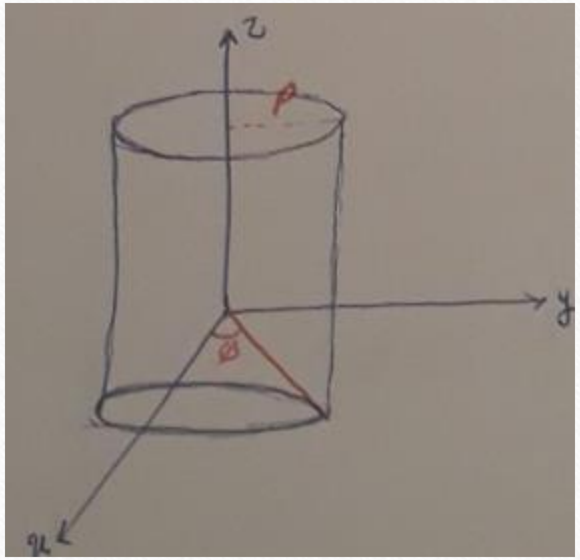
$$A^{-1} = \tilde{A}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix}$$

المان های خطی، سطحی، و حجمی در دستگاه مختصات کروی

$$
\begin{cases}
d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi} \\
d\vec{A} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\hat{r} + r\sin\theta\,dr\,d\varphi\,\hat{\theta} + r\,dr\,d\theta\,\hat{\varphi} \\
dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi
\end{cases}
$$

دستگاه مختصات استوانه ای دوار



$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq \infty \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ -\infty \leq z \leq +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

دستگاه مختصات استوانه ای دوار

$$\vec{S} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \rho\cos\varphi\,\hat{i} + \rho\sin\varphi\,\hat{j} + z\hat{k}$$

$$h_i = \left|\frac{\partial \vec{S}}{\partial q_i}\right|$$

$$\begin{cases} h_1 = h_\rho = \left|\frac{\partial \vec{S}}{\partial \rho}\right| = \left|\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 \\ h_2 = h_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi}\right| = \left|-\rho\sin\varphi\,\hat{i} + \rho\cos\varphi\,\hat{j}\right| = \sqrt{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \rho \\ h_3 = h_z = \left|\frac{\partial \vec{S}}{\partial z}\right| = 1 \end{cases}$$

مثال

تمرین: بردارهای یکه در دستگاه مختصات استوانه‌ای را برحسب بردارهای یکه دستگاه مختصات دکارتی $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ بدست آورید:

$$\vec{S} = \rho\cos\phi\,\hat{i} + \rho\sin\phi\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

$$\begin{cases} \hat{\rho} = \dfrac{1}{h_\rho}\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial \rho} = \cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j} \\ \hat{\phi} = \dfrac{1}{h_\phi}\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial \phi} = \dfrac{1}{\rho}\left[-\rho\sin\phi\,\hat{i} + \rho\cos\phi\,\hat{j}\right] = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j} \\ \hat{k} = \dfrac{1}{h_z}\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial z} = \hat{k} \end{cases}$$

المان خطی، سطحی، حجمی در مختصات استوانه ای

$$\begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\phi = \rho \\ h_z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{المان خطی: } d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho\, d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{k} \\ \text{المان سطحی: } d\vec{A} = \rho\, d\phi\, dz\,\hat{\rho} + d\rho\, dz\,\hat{\phi} + \rho\, d\rho\, d\phi\,\hat{k} \\ \text{المان حجمی: } dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \end{cases}$$

انتگرال های کاربردی

$$\int f\, d\vec{l}$$

$$\int f\, d\vec{A}$$

$$\int f\, dV$$

مثال

مثال: در منطقه ای یک توزیع حجمی بار وجود دارد، چگالی حجمی بار در این منطقه توسط تابع زیر داده می‌شود
مطلوبست محاسبهٔ مقدار بار موجود در استوانه‌ای هم محور با محور z ها به طول l و شعاع واحد.

$$\rho_v = \frac{1}{(\rho^2+a^2)^2}$$

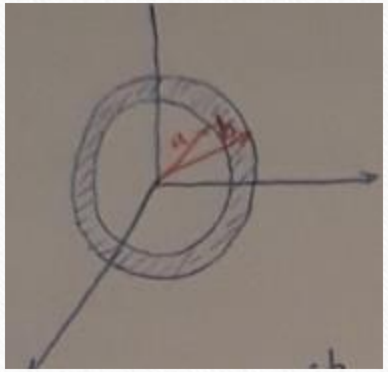
$$\rho_v = \frac{dq}{dv} \Rightarrow q = \int \rho_v \, dv$$

حل

$$q = \int_0^{l} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} \frac{1}{(\rho^2+a^2)^2}\, \rho\, d\rho\, d\phi\, dz = \int_{\rho=0}^{1} \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^2} d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{l} dz}_{l} \quad \begin{cases} \rho^2+a^2 = u \\ 2\rho\, d\rho = du \end{cases}$$

$$= 2\pi l \int \frac{du}{2u^2} = 2\pi l \left[-\frac{1}{2u}\right] = 2\pi l \left[-\frac{1}{2(\rho^2+a^2)}\right]_0^1 = \pi l \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{1+a^2}\right]$$

