تولید چندضلعی‌های تصادفی گل خورشیدی روی مجموعه‌ای از نقاط

لعیا محمدی[۱]، علی نوراله[۲]
[۱] عضو باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، قزوین، l.mohammadi@qiau.ac.ir
[۲] استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی قزوین و دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه شهید رجایی تهران، nourollah@aut.ac.ir

چکیده - مسئله تولید چندضلعی‌های تصادفی برای ارزیابی الگوریتم‌های هندسی حائز اهمیت است. علاوه بر این، این مسئله کاربردهایی در محاسبه و بررسی پیچیدگی زمانی الگوریتم‌های هندسه محاسباتی مانند موزه هنری دارد. از آنجا که برای ارزیابی چنین الگوریتم‌هایی غالبا ممکن نیست مجموعه داده‌ای واقعی داشت، یک مجموعه داده تصادفی می‌تواند یک جایگزین خوب باشد. در این مقاله، یک الگوریتم ابتکاری جدید برای تولید چندضلعی‌های تصادفی گل خورشیدی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ پیشنهاد می‌شود.

کلید واژه- پوسته محدب ، چندضلعی تصادفی گل خورشیدی، قابلیت دید، مرتب‌سازی قطبی.

۱- مقدمه

هندسه محاسباتی یک زمینه تحقیقاتی بسیار مهم در رشته کامپیوتر است که در آن، اغلب محاسبات روی اشیای هندسی شناخته شده مانند چندضلعی‌ها انجام می‌شوند. چندضلعی‌ها یک ارائه ساده و مناسب برای بسیاری از اشیای دنیای واقعی هستند. علت سادگی آنها، هم در ارائه یک مدل دقیق از اشیای دنیای واقعی و هم در سادگی محاسبات روی آنهاست. مثال‌هایی از کاربرد آنها شامل حروف منفرد برای تشخیص الگوی خودکار، یک مانع برای یک محیط روبات و یا جسمی که باید روی صفحه گرافیکی نمایش داده شود است[۱].

مسئله تولید تصادفی اشیای هندسی بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است[۴و۳و۲]. یکی از چالش‌های این مسائل، تولید چندضلعی‌های ساده تصادفی[۱] است. از آنجا که هیچ الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای برای حل این مسئله وجود ندارد محققان سعی می‌کنند از الگوریتم‌های ابتکاری[۲] استفاده کنند که توزیع یکنواختی ندارند یا روی کلاس‌های خاصی از چندضلعی‌ها مانند چندضلعی‌های ستاره‌ای یا مونوتون محدودند [۶و۵و۳].

اهمیت کاربرد اشیای هندسی، سادگی ارزیابی الگوریتم‌های هندسی است. از آنجا که برای ارزیابی الگوریتم‌های هندسی غالبا ممکن نیست مجموعه داده‌ای واقعی داشت، یک مجموعه داده تصادفی می‌تواند یک جایگزین خوب باشد.

چندضلعی‌ها یک ساختار پایه در مدلسازی هندسی هستند، بنابراین برای ارائه انواع وسیعی از شکل‌های گرافیک کامپیوتری، بینایی ماشین، تشخیص الگو و دیگر زمینه‌های هندسی استفاده می شوند. کاربردهای اخیر، تولید تصادفی یکنواخت چندضلعی‌ها با نقاط داده شده را نشان می‌دهند که یک چندضلعی با احتمال $\frac{1}{T}$ تولید می‌شود اگر در مجموع، T چندضلعی ساده با چنین نقاطی وجود داشته باشد[۳و۲].

