پوشش یک چندضلعی دلخواه با کمترین نواحی ستاره‌گون

[۱] استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی قزوین و دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه شهید رجایی تهران، nourollah@aut.ac.ir

[۲] دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی قزوین، L.Mohammadi@qiau.ac.ir

چکیده - مسئله موزه هنری، یک موضوع تحقیقاتی باز مهم در هندسه محاسباتی است که هدف آن یافتن حداقل تعداد نگهبان(دوربین) مورد نیاز برای حفاظت از موزه‌ای چندضلعی‌شکل با n دیوار می‌باشد. این مسئله دارای کران بالای $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ است اما بیشتر چندضلعی‌ها می توانند با کمتر از این تعداد نگهبان حفاظت شوند. پیدا کردن حداقل نگهبان برای چندضلعی‌ها از درجه چندجمله‌ای نمی‌باشد. در این مقاله یک راهکار ابتکاری برای پوشش چندضلعی ارائه می‌شود که هر نگهبان راسی یک ناحیه ستاره‌گون از چندضلعی را می‌پوشاند و ترکیب کل این نواحی چندضلعی اصلی را تشکیل می‌دهد. نتیجه برای چندضلعی‌های دلخواه با n راس، به طور میانگین $\frac{n}{6.45}$ است.

کلید واژه- پوشش چندضلعی، چندضلعی ستاره‌گون، مسئله موزه هنری، هندسه محاسباتی.

۱- مقدمه

یکی از مسائل مطرح شده مهم در هندسه محاسباتی، مسئله موزه هنری[۱] می‌باشد[۱]. در اگوست ۱۹۸۷، Victor Klee سوال جذابی در یک کنفرانس مطرح کرد که زمینه ساز تحقیقات بسیاری در هندسه محاسباتی شد: حداقل به چند نگهبان(دوربین) جهت حفاظت از موزه‌ای چندضلعی شکل با n دیوار نیاز است[۲و۱] ؟ سپس مسائل و سوالات بسیاری مانند مسئله روشن‌سازی، حفاظت از چندضلعی‌های حفره‌دار و بی حفره، حفاظت از محوطه زندان، آینه‌ها و سایه‌ها، محافظین سیار و ... مطرح شد. این مسئله به موزه هنری شهرت یافت[۳].

اولین نتیجه مهم در این زمینه توسط Chvatal مطرح شد که در واقع یک الگوریتم ابتکاری[۲] برای یافتن تعداد و جایگاه نگهبان‌ها بود و یک کران بالای $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ برای تعداد نگهبان‌ها ارائه می‌کرد، اما مسئله این است که بیشتر چندضلعی‌ها می‌توانند با کمتر از $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ نگهبان حفاظت شوند[۴و۱]. Lee و Lin اثبات نمودند که : یافتن کمترین تعداد نگهبان برای محافظت از یک چندضلعی به ازای هر سه نسخه نقطه‌ای(نگهبان‌ها می‌توانند در هر جایی در چندضلعی قرار بگیرند) ، راسی(مکان نگهبان‌ها محدود به رئوس چندضلعی می‌باشد) و لبه‌ای(نگهبان‌ها می توانند روی لبه‌های چندضلعی قرار بگیرند)، NP-hard است. آنها همچنین اثبات کردند که: مسئله پیدا کردن حداقل نگهبان برای چندضلعی‌ها از درجه چندجمله‌ای نمی‌باشد[۵].

در این زمینه مسائل علمی بسیاری حل نشده باقی مانده اند[۵ و۳]. الگوریتم‌های تقریبی[۳] زیادی با نرخ‌های تقریبی لگاریتمی برای نسخه‌های محدود شده‌ای از مسائل موزه هنری مانند تعداد نگهبان‌های مورد نیاز برای مسئله نگهبان کمینه مطرح شده‌اند، اما نسخه غیرمحدود مسئله بهینه‌سازی باز باقی مانده است و در این مورد هیچ الگوریتمی شناخته نشده است که بهتر از $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ باشد[۷ و۶] .

