بسم الله الرحمن الرحیم

جبر خطی

و کاربرد آن در اقتصاد

مؤلفان:

دکتر داود ابراهیمی بقا
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی
دکتر محمدرضا ثروهش
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

تقدیم می شود به سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم ...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم ...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان... مادرانمان... استادانمان

فهرست مطالب

۱

چند مفهوم مقدماتی

۱.۱ n-تایی مرتب

مفهوم یک n- تایی از اعداد حقیقی که به‌شکل

$$X = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$

بیان می‌شود از جمله بنیادی‌ترین تعاریف در ریاضیات است. شماره‌گذاری اندیسی اعداد (یا مؤلفه‌ها) در X نشان می‌دهد که ترتیب آمدن آنها مهم است از این‌رو گاهی به آن یک n-تایی مرتب هم می‌گویند. مجموعهٔ همهٔ چنین n- تایی‌های از اعداد حقیقی را با نماد $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهند.

باید بخاطر داشت که هر n-تایی **تنها یک عضو** (مثلاً بنام X) از مجموعه فوق است و با تغییر در مولفه‌ها و یا در ترتیب آنها، این عضو به عضو دیگری تبدیل می‌شود. به‌عنوان مثال ۳-تایی های زیر یکسان نیستند:

$$(۱, ۲, ۳) \neq (۱, ۳, ۲) \neq (۳, ۱, ۲)$$

اینکه این مفهوم چگونه در اقتصاد کاربرد دارد را حداقل می‌توان در خلاصه نمودن و انسجام بهتر اطلاعات و اعداد معنی‌دار ملاحظه کرد. برای نمونه، تعدادی شرکت را با تحلیل سه پارامتر $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ که در آن $a_۱$ تعداد کارگران، $a_۲$ ذخیرهٔ سرمایه و $a_۳$ سود سالیانهٔ هرکدام از آنهاست، در نظر بگیرید. بوضوح برای هر یک از این شرکتها یک سه تایی مرتب به‌شکل زیر می‌توان متناظر کرد:

$$\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$$

در این‌حالت، سه تایی $\mathbf{a}$، عضوی از مجموعهٔ $\mathbb{R}^۳$ (یا همان فضای سه بُعدی) است. در حالتی‌که با

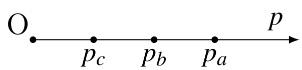
فقط یک عدد مانند a سر و کار داریم، آنرا همانند یک نقطه با مقدار عددی x_a روی خط اعداد حقیقی (یا همان خط یک بُعدی $\mathbb{R}^{۱}$) نشان می‌دهیم (مثال بعد).

مثال ۱.۱. وسائط نقلیهٔ a، b و c با قیمت‌های

$$\circ < p_c < p_b < p_a$$

متناظرند. بر روی خط $\mathbb{R}$،[۱] می توان سه مکان را برای هر کدام در نظر گرفته و آنها را با توجه به قیمت‌هایشان مرتب کرد (شکل ۱.۱). چون قیمت p کمیتی نامنفی است لذا نقاط فوق روی محور $\mathbb{R}^+$ و یا همان مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی نشان داده شده‌اند. در این نمونه، بوضوح، جابجایی مقادیر امکان ندارد.

گاهی در یک n-تایی مرتب، وابستگی مؤلفه‌ها موضوعیت پیدا می‌کند. مثلاً در یک دوتایی مرتب $(a, ۲a)$، مؤلفه دوم هر چیزی را نمی‌تواند اختیار کند. در واقع، مؤلفه اول همواره نصف مؤلفه دوم ظاهر می‌شود. اینکه چنین چیزی در کار با n-تایی‌ها مطرح باشد یا خیر، از روی نوع داده‌های آمده در مسئله و فرضیات آن معلوم خواهد شد.



شکل ۱.۱: محور قیمتها

۲.۱ خطی بودن

اکنون مثال ۱.۱ را مجدداً در نظر گرفته و فرض کنید قیمت کل دو اتومبیل مد نظر است. طبعاً قیمت کل دو اتومبیل a و b با مجموع قیمتهای آنها بدست می آید:

$$\mathrm{P}(a \oplus b) = p_a + p_b \tag{۱.۱}$$

تساوی بظاهر ساده فوق بیان کننده ضمنی مفهوم مهم و عمیقی در ریاضیات است که به آن **خطی بودن** عمل جمع[۲] می‌گویند. بوضوح، P تابعی دو متغیره است که صفت خطی بودن را هم دارد.

۱. که در اینجا نشان دهنده محور توزیع قیمت p است.
۲. به آن **عملگر جمع** هم می گویند.

برای اینکه اهمیت خطی بودن را درک کنید، فرض کنید قیمت کل با فرمول

$$\mathrm{P}(a \oplus b) = p_a^۲ + p_b^۲$$

داده شود. این تابع دو متغیره، خلاف قواعد عرفی و ذاتی علم اقتصاد عمل می‌کند زیرا برای برای خرید دو خودرو، هیچگاه از چنین قاعده‌ای تبعیت نمی‌شود. این دسته از فرمولها، که در کتاب حاضر از آنها بسیار کم خواهید دید، از انواعی هستند که در ریاضیات بنام **عبارتهای غیرخطی** شناخته می‌شوند.[۳] نتیجه اینکه صفت خطی بودن برای تقریباً همه عبارات جبری این کتاب مفروض است.

۱.۲.۱ یک تابع خطی

یکی از ساده‌ترین عبارات خطی یک متغیره، تابع $y = kx + b$ است که در آن مقادیر k, b اعدادی دلخواهند. حتماً می‌دانید که نمایش این تابع، یک خط راست در صفحه است. این تابع را اصطلاحاً **تابع خطی** (در اینجا بر حسب x) می‌نامند. این تابع نشان دهنده همه نقاطی در صفحه است که مختصات آنها در رابطه $(x, kx + b)$ صدق می‌کنند. توجه کنید در این‌حالت مختصات نقاط واقع بر خط بهم مرتبط هستند. تابع $y = kx + b$ هنگامی که دارای ضریب پیشروی $k > ۰$ است صعودی و در حالت $k < ۰$ تابعی نزولی را نشان می‌دهد. نظیر این عبارت را می‌توان با در نظر گرفتن تعداد بیشتری از متغیرها نیز تعمیم داده و ساخت.

۳.۱ دستگاه مختصات $\mathbb{R}^۲$

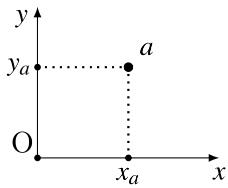
به‌جهت سهولت در ارائه، دوتایی (x, y) را که به فضای همه دوتایی‌ها $\mathbb{R}^۲$ تعلق دارد، در نظر بگیرید. مجموعه‌ی $\mathbb{R}^۲$ را **صفحه مختصات** می‌نامند. هر نقطه a واقع در آن دارای مختصات (x_a, y_a) است (شکل ۲.۱). اغلب x_a را **طول** نقطه a و y_a را **عرض** این نقطه می‌شناسند.

حال دو نقطه a و b را در صفحه در نظر بگیرید. عدد نامنفی

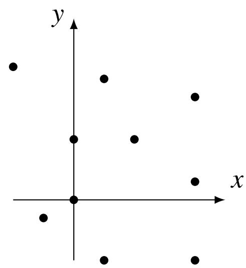
$$d(a, b) = \sqrt{(x_a - x_b)^۲ + (y_a - y_b)^۲}$$

بنام **فاصلهٔ** آنها (روی صفحه) معرفی می شود. این مقدار دقیقاً طول پاره‌خط واصل نقاط a و b است. یادآور می‌شویم عددی **نامنفی** است که یا صفر باشد و یا اینکه منفی نباشد.

۳. اگر متغیری در یک عبارت غیر ثابت، توان غیر از **یک** داشته باشد، آن عبارت خطی نیست.



شکل ۲.۱: مختصات در صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$

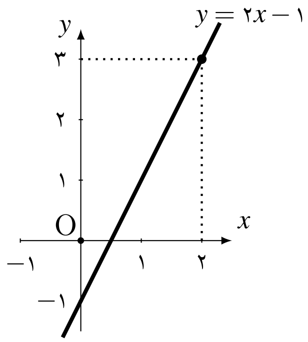


شکل ۳.۱: نقاطی دلخواه در صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$

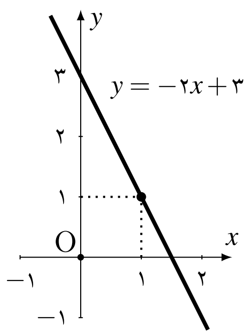
در حالت کلی، طول و عرض یک نقطه مستقل از هم هستند (شکل ۳.۱). اما گاهی بین مقادیر x و y رابطه‌ای معنی دار برقرار است که ما نمونه آنرا در بخش ۱.۲.۱ دیدیم. در دو مثال زیر، نسبت بین یک تابع خطی، دستگاه مختصات و تفسیر معنی دار اقتصادی آن را خواهید دید.

مثال ۲.۱. فرض کنید a نام یک واحد تولیدی است که کالایی مشخص را تولید می‌کند و بعلاوه مختصات a عبارت است از، x_a تعداد کارگران و y_a هزینه تولید کالا. اگر تابع خطی $y = ۲x - ۱$، که همان تابع بالا به‌ازای $k = ۲, b = -۱$ است، تابع صعودی[۴] باشد که هزینه را بر حسب x برآورد می‌کند آن‌گاه بوضوح با قرار دادن $x = ۰$ هزینهٔ $y = -۱$ پرداخت می شود. در واقع، هنگام غیبت همهٔ کارگران، واحد متحمل وضعیتی است که باید ۱ دلار به‌عنوان هزینه (هزینهٔ ثابت) پرداخته کند (شکل ۴.۱).

۴. زیرا ضریب **پیشرو** k در این تابع برابر ۲ و مثبت است.



شکل ۴.۱: تابع هزینه خطی (هزینهٔ ثابت)



شکل ۵.۱: تابع هزینه خطی (امکان ضرر در سطحی از تولید)

مثال ۳.۱. یک کارخانه دیگر را با تابع (خطی) سود $y = -۲x + ۳$ که در آن x سطح تولید است، در نظر بگیرید. با توجه به‌شکل ۵.۱، در سطحی از تولید (مقداری بین ۱ و ۲)، سود کارخانه صفر شده و فراتر از این نقطه ضرر اتفاق می افتد.[5] در این تابع خطی، چون ضریب پیشرو عددی منفی است لذا تابع نزولی رسم می‌شود.

در دو مثال اخیر، دو تابع خطی خاص را مجزا و مختصراً بررسی کردیم. اکنون حالتی واقعی‌تر را با فرض یک بازار تک محصولی در نظر گرفته و قصد داریم تا نمونه‌ای از یک تعریف ریاضی دیگر را

۵. یعنی مقادیر تولید بیشتر از $x = \frac{۳}{۲}$.

در مقیاس اقتصادی بیان کنیم. فرض کنید مقدار تقاضا از کالا با تابع

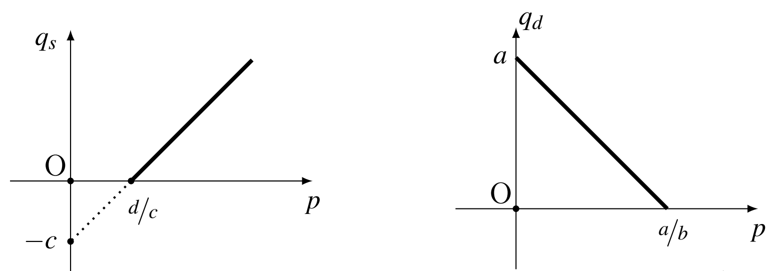
$$q_d = a - bp, \quad a,b > 0$$

و مقدار عرضه شده کالا به‌شکل زیر داده شده است:

$$q_s = -c + dp, \quad c,d > 0$$

توجه داریم که هر دو تابع، قیمت p را متغیر می‌داند. در ذیل شکلهای تقریبی از این دو تابع آمده است. بنابه تعریف، **تقاضای مازاد** همان تفاضل مقادیر عرضه و تقاضا است. لذا می‌توان گفت که یک بازار در حالت تعادل[۶] قرار دارد هرگاه (در مقدار خاصی از p) مقدار تقاضای مازاد صفر باشد، یعنی:

$$q_d(p) - q_s(p) = 0 \qquad (۲.۱)$$



(ب) تابع عرضه خطی(صعودی) **(آ)** تابع تقاضای خطی(نزولی)

شکل ۶.۱

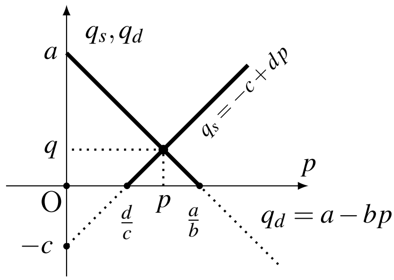
حل معادله (۲.۱) و لذا یافتن مقدار p مورد نظر، با حل **همزمان** دو معادله خطی زیر معادل است:

$$\begin{cases} q_d(p) = q = a - bp \\ q_s(p) = q = -c + dp \end{cases}$$

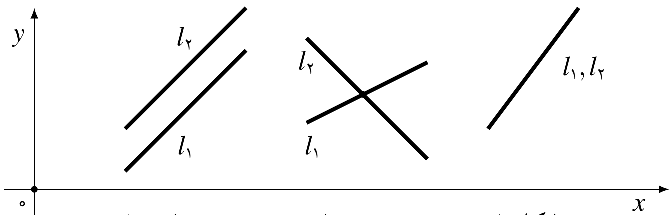
این شکل که در آن دو یا تعدادی معادله خطی در کنار هم آمده‌اند را بنام **دستگاه معادلات خطی** می‌شناسند. منظور از حل این دستگاه‌ها این است که مقدار متغیر (یا متغیرها) را باید طوری

۶. می دانیم **تعادل** برای یک سیستم حالتی است که در آن وضعیت، سیستم تمایلی به تغییر ندارد. مثلاً یک توپ وقتی داخل یک ظرف گود رها می‌شود، حالت تعادل آن در محل گودی ظرف است.