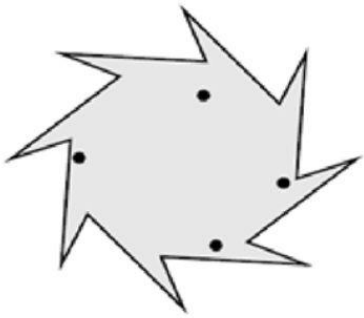
یکی از مسائل هندسی مهم که چندضلعی‌ها نقش مهمی در آن دارند، موزه هنری است که هدف آن حفاظت یک موزه هنری چندضلعی شکل با کمترین تعداد نگهبان(دوربین) است. یک نوع معروف مسئله موزه هنری، موزه هنری گل خورشیدی[۳] است. سوال مطرح این است: کمترین نگهبان مورد نیاز برای حفاظت موزه هنری گل خورشیدی چه تعداد است؟

شکل۱ یک موزه هنری گل خورشیدی را نشان می‌دهد که ۴ نگهبان ساکن آن را حفاظت می‌کنند. برخی نگهبان‌ها دیوارها یا گوشه‌هایی از موزه را نمی‌بینند. هر نقطه در موزه حداقل توسط یک نگهبان قابل دید است و در صورت امکان می‌توان موزه را با کمتر از این تعداد نگهبان حفاظت کرد[۷].

در این مقاله یک الگوریتم ابتکاری برای تولید چندضلعی های تصادفی گل خورشیدی ارائه می شود که می تواند به عنوان ورودی برای چنین مسائلی به کار رود تا جواب آن مسائل به طور خاص روی این چندضلعی‌ها بررسی شود.

ادامه این مقاله به این شکل سازماندهی شده است: بخش ۲

به کارهای انجام شده برای تولید چندضلعی‌های تصادفی می پردازد. در بخش ۳ مفاهیم اولیه مورد نیاز بیان می‌شود. در بخش ۴ الگوریتم پیشنهادی برای تولید چندضلعی‌های تصادفی گل خورشیدی[۴] مطرح شده و کارایی و صحت آن مورد بررسی قرار می‌گیرد و نهایتا در بخش ۵ نتیجه‌گیری مطرح خواهد شد.



شکل ۱: موزه هنری گل خورشیدی[۷]

۲- کارهای انجام شده

مسئله تولید تصادفی اشیای هندسی و به خصوص چندضلعی‌های ساده بسیار مورد توجه محققان است. برای مثال Epstein تولید یکنواخت تصادفی مثلث‌بندی‌ها را مورد مطالعه قرار داد[۸]. Zhu و دیگران یک الگوریتم برای تولید یکنواخت تصادفی چندضلعی های x-monotone روی یک مجموعه رئوس داده شده ارائه دادند[۳]. یک الگوریتم ابتکاری برای تولید چندضلعی‌های ساده به وسیله O'Rourke و Virmani بررسی شد[۴].Auer و Held الگوریتم‌های ابتکاری زیر را ارائه دادند:

- SteadyGrowth: یک الگوریتم افزایشی که یک نقطه را بعد از دیگری اضافه می‌کند که پیچیدگی زمانی آن در بدترین حالت $O(n^2)$ و در بهترین حالت $O(n \log n)$ می‌باشد.
- SpacePartitioning: الگوریتمی که بر اساس الگوریتم تقسیم و غلبه کار می‌کند و دارای پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ است.
- Permute & Reject: الگوریتمی که جایگشت‌های (چندضلعی‌های) تصادفی ایجاد می‌کند و بررسی می‌کند که آیا با یک چندضلعی ساده متناظر است یا خیر، تا وقتی که با یک چندضلعی ساده روبرو شود. پیچیدگی این الگوریتم $O(n \log n)$ است.
- 2-opt Moves: الگوریتمی که با شروع از یک چندضلعی کاملا تصادفی و جابه‌جاکردن یالهای متقاطع به یک چندضلعی ساده می‌رسد و پیچیدگی آن $O(n^4)$ است[۲].

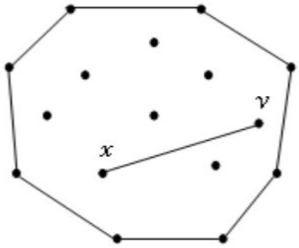
۳- مفاهیم اولیه

اگر S مجموعه رئوس تصادفی باشد، T چندضلعی ساده روی S می‌تواند وجود داشته باشد که هر چندضلعی با احتمال $\frac{1}{T}$ تولید می‌شود. فرض بر این است که هیچ سه نقطه‌ای همراستا(همخط) نیستند. یک چندضلعی ساده، یک سطح محدود شده به وسیله یک مجموعه محدود از پاره‌خطهایی است که یک خم ساده بسته را تشکیل می‌دهند، به عبارتی، یک چندضلعی ساده P روی S ، یک چندضلعی است که در آن یالها جز در رئوس S همدیگر را قطع نمی‌کنند.