ادامه این مقاله به این شکل سازماندهی شده است: بخش۲ به کارهای انجام‌شده می‌پردازد. در بخش۳ تعاریف مورد نیاز معرفی می‌شوند. در بخش۴ الگوریتم ابتکاری پیشنهادی مطرح می‌شود. بخش۵ آزمایش‌ها و نتایج الگوریتم‌های مطرح شده را مورد بررسی قرار می‌دهد و نهایتا در بخش۶ نتیجه‌گیری خواهد شد.

۲- کارهای انجام شده

بعد از طرح سوال Victor Klee مقالات بسیاری در این زمینه منتشر شد. اولین آنها مقاله Chvatal بود که در آن قضیه موزه هنری مطرح شد: $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ نگهبان برای حفاظت یک چندضلعی با n راس کافی و بعضا ضروری است[۴]. این مقاله

آغاز تحقیقات زیادی توسط ریاضی‌دانان و دانشمندان علوم کامپیوتر در مورد مسئله موزه هنری و روشن‌سازی یک چند ضلعی شد[۱].

در مورد مسئله پوشش نگهبان کمینه[۵] از طریق مسئله پوشش چندضلعی، اثبات شد که مسئله پوشش محدب دارای پیچیدگی چندجمله‌ای نیست . همچنین نشان داده شد که مسائل مربوط به پوشش چندضلعی‌ها و رئوس چندضلعی نیز دارای پیچیدگی چندجمله‌ای نمی‌باشند[۸].

در[۹] یک الگوریتم ژنتیک به عنوان یک روش تقریبی برای حل مسئله نگهبان راسی کمینه پیشنهاد شده است. بر اساس این الگوریتم، نتیجه گرفته می‌شود که میانگین تعداد نگهبان‌های راسی کمینه مورد نیاز برای پوشش یک چندضلعی ساده دلخواه با n راس $\frac{n}{6.38}$ و نرخ تقریبی مشاهده شده کوچکتر یا مساوی ۲ است.

پیدا کردن تعداد نگهبان‌هایی که یک چندضلعی را بپوشاند یک مورد خاص از مسائل تجزیه، پوشش و افزار چندضلعی‌ها نیز می‌باشد. در مسائل تجزیه چندضلعی‌ها، نگهبان‌ها، چندضلعی های ستاره‌گون[۶] را تعیین می‌کنند. چندضلعی P ستاره‌گون نامیده می‌شود اگر در آن نقطه‌ای مانند $q \in P$ وجود داشته باشد به طوریکه تمام نقاط P از q قابل مشاهده باشند. بر طبق این تعریف می‌توان نتیجه گرفت چندضلعی ستاره‌گون را می توان با یک نگهبان حفاظت کرد. بنابراین یافتن پوشش ستاره‌گون کمینه برای چندضلعی P معادل یافتن کوچکترین مجموعه نگهبان‌های P می‌باشد[۱۰]. در این تحقیق یک الگوریتم ابتکاری برای حل این مساله ارائه می‌شود که هر نگهبان راسی قابلیت دید یک ناحیه ستاره‌گون از چندضلعی را دارد و ترکیب کل این نواحی همان چندضلعی اصلی می‌باشد، بنابراین به تعداد نگهبان ها چندضلعی ستاره‌گون خواهیم داشت.

۳- مفاهیم اولیه

موزه هنری با یک چندضلعی ساده P مدل می‌شود. فرض می‌شود نگهبان‌ها، رئوس چندضلعی باشند. این چندضلعی شامل n راس $p_0, p, \dots, p_{n-1}$ است که r راس آن بازتابی[۷] است. راس بازتابی، راسی است که زاویه آن بزرگتر از π باشد. از هر راس چندضلعی، رئوسی قابل دید هستند. راس x راس y را می بیند اگر $xy \subseteq P$. بنابراین برای هر $p_i \in P$ یک چندضلعی ستاره‌گون قابل دید از آن وجود دارد و به این شکل تعریف می شود:

$$StarP(p_i) = \{p_j \in P;\ \ p_j\ is\ visible\ from\ p_i\}$$

به این ترتیب یک چندضلعی به مجموعه چندضلعی‌های ستاره‌گون مختلفی می‌تواند تجزیه شودکه می‌توانند اشتراک داشته باشند یا می‌توان اشتراک‌ها را حذف نمود. اگر مجموعه نواحی ستاره‌گون S باشند، S ، P را می پوشاند($S \subseteq P$). $|S|$ تعداد نواحی ستاره‌گون را نشان می‌دهد. لیست‌های $P(i)$ و $Q(i_1)$ به ترتیب لیست کل رئوس و رئوس بازتابی را نشان می دهند($0 \le i \le n$-1 و $0 \le i_1 \le r-1$). برای نگهبان‌ها نیز لیست $S(s)$ در نظر گرفته شده است که s تعداد نواحی ستاره گون یا به عبارتی تعداد نگهبان‌ها را نشان می‌دهد. در بخش بعدی الگوریتم ابتکاری پیشنهادی برای پیداکردن مجموعه کمترین پوشش ستاره‌گون توضیح داده می‌شود.

۴- الگوریتم پیشنهادی

در این بخش یک الگوریتم ابتکاری برای پیدا کردن پوشش ستاره‌گون کمینه پیشنهاد می‌شودکه بر اساس آن نشان داده می شود میانگین کمترین پوشش ستاره‌گون برای پوشش یک چندضلعی دلخواه با n راس، $\frac{n}{6.45}$ است.

در این الگوریتم ابتکاری، ابتدا تابع تولید کننده چندضلعی تصادفی *Random-Polygon-Generator*(P) صدا زده می‌شود که طبق الگوریتم TwoOptMoves [۱۱] چندضلعی‌های ساده دلخواه تولید می‌کند. سپس با فراخوانی تابع *Find-StarAreas*()، نواحی ستاره‌گون هر راس بازتابی تعیین شده و براساس آنها کمترین تعداد نواحی مجزای ستاره‌گون تعیین می‌شوند.

مزیت مشخص کردن چندضلعی ستاره‌گون رئوس بازتابی این است که رئوس بازتابی زاویه دید بزرگتر از π دارند و در نتیجه محوطه بیشتری از چندضلعی را پوشش می‌دهند. الگوریتم۱، روند الگوریتم تعیین کمترین پوشش ستاره‌ای را نشان می‌دهد که در آن s تعداد نواحی ستاره‌گون برگردانده شده توسط این الگوریتم است و به عبارتی معادل تعداد نگهبان‌ها است. در ادامه، کار هر یک از توابع شرح داده می‌شود.

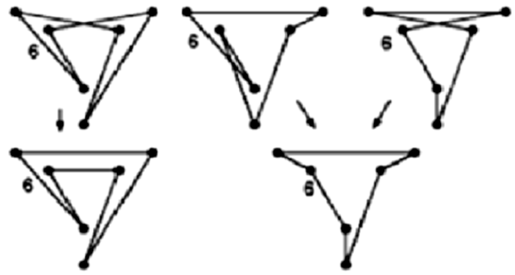
<u>Minimum-Star-Areas(n)</u> ***//A Heuristic Algorithm***
Random-Polygon-Generator(P) ;
For $i \leftarrow 0$ ***to*** $n-1$ ***do***
  If *Right*(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})>0 ***then***
    $q_r \leftarrow p_i$;
    $r \leftarrow r+1$;
$s \leftarrow$ *Find-StarAreas*()
Return s

الگوریتم ۱: روند تعیین کمترین پوشش ستاره ای

۴-۱-۱- تولید چندضلعی تصادفی

ابتدا برای تولید رئوسی با مختصات x و y بـه عنـوان رئـوس چندضلعی P، n راس تصادفی با مختصات x و y تولید شـده و از اتصال آنها یک چندضلعی کاملا تصادفی که اضلاع آن تقاطع نیز دارند ایجاد می‌شود.