یافت که همزمان جواب همه معادلات باشد. در شکل ۷.۱، جواب حاصل از حل دستگاه فوق را در قالب نقطه تقاطع p مشاهده می‌کنید که آنرا به‌صورت جوابی منحصر به‌فرد (یا همان نقطه تقاطع) برای دستگاه معادلات اخیر و به‌ازای مقادیر خاصی از ضرایب c,b,a و d نشان می‌دهد.



شکل ۷.۱: تعادل بازار



شکل ۸.۱: وضعیت دو خط در صفحه در حالت کلی

اما آیا همیشه می‌توان چنین نقطه‌ای را یافت؟

در شکل ۷.۱ چه اتفاقی می‌افتاد اگر دو خط موازی و یا منطبق بر هم بودند؟ به این سئوال در ادامه پاسخ می‌دهیم.

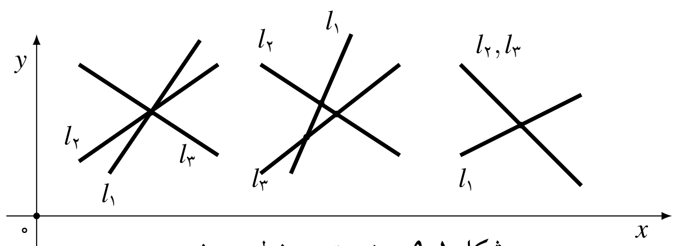
شکل ۸.۱، دو خط واقع در صفحه را به‌طور کلی، در سه حالت متقاطع، موازی و منطبق دسته بندی کرده است. مسلماً حالتهای مختلف بین جفت خطها، تضمین می‌کند چنین نقطه‌ای (نقطهٔ تعادل) وجود دارد یا خیر. مثلاً در حالت توازی دو خط، هیچ نقطهٔ اشتراکی (تقاطعی) وجود ندارد. یعنی دستگاهی که این دو خط معادلات آن هستند حل پذیر نیست! نتیجه اینکه، در نوع بازار فوق(که با توابع خطی سروکار داریم)، انتظار یافتن جوابی به‌عنوان نقطه تعادل بازار (و آنهم به‌ازای هر مقداری که به پارامترها بدهیم) نابجاست.

نکته‌ای که در طبیعت مثال قبل دیدید، قابل تعمیم است. اگرچه برگردان اقتصادی چنین تعمیمی

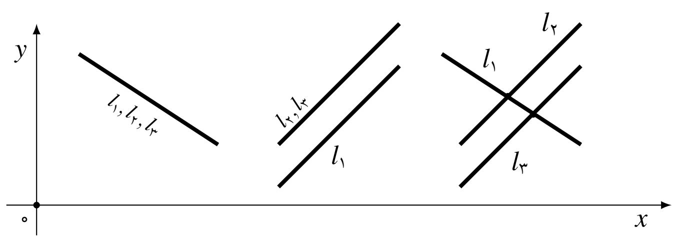
نیاز به بررسی بیشتر دارد ولی دانستن آن خالی از لطف نیست. در ادامه به دو مورد از آن می‌پردازیم.

الف) گاهی، با دستگاه معادلاتی دومجهولی با تعداد بیشتر از دو معادله برخورد می‌کنیم. مثلاً در حل یک دستگاه معادلات ۳ معادله ۲ مجهولی، با تقاطع ۳ خط واقع در صفحه[7] مواجهیم. برای این منظور، همان کاری که در مثال بالا کردیم را انجام می‌دهیم.

حالت‌های ممکن زیر را بین سه خط در نظر بگیرید (شکلهای زیر).



شکل ۹.۱: وضعیت سه خط در صفحه



شکل ۱۰.۱: وضعیت سه خط در صفحه

اولین شکل، سه خط را در حالتی نشان می‌دهد که هم‌رس هستند. از شکل دوم هر جفت از خطوط سه نقطه تقاطع دارند که یکتا بوده و لذا ۳ نقطه متمایز داریم.

در حالت بعدی دو خط l_3 و l_2 منطبق و در عین حال متقاطع با l_1 و در حالت چهارم هر سه خط منطبقند. شکل بعد، انطباق l_2 و l_3 را نشان می‌دهد که با خط اول موازیند. در شکل ششم دو خط متمایز دوم و سوم (که اینجا موازی‌اند) در دو نقطه تقاطع متمایز با خط اول هستند و در حالت آخر هر سه خط موازیند.[8]

ب) حل دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر به مراتب از دستگاه قبلی مشکل‌تر است:

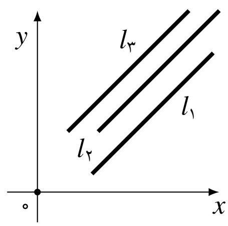
۷. منظور صفحه ای است که هر سه خط روی آن قرار دارند.
۸. در این حالت دستگاه جواب ندارد.

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + a_{۲۳}x_۳ = b_۲ \\ a_{۳۱}x_۱ + a_{۳۲}x_۲ + a_{۳۳}x_۳ = b_۳ \end{cases}$$

اگرچه برای این دستگاه نیز می‌توان حالات ممکن بین سه صفحه در فضای

$$\mathbb{R}^۳$$

را در نظر گرفته و اطلاعاتی درباره تعداد جواب‌ها بدست آورد ولی باید پذیرفت که افزوده شدن تعداد متغیرها، موضوع تصویرسازی (از نوع ساده آن) به نحوی که قبلاً انجام دادیم را منتفی می‌کند.



شکل ۱۱.۱: وضعیت سه خط در صفحه

مشکلاتی که فقط صورت سادهٔ آن در دو مورد بالا به مثال درآمد نشان می‌دهد که ما به ابزارهایی عملیاتی – محاسباتی برای حل و تحلیل دستگاه‌هایی از ابعاد بالاتر که متناظر با مسائل واقعی تر هستند، نیازمندیم. این ابزار را را در دو مفاهیم **بردار** و **ماتریس** می‌توان یافت.[۹] ولی قبل از ورود سریع به مطلب، به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴.۱. سه محصول مورد استفاده در منازل و اقتصاد متناظر آنها را درنظر گرفته و فرض کنید در تولید هر کالا از دو کالای دیگر استفاده می‌شود. نماد x_{ij} مقدار iام کالا استفاده شده در تولید jامین کالا و x_i نشان دهنده مقدار کل تولید شده از کالای iام است. به علاوه مقدار کالای iامی که در تولید یک واحد از کالای jام استفاده شده، به‌صورت نسبت زیر داده شده است:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad \text{(ضرایب ورودی/خروجی)}$$

فرض کنید اطلاعاتی ناشی از یکسری داده درباره این ضرایب در جدول زیر آمده است:

۹. با آنها در فصل‌های آتی آشنا خواهیم شد.

	x_1	x_2	x_3
x_1	$a_{11} = 0.3$	$a_{12} = 0.2$	$a_{13} = 0.3$
x_2	$a_{23} = 0.2$	$a_{22} = 0.3$	$a_{21} = 0.2$
x_3	$a_{33} = 0.4$	$a_{32} = 0.6$	$a_{31} = 0.4$

و بعلاوه تقاضای نهایی کالای اول، دوم و سوم به ترتیب برابرند با:

$$y_1 = 20, \quad y_2 = 30, \quad y_3 = 40$$

از جدول اینطور می‌فهمیم که سطح تولید کلی (که با توجه به نهاده‌های مورد نیاز برای تولید سنجیده شده است) را می‌توان با حل همزمان دستگاه معادلات خطی زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 20 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 30 \\ x_3 = 0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.4x_3 + 40 \end{cases}$$

۴.۱ اقتصادهای خرد(مسئله تعادل بازار)

در بخش ۳.۱ نگاهی کوتاه به تقاطع خطوط در صفحه انداختیم. در این بخش و به بعد، تعدادی از دلایل توجیه کننده آن (مثال) در اشکال اقتصادی خرد و کلان را ارائه می‌دهیم.

در اقتصادهای امروزی، انواع گوناگونی از کالاها به جهت برآورده کردن نیازهای مردم تولید می‌شوند. این کالاها توسط تولید کننده‌های مختلفی و با توجه به درخواست‌های متنوعی از مصرف کننده‌ها (اعم از حقیقی یا حقوقی) به بازار عرضه می‌شوند.

در کل تاریخ بشر، همه جوامع به دنبال راهی بودند تا بتوانند از آن طریق هم رضایت تولید کننده و هم رضایت مصرف کننده را بدست آورند و از این‌رو به توسعه روش‌های متفاوتی اقدام کردند. یکی از این‌روش‌ها که به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد مکانیزم قیمت است. در این ساز و کار، فرض بر این است که هم عرضه و هم تقاضا متأثر از قیمت کالاها و دیگر عوامل هستند به طوریکه با مفروض دانستن عوامل دیگر قادریم تا تغییر در قیمت یک کالا را تأثیر گذار در عرضه و تقاضای آن کالا بدانیم. بنابر این اقتصاد دانان یک رویّه بخشی نگر به بازار به جهت حصول به تعادل (تعادلی جزئی) را برای ابداع کردند. در این نگرش با مفروض گرفتن هر عامل دیگری غیر از قیمت کالا، عرضه و تقاضای کالا صرفاً تابعی از قیمت کالا خواهد بود. با استفاده از سیستم عرضه و تقاضا، می‌توان قیمت و تعداد کالای متناظر را چنان یافت که هم تولید کننده و هم مصرف کننده در

رضایت کامل قرار داشته باشند (نقطه تساوی عرضه و تقاضا).[۱۰] روش تعادلی جزئی در ورود به این واقعیت که بازارها با هم در کنش هستند ناتوان است. یک تغییر در قیمت یک کالا در تقاضا و عرضه دیگر کالا اثر می‌گذارد و لذا در یک فرم واقعی هنگامی که تعداد زیادی کالا همزمان تولید، تقاضا و یا خریده می‌شوند یک چارچوب بسیار عمومی و فراگیر مورد نیاز است. به عنوان اولین مرحله و در این سمت و سو روش تعادلی چند بازاری قرار دارد.

۱.۴.۱ تعادل در یک بازار منفرد

این قسمت را با در نظر گرفتن یک بازار منفرد برای کالای i به‌طوری که تقاضای (q_i^d) و عرضه (q_i^s) از این کالا صرفاً توابعی از قیمت (p_i) هستند جلو می بریم. در این دو تابع یک رابطه خطی بین قیمت کالای i و تقاضا (یا عرضه) دیده می‌شود.

$$q_i^d = \alpha_۰ - \alpha_۱ p_i \tag{۳.۱}$$

$$q_i^s = -\beta_۰ + \beta_۱ p_i \tag{۴.۱}$$

تذکر ۱.۱. هر چند در منابع علم اقتصاد به دو تابع بالا معمولاً به عنوان توابع خطی از نوع تقاضا و یا عرضه ارجاع داده می‌شود ولی از لحاظ علم ریاضیات این دو، **توابعی خطی** نیستند![۱۱] در ریاضیات، توابعی با یک جمله اضافی (عرض از مبداء) را به نام **آفین** می‌شناسند. با این نگاه، از یک طرف، موقعی که متغیر (مثلاً قیمت) صفر باشد مقدار متغیر وابسته (مثلاً تقاضا یا عرضه) می‌تواند مقداری غیر صفر اختیار کند و از طرف دیگر فرمولاسیون تابع خطی این اجازه را به ما نمی‌دهد. پس بجاست تا سوال زیر مطرح شود:

سئوال ۱.۱. چرا در علم اقتصاد از توابع آفین برای فرمول بندی توابع عرضه و تقاضا استفاده می شود؟

به معادلات (۳.۱) و (۴.۱) برمی‌گردیم. همه ضرایب در این دو مفروضاً مثبت‌اند و شیب منفی خط تابع تقاضا نشان می‌دهد که با افزایش قیمت، تقاضا کاهش می‌یابد (و بالعکس برای تابع عرضه).

