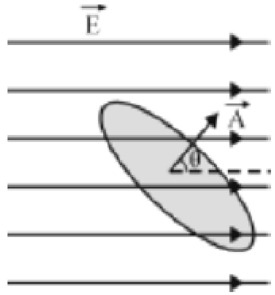
فصل سوم:قانون گاوس

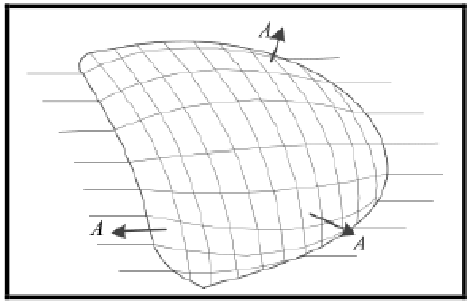
۱-۳- شار الکتریکی



به مجموع خطوط نیروی گذرنده از یک سطح محدود واقع در میدان الکتریکی، **شار الکتریکی** گفته می شود و آن را با نماد φ_E نمایش می‌دهند که در سیستم SI دارای واحد $\frac{N.m^2}{c}$ است. شار الکتریکی در میدان الکتریکی یکنواخت از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_E = E.A \Rightarrow \varphi_E = EA\cos\theta$$

اگر میدان الکتریکی غیریکنواخت و یا سطح مورد نظر غیرتخت باشد، سطح را به قطعات بسیار کوچک ΔA تقسیم می کنیم

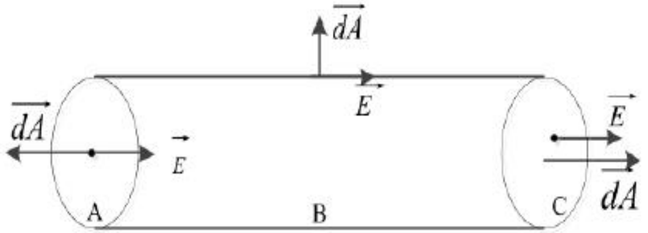


$$\Rightarrow \Phi = \sum \Delta\Phi = \sum E \cdot \Delta A$$

اگر بخواهیم مقدار دقیق Φ را برای یک سطح محاسبه کنیم

$$\Phi = \oint E \cdot dA$$

مثال شکل زیر یک استوانه فرضی به شعاع R واقع در یک میدان الکتریکی یکنواخت E را نشان می‌دهد که محور استوانه با میدان الکتریکی موازی است. شار میدان الکتریکی مربوط به این سطح بسته چقدر است؟



$$\Phi_E = \oint E.dA = \oint_A E.dA + \oint_B E.dA + \oint_C E.dA$$

$$\oint_A E.dA = \oint EdACos180 = -EA$$
$$\oint_C E.dA = \oint EdACos0 = +EA$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = -EA + 0 + EA = 0$$

قانون گاؤس

با استفاده از مفهوم شار الکتریکی و با ذکر یک نمونه مثال، قانون گاوس را معرفی می‌کنیم. سطح کروی به شعاع r که بار نقطه‌ای q در مرکز آن قرار گرفته است را در نظر بگیرید

$$\Phi = \oint E.dA = E(4\pi r^2) = 4\pi r^2 E$$

$$E = \frac{Kq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \Phi = 4\pi r^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

فصل سوم:قانون گاوس

رابطه $\varphi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$ ، معرف قانون گاوس می‌باشدکه در مورد هر سطح بسته فرضی(که سطح گاوسی نامیده می‌شود) به کار می‌رود و رابطه‌ی میان شار خالص عبوری از سطح (Φ_E) و بار خالص Q محصور شده توسط آن سطح بسته را به دست می‌دهد.

در این رابطه، $\varepsilon_0 = ۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲} \frac{c^۲}{N.m^۲}$ ضریب گذردهی الکتریکی و q بار خالص داخل سطح بسته فرضی (گاؤسی) بر حسب کولن (c) می‌باشد که باید علامت جبری آن در نظر گرفته شود.