طبـق الگـوریتم TwoOptMoves بـه طـور مکـرر، یالهـای متقاطع در این چندضلعی کاملا تصادفی اولیـه جسـتجو شـده و جابجا مـی‌شـوند تـا وقتـی کـه یـک چنـدضـلعی سـاده ایجـاد شود[۱۱](شـکل۱). سـپس جهـت پیمـایش اضـلاع چندضـلعی پادساعتگرد می شود.



شکل ۱: استفاده از TwoOptMoves برای چندضلعی‌های با $n = 6$ [۱۱]

۴-۱-۲- تعیین کمترین نواحی ستاره‌گون

با فراخوانی تابع $Find\text{-}StarAreas()$ بـرای هـر راس بازتـابی q_{i1}، چندضلعی ستاره‌گون آن یعنی $StarP(q_{i1})$ به دسـت مـی آید. برای هر q_{i1}، $StarP(q_{i1})$ به این ترتیب به دسـت مـی‌آیـد: ابتدا همه رئوس بازتابی چندضلعی با بررسی راستگردی هـر راس یافت می‌شود و در لیست Q قرار می‌گیرد. اگر راس p_i در سـمت راسـت دو راس مجـاورش واقـع باشـد راسـتگرد اسـت. بنـابراین رئوس بازتابی لیسـت Q خواهنـد بـود $q_0, q_1, \dots, q_{r-1}$. بـا پیـدا کردن قطرهای داخلی $q_{i1}p_j$، کـه همـه رئـوس قابـل‌دیـد از q_{i1} را نشان می‌دهند، $StarP(\,q_{i1})$ برای هـر q_{i1} مشخص مـی شود.

با فرض برقراری همه قطرهای داخلی و خارجی بین رئوس، بـرای مشخص کردن قطرهای داخلی، ابتدا قطرهـای خـارجی حـذف شـده و سپس قطرهایی که چندضلعی را قطع کرده‌اند حـذف مـی شـوند. اگـر p_{i-1}، q_{i1} و p_{i+1} سه راس متوالی از چندضلعی باشـند، برای حــذف قطرهای خارجی برای هر راس بازتابی q_{i1} اگر p_{i+1} سـمت چـپ یـا روی $q_{i1}p_j$ و p_{i-1} سمت چـپ یا روی p_jq_{i1} واقع باشند قطـر $q_{i1}p_j$ قطر خـارجـی بوده و حـذف می‌شوند.

در مرحله بعدی قطرهایـی که یـال‌هـای چنـدضلعـی را در نقطه‌ای غیر از انتهای یال‌ها قطع کرده‌انـد حـذف می‌شونـد. بـه این ترتیب قطرهـای داخلی باقیمانـده نشـان می‌دهنـد هـر راس بازتابی q_{i1} چه رئوسی از چندضلعی را می‌بینند و چندضلعی قابل دید آن یعنـی $StarP(q_{i1})$ بـرای آن تعیـین مـی‌شـود. پـس از تعیین چندضلعی ستاره‌گون هر راس بازتـابی، کمتـرین پوشـش ستاره‌گون برای کل چندضلعی تعیین می‌شود(الگوریتم۲).

Find-StarAreas()
For $i1 \leftarrow 0$ ***to*** $r-1$ ***do***
Determine $StarP(\,q_{i1})$ *;*
$n_1 \leftarrow n-1$ *;*
While $(n_1 \neq -1)$ ***do***
For each $q_{i1} \in Q$ ***do***
Compute $C(StarP(q_{i1}))$ *;*
Compute $C1(StarP(q_{i1}))$ *;*
End For
Sort vertices Q from $Max(C(StarP(q_{i1})))$ *to* $Min(C(StarP\ (q_{i1})))$
For each $i1 \neq j1$ ***do***
If $C(StarP(q_{i1}))=C(StarP(q_{j1}))$ ***then***
determine $Min\{C1(StarP(q_{i1}),C1(StarP(q_{j1})\}$
and then Sort vertices Q;
Add q_0 *to* $S(s)$ *;*
$s \leftarrow s+1$*;*
For each $p_k \in StarP(q_0)$ ***do***
For $i \leftarrow 0$ ***to*** $n-1$ ***do***
Delete $p_k \in P$*;*
For $j1 \leftarrow 1$ ***to*** $r-1$ ***do***
Delete $p_k \in StarP(q_{j1})$ *;*
Delete $p_k \in StarP(q_0)$ *;*
End For
End For
$n_1 \leftarrow n_1 - 1$*;*
End While