۱۰. این مسئله را در ادامه بررسی می کنیم.
۱۱. علت، وجود یک جمله ثابت در دو معادله است.

علامت منفی عدد $\beta_۰$ می‌گوید که مقدار عرضه فقط در صورتی مثبت خواهد شد که عدد قیمت مقدار مثبت (و آن هم به اندازه کافی بزرگ) شود. بازاری که برای کالای iام در نظر گرفتیم فقط موقعی شرایط حالت تعادل را تجربه می کند که

$$q_i^d = q_i^s \qquad (۵.۱)$$

و تساوی فوق معادلاً با صفر شدن **تقاضای مازاد** قابل بیان است:

$$E(p_i) = q_i^d - q_i^s = ۰ \qquad (۶.۱)$$

فرض کنید بخواهیم تعادل بازار را به وسیله (۵.۱) و (۳.۱)[۱۲] به‌دست آوریم. یک چنین نقطه‌ای را می‌توان بر حسب دو متغیر قیمت تعادلی و مقدار متناظر توصیف کرد. یک راه ساده، جایگذاری (۳.۱) و (۴.۱) در (۶.۱) به‌صورت

$$E(p_i) = (\alpha_۰ - \alpha_۱ p_i) - (-\beta_۰ + \beta_۱ p_i) = ۰$$

است و از آنجا قیمت متناظر تعادل بازار $\hat{p}$ برابر است با

$$\hat{p}_i = \frac{(\alpha_۰ + \beta_۰)}{(\alpha_۱ + \beta_۱)} \qquad (۷.۱)$$

از طرف دیگر با جایگذاری $\hat{p}_i$ در (۳.۱) و یا (۴.۱) مقدار متناظر سطح تعادل بدست می‌آید:

$$\hat{q}_i = (\alpha_۰\beta_۱ - \alpha_۱\beta_۰) \,/\, (\alpha_۱ + \beta_۱) \qquad (۸.۱)$$

تساوی اخیر از نظر اقتصادی نتیجه ای با معناست. در واقع $\hat{q}_i > ۰$ هرگاه $\alpha_۰\beta_۱ - \alpha_۱\beta_۰ > ۰$.

مثال ۵.۱. فرض کنید دو تابع $q^d = ۳۰ - ۲p$ و $q^s = -۶ + ۹p$ به ترتیب توابع تقاضا و عرضه کالایی در بازار باشند. مطلوبست قیمت تعادلی و سطح تولید متناظر با آن (جواب: $\hat{p} = ۴$ و $\hat{q} = ۳۰$).

۱۲. و یا (۵.۱) و (۴.۱)

۲.۴.۱ تعادل در سیستم چند بازاری

به اقتصادی دو کالایی بر می گردیم. با فرض اینکه عرضه و تقاضای هر کالا تابعی از قیمت همان کالا و قیمت کالای دیگر باشد، دستگاه چهار معادله‌ای زیر بدست می‌آید:

$$q_1^d = \alpha_{01} + \alpha_{11} p_1 + \alpha_{12} p_2 \tag{9.1}$$

$$q_1^s = \beta_{01} + \beta_{11} p_1 + \beta_{12} p_2 \tag{10.1}$$

$$q_2^d = \alpha_{02} + \alpha_{12} p_1 + \alpha_{22} p_2 \tag{11.1}$$

$$q_2^s = \beta_{02} + \beta_{12} p_1 + \beta_{22} p_2 \tag{12.1}$$

برای سیستم اقتصادی فوق، نقطه تعادل به فرم یک چهارتایی $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{q}_1, \hat{q}_2)$ ظاهر می‌شود که در آن معادلات زیر همزمان برقرارند:

$$E_1(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = q_1^d(\hat{p}_1, \hat{p}_2) - q_1^s(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = 0 \tag{13.1}$$

$$E_2(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = q_2^d(\hat{p}_1, \hat{p}_2) - q_2^s(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = 0 \tag{14.1}$$

تمرین ۱.۱. اولاً با استفاده از (۹.۱) تا (۱۴.۱) نقطه تعادل دو کالای ۱ و ۲ را بدست آورده و ثانیاً مقدار سطح تعادل متناظر با کالای اول چیست؟

مثال ۶.۱. در اقتصادی متکی بر دو کالای (q_1, q_2)، توابع عرضه و تقاضای به ترتیب زیر است. دو تابع $q_1^d = 3 - 2p_1 + 2p_2$ و $q_1^s = -4 + 3p_1$ برای کالای اول و $q_2^d = 22 + 2p_1 - 2p_2$ و $q_2^s = 20 + p_2$ برای کالای دوم. مطلوبست قیمت‌های تعادلی کالا ها (جواب: $p_1 = 3$ و $p_2 = 4$).

۵.۱ مشکل سیاستگذاری اقتصادهای کلان

بعد از جنگ جهانی دوم، نقش دولت‌ها در مدیریت اقتصاد به‌طور نامحدودی پذیرفته شد. بسیاری از کشورهای در حال توسعه (مانند هند و ترکیه) در مسیر اجرای برنامه‌های توسعه‌ای که

کمتر فراگیر بودند، قدم برداشتند تا به برنامه‌هایی مبتنی بر تعدیل و توزیع عادلانه ثروت در جامعه بپردازند. هر چند تعهدات دولت (به‌طور فزاینده‌ای) افزایش می‌یافت، لزوم داشتن یک چارچوب قابل اجرا به نحوی که همزمانی و سازگاری را با هم داشته باشد بیشتر حس می‌شد. اولین قدم در این حوزه توسط جان تینبرگن (۱۹۰۳–۱۹۹۴) برداشته شد. کتاب وی[۱۳] سنگ بنای نظریه سیاسی اقتصاد بعد از جنگ جهانی دوم است. خط مشی که وی ترسیم می‌کند شامل ۳ اصل اساسی است:

(۱) مجموعه ابزار که توسط سیاستگذاران کنترل می‌شود.

(۲) یک مجموعه از اهداف. این مجموعه توسط سیاستگذار کنترل نمی‌شود ولی در عین حال به جهت تأثیراتی که در رفاه اجتماعی می‌گذارند، مورد توجه قانون‌گذاران است و

(۳) یک مدل کمی که مبین روابط بین ابزار، اهداف و دیگر متغیرها باشد.

۱.۵.۱ یک مدل سیاست اقتصاد کلان ساده با یک هدف

مدل اقتصاد کلان یک بخشی ساده زیر را در نظر بگیرید:

$$Y = C + I + G + X - M \tag{۱۵.۱}$$

$$C = cY_d, \qquad 0 < c < 1 \tag{۱۶.۱}$$

$$Y_d = Y - T \tag{۱۷.۱}$$

$$T = tY, \qquad 0 < t < 1 \tag{۱۸.۱}$$

$$G = T + D \tag{۱۹.۱}$$

$$M = mY, \qquad 0 < m < 1 \tag{۲۰.۱}$$

که در آن Y تولید ناخالص ملی (GDP)، C مصرف خصوصی، T درآمد مالیاتی، I سرمایه‌گذاری خصوصی، G مخارج دولت، X صادرات، M واردات و D کسری بودجه است.

معادلهٔ (۱۵.۱) از نوع تعریفی است. به این صورت که GDP را بر اساس هزینه‌های جانبی تعریف می‌کند.

معادلهٔ (۱۶.۱) یک تابع مصرف و لذا معادله‌ای رفتارگراست. این معادله، مصرف خصوصی را به درآمد قابل مصرف مرتبط می‌سازد، که در (۱۷.۱) به عنوان درآمدی که خانواده می‌تواند پس از

۱۳. مرجع شمارهٔ ۳۱ را ببینید.

پرداخت مالیات خود خرج کند، تعریف می‌شود. در این معادله c میل نهایی به مصرف است و در واقع افزایش در مجموع مصرف خصوصی وقتی GDP یک واحد افزایش می‌یابد، را ارائه می‌دهد.

معادله (۱۸.۱) یک معادله نهادی است که کد مالیاتی را نشان می‌دهد. درصد معین (t) از GDP به عنوان مالیات جمع آوری می‌شود.

معادله (۱۹.۱) یک معادله تعریفی دیگر است که نشان می‌دهد که مخارج دولت را می‌توان یا از طریق جمع آوری مالیات و یا از طریق استقراض تأمین مالی کرد.

معادله (۲۰.۱) تابع واردات است که واردات را به GDP متصل می‌کند. این معادله (که بنوعی رفتارگراست) بیان می‌کند که در صورت افزایش GDP، تقاضا برای محصولات خارجی نیز افزایش می‌یابد. در این معادله، m نشان دهنده میل نهایی به واردات است.

در مدل شش معادله‌ای فوق، هر معادله، متغیری متفاوت از دیگری که به نام **متغیر داخلی مدل** موسوم است را توصیف کرده و مقدار این متغیرها به وسیله خود مدل مشخص می‌شود. توجه کنید که الگوی فوق داری سه متغیر خارجی X, I و D است که در آن سرمایه‌گذاری خصوصی I به جهت سهولت، به عنوان یک متغیر خارجی (متغیر داده) تلقی شده است (متغیر داده). فرض کنید مقادیر داده شده به متغیرهای خارجی، به ترتیب توسط I^* و X^* نشان داده شوند. متغیر خارجی سوم، کسری بودجه (D) است که توجه خاصی را می‌طلبد. بزرگی این متغیر توسط مجلس هنگامی که بودجه ملی ارائه شده توسط دولت در مرحله تصویب است، مشخص می‌شود. به بیان دیگر، در تقابل با I و X، متغیر D قابلیت کنترل توسط سیاستگذاران را داشته و لذا عملاً ابزاری سیاسی است. اکنون این متغیر را از دیگر متغیرهای خارجی با نشان دادن مقادیرش به‌وسیله $\tilde{D}$، مجزا می‌کنیم (با نوشتن $D = \tilde{D}$).

تینبرگن در کتاب خود[۱۴]، گزاره ای غیر رسمی را که بنام **قضیه تینبرگن** معروف است، بیان می کند: **در یک چارچوب سیاست اقتصادی از نوع تینبرگن، تعداد هدف‌ها باید با تعداد ابزار برابر باشد.** که لازم است توضیحی دربارهٔ آن داده شود:

او در این کتاب درباره معنی تساوی تعداد ابزار و اهداف بحث کرده و معتقد است وقتی چنین شرطی برقرار باشد، مقادیر منحصر به فرد ابزار برای رسیدن به اهداف داده شده می‌تواند تعیین شود. در فصل پنجم، به مشکلاتی اشاره می‌شود که هنگام یکسان نبودن تعداد ابزار با تعداد اهداف بوجود می‌آیند. ما نیز به این مسئله در فصل پنجم کتاب و از نقطه نظر ریاضی خواهیم پرداخت. در پرتو

۱۴. مرجع شمارهٔ ۳۱ فصل ۴.

این قضیه اساسی، مدل کلان داده شده بالا به سیاست گذار این اجازه را می‌دهد که یک متغیر هدف را انتخاب کند. به این صورت که مثلاً فرض کنید سیاست گذار GDP را به عنوان متغیر هدف انتخاب کند. آن‌گاه سؤال به این شکل می‌تواند فرمول‌بندی شود که: **دولت به منظور دستیابی به سطح هدف‌گذاری شده GDP می‌بایستی چه مقدار قرض بگیرد؟**

بدین منظور، با جایگزین کردن (۱۶.۱) در (۲۰.۱) و در (۱۵.۱)، و مرتب کردن مجدد معادله داریم:

$$Y = \frac{۱}{۱ - c(۱-t) - t + m}\left(I^* + X^* + \tilde{D}\right) \tag{۲۱.۱}$$

وقتی مقدار هدف GDP (مثلاً $\hat{Y}$) داده شده است، مقدار مورد نیاز کسری بودجه (مثلاً مقدار بازار) از (۱۹.۱) به این‌صورت حاصل می‌شود:

$$\tilde{D} = [۱ - c(۱-t) - t + m]\hat{Y} - (I^* + X^*) \tag{۲۲.۱}$$

مثال ۷.۱. مدل داده شده از (۱۵.۱) تا (۲۰.۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید که ضرایب $c = ۰.۹$، $t = ۰.۱۵$ و $m = ۰.۳$ تخمین زده شده‌اند[۱۵]. اگر $I = X = ۵۰$ (بیلیون دلار) و سطح GDP در نقطه ۳۲۰ بیلیون دلار هدف‌گذاری شده باشد، در این‌صورت دولت باید چه مقدار قرض بگیرد؟[۱۶]

۲.۵.۱ یک مدل سیاست اقتصاد کلان با چندین متغیر و چندین ابزار

در بیشتر موارد، دولت، مثلاً وقتی هم در صدد رسیدن به یک سطح اشتغال رضایت‌بخش و هم به دنبال محدود سازی کسری حساب جاری در یک سطح معقول است، بیش از یک هدف دارد. فرض کنید مورد اخیر برای یک اقتصاد و توسط مدل زیر فرمول‌بندی شده است:

$$Y = C + I + G + X - M \tag{۲۳.۱}$$

$$G = G_C + G_I \tag{۲۴.۱}$$

$$C = cI, \quad ۰ < c < ۱ \tag{۲۵.۱}$$

$$I = k_۱(Y - Y_{-۱}) + k_۲ G_۱ \tag{۲۶.۱}$$

۱۵. c نشان دهندهٔ میل به مصرف، t نسبت مالیات به GDP و m میل نهایی به واردات است.
۱۶. جواب: ۲۳.۲ بیلیون دلار.

$$M = m_C C + m_I I + m_G G_۱ + m_X X \qquad (۲۷.۱)$$

$$N = nY, \quad n > ۰ \qquad (۲۸.۱)$$

$$B = p_x X - p_m M \qquad (۲۹.۱)$$

که در آن $k_۱, k_۲ > ۰$ و $۰ < m_C, m_I, m_G, m_X < ۱$.