چگالی بار الکتریکی

الف) چگالی (توزیع) خطی بار (λ)

بار الکتریکی موجود در واحد طول را چگالی خطی بار می‌نامیم که از رابطه $\lambda = \frac{q}{L}$ به دست می‌آید.

ب) چگالی (توزیع) سطحی بار (σ)

بار الکتریکی موجود در واحد سطح را چگالی سطحی بار می‌نامیم که از رابطه $\sigma = \frac{q}{A}$ به دست می‌آید.

ج) چگالی (توزیع) حجمی بار (ρ)

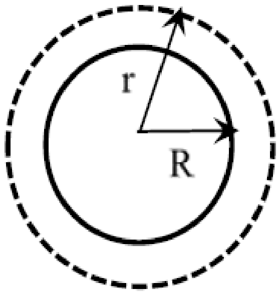
بار الکتریکی موجود در واحد حجم را چگالی حجمی بار می‌نامیم که از رابطه $\rho = \frac{q}{V}$ به دست می‌آید.

برخی کاربردهای قانون گاوس

توزیع بار در اجسام رسانا

به کمک قانون گاوس می‌توان این موضوع مهم را که بار اضافی واقع بر یک رسانای عایق‌بندی شده، تماماً روی سطح خارجی رسانا باقی می‌ماند را پیشگویی نمود.

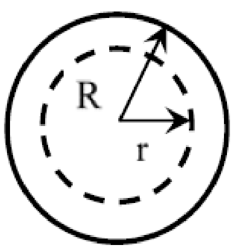
توزیع بار با تقارن کروی



برای میدان الکتریکی در نقاط بیرونی کره، سطح گاوسی را کره‌ای به شعاع $r > R$ انتخاب می‌کنیم

$$Q = \varepsilon_0 \oint E.dA = \varepsilon_0 E \oint dA = \varepsilon_0 E(4\pi r^2) \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{KQ}{r^2}$$

براي محاسبه ميدان الكتريكي نقاط درون كره، يک سطح گاوسي كروي به شعاع $r < R$ داخل توزيع بار در نظر مي گيريم.



Q بارالکتریکی کره به شعاع R

q بار الکتریکی داخل کره به شعاع r

میدان الکتریکی در فاصله‌ی r از مرکز کره،برابر خواهد بود با:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{Kq}{r^2}$$

$$E = \frac{Kqr}{R^3} \Leftarrow q = (\frac{r}{R})^3 Q \Leftarrow q = \frac{(4/3)\pi r^3}{(4/3)\pi R^3}Q \Leftarrow \frac{q}{(4/3)\pi r^3} = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}$$

می‌توان مقدار q را بر حسب مقدار Q محاسبه نمود.

فصل سوم:قانون گاوس

مثال شار الکتریکی گذرنده از کره‌ای به چگالی بار سطحی ۶ میکروکولن بر مترمربع و شعاع ۳۰ سانتی‌متر را بدست آورید.

$$\sigma = ۶\frac{\mu c}{m^{۲}} = ۶\times ۱۰^{-۶}\frac{c}{m^{۲}}$$

$$R = ۳۰ cm = ۰/۳ m$$

$$\varphi_E = ?$$

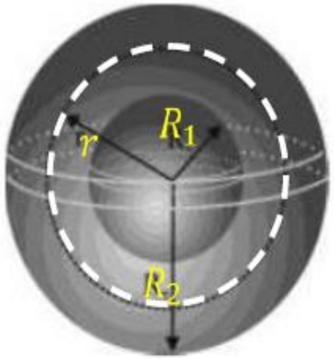
ابتدا بار روی سطح کره به مساحت $۴\pi R^{۲}$ را بدست می‌آوریم:

$$\sigma = \frac{q}{A} \Rightarrow q = \sigma A \Rightarrow q = \sigma(۴\pi R^{۲})$$

$$q = (۶\times ۱۰^{-۶})(۴)(۳/۱۴)(۰/۳)^{۲} = ۶/۷\times ۱۰^{-۶} c$$

$$\varphi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{۶/۷\times ۱۰^{-۶}}{۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}} = ۷/۵\times ۱۰^{۵}\frac{N.m^{۲}}{c}$$