الگوریتم ۲: یافتن کمترین تعداد نواحی ستاره گون

۵- آزمایش‌ها و نتایج

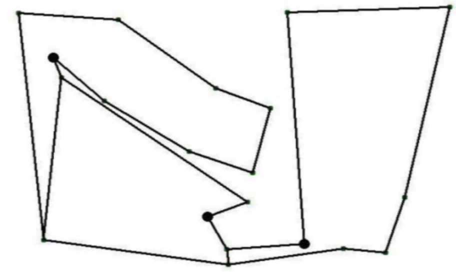
در این بخش نتایج حاصل از پیاده‌سازی مـورد بررسـی قـرار می‌گیرد. ایـن الگـوریتم ابتکـاری بـا VS C++ 2003.Net پیـاده سازی شـده اسـت. نتـایج آزمـایش روی ۸ مجموعـه چنـدضـلعی بررسی شده است. این مجموعه چندضلعی‌ها شامل ۴۰ چندضلعی تصادفی تولید شده به ترتیـب بـا ۳۰، ۵۰، ۷۰، ۱۰۰، ۱۱۰، ۱۳۰، ۱۵۰و۲۰۰ راس بوده و میانگین نتایج روی آنها بـه دسـت آمـده است.

شکل۲ پوشش ستاره‌گون کمینه را برای یک چندضـلعی بـا ۲۰ راس نشان می‌دهد که طبق الگوریتم پیشنهادی برای پوشش شکل۲، ۳ ناحیه ستاره گون به دست می‌آید. هر یک ازاین نواحی با یک نگهبان راسی حفاظت می‌شوند. در جدول۱ نتـایج حاصـل با کران‌بالای معـروف$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ مقایسـه شـده اسـت. همچنـین نمـودار شکل۳ جواب‌های حاصل از کران بـالای $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$، روش ژنتیـک [۹] و

نتایج الگوریتم پیشنهادی را مقایسه می‌کند. همانطور که مشاهده می شود نتایج الگوریتم پیشنهادی از کران بالای $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ بسیار بهتر بوده و نسبت به روش ژنتیک نیز بهتر می‌باشد.

جدول ۱. نتایج به دست آمده برای چندضلعی‌های دلخواه

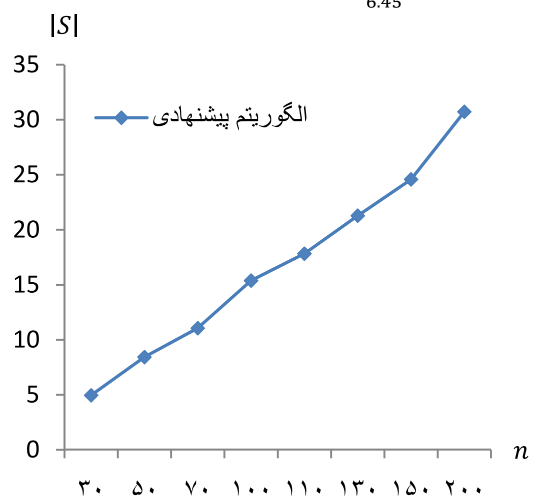
تعداد رئوس	$\lfloor n/3 \rfloor$	روش ژنتیک	$\lvert S\rvert$
30	10	5.2	4.92
50	16	8.375	8.425
70	23	11.625	11.05
100	33	16.9	15.375
110	36	18.25	17.825
130	43	21.8	21.275
150	50	25.225	24.575
200	66	31.075	30.72