در این دستگاه معادلات، سه گروه متغیر دیده می‌شود:

(۱) متغیرهای داخلی شامل Y مقدار GDP، C مصرف خصوصی، I سرمایه‌گذاری خصوصی، M واردات، N اشتغال و B حساب جاری تراز پرداخت‌ها.

(۲) متغیرهای خارجی شامل (الف) متغیرهای داده‌ای: صادرات X و $Y_{-۱}$ GDP سال گذشته) و (ب) ابزارها G_C هزینه‌های مصرف عمومی و G_I هزینه‌های سرمایه‌گذاری خصوصی.

(۳) متغیرهای هدف که این متغیرهای و مقادیر آن‌ها به وسیله سیاست گذار با توجه به $N = \hat{N}$ و $B = \hat{B}$ محاسبه می‌شود.

پارامترها شامل c سهم مصرف در درآمد، t متوسط نرح مالیات، m واردات بر یک واحد از تولید، n اشتغال بر یک واحد از تولید (عکس بهره‌وری) و p_x و p_m به ترتیب قیمت‌های واردات و صادرات می شوند. ضریب $k_۱$ نشان می‌دهد که چه مقدار سرمایه‌گذاری توسط آژانس‌های خصوصی در جواب به یک افزایش در GDP (در مقایسه با سطح دوره پیشین خود به ازای یک واحد) انجام خواهد شد.

همچنین $k_۲$ نشان می‌دهد که چقدر سرمایه گذاری مضاعف داریم وقتی دولت سرمایه گذاری خود را به‌ازای یک واحد افزایش می‌دهد.

مثال ۸.۱. در مدل داده شده توسط (۲۳.۱) تا (۲۹.۱) قرار دهید $c = ۰.۸$، $k_۱ = ۰.۲$، $m_۱ = ۰.۴$، $m_x = ۰.۲$، $m_c = ۰.۱$، $m_G = ۰.۳$، $n = ۰.۴$ **و** $k_۲ = ۰.۰۵$. **فرض کنید** $X = ۳۰$، $Y-۱ = ۱۰۰$ **و بعلاوه دولت می خواهد اهداف** $B = ۰$ **و** $N = ۶۰$ **را به دست آورد. مطلوبست مقادیر** G_I **و** G_C. **با اطلاعات داده شده، دستگاه معادلات خطی زیر**

شکل می گیرد:[۱۷]

$$\begin{cases} Y = C + I + G + ۳۰ - M \\ G = G_C - G_I \\ I = ۰.۲(Y - ۱۰۰) + ۰.۰۵G_I \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} C = ۰.۸Y \\ M = ۰.۱C + ۰.۴I + ۰.۳G_I + (۰.۲ \times ۳۰) \\ ۶۰ = ۰.۴Y \\ ۰ = ۳۰p_x - Mp_m \end{cases}$$

سئوال ۱.۲. معادلات (۱.۲۳) تا (۱.۲۹) را دسته بندی کرده و توضیح دهید.[۱۸]

تمرین ۱.۲. مقادیر ابزارهایی که سیستم را قادر به دستیابی به اهداف مورد نظر از ترازهای حساب جاری و اشتغال می کند، بیابید.

۱.۶ مسائل

۱. با نمایش جفت نقاط زیر در یک دستگاه مختصات $\mathbb{R}^۲$، پاره‌خط اتصال بین آن‌ها را کشیده و طول این پاره‌خط‌ها را بدست آورید. معادله خط‌هایی را که از نقاط این مسئله می‌گذرند را هم بنویسید.

$$(a)\ (۴,-۱۰),(۰,۱) \quad (b)\ (۰,۰),(-۷,-۸) \quad (c)\ (\sqrt{۲},\sqrt{۵}),(\sqrt{۲},-\sqrt{۵})$$

۲. ثابت کنید فاصلهٔ دو نقطه دلخواه بر محور x، با قدر مطلق تفاضل بین مختصات آن‌ها برابر است.

۳. خط‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$(a)\ ۳x - ۴y = ۱۲, \quad (b)\ x + y = ۱۰, \quad (c)\ ۲x - ۵y = ۱۰, \quad (d)\ x = ۵.$$

۴. به‌طور مجزا خطی را چنان رسم کنید که: الف) یک نقطه تقاطع با محور طول‌ها دارد ولی عرض از مبداء ندارد. ب) عرض از مبدا دارد ولی با محور طول‌ها تقاطعی ندارد. ج) عرض مبدا و نقطه تقاطع با محور طول‌ها خط بر هم منطبقند.

۵. با فرض غیر صفر بودن ضرایب a,b در خط $ax + by + c = ۰$ نشان دهید نقاط تقاطع آن با محورها عبارتند از نقاط $(-c/a, ۰)$, $(۰, -c/b)$.

۶. آیا $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۱$، معادله خطی است که نقاط $(۰,b)$ و $(a,۰)$، نقاط تقاطعش با محورهاست؟

۷. معادلهٔ $۷x - ۱۰ = ۰$ را با رسم $y = ۷x - ۱۰$ به طور شکلی حل کنید.

۱۷. دستگاه، بجهت خلاصه نوشتن در دو تکه آورده شده است ولی در واقع یک دستگاه هفت معادله ای داریم.
۱۸. اعم از تعریفی، تکنیکی و غیره.

۸. معادلات خط‌هایی $|x|+|y|=۱$ و $|x+y|=۱$ را رسم کنید.

۹. دستگاه‌های معادلات زیر را حل کنید.

$$(a)\ \begin{cases} ۳x-۵y=۱۵ \\ ۲x+y=۵ \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} ۳x-۵y=۱۵ \\ ۶x-۱۰y=۳۰ \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} ۳x-۵y=۱۵ \\ ۲x+y=۵ \end{cases}$$

۱۰. فرض کنید $z_۱=a_{۱۱}y_۱+a_{۱۲}y_۲$ و $z_۲=a_{۲۱}y_۱+a_{۲۲}y_۲$. با فرض

$$y_۱=b_{۱۱}x_۱+b_{۱۲}x_۲,\ \ y_۲=b_{۲۱}x_۱+b_{۲۲}x_۲$$

مطلوبست محاسبه $z_۱$ و $z_۲$ به عنوان توابعی از $x_۱$ و $x_۲$.

۲

بردارها و ماتریس‌ها

۱.۲ بردارها

در فصل پیش با مفهوم یک n- تایی مرتب مانند

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

از اعداد حقیقی آشنا شدید. در این فصل آنرا یک **بردار** نامگذاری می‌کنیم. توجه کنید که بردار $\mathbf{y}$ را با حرف لاتین پررنگ نوشته‌ایم. در این بردار، اعداد زیر

$$y_i, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

را مؤلفه‌های $\mathbf{y}$ و تعداد مؤلفه‌ها (یعنی n) را بنام **بُعد** بردار $\mathbf{y}$ می‌شناسند. مؤلفه‌های y_i همگی اعداد حقیقی‌اند. همچنین مجموعهٔ همهٔ بردارهای n- بُعدی، فضای حقیقی n-بُعدی را می‌سازد که با $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهند.

مثلاً یک واحد اقتصادی $\mathbf{EU}$ را می‌توان به‌شکل زیر توصیف کرد که در واقع برداری چهار تایی است. در آن سود $= y_1$، ذخیره سرمایه $= y_2$، تعداد کارگران $= y_3$ و تولید $= y_4$ می‌باشند:

مثال ۱.۲. $\mathbf{EU} =$ **(تولید، تعداد کارگران، ذخیره سرمایه، سود)**.

در این فضا، $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ هرگاه برای هر $i = 1, \ldots, n$: $x_i = y_i$. اگر برای هر i: $x_i \geqslant y_i$ باشد، آن‌گاه برای مقایسه دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ می‌نویسیم:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \geqslant \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

توجه کنید برخلاف طبیعت اعداد حقیقی که اگر $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ نباشد، آن‌گاه حتماً $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}$ برقرار است؛ در بین بردارها چنین چیزی وجود ندارد. مثلاً برای دو بردار $\mathbf{x} = (۱,۰)$ و $\mathbf{y} = (۰,۱)$ نه رابطهٔ $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ و نه رابطهٔ $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}$ و در واقع هیچکدام برقرار نیستند.

از نظر ریاضیات، هر متغیری که مقدارش یک عدد معین (مانند ۲ یا ۱/۳) باشد را **اسکالر** می‌نامند. بردار $(۰,\ldots,۰) = \mathbf{0}$ که گاهی آن را با $\mathbf{0}$ هم نشان می‌دهند، بردار **صفر (پوچ)** نامیده می‌شود.

اگر در بردار $\mathbf{x} = (x_۱,\ldots,x_n)$ به ازای هر i، $x_i \geqslant ۰$ آن‌گاه $\mathbf{x}$ را **نامنفی** و اگر $x_i > ۰$، بردار $\mathbf{x}$ را **مثبت** تلقی می‌کنیم.

۱.۱.۲ خواص جبری بردارها

جمع و تفریق دو بردار $\mathbf{x} = (x_۱,\ldots,x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_۱,\ldots,y_n)$ به‌صورت طبیعی زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_۱+y_۱,\ldots,x_n+y_n), \quad \mathbf{x}-\mathbf{y} = (x_۱-y_۱,\ldots,x_n-y_n)$$

در حالتی که $\lambda \in \mathbb{R}$ یک اسکالر باشد، ضرب اسکالری $\lambda\mathbf{y}$ بُرداری به‌شکل زیر است:

$$\lambda\mathbf{y} = (\lambda y_۱,\ldots,\lambda y_n)$$

مثال ۲.۲. **فرض کنیم $\mathbf{EU}_۱ = (Y_۱,L_۱,K_۱,P_۱)$ بردار نمایش یک واحد اقتصادی (بنگاه) باشد. اگر این واحد بخواهد با واحد دیگری با بردار نمایش $\mathbf{EU}_۲ = (Y_۲,L_۲,K_۲,P_۲)$ (که متمایز با $\mathbf{EU}_۱$ است) ادغام شود، در این‌صورت بردار نمایش واحد ادغام شده به‌شکل $\mathbf{EU}_۳ = \mathbf{EU}_۱+\mathbf{EU}_۲$ در خواهد آمد. در این حالت بدیهی است که $\mathbf{EU}_۲$ به‌صورت تفاضل $\mathbf{EU}_۳-\mathbf{EU}_۱$ نوشته شود.**

اگر این دو واحد دارای مختصات یکسانی باشند (یعنی $\mathbf{EU}_۱ = \mathbf{EU}_۲$)، در این‌صورت:

$$\mathbf{EU}_۳ = ۲\mathbf{EU}_۱ \text{[1]}$$

که بواقع مفهوم ضرب اسکالری را معنی می کند. اگرچه در این مثال و البته بقیهٔ مثالهای

۱. منظور بردار $(۲Y_۱,۲L_۱,۲K_۱,۲P_۱)$است

اقتصادی کتاب با طبیعتی توصیفی ارائه می شود مع الوصف ممکن است در این مثال سود حاصل از ادغام دو واحد بیشتر یا کمتر از تعداد $P_۱+P_۲$ شود.