فصل سوم:قانون گاوس



مثال دو پوسته کروی هم مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. اگر بار روی پوسته داخلی و خارجی به ترتیب ۳ و ۵ نانوکولن باشد، در فاصله ۱۰ سانتی‌متری میدان الکتریکی را بدست آورید.

$$R_۱ = ۸cm = ۰/۰۸m$$

$$R_۲ = ۱۲cm = ۰/۱۲m$$

$$q_۱ = ۳nc = ۳\times ۱۰^{-۹}c$$

$$q_۲ = ۵nc = ۵\times ۱۰^{-۹}c$$

$$r = ۱۰cm = ۰/۱m \Rightarrow E = ?$$

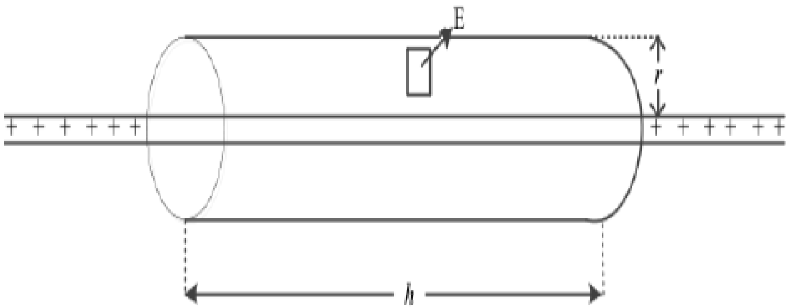
$$\varphi_E = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

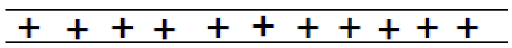
$$q_1 = \varepsilon_0 \oint E.dA = \varepsilon_0 E \oint dA = \varepsilon_0 E(4\pi r^2) \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{Kq_۱}{r^۲} \Rightarrow E = \frac{(۹\times ۱۰^{۹})(۳\times ۱۰^{-۹})}{(۰/۱)^{۲}} = ۲/۷\times ۱۰^{۳}\,\frac{N}{c}$$

خط نامتناهی بار

اگر چگالی خطی بار (یعنی بار واحد طول که واحد آن بر حسب کولن بر متر یا C/m بیان می‌شود) را با λ نمایش دهیم، طوری که مقدار λ در سرتاسر خط بار ثابت باشد، می‌توان برای نقاط به فاصله r از این خط بار، میدان الکتریکی را با استفاده از به کار بردن قانون گاوس محاسبه نمود.



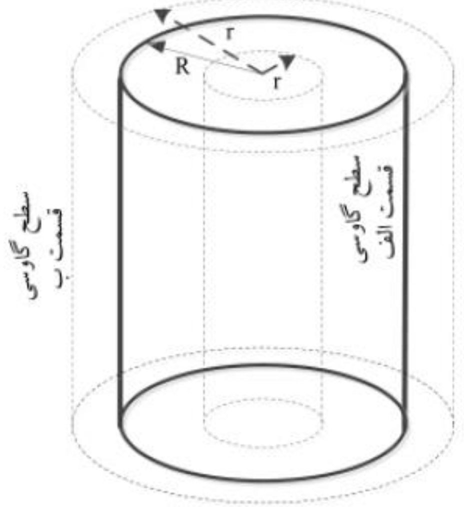


$$\varphi_{\text{کل}} = \varphi_{\text{قاعده}(1)} + \varphi_{\text{جانبی}} + \varphi_{\text{قاعده}(2)} = \varphi_{\text{جانبی}}$$

شار الکتریکی مربوط به سطح جانبی $\Phi = \oint E \cdot dA = E(2\pi rh)$

$$\begin{cases} q = \varepsilon_0 \oint E \cdot dA = \varepsilon_0 (2\pi rh) E \\ q = \lambda h \end{cases} \Rightarrow \lambda h = \varepsilon_0 (2\pi rh) E \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

مثال • یک لوله‌ی فلزی نازک و بلند به شعاع $R = 3cm$ را در نظر بگیرید که دارای بار یکای طول $\lambda = 20nC/m$ می‌باشد. بزرگی میدان الکتریکی را در فاصله الف) $r = R/2$ و ب) $r = 2R$ محاسبه کنید.