یک چندضلعی محدب، یک چندضلعی ساده است که به ازای هر دو راس مانند x و y متعلق به چندضلعی، پاره‌خط $\overline{xy}$ داخل P یا روی مرز آن واقع باشد، یعنی $\overline{xy} \subseteq P$. پوسته محدب[۵] مجموعه نقاط S در صفحه($CH(S)$)، کوچکترین چندضلعی محدب P است که S را محصور می‌کند(شکل ۲).

اگر k تعداد همه لایه‌های پوسته محدب مجموعه نقاط S باشد، هر لایه با l_c معرفی می‌شود($1 < k$ و $1 \leq l_c \leq k$). با فرض شماره گذاری لایه‌ها از درونی‌ترین تا بیرونی‌ترین لایه پوسته محدب، فرض می‌شود n_i تعداد رئوس داخلی‌ترین لایه پوسته محدب یعنی l_1 باشد.

راس x، راس y را می‌بینند اگر $\overline{xy} \subseteq P$ و $\overline{xy}$ خارج P واقع نباشد، در این صورت y از x قابل دید است یا به عبارتی x نسبت به y قابلیت دید[۶] دارد. مرتب‌سازی قطبی، مرتب‌سازی مجموعه ای از رئوس حول یک راس مفروض بر اساس زاویه قطبی است. چندضلعی ستاره‌گون[۷]، یک چندضلعی است که حداقل از یک نقطه در آن همه چندضلعی قابل رویت باشد. یک چندضلعی گل خورشیدی، یک چندضلعی است که شکل ستاره ای دارد اما لزوما همانند چندضلعی ستاره گون از یک نقطه داخل آن همه چندضلعی قابل دید نیست. در بخش بعدی الگوریتم ابتکاری پیشنهادی برای تولید چندضلعی تصادفی گل خورشیدی مطرح می‌شود.

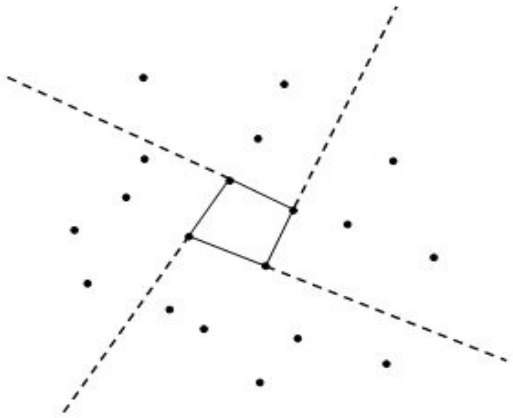


شکل ۲: پوسته محدب مجموعه نقاط S

۴- الگوریتم پیشنهادی

در این بخش یک الگوریتم پیشنهادی ابتکاری برای تولید چندضلعی تصادفی گل خورشیدی با پیچیدگی زمانی $O(n\log n)$ پیشنهاد می‌شود که در آن n تعداد رئوس می‌باشد.

برای تولید یک چندضلعی تصادفی گل خورشیدی روی یک مجموعه رئوس S به این ترتیب عمل می‌شود که ابتدا طبق الگوریتم حریصانه Graham [۱]، $CH(S)$ فرضی به دست می‌آید. پیچیدگی زمانی الگوریتم Graham، $O(n\log n)$ است. پس از تعیین $CH(S)$ برای هر مجموعه نقاط باقیمانده S تا وقتی که n مخالف صفر باشد مجددا الگوریتم Graham فراخوانی می‌شود. اگر تعداد نقاط روی داخلی‌ترین پوسته محدب فرضی یعنی l_1 ، n_i باشد، می‌توان مجموعه نقاط S را به n_i قسمت افراز کرد. این افراز به این صورت است که با شروع از چپ‌ترین نقطه روی l_1 و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، هر یال l_1 از نقطه دوم امتداد می‌یابد. به این ترتیب n_i مجموعه نقطه به دست می‌آید(شکل ۳).