خواص زیر را می‌توان برای اعمال برداری فوق و با کمک تعریف به دست آورد:

$a۱.\ \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (جابجایی)، $\quad b۱.\ (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (شرکت‌پذیری)

$c۱.\ \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}, \quad d۱.\ \mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$

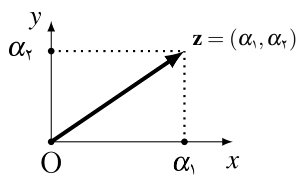
$a۲.\ ۱\mathbf{x}=\mathbf{x}, \quad b۲.\ \lambda(\mu\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}$

$a۳.\ (\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}, \quad b۳.\ \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$

تمرین ۲.۱. **سعی کنید این خواص را ثابت کنید.**

۲.۱.۲ تعبیر هندسی بردارها و اعمال بین آن‌ها

در صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$، بردار $\mathbf{z}=(\alpha_۱,\alpha_۲)$ را با یک پاره‌خط جهت‌دار با ابتدای مبدأ $(۰,۰)$ و انتهای نقطهٔ $(\alpha_۱,\alpha_۲)$ هم می‌توان نشان داد. به این بردار، **بردار مکان** نقطهٔ z هم می گویند.



شکل ۱.۲: یک بردار در صفحه $\mathbb{R}^۲$

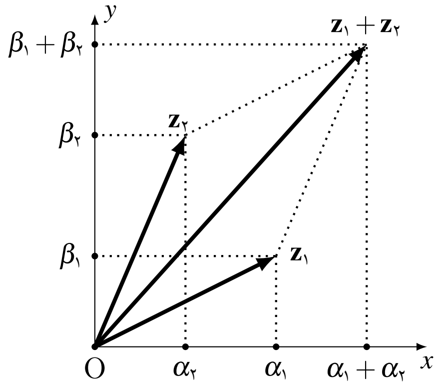
مجموع دو بردار

$$\mathbf{z}_۱=(\alpha_۱,\beta_۱), \qquad \mathbf{z}_۲=(\alpha_۲,\beta_۲)$$

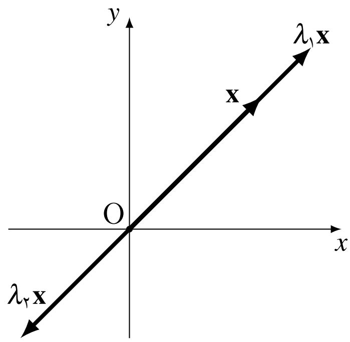
به‌صورت $\mathbf{z}_۱+\mathbf{z}_۲=(\alpha_۱+\alpha_۲,\beta_۱+\beta_۲)$ بدست می‌آید. این بردار، قطر متوازی‌الاضلاعی با اضلاع $\mathbf{z}_۱$ و $\mathbf{z}_۲$ است (شکل ۲.۲).

ضرب اسکالر λ در یک بردار با توجه به اینکه $|\lambda|>۱$ (یا $|\lambda|<۱$) باشد به‌ترتیب اثری انبساطی (یا انقباضی) روی طول بردار دارد. در حالتی که $\lambda>۰$، جهت بردار $\lambda\mathbf{z}$ با $\mathbf{z}$ یکی است و عدد منفی λ جهت بردار $\lambda\mathbf{z}$ را ۱۸۰° می‌چرخاند (در امتداد مخالف بردار $\mathbf{z}$ قرار می‌دهد). در شکل (۳.۲) ضرب اسکالر را برای بردار $\mathbf{x}$ و به ازای $\lambda_۱>۱$ و $-۱<\lambda_۲<۰$ ببینید.

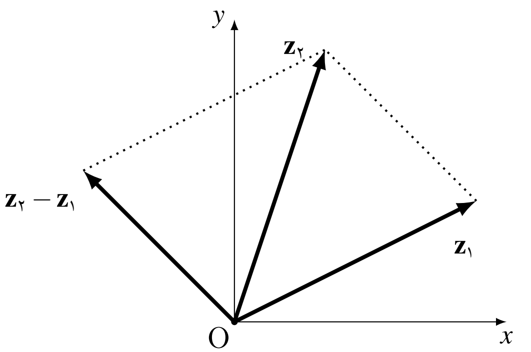
در شکل (۴.۲) **تفاضل** $\mathbf{z}_۲ - \mathbf{z}_۱$ و در شکل (۵.۲) **تصویر** بردار $\mathbf{a}$ بر روی محور xها با $pr_x\mathbf{a}$ نشان داده شده است.



شکل ۲.۲: مجموع دو بردار



شکل ۳.۲: ضرب یک بردار در اسکالر



شکل ۴.۲: تفاضل دو بردار در صفحه

فرض کنیم $\mathbf{z}_۱, \ldots, \mathbf{z_s}$ مجموعه‌ای از بردارها در $\mathbb{R}^n$ هستند. اگر اعداد حقیقی $\lambda_۱, \ldots, \lambda_s$ را طوری بتوان یافت که اولاً همه با هم صفر نبوده و ثانیاً

$$\sum_{i=۱}^{s} \lambda_i \mathbf{z_i} = \lambda_۱\mathbf{z}_۱ + \lambda_۲\mathbf{z}_۲ + \cdots + \lambda_s\mathbf{z_s} = \mathbf{0}$$

در این‌صورت بردارهای $\mathbf{z}_۱, \ldots, \mathbf{z_s}$ را **وابسته خطی** می‌نامند[۲].

۲. گاهی می‌گویند مجموعه $\{\mathbf{z}_۱, \ldots, \mathbf{z_s}\}$ مجموعه‌ای از بردارهای وابسته (خطی) است.

مثال ۳.۲. **بردارهای** $\mathbf{a} = (۱,۲,۳)$، $\mathbf{b} = (۴,۵,۶)$ **و** $\mathbf{c} = (۷,۸,۹)$ **بردارهای وابسته خطی‌اند، زیرا**

$$(۱ \times \mathbf{a}) + (-۲ \times \mathbf{b}) + (۱ \times \mathbf{c}) = \boldsymbol{O}$$

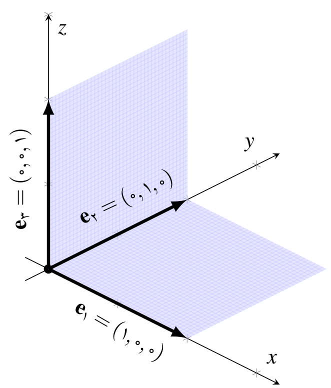
هرگاه برای بردارهای $\mathbf{z}_۱, \ldots, \mathbf{z_s}$:

$$\lambda_۱ \mathbf{z}_۱ + \lambda_۲ \mathbf{z}_۲ + \cdots + \lambda_s \mathbf{z}_s = \mathbf{0}$$

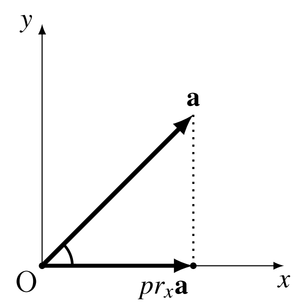
و نتیجه بگیریم همه λ_iها $(i = ۱, \ldots, s)$ صفر هستند در این‌صورت بردارهای فوق را **مستقل خطی** می‌گویند. مثلاً بردارهای

$$\mathbf{e}_۱ = (۱,۰,\ldots,۰), \mathbf{e}_۲ = (۰,۱,\ldots,۰), \ldots, \mathbf{e}_n = (۰,\ldots,۰,۱)$$

واقع در $\mathbb{R}^n$ همگی مستقل خطی‌اند (نمایشی از حالت $n = ۳$ در شکل ۶.۲ دیده می شود).



شکل ۶.۲: بردارهای واحد در $\mathbb{R}^۳$



شکل ۵.۲: تصویر یک بردار روی محور x

اکنون فرض کنید $\mathbf{z}_۱, \ldots, \mathbf{z}_s$ بردارهایی وابسته خطی اند. بنابه تعریف، حداقل $\lambda_{i(i=۱,\ldots,s)} \neq ۰$ ای هست که:

$$\lambda_۱ \mathbf{z}_۱ + \cdots + \lambda_i \mathbf{z}_i + \cdots + \lambda_s \mathbf{z}_s = \mathbf{0}$$

از این‌رو، $\lambda_i \mathbf{z}_i = -\sum_{j=۱}^{i-۱} \lambda_j \mathbf{z}_j - \sum_{j=i+۱}^{s} \lambda_j \mathbf{z}_j$ و از آنجا

$$\mathbf{z}_i = \mu_۱ \mathbf{z}_۱ + \cdots + \mu_{i-۱} \mathbf{z}_{i-۱} + \mu_{i+۱} \mathbf{z}_{i+۱} + \cdots + \mu_s \mathbf{z}_s \qquad (۱.۲)$$

که در آن $\mu_k = \frac{-\lambda_k}{\lambda_i}$ به‌ازای $k = ۱, \ldots, s$ و $k \neq i$.

بردار $\mathbf{a}$ را **ترکیبی خطی** از بردارهای $\mathbf{b}_۱, \ldots, \mathbf{b}_n$ گویند هرگاه اعداد حقیقی $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n$ یافت شوند که

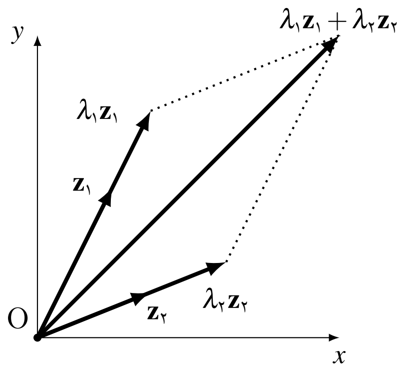
$$\mathbf{a} = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i = \alpha_۱ \mathbf{b}_۱ + \cdots + \alpha_n \mathbf{b}_n$$

به‌طورخاص، $\mathbf{z}_i$ (در بالا) به‌صورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{z}_۱, \cdots, \mathbf{z}_{i-۱}, \mathbf{z}_{i+۱}, \ldots, \mathbf{z}_s$ نوشته شد. در واقع اثبات کردیم:

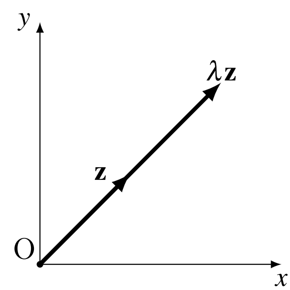
قضیه ۲.۱. اگر بردارهای $\mathbf{z}_۱, \mathbf{z}_۲, \ldots, \mathbf{z}_s$ وابسته خطی باشند، آن‌گاه حداقل یکی از آنها، ترکیب خطی از بقیه بردارهاست. بالعکس، بردارهایی که یکی از آن‌ها ترکیب خطی از دیگر بردارها باشند، وابسته خطی هستند.

۲.۱.۳ تعبیر هندسی در $\mathbb{R}^۲$

به دو شکل ۲.۷ و ۲.۸ توجه کنید. آیا در شکل ۲.۷، دو بردار $\mathbf{z}$ و $\lambda\mathbf{z}$ وابسته خطی‌اند؟ بر خلاف جوابی که به این سئوال می دهید، از شکل ۲.۸ چنین می‌فهمیم که $\lambda_۱\mathbf{z}_۱ + \lambda_۲\mathbf{z}_۲$ ترکیبی خطی از دو بردار $\mathbf{z}_۱$ و $\mathbf{z}_۲$ است و در واقع هر سه، بردارهایی وابسته خطی در $\mathbb{R}^۲$ هستند:



شکل ۲.۸: ترکیب خطی دو بردار



شکل ۲.۷: آیا این بردارها وابسته خطی‌اند؟

تذکر ۲.۱. n بردار زیر را در $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید:

$$\mathbf{a}_۱ = (۱, -۲, ۰, ۰, \ldots, ۰),\ \mathbf{a}_۲ = (۰, ۱, -۲, ۰, \ldots, ۰), \cdots, \mathbf{a}_{n-۱} = (۰, ۰, \ldots, ۰, ۱, -۲)$$

$$\mathbf{a}_n = (-۲^{-(n-۱)}, ۰, \dots, ۰, ۰, ۱) \qquad (\star)$$

از آنجایی که $۲^{-n}\mathbf{a}_۱ + ۲^{۱-n}\mathbf{a}_۲ + \cdots + ۲^{-۱}\mathbf{a}_n = O$ لذا $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ وابسته خطی هستند. توجه کنید وقتی $n > ۴۰$ آن‌گاه $۲^{۱-n} < ۱۰^{-۱۲}$ و لذا $۲^{۱-n}$ عددی بسیار کوچکی است. در واقع اگر $n > ۶۴$ باشد، از دید محاسبات کامپیوتری عدد ۲^{-n} تقریباً صفر است و لذا می‌توان این‌طور تصور کرد که در دستگاه $(\star)$، $\mathbf{a}_n$ ها شبیه $\mathbf{a}_n = (۰, \cdots, ۱)$ شده و لذا $(\star)$ به مجموعهٔ زیر

$$\overbrace{(۱, -۲, ۰, ۰, \dots, ۰)}^{\mathbf{a}_۱}, \underbrace{(۰, ۱, -۲, ۰, \dots, ۰)}_{\mathbf{a}_۲}, \cdots, \underbrace{(۰, ۰, \dots, ۰, ۱, -۲)}_{\mathbf{a}_{n-۱}}, \underbrace{(۰, ۰, \dots, ۰, ۰, ۱)}_{\mathbf{a}_n}$$

از بردارهای مستقل خطی تبدیل می‌شود(چرا؟). این مثال نشان داد که چقدر گِرد کردن اعداد در مستقل خطی و یا وابسته خطی بودن دسته‌ای از بردارها اثر گذار است.