الف $\quad r < R \Rightarrow$ در این سطح گاوسی بار الکتریکی محصور شده‌ای وجود ندارد $\Rightarrow \quad q = 0$

$$\Rightarrow \quad q = \varepsilon_0 \oint E.dA = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

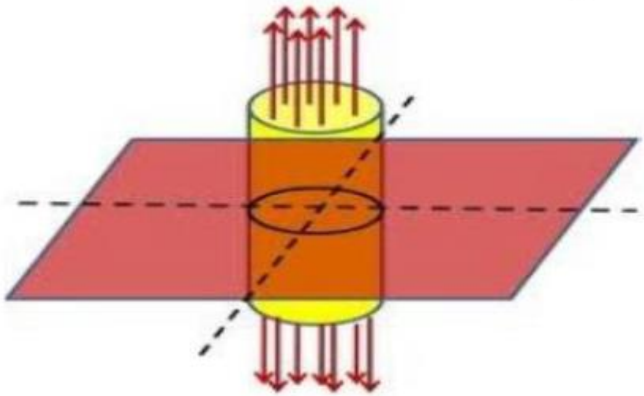
ب $\quad q = \lambda \ell \quad \Rightarrow \quad \lambda \ell = \varepsilon_0 \oint E.dA = \varepsilon_0 E(2\pi r \ell) \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{20\times10^{-9}C/m}{2(3.14)(8.85\times10^{-12}C^2/Nm^2)(0.06m)} = 5.99\times10^3 N/C$$

فصل سوم:قانون گاوس

صفحه باردار بی نهایت

میدان در فاصله معینی از صفحه باردار بی نهایت با چگالی سطحی σ



شار عبوری از سطح جانبی صفر ولی از دو قاعده غیر صفر است.

$$\varphi = \varphi_{(1)\text{قاعده}} + \varphi_{\text{جانبی}} + \varphi_{(2)\text{قاعده}} = EA + 0 + EA = 2EA$$

$$q = \sigma A \qquad \varphi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

♦ **نکته:** میدان الکتریکی ناشی از یک صفحه باردار نارسانای نامتناهی با چگالی بار یکنواخت σ، بر سطح صفحه عمود و از رابطه $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ به دست می‌آید.

♦ **نکته:** میدان الکتریکی خارجی در نزدیکی یک رسانای باردار، بر سطح آن عمود و از رابطه $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ به دست می‌آید، در حالیکه میدان درون رسانا صفر است.

فصل سوم:قانون گاوس

مثال: یک سطح گاؤسی به شکل نیمکره‌ای به شعاع $R = ۵/۶۸ \text{ cm}$ در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $۲/۵۰ \text{ N/C}$ قرار دارد. این سطح، هیچ بارخالصی را در برندارد. در قاعدهٔ (تخت) این سطح ، میدان عمود و به طرف این سطح است. شار عبوری از (الف) قاعده و (ب) بخش خمیدهٔ سطح چقدر است؟

حل: (الف) میدان عمود بر سطح قاعده است. شاری که از این سطح می‌گذرد، به طرف داخل نیمکره می‌باشد.

$$\Phi_{۱} = \vec{E} \cdot \vec{s} = -(۲/۵) \times \pi \times (۵/۶۸ \times ۱۰^{-۲})^{۲} = -۲/۵۳ \times ۱۰^{-۲} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^{۲}}{\text{C}}$$

(ب) سطح نیمکره و قاعده آن تشکیل یک سطح بسته می‌دهند که هیچ باری درون آن نیست. پس:

$$\Phi_{\text{total}} = \Phi_{۱} + \Phi_{۲} = ۰ \Rightarrow \Phi_{۲} = -\Phi_{۱} = ۲/۵۳ \times ۱۰^{-۲} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^{۲}}{\text{C}}$$

مثال: باری به طور یکنواخت در سرتاسر حجم استوانه‌ای توپر به شعاع R و طول نامتناهی توزیع شده است.