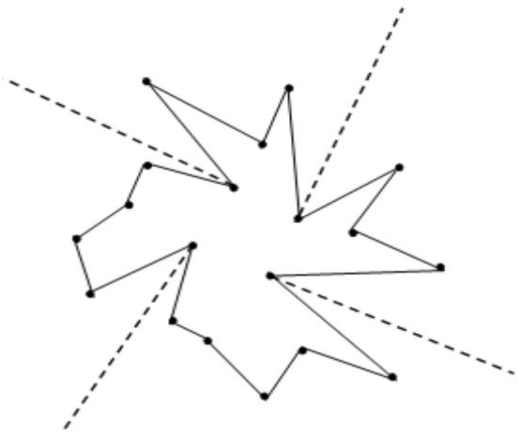
شکل ۳: افراز مجموعه نقاط S با امتداد دادن راس دوم هر یال l_1

پس از افراز مجموعه نقاط S ، با شروع از چپ‌ترین نقطه یا کمترین مختصات x روی l_1 و روی اولین بخش نقاط افراز شده، نقاط این بخش تا نقطه آغاز بخش بعدی به این ترتیب به هم متصل می‌شوند: نقاط بر اساس زاویه قطبی حول نقطه v_j روی l_1 $(1 \le j \le n_i)$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، مرتب می‌شوند. سپس نقاط به ترتیب مرتب شده از نقطه v_j تا v_{j+1} به هم متصل می‌شوند. به این ترتیب با پیمایش همه بخش‌ها و اتصال نقاط هر بخش افراز شده طبق روند توضیح داده شده، همه مجموعه نقاط S به هم متصل می‌شوند و یک چندضلعی ساده P حاصل می‌شود که لزوما چندضلعی ستاره‌گون نیست(شکل ۴).

روند این الگوریتم پیشنهادی به ترتیب زیر است:

- تا وقتی n مخالف صفر باشد، همه لایه‌های پوسته محدب فرضی طبق الگوریتم Graham روی مجموعه نقاط S محاسبه می‌شود.
- تعداد نقاط پوسته محدب فرضی l_1 شمارش شده و n_i فرض می‌شود.
- هر یال فرضی v_jv_{j+1} روی l_1 از راس v_{j+1} امتداد می‌یابد و مجموعه نقاط به n_i مجموعه نقطه افراز می‌شوند.
- برای هر مجموعه نقطه حاصل از افراز نقاط، به این ترتیب عمل می‌شود: همه نقاط آن بخش بر اساس زاویه قطبی حول v_j مرتب شده و سپس نقاط بین v_j و v_{j+1} به ترتیب مرتب شده از v_j تا v_{j+1} به هم متصل می‌شوند.

چندضلعی ساده تصادفی حاصل یک چندضلعی گل خورشیدی است. در حالت خاص که $n_i = 1$ ، چندضلعی ستاره گون تولید می‌شود.



شکل ۴: ساخت یک چندضلعی گل خورشیدی با اتصال نقاط مرتب شده هر بخش افراز شده به هم

۴-۱- بررسی کارایی الگوریتم

این بخش کارایی الگوریتم پیشنهادی با محاسبه پیچیدگی زمانی آن بررسی می‌شود. در این الگوریتم زمان به دست آوردن بیرونی‌ترین لایه پوسته محدب طبق الگوریتم Graham، $O(n\log n)$ می‌باشد که چون روی n نقطه محاسبه می‌شود بیشترین زمان مورد نیاز برای تشکیل پوسته محدب خواهد بود. افراز نقاط S به n_i مجموعه نقطه، $O(n_i)$ زمان می‌برد که در بهترین حالت، یعنی حالتی که فقط یک بخش حاصل از افراز نقاط وجود داشته باشد $O(1)$ است. پیدا کردن چپ‌ترین راس با کمترین مختصات x روی l_1 با تعداد نقاط n_i، $O(n_i)$ می باشد.