تمرین ۲.۲. تحقیق کنید کدامیک از دسته بردارهای زیر وابستگی خطی دارند؟

الف) $\mathbf{a} = (۱, ۲, ۱),\ \mathbf{b} = (-۲, ۳, -۲),\ \mathbf{c} = (۷, ۴, ۷)$.

ب) $\mathbf{a} = (۱, ۲, ۳),\ \mathbf{b} = (۰, -۱, ۳),\ \mathbf{c} = (۲, -۱, ۲)$.

۲.۲ ضرب نقطه‌ای دو بردار

تعریف ۱.۲. ضرب نقطه‌ای دو بردار $\mathbf{x} = (x_۱, \cdots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_۱, \cdots, y_n)$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود. توجه کنید حاصل این عمل، یک عدد حقیقی است و نه یک بردار:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_۱y_۱ + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=۱}^{n} x_iy_i \in \mathbb{R} \qquad (۲.۲)$$

مثال ۴.۲. به‌ازای $\mathbf{a}_۱ = (۱, -۲, \dots, ۰)$ و $\mathbf{a}_۲ = (۰, ۱, -۲, ۰, \dots, ۰)$ داریم:

$$(\mathbf{a}_۱, \mathbf{a}_۲) = ۱ \times ۰ + (-۲) \times ۱ + ۰ \times (-۲) + ۰ \times ۰ + \cdots + ۰ \times ۰ = -۲$$

مثال ۵.۲ (هزینه خانوار). فرض کنید n کالا در سبد مصرفی خانواده‌ای قرار دارد. با فرض رقابتی بودن فضای اقتصادی، $\mathbf{p}$ را بردار نشانگر قیمت‌های n کالا و $\mathbf{q}$ را بردار مقادیر مصرفی متناظر این n کالا در نظر می گیریم. به‌وضوح، هزینه کل خانوار با ضرب نقطه‌ای $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ بدست می آید. یعنی $E = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

با استفاده از تعریف ۱.۲، خواص زیر را برای ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ می‌توان مستقیماً بدست آورد (λ اسکالری دلخواه است):

(۱) $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$ (جابجایی یا تقارن)

(۲) $(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})$

(۳) $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1,\mathbf{y})+(\mathbf{x}_2,\mathbf{y})$ (پخشی)

(۴) $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ و $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geqslant 0$

۱.۲.۲ طول یک بردار، زاویه بین دو بردار

تعریف ۲.۲. طول یک بردار دلخواه $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ عبارت است از عدد $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$. به‌عبارت دیگر برای بردار $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

که به‌وضوح مقداری مثبت است.

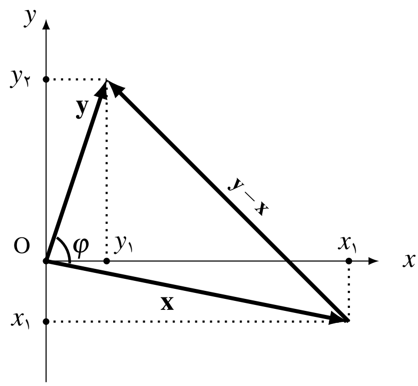
زاویه φ بین دو بردار دلخواه و ناصفر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در $\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}, \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \tag{۳.۲}$$

ممکن است در اینکه آیا تعریف فوق و ارتباط آن با $\cos\varphi$ واقعاً بجاست تردید کنید. ولی در واقع طرف راست تساوی عددی در بازه $[-1,1]$ قرار دارد. برای این کار دو بردار مسطح $\mathbf{x} = (x_1,y_1)$ و $\mathbf{y} = (x_2,y_2)$ در $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید (شکل ۹.۲). از آنجا $\mathbf{y}-\mathbf{x} = (y_1-x_1,y_2-x_2)$ و با استفاده از قاعده کسینوس‌ها در هندسه

$$\underbrace{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}_{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2} = \overbrace{|\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}|^2}^{y_1^2+x_1^2+y_2^2+x_2^2} - 2\underbrace{|\mathbf{y}||\mathbf{x}|\cos\varphi}_{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cos\varphi}$$

و لذا بعد از ساده سازی به نتیجه $\cos\varphi = \dfrac{y_1x_1+y_2x_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$ می‌رسیم.



شکل ۹.۲: زاویه بین دو بردار

تعریف ۳.۲. **دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در $\mathbb{R}^n$ را متعامد می‌نامند، هرگاه $\varphi = \frac{\pi}{۲}$. معادلاً $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ اگر و تنها اگر $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ۰$.**[۳]

قضیه ۲.۲ (فیثاغورث). **اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو بردارهای متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشند، آن‌گاه**

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^۲ = |\mathbf{x}|^۲ + |\mathbf{y}|^۲ \tag{۴.۲}$$

برهان. چون $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = |\mathbf{x}+\mathbf{y}|^۲$ لذا

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^۲ = |\mathbf{x}|^۲ + |\mathbf{y}|^۲$$

□

قضیه ۳.۲ (تعمیم قضیه ۲.۲). **گیریم $\mathbf{z}_۱, \dots, \mathbf{z}_s$ مجموعه‌ای از بردارهای دو به دو متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشد**[۴] **در این صورت**

$$|\mathbf{z}_۱ + \mathbf{z}_۲ + \cdots + \mathbf{z}_s|^۲ = |\mathbf{z}_۱|^۲ + |\mathbf{z}_۲|^۲ + \cdots + |\mathbf{z}_s|^۲ \tag{۵.۲}$$

برهان. با توجه به (۳.۲)، $\varphi \in [۰, \pi]$ پس $-۱ \leqslant (\mathbf{x},\mathbf{y})/|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \leqslant ۱$ و معادلاً

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^۲ \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \bullet (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \tag{۶.۲}$$

۳. متعامد بودن رابا نماد $x \perp y$ نشان می‌دهند.
۴. در اینجا برای هر i و j متمایز داریم $(z_i, z_j) = ۰$.

که ادعا را اثبات می کند. نامعادله (۶.۲) را **نامعادله کوشی** می‌نامند. □

حال به این یافتن جواب این سؤال می‌پردازیم که چرا فرض $\varphi \in [\circ, \pi]$ درست است. به‌ازای دو بردار $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ و عدد $\lambda \in \mathbb{R}$ و بنابه تعریف

$$(\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}) \geqslant \circ$$

یعنی $\lambda^{۲}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - ۲\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ نامنفی بوده و چون مبیّن معادله

$$\lambda^{۲}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - ۲\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \circ$$

نمی‌تواند مثبت باشد، پس ناچاراً $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{۲} - (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant \circ$. این نامساوی کوشی را ثابت می‌کند.

نتیجه ۴.۲. برای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در $\mathbb{R}^n$،

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \qquad (۷.۲)$$

برهان. می‌دانیم $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^{۲} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + ۲(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y})$ و چون

$$۲(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant ۲|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant ۲|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

پس $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^{۲} \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + ۲|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^{۲}$. □

تمرین ۳.۲. با رسم بردارهای $\mathbf{u} = (۱, ۲)$ و $\mathbf{v} = (-۳, ۱)$ و $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ در صفحه $\mathbb{R}^{۲}$ درستی نامساوی (۷.۲) را تحقیق کنید.

تمرین ۴.۲. دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\left\{(\circ, \circ, ۱, ۱) \perp \mathbf{x},\ \ (۱, ۲, \circ, -۱) \perp \mathbf{x},\ \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{x}|\right\}$$

که در آن $\mathbf{a} = (۲, ۱, \circ, \circ)$ و $\mathbf{x}$ برداری مجهول در $\mathbb{R}^{۴}$ است.

تمرین ۲.۵. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را موازی گویند هرگاه وابسته خطی باشند.[5] حال دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\left\{(۰,۰,-۳,۴) \,||\, \mathbf{x},\ \ |\mathbf{x}| = ۱۵\right\}$$

تمرین ۲.۶. بزرگترین زاویه مثلث ABC را با فرض رئوس زیر در $\mathbb{R}^۴$ بدست آورید:

$$A = (۰,۱,۲,۰), \quad B = (۰,۱,۰,-۱), \quad C = (۰,۱,۲,۰)$$

تمرین ۲.۷. اگر $A(۰,۱,۲,۳)$، $B(۱,-۱,۱,-۱)$ و $C(۱,۱,۰,۰)$ نقاطی در $\mathbb{R}^۴$ باشند، مطلوب است طول میانه AM از مثلث ABC.

۳.۲ یک مثال اقتصادی: دو کارخانه

شرکتی را در نظر بگیرید که دو کارخانه در دو محل مختلف را اداره می‌کند. می‌دانیم که هر دو، میزان یکسانی خروجی (مثلاً ۱۰ واحد) را با استفاده از نوع یکسانی از ورودی تولید می‌کنند. با اینکه مقادیر ورودی‌ها بین این کارخانه‌ها متفاوت است اما سطح خروجی یکسان است. مدیریت شرکت مشکوک می‌شود که هزینه تولید در کارخانه ۲ از کارخانه ۱ بالاتر است. اطلاعات زیر از مدیران این کارخانه‌ها جمع‌آوری شده‌اند.

کارخانه ۱

ورودی	قیمت	مقدار مصرف شده
ورودی ۱	۳	۹
ورودی ۲	۵	۱۰
ورودی ۳	۷	۸

کارخانه ۲

ورودی	قیمت	مقدار مصرف شده
ورودی ۱	۴	۸
ورودی ۲	۷	۱۲
ورودی ۳	۳	۹

۵. موازی بودن دو بردار را با $a||b$ نشان می‌دهند.

سئوال ۱.۲. آیا این اطلاعات شک مدیریت شرکت را تأیید می کنند؟

به‌منظور پاسخ به این سؤال بایستی به محاسبه تابع هزینه بپردازیم. قیمت ورودی iام در کارخانه jام را با w_{ij} و x_{ij} را نشانگر تعداد ورودی iام استفاده شده در تولید کارخانه jام می‌گیریم ($j = ۱, ۲$ و $i = ۱, ۲, ۳$). بعلاوه فرض کنید هر دوی این مقادیر چنان بخش پذیر اند که قابل بیان با اعداد حقیقی هستند. در این‌صورت هزینه تولید با استفاده از ضرب مقدار هر ورودی در قیمت خود و جمع تمام ورودی‌ها محاسبه می‌شود.

از دید ریاضی، این به معنی است که قیمت و تعداد بردارهای $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ در فضای واقعی تعریف شده و حاصلضرب داخلی آن‌ها نیز تعریف شده است. به بیان دیگر، هر دوی $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ در فضای $\mathbb{R}^۳$ هستند. تابع هزینه در این مورد را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$c = (\mathbf{w}, \mathbf{q}) \qquad (۸.۲)$$

بدیهی است هزینه c کمیتی عددی است.

با استفاده از داده‌ها (جداول بالا) و رابطه اخیر هزینه را محاسبه می‌کنیم. در کارخانه ۱ هزینه کل ۱۳۳ و دلالت دارد بر اینکه هزینه واحد ۱۳.۳ است. از سوی دیگر، در کارخانه ۲ هزینه تولید ۱۴۳ است و در واقع هزینه واحد ۱۴.۳ را ارائه می‌کند که بالاتر از کارخانه اول است. از این‌رو سوءظن، ادعای معقولی بنظر می‌رسد.

سئوال ۲.۲. مدیر کارخانه ۲ ادعا می‌کند که دلیل تفاوت هزینه؛ قیمت بالاتر ورودی در منطقه خود در مقایسه با دیگران است. آیا اطلاعات در دسترس، ادعای او را تأیید می‌کنند؟

برای پاسخ، بردارهای قیمت ورودی برای کارخانه ۱ و ۲ را به‌ترتیب با $\mathbf{p}_۱$ و $\mathbf{p}_۲$ نشان داده و فرض می‌کنیم دومی یک ضریب λ از اولی است ($\mathbf{p}_۲ = \lambda \mathbf{p}_۱$). از آنجاکه هردو بردارهایی در فضای $\mathbb{R}^۳$ هستند، طول برای هر دو تعریف شده و با توجه به تعریف طول $|\mathbf{p}_۲| = \lambda |\mathbf{p}_۱|$. کارخانه ۱ از قیمت‌های پایین‌تر برای ورودی ۲ و ۳ بهره می‌برد درحالی که کارخانه ۲ از قیمت پایین‌تر تنها برای ورودی ۳ بهره می‌برد. به‌سادگی و با حدسی تقریبی می‌توان طول بردارهای قیمت ورودی را مقایسه کرد، یعنی $|\mathbf{p}_۱| = ۹.۱۱,\ |\mathbf{p}_۲| = ۸.۶۰$. لذا داده قیمتی، ادعای مدیر کارخانه ۲ را رد می‌کند. با بررسی دقیق‌تر؛ کارخانه ۲ از گران‌ترین ورودی (ورودی ۲) به‌شدت استفاده کرده و در عوض موفق به جلوگیری از استفاده از گران‌ترین ورودی (ورودی ۳) شده

است. بنابراین، این مدیر باید دلایل منجر به انتخاب مخلوطی از ورودی‌ها در کارخانه خود را توضیح دهد.