(الف) نشان دهید در فاصلهٔ $r < R$ از محور استوانه داریم $E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ که در آن ρ چگالی بار حجمی است.

(ب) عبارتی برای E ، وقتی $r > R$ است، بنویسید.

حل: (الف) توزیع بار دارای تقارن استوانه‌ای است. میدان شعاعی و عمود بر محور است. بنابراین شاری از دو سطح قاعده استوانه گاوس عبور نمی‌کند.

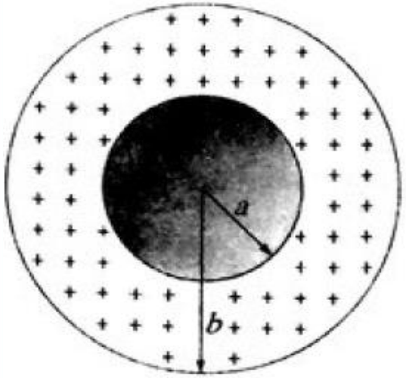
$$r < R \Rightarrow \oint E \cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

(ب)

$$r > R \Rightarrow \oint E \cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r L = \frac{\rho \pi R^2 L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

فصل سوم:قانون گاوس

مثال: شکل یک پوستهٔ کروی با چگالی بار حجمی یکنواخت $\rho = ۱/۸۴\ \mathrm{nC/m^۳}$ ، شعاع داخلی $a = ۱۰/۰\ \mathrm{cm}$ ، و شعاع خارجی $b = ۲/۰۰\,a$ را نشان می‌دهد. بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌های شعاعی (الف) $r = ۰$ ، (ب) $r = a/۲/۰۰$ ، (پ) $r = a$ ، (ت) $r = ۱/۵۰\,a$ ، (ث) $r = b$، و (ج) $r = ۳/۰۰\,b$ چقدر است؟



حل: الف و ب و پ) در ناحیه $r \le a$ هیچ باری وجود ندارد. اگر سطح گاوسی کروی هم مرکز با پوسته کروی به شعاع مورد نظر اختیار کنیم از قانون گاوس نتیجه می‌گیریم:

$$E = ۰$$

(ت و ث)

$$\oint E \cdot ds = q \Rightarrow E = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲} \qquad q = \int \rho dv = \int_{r=a}^{r=r} \rho(۴\pi r^۲)dr = \rho\frac{۴}{۳}\pi(r^۳ - a^۳)$$

$$E = \frac{\rho(r^۳ - a^۳)}{۳\varepsilon_۰ r^۲} = \frac{۱/۸۴\times۱۰^{-۹}\times[(۱/۵\times۰/۱)^۳ - (۰/۱)^۳]}{۳\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(۱/۵\times۰/۱)^۲} = ۷/۳۲\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

$$\mathrm{r = b = ۲a = ۲۰cm} \Rightarrow \mathrm{E} = \frac{(۱/۸۴\times۱۰^{-۹})[(۰/۲)^۳ - (۰/۱)^۳]}{۳\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(۰/۲)^۲} = ۱۲/۱۳\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

$$r = ۳b = ۶a = ۰/۶m \Rightarrow E = \frac{\rho(b^۳ - a^۳)}{۳\varepsilon_۰ r^۲} \Rightarrow \quad E = \frac{(۱/۸۴\times ۱۰^{-۹})[(۰/۲)^۳ - (۰/۱)^۳]}{۳\times ۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲} \times (۰/۶)^۲} = ۱/۳۵\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \quad \text{(ج)}$$