مثال



مثال: چگالی حجمی بار در منطقه‌ای مطابق رابطه $\rho_v = \frac{A}{r}$ تعریف می‌شود. مطلوبست محاسبهٔ مقدار بار موجود در حجم یک پوسته کروی هم‌مرکز با مبدأ به شعاع داخلی $r=a$ و شعاع خارجی $r=b$.

$$q=\int \rho_v \, dv = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=a}^{b} \frac{A}{r}\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_a^b \underbrace{\frac{Ar^2}{r}}_{Ar} dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \underbrace{\left[\frac{A}{2} r^2\right]_a^b}_{\frac{A}{2}[b^2-a^2]} \times \underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}_{-(-1-1)} \times 2\pi = 2\pi A\left[b^2-a^2\right]$$

انتگرال های دیگر

$$\int \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

$$\int \vec{f} \times d\vec{l}$$

$$\int \vec{f} \cdot d\vec{A}$$

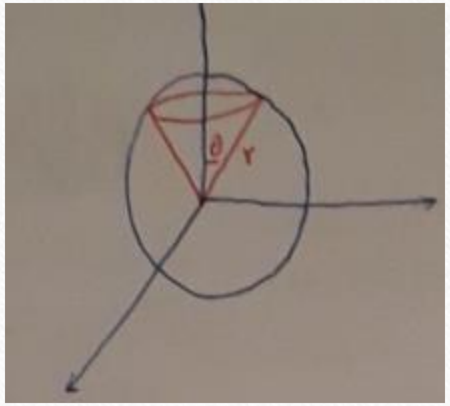
$$\int \vec{f} \times d\vec{A}$$

$$\int \vec{f} \, dv$$

$$\int \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int (f_1 \hat{a}_1 + f_2 \hat{a}_2 + f_3 \hat{a}_3) \cdot (h_1 dq_1 \hat{a}_1 + h_2 dq_2 \hat{a}_2 + h_3 dq_3 \hat{a}_3)$$

$$= \int f_1 h_1 dq_1 + \int f_2 h_2 dq_2 + \int f_3 h_3 dq_3$$

مثال



مثال: یک میدان برداری در دستگاه مختصات قطبی کروی توسط معادله زیر توصیف شده است.

مطلوب است محاسبه انتگرال خطی این میدان برداری روی دایره‌ای واقع بر سطح کره‌ای به شعاع واحد، طوری که

مرکز این دایره بر روی محور z ها واقع شده است و زاویه قطبی نقاط پیرامون دایره $\frac{\pi}{6}$ می باشد.

$$\vec{H} = r\sin\theta\,\hat{\phi}$$

$$\int \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int (r\sin\theta\,\hat{\phi})\cdot(dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}) = \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\sin^2\theta\,d\phi = 2\pi r^2\sin^2\theta = 2\pi\times\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

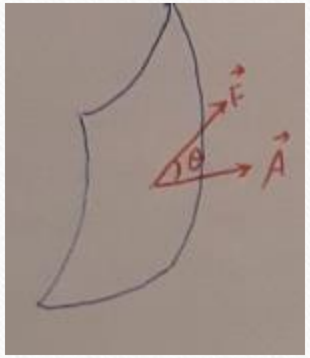
$r=1\,,\ \theta=\frac{\pi}{6}$

مثال

میدان برداری $\vec{F}$ در دستگاه مختصات دکارتی توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

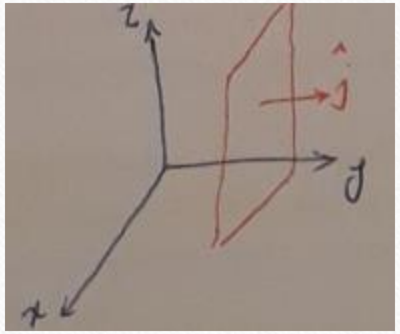
$$\vec{F} = \left(\frac{yz}{x}\right)\hat{i} + \left(\frac{xz}{y}\right)\hat{j} + \left(\frac{xy}{z}\right)\hat{k}$$

مطلوبست شار عبور داده شده توسط این میدان برداری از سطح مستطیلی واقع بر صفحه $y=2$ و به ابعاد $1 \leq x \leq 2$ و $1 \leq z \leq 3$.



$$\text{شار} = \int \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

حل



$$\int \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int\left(\left(\frac{yz}{x}\right)\hat{i} + \left(\frac{xz}{y}\right)\hat{j} + \left(\frac{xy}{z}\right)\hat{k}\right)\cdot\left(dx\,dz\,\hat{j}\right)$$

$$= \int_{z=1}^{3}\int_{x=1}^{2} \frac{xz}{y}\,dx\,dz = \frac{1}{2}\int_1^3 z\,dz \int_1^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^3\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}\times\frac{8}{2} = 3$$