مرتب‌سازی مجموعه نقاط هر بخش نقاط افراز شده، درصورتی که پراکندگی مجموعه نقاط خوب باشد یعنی به طور متوسط در هر بخش $\frac{n}{n_i}$ نقطه موجود باشد، $O(\frac{n}{n_i}\log\frac{n}{n_i})$ است. در بدترین حالت که فقط یک بخش افراز شده وجود داشته باشد این مرتب سازی $O(n\log n)$ زمان می‌برد. بنابراین در مجموع پیچیدگی زمانی الگوریتم $O(n\log n)$ می‌باشد.

۴-۲- بررسی صحت الگوریتم

در این بخش صحت الگوریتم ابتکاری مطرح شده بررسی می‌شود که این الگوریتم در حالت کلی برای هر مجموعه نقاط داده شده با تعداد لایه‌های پوسته محدب فرضی $k > 1$ درست عمل می‌کند.

برای اثبات صحت درستی این الگوریتم، روی هر مجموعه نقطه افراز شده و قابل دید بودن همه نقاط هر بخش افراز شده از یک نقطه روی l_1 بحث می‌شود. از آنجا که برای تولید این چندضلعی تصادفی، همه بخش‌های افراز شده کاملا از هم مستقل بوده و هیچ اشتراکی با هم ندارند و همچنین چون در هر بخش، همه مجموعه نقاط آن بخش افراز شده از نقطه v_j روی l_1 به دلیل مرتب‌سازی قطبی نقاط حول v_j قابل دید هستند به سادگی قابل درک است که حتما یک چندضلعی تصادفی خورشیدی با این الگوریتم پیشنهادی بر روی هر مجموعه نقطه داده شده با تعداد لایه‌های پوسته محدب فرضی $k > 1$ قابل ساخت است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک الگوریتم ابتکاری با پیچیدگی زمانی $O(n\log n)$ برای تولید چندضلعی تصادفی گل خورشیدی پیشنهاد شد. از این الگوریتم می‌توان برای ارزیابی بسیاری از الگوریتم‌ها و مسائل هندسه محاسباتی مانند موزه هنری استفاده کرد. همچنین ثابت شد که این الگوریتم بر روی هر مجموعه نقطه داده شده با پوسته‌های محدب فرضی تو در تو (با تعداد لایه‌های $k > 1$) درست عمل کرده و یک چندضلعی تصادفی گل خورشیدی تولید می‌کند..

مراجع

[1] M. D. Berg, "Computational Geometry: Algoriths and Applications, 3rd , *Published by springer-verlag*, 2008.

[2] T. Auer, M. Held, "Heuristics for the Generation of Random Polygons", *Proc. 8th Canadian on Computational Geometry(CCCG'96)*, pp. 38-41, 1996.

[3] C. Zhu, G. Sundaram, J. Soneyink, and J. S. B. Mitchell, "Generating Random Polygon with Given Vertices", *Comput. Geom. Theory and Appl.*, Vol 6, Issues 5, pp. 277-290, 1996.

[4] J. O'Rourke and M. Virmani, "Generating Random Polygons", *Technical Report 011, CS Dept. Smith Colege, Northhampton, MA 01063*, July 1991.

[5] B. McDonald, I. Smith, "Partial symmetry breaking", *In P. Van Hentenryck(Ed.), Proc. Of CP'02 LNCS2470, Springer-verlag*, pp. 431-445, 2002.

[6] C. Sohler, "Generating random star-shaped polygons", *In Proc. 11th Canadian Conference on Computational Geometry(CCCG'99)*, pp. 174-177, 1999.

[7] T. S. Michael, "How to Guard an Art Gallery and other Discerete Mathematical Adventures", *the Book of the Johns Hobkins University Press,printed in the United Stetes of American*, Published 2009.

[8] P. Epstein, "Generating Geometric Objects at Random", *Master's thesis, CS Dept., Carleton University Ottawa K1S5B6, Canada*, 1992.

زیرنویس‌ها

[1] Random Simple Polygons
[2] Heuristic algorithm
[3] Sunflower Art Gallery
[4] Sunflower Random Polygons
[5] Convex Hull
[6] Visibility
[7] Star-Shaped Polygon