۴.۲ کاربرد اقتصادی دیگر: اعداد شاخص

یکی از مشکلاتی که اقتصاددانان کاربردگرا درگیر آن هستند این است که دقیقاً چگونه اطلاعات اقتصاد خرد مرتبط با انبوهی (و در واقع میلیون‌ها) از قیمت‌ها و تعداد کالاها می‌تواند به‌شکل داده‌هایی کوچک از متغیرهای قیمت و تعداد تجمیع شوند؟[۶] برای مثال، کسی می‌خواهد نرخ تورم برای این اقتصاد را تخمین بزند. تورم، نرخ تغییر در سطح قیمت معمول است بطوری که می‌بایست با در نظر گرفتن تغییر آن در قیمت‌ها و برای همه کالاها محاسبه شود. تعداد n کالای مختلف را در نظر بگیرید. قیمت کالای i را با p_i و با تعداد متناظر q_i نشان دهید. از این‌رو بازای دو نقطه زمانی ۰ و t، ارزش کل تمام کالاها در این دو زمان بترتیب با

$$V^0 = \sum_i^n p_i^0 q_i^0 \tag{۹.۲}$$

$$V^t = \sum_i^n p_i^t q_i^t \tag{۱۰.۲}$$

بدست می آید. اگر

$$\mathbf{q}^0 = (q_1^0, \cdots, q_n^0), \quad \mathbf{p}^0 = (p_1^0, \cdots, p_n^0)$$

بترتیب بردارهای (سطری) نظیر قیمت‌ها و تعداد کالاها باشند، آنگاه $V^0 = (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0)$ دقیقاً حاصلضرب نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{p}^0$ و $\mathbf{q}^0$ و V^t دقیقاً حاصلضرب نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{p^t}$ و $\mathbf{q^t}$ یعنی $V^t = (\mathbf{p^t}, \mathbf{q^t})$ است. توجه دارید که به‌طور معمول، مابین زمان‌های ۰ (شروع دوره) و t (اتمام دوره) هم قیمت و هم تعداد کالاها متفاوت هستند و لذا به‌طور ساده با تقسیم (۱۰.۲) بر (۹.۲) نرخ تورم را بدست نمی‌آید. در واقع باید اثر تغییر در رخداد را حذف کرد. این همان مسئله عدد شاخص است که پیشینه بلندی دارد.

در سال ۱۸۷۱ لاسپیرس (۱۹۱۳-۱۸۳۴) فرمول زیر را به جهت محاسبه عدد شاخص برای حل

۶. اقتصادی را در نظر بگیرید که در آن بسیاری از کالاهای مختلف (از نظر کیفیت، مکان و زمان) تولید شده و در واقع هزاران (اگر نه میلیون‌ها) قیمت برای درنظر گرفته شدن وجود دارند.

این مسئله ارائه داد:

$$P_L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t q_i^0}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0} \tag{۱۱.۲}$$

توجه کنید که در این فرمول، قیمت‌ها توسط اوزان تعداد شروع دوره وزن‌دار شده‌اند. به‌عبارت دیگر، لاسپیرس فرض کرده بود که تغییرات قیمت به یک تغییر در ترکیب تعداد منجر نمی‌شود.

در سال ۱۸۷۴، پاشه (۱۹۲۵-۱۸۵۱)، پیشنهاد استفاده از وزن‌های پایان دوره را به‌جای شروع دوره ارائه داد:

$$P_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^t}$$

در مقایسه، شاخص لاسپیرس تخمین پایینی از تورم واقعی و شاخص پاشه تخمین بالایی را ارائه می‌دهد.

تمرین ۸.۲. شاخص‌های لاسپیرس و پاشه را براساس بردارهای قیمت و تعداد فرمول‌بندی کنید. نمای کلی از پاسخ: $P_L = \frac{(\mathbf{p^t}, \mathbf{q^0})}{(\mathbf{p^0}, \mathbf{q^0})}$ و $P_P = \frac{(\mathbf{p^t}, \mathbf{q^t})}{(\mathbf{p^0}, \mathbf{q^t})}$.

تمرین ۹.۲. یک اقتصاد دارای سه کالا را در نظر بگیرید. دوره‌های ابتدایی ($t = 0$) و انتهایی ($t = 1$) قیمت و تعداد کالاها به‌صورت جدول زیر ارائه شده‌اند:

	قیمت ($t = 0$)	تعداد ($t = 0$)	قیمت ($t = 1$)	تعداد ($t = 1$)
کالای ۱	۲	۵۰	۱.۸	۹۰
کالای ۲	۱.۵	۹۰	۲.۲	۷۰
کالای ۳	۰.۸	۱۳۰	۱	۱۰۰

اولاً تورم را (برای مثال درصد تغییر در سطح کلی قیمت) برای این اقتصاد توسط محاسبه شاخص لاسپیرس تخمین بزنید. ثانیاً همان تمرین را با استفاده از محاسبه شاخص پاشه تکرار کنید. برای اطلاعات بیشتر در مورد تعداد شاخص‌ها، به مراجع ۹ و ۲۳ رجوع کنید.

۵.۲ ماتریس‌ها

ماتریس، آرایه‌ای مستطیل شکل از اعداد حقیقی است:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ماتریس‌ها را با حروف لاتین بزرگ A و B و غیره نامگذاری می‌کنند. ذاتاً هر ماتریس A دارای m **سطر** و n **ستون** است. اگر حرف i برای شماره سطری از آن و حرف j برای شماره ستونی از آن اختیار شوند، آن‌گاه محدوده تغییراتی به‌شکل

$$i = ۱, \cdots, m \ , \ \ j = ۱, \cdots, n$$

بوجود می آید. این بازهٔ تغییرات کمک می کنند تا اعضای درونی ماتریس که به آنها **درآیه** ماتریس نیز می گویند، در حالت کلی به‌شکل a_{ij} نشان داده شوند[۷] در اینجا a_{ij} درآیه‌ای است که در سطر iام و ستون jام واقع است و این‌گونه A را در شکل

$$A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$$

خلاصه می‌کنیم.

در فرم خلاصه شده A، به‌شکل اندیس وار $m \times n$، **مرتبه** A گفته می‌شود[۸]. در ادامه، منظور از ماتریسهای A و B ماتریسهایی با شکل کلی $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ و $B = \|b_{ij}\|_{p\times q}$ هستند مگر در شکل و مرتبه شرایط جدیدی پیدا کنند که حتماً ذکر می شود.[۹]

ماتریس A را **مربعی** می‌نامند هرگاه $m = n$ باشد. در این حالت برای سادگی مرتبه ماتریس را n می‌نویسیم. در چنین ماتریسی درآیه‌های a_{ii}، **قطر اصلی** ماتریس را می‌سازند. مثلاً در ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} -۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۲ & -۳ & -۷ \end{pmatrix}$$

درآیه‌های مشخص شده، واقع بر روی قطر اصلی A هستند.

اگر در ماتریسی هیچ درآیه‌ای جز عدد صفر نباشد، **ماتریس صفر** $\mathbf{0}_{m\times n}$ بوجود می‌آید. مثلاً

$$\mathbf{0}_{۲\times ۲} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}_{۲}$$

هم مربعی و هم صفر است.

۷. در این کتاب، درج شماره i (سطر) بر شماره j (ستون) ارجح است.
۸. خوانده می‌شود m در n. علامت ضرب $m \times n$ جز برای بدست آوردن تعداد درآیه‌های A انجام نمی‌شود.
۹. با این فرض بدیهی است که برای ماتریس A: $i = ۱, \cdots, m$ و $j = ۱, \cdots, n$.

ماتریس **همانی** ماتریسی است مربعی[۱۰] که درآیه‌هایش بر طبق فرمول زیر پیدا می‌شوند:

$$i_{kk} = ۱,\ i_{km} = ۰, \quad m, k = ۱, \ldots, n,\ k \neq m$$

به‌عبارت دیگر، در ماتریس همانی، درآیه‌های روی قطر اصلی همگی عدد ۱ و مابقی درآیه‌ها همگی صفراند. این ماتریس را با نماد I یا I_n نمایش می‌دهند. به مفهوم ماتریس همانی در بخش ۲.۳ بیشتر می‌پردازیم.

ماتریس A را ماتریس **نامنفی** می‌گوییم، هرگاه همواره $a_{ij} \geqslant ۰$ برقرار باشد. برای راحتی در چنین مواقعی می‌نویسیم $A \geqslant \mathbf{0}$. به‌طور مشابه می‌توان ماتریس **مثبت** را تعریف کرده و نوشت $A > \mathbf{0}$.

مثال ۶.۲. **m واحد اقتصادی که هرکدام به‌وسیله n اندیس توصیف شده‌اند مفروضند. این واحدها ممکن است هرکدام یک شرکت و اندیس‌ها ممکن است شامل مواردی چون تولید، تعداد کارگران، سرمایه ملی و غیره باشند. در این‌صورت می‌توان شکلی از یک ماتریس را برای آن تصور کرد.**

مثال ۷.۲. **یک واحد اقتصادی $m = n$ بخشی را در نظر بگیرید. به‌ازای $i, j = ۱, \cdots, n$، عدد a_{ij} را نشان‌دهنده سهم تولید بخش i (و مورد استفاده در بخش j) در کل تولید بخش i فرض کنید. ماتریس حاصل ماتریسی است که در آن مجموع عناصر هر سطری برابر با واحد است.**

مثال ۸.۲. **$m = n$ شهر داریم. a_{ij} را فاصله شهر iام با شهر jام بگیرید. بدیهی است برای هر $i, j = ۱, \cdots, n$ اولاً $a_{ij} > ۰$، ثانیاً $a_{ii} = ۰$ و ثالثاً برای $i \neq j$ تساوی $a_{ij} = a_{ji}$ برقرار است. ماتریس زیر، برای سه شهر مرتب شده است:**

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{تهران} & \text{مشهد} & \text{شیراز} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{تهران} \\ \text{مشهد} \\ \text{شیراز} \end{array} & \begin{pmatrix} ۰ & ۹۰۳ & ۹۱۱ \\ ۹۰۳ & ۰ & ۱۳۵۳ \\ ۹۱۱ & ۱۳۵۳ & ۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

۱.۵.۲ اَعمال بر ماتریس‌ها

فرض کنیم A و B ماتریس‌هایی هم‌مرتبه[۱۱] و λ یک اسکالر است. جمع دو ماتریس و ضرب اسکالری λ در A به‌صورتهای زیر تعریف می‌شوند:

$$A + B = \|a_{ij} + b_{ij}\|_{m \times n}, \quad \lambda A = \|\lambda a_{ij}\|_{m \times n}.$$

۱۰. و از مرتبه n

۱۱. مثلاً از مرتبهٔ $m \times n$.

مثال ۹.۲.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۴ & ۲ \\ ۷ & ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۷ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱۱ & ۵ \\ ۱۱ & ۲ \end{pmatrix}, \ ۲\begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۲ & ۴ \\ ۱ & ۹ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۶ & ۰ \\ ۴ & ۸ \\ ۲ & ۱۸ \end{pmatrix}$$

این دو عمل دارای خواص زیر هستند:

$(۱-a)\quad A+B=B+A$

$(۱-b)\quad A+(B+C)=(A+B)+C$

$(۱-c)\quad A+(-A)=\mathbf{0}$ که $-A=(-۱)A$

$(۱-d)\quad A+\mathbf{0}=A$

$(۲-a)\quad \lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$

$(۲-b)\quad ۱A=A$

$(۳-a)\quad (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$

$(۳-b)\quad ۰\times A=\mathbf{0}$

$(۳-c)\quad \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

مشاهده می‌کنید که خواص این دو عمل عیناً همانند بردارها در $\mathbb{R}^n$ است.[۱۲]

۲.۵.۲ ضرب ماتریسی

اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ دلخواه باشند،[۱۳] آن‌گاه حاصلضرب A در B به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$AB=\left(\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)_{m\times p}=C_{m\times p}$$

توجه کنید برای محاسبهٔ c_{ij} از ضرب نقطه‌ای (A_i,B^j) استفاده می‌کنیم که در آن A_i سطر iام و B^j سطر jام B است. مثلاً:

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱} & a_{۱۱}b_{۱۲}+a_{۱۲}b_{۲۲} \\ a_{۲۱}b_{۱۱}+a_{۲۲}b_{۲۱} & a_{۲۱}b_{۱۲}+a_{۲۲}b_{۲۲} \end{pmatrix}$$

۱۲. سعی می‌کنیم این مطلب را در فصل ۶ روشن کنیم.