شکل ۲ : پوشش ستاره ای کمینه برای یک چندضلعی دلخواه با $n = 20$

برای به دست آوردن میانگین کمترین نواحی ستاره‌گون مورد نیاز برای پوشش چندضلعی، با استفاده از روش حداقل مربعات روی میانگین نتایج حاصل، معادله خطی ۱ به دست می آید(شکل۳). این نتیجه نشان می‌دهد که میانگین کمترین نواحی ستاره‌گون مورد نیاز برای پوشش یک چندضلعی ساده دلخواه ، $\frac{n}{6.45}$ است.

$$f(x) = 0.1550x + 0.49 \approx \frac{x}{6.45} + 0.49 \quad (۱)$$



شکل ۳: میانگین نواحی ستاره‌گون کمینه برای چندضلعی‌های دلخواه

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، الگوریتمی ابتکاری برای مسئله پوشش ستاره گون کمینه پیشنهاد شد. آزمایش نشان داد که بر اساس این الگوریتم، میانگین تعداد نواحی ستاره‌گون مجزا حاصل از تجزیه یک چندضلعی برای پوشش کل یک چندضلعی ساده دلخواه ، $\frac{n}{6.45}$ است. به عبارت دیگر این مقدار معادل میانگین تعداد نگهبان‌های کمینه مورد نیاز برای حفاظت از یک موزه هنری نیز می باشد. تلاش بر این است تا در کارهای آینده الگوریتم‌های ابتکاری طوری بر مبنای مسئله چندضلعی قابل دید و دیگر مسائل هندسی بهبود یابد تا بتوان پوشش بهتری روی چندضلعی‌ها داد.

مراجع

[1] M. de berg, M. Van Kerveld, M. Overmars,and O. Schwazkopf, "Computational Geometry Algorithms and Applications", *Secind Revised Edition*, Springer, 1990.

[2] J. O'Rourke, " Computational Geometry in C", *Cambridge University Press* , 1994.

[3] J. O'Rourke, "Art Gallery theorems and algorithms", *Oxford University Press*, Oxford, 1987.

[4] V. Chvatal, "A combinatorial theorem in plane geometry", *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, pp. 39-41, 1975.

[5] S. Fisk, "A short proof of Chvatal's watchman theorem", *Journal ofCombinatorial Theory*, Series B, pp. 374, 1978.

[6] A. Efrat and S. Har-Peled, "Guarding galleries and terrains", *Information Processing Letters*, pp. 238-245, 2006.

[7] B. J. Nilsson, "Approximate Guarding of Monotone and Rectilinear Polygons", *Proceedings of the 32nd International Colloquium on Automata, Languages and Programming, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, no. 3580*, pp. 1362-1373 , 2005.

[8] J. Culberson and R. Reckhow, "Covering polygons is hard", *Proc 29 th symposium on foundations of computer science*, pp. 601-611, 1988.

[9] A. L. Bajuelos, S. Canales, G. Hernandes, and A. M. Martines, "Optimizing the Minimum Vertex Guard Set on Simple Polygons via a Genetic Algorithm", in *WSEAS Translations in Information Science and Application*, Vol. 5,issues 11, pp. 1584-1596, 2008.

[10] E. Packer, " Computational multiple watchman Routes", *WEA 2008,7th international workshop on Experimental Algorithms, LNCS* .Vol. 5038, pp. 114-128, 2008.

[11] C. Zhu, G. Sundaram, J. Snoeyink, and J. S. B. Mitchell, "Generating random polygon with given vertices", *Computational Geometry*, Vol 6, Issues 5, septamber, pp. 277-290, 1996.

زیرنویس ها

1 Art Gallery Problem
2 Heuristic algorithm
3 Approximation algorithms
4 Orthogonal Polygon
5 Minimum Guard Covering Problem
6 Star-Shaped Polygon