۱۳. توجه داریم تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر بوده و در واقع چنین شرطی برای معنی دار بودن ضرب AB لازم است.

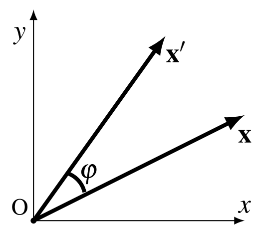
مثال ۲.۱۰.

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ & ۶ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۸ \\ ۷ & ۱ & ۹ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱۶ & ۷ & ۲۶ \\ ۴۳ & ۲۲ & ۶۱ \end{pmatrix}$$

مثال ۲.۱۱. **بردار $\mathbf{x} = (x, y)$ در $\mathbb{R}^۲$ می‌تواند حول مبدأ به اندازه زاویه ثابت φ دوران کند (شکل ۲.۱۰). این تبدیل با استفاده از ضرب ماتریسی قابل بیان است:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{R_\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (۲.۱۲)$$

که در آن R_α را ماتریس دوران می‌نامند.[۱۴] به‌عنوان تمرین و با کمک مثلثات و هندسه مقدماتی رابطه فوق را ثابت کنید.



شکل ۲.۱۰: دوران

ضرب دو ماتریس خواصی دارد که در ذیل تعدادی از آنها آمده‌اند:

$$\alpha(AB) = ((\alpha A)B) = A(\alpha B) \quad (۱-a)$$

$$A(BC) = (AB)C \quad (۱-b)$$

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (۱-c)$$

$$A(B+C) = AB + AC \quad (۲-a)$$

$$(A+B)C = AC + BC \quad (۲-b)$$

۱۴. اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}'$ را بردارهایی ۲×۱ بگیریم، آن‌گاه ۲.۱۲ را می توان به‌شکل $\mathbf{x}'^{\,t} = R_\alpha \mathbf{x}^t$ هم خلاصه کرد.

تذکر ۲.۲. اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ باشند، آن‌گاه برای اینکه BA را تعریف کنیم باید $m=p$. از این‌رو به‌نظر می‌رسد امکان ضرب A و B از هر دو طرف وقتی هر دو مربعی هم مرتبه هستند، وجود دارد. ولی این‌طور نیست! مثلاً برای دو ماتریس

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

داریم:

$$AB=\begin{pmatrix} ۱ & ۸ \\ ۳ & ۹ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -۱ & ۴ \\ ۱ & ۱۱ \end{pmatrix} = BA$$

لذا در حالت کلی حاصلضرب بین ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد.

تمرین ۱۰.۲. ماتریس‌های A و B دو ماتریس مربعی هستند که $AB=BA$. نشان دهید

$$(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲, \qquad A^۲ - B^۲ = (A-B)(A+B)$$

تمرین ۱۱.۲. خواص بیان شده در ضرب ماتریس‌ها را ثابت کنید[۱۵].

تذکر ۳.۲. ضرب ماتریسی بالا، یکی از چند مفهومی است که در قالب «ضرب ماتریس‌ها» ارائه می‌شود. اگرچه این نوع ضرب محبوبیت و کاربرد بیشتری در بین ضرب ماتریس‌ها دارد ولی اقتصاددان‌ها به انواع دیگر از ضرب ماتریسی نیز علاقه دارند. اولین آنها ضرب کرونکر است. برای دو ماتریس دلخواه $A_{m\times n}$ و $B_{p\times q}$ دلخواه باشند، تعریف ضرب کرونکر[۱۶] A در B به‌شکل زیر می آید:

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{۱۱}B & \cdots & a_{۱n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m۱}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}_{mp\times nq}$$

ضرب دیگر هادامارد نام دارد که برای دو ماتریس هم مرتبهٔ A و B به‌صورت $A\circ B=\|a_{ij}b_{ij}\|_{m\times n}$ تعریف می شود. کاربردهایی از این نوع ضرب در علم اقتصاد را در مرجع ۱ فصل ۳ و مرجع ۲۴ بخش ۳۶ می توانید ببینید.

۱۵. راهنمایی: برای اینکه $(b-۱)$ را ثابت کنید از فرمول $\sum_{i=۱}^{n}\left(\sum_{j=۱}^{m}x_{ij}\right)=\sum_{j=۱}^{m}\left(\sum_{i=۱}^{n}x_{ij}\right)$ استفاده کنید.

۱۶. گاهی این ضرب را ضرب خارجی (ضرب تانسوری) هم می‌نامند. برای ملاحظه کاربردهای این نوع ضرب در اقتصاد به مراجع ۴، ۱ و ۸ رجوع کنید.

۳.۵.۲ اثر ماتریس

اثر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ با مجموع جبری درآیه های روی قطر اصلی A بدست می آید. نماد متداول برای آن $\mathrm{tr}(A)$ است.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}$$

مثال ۱۲.۲.

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱۰ & ۲۰ & ۳۰ \\ ۱۰۰ & ۲۰۰ & ۳۰۰ \end{pmatrix} = ۳۲۱$$

تمرین ۱۲.۲. برای ماتریسهای هم‌مرتبهٔ A و B دو تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B), \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

۶.۲ ترانهاده یک ماتریس

ماتریس $B_{n\times m}$ را ترانهاده $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ می‌گویند هرگاه برای i و j، $a_{ij} = b_{ji}$.

مثال ۱۳.۲.

$$A^t = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۲ & ۵ & ۸ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{pmatrix}$$

ترانهاده گیری از ماتریس دارای خواص زیر است که می‌توان برای هرکدام اثباتی ارائه داد:

(۱) $(A^t)^t = A$

(۲) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(۳) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

(۴) $(AB)^t = B^t A^t$

برهان. از آنجایی‌که $A^t = \|a_{ij}\|^t_{m\times n} = \|a_{ji}\|_{n\times m}$ لذا $(A^t)^t = \|a_{ij}\|_{m\times n} = A$ و بنابر این **(۱)** اثبات می شود.

برای **(۲)**، اگر $B = \|b_{ij}\|_{m\times n}$ ماتریس دیگری هم‌مرتبه با A باشد، آن‌گاه:

$$(A+B)^t = \|a_{ij} + b_{ij}\|^t_{m\times n} = \|a_{ji} + b_{ji}\|_{n\times m} = A^t + B^t$$

اکنون فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$ اسکالری دلخواه باشد، آن‌گاه

$$(\alpha A)^t = \|\alpha a_{ji}\|_{n\times m} = \alpha\|a_{ji}\|_{n\times m} = \alpha A^t$$

و برای آخرین حکم فرض کنید $M = AB$ و $N = B^tA^t$ که در آن $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ هستند. با این فرضیات

$$M = \|\alpha m_{ji}\|_{m\times p},\ \ N = \|\alpha n_{ij}\|_{p\times n}$$

که در آن $n_{ij} = \big((B^t)_i, (A^t)^j\big)$ و $m_{ji} = (A_i, B^j)$.

به‌علت جابجایی سطرها و ستون‌ها موقع ترانهاده‌گیری، $(A^t)^j$ با A_j و B^i با $(B^t)_i$ برابرند و لذا به‌ازای $i = ۱, \dots, m$ و $j = ۱, \dots, n$ داریم $m_{ij} = n_{ji}$ و این ثابت می‌کند $M^T = N$. $\square$

تذکر ۴.۲. **ماتریس A را متقارن می‌گویند اگر $A = A^t$. یک مثال ساده از ماتریس متقارن، ماتریسی شامل فاصله بین شهرهای کشور است(سومین مثال را ببینید).[۱۷] چون برای ماتریس A،**

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

برقرار است لذا ادعای زیر درست است:

قضیه ۵.۲. **برای هر ماتریس A از مرتبه n، AA^t همواره ماتریسی متقارن است.**

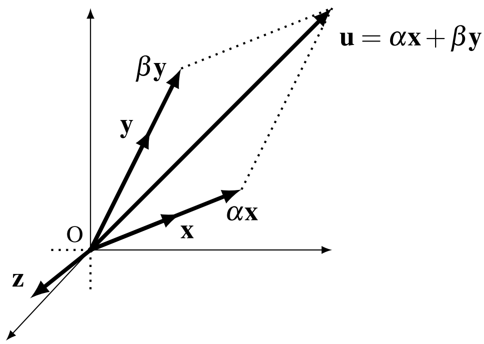
تمرین ۱۳.۲. **برای هر ماتریس A از مرتبه n، نشان دهید** $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$.

۷.۲ رتبه یک ماتریس

سه بردار $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ را در شکل زیر در نظر بگیرید. با توجه به‌شکل، دو بردار $\mathbf{z}$ و $\mathbf{u}$ در یک راستا هستند پس γ ای چنان موجود است که $\mathbf{u} + \gamma\mathbf{z} = \mathbf{0}$. معادلاً

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

۱۷. در اینجا a_{ij} همان فاصله بین شهر iام و شهر jام است.



شکل ۲.۱۱: آیا سه بردار x، y و z وابسته خطی هستند؟

که نشان می‌دهد این سه بردار وابسته خطی هستند.

حال با مرور مفهوم وابستگی خطی بردارها، سه بردار زیر از اعضای $\mathbb{R}^4$ را در نظر بگیرید:

$$\alpha = (2, -5, 1, -1), \quad \beta = (1, 3, 6, 5), \quad \gamma = (-1, 4, 1, 2)$$

بدنبال این هستیم تا ارتباطی بین وابستگی خطی این بردارها و وجود یک دستگاه معادلات خطی ساخته شده از روی آنها بیابیم. اگر سه بردار وابسته خطی باشند، آن‌گاه به ازای اعداد a، b و c که همگی باهم صفر نیستند تساوی $a\alpha + b\beta + c\gamma = \mathbf{0}$ برقرار است. این تساوی در اصل با دستگاه همگن[18] زیر یکی است:

$$\begin{cases} 2a + 1b - c = 0 \\ -5a + 3b + 4c = 0 \\ a + 6b + c = 0 \\ -a + 5b + 2c = 0 \end{cases}$$

با حل دستگاه، $a = 7$، $b = -3$ و $c = 11$ و لذا $7\alpha - 3\beta + 11\gamma = \mathbf{0}$.

ایده ای که این مثال به ما می‌دهد به تعریف **رتبهٔ** یک ماتریس کمک می‌کند به این‌صورت که در ماتریس A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

۱۸. یک دستگاه معادلات خطی را همگن می‌گویند اگر سمت راست همه معادلات عدد صفر قرار داشته باشد.

ستون‌ها را می‌توان بردارهایی s–بُعدی در نظر گرفت. بدیهی است امکان مستقل خطی بودن هر دسته از این ستونها را که در نظر بگیریم، وجود دارد. بنابه تعریف، بیشینه تعداد ستون‌های وابسته خطی از ماتریس را **رتبه** A می‌گویند.

مثال ۱۴.۲. از مثال قبل ماتریس A را طوری می‌سازیم که سه بردار α، β و γ ستون‌هایش باشند. چون A دارای ۳ سطر وابسته خطی است پس $\boldsymbol{rank}(A) \leqslant ۲$. به‌سادگی می‌توان مستقل خطی بودن دو ستون اول از ماتریس را نشان داد و این یعنی $\boldsymbol{rank}(A) \geqslant ۲$. بنابراین $\boldsymbol{rank}(A) = ۲$.

$$\begin{array}{cccc} & \alpha & \beta & \gamma \\ A = & \multicolumn{3}{c}{\left(\begin{array}{rrr} ۲ & ۱ & -۱ \\ -۵ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۶ & ۱ \\ -۱ & ۵ & ۲ \end{array}\right)} \end{array}$$

مثال ۱۵.۲. ماتریس صفر، مقدار رتبه ای برابر با صفر دارد. در مقابل، $\boldsymbol{rank}(I_n) = n$.

قضیه ۶.۲. بیشینه تعداد سطرهای مستقل خطی یک ماتریس با حداکثر تعداد ستون‌های مستقل خطی همان ماتریس برابر است. بعلاوه برای هر ماتریس دلخواه A

$$\boldsymbol{rank}(A) = \boldsymbol{rank}(A^t)$$

برهان. به نتیجه ۶.۴ مراجعه کنید. □

تمرین ۱۴.۲. درستی گزاره قبلی را برای ماتریس A مثال ۴۰.۲ تحقیق کنید.

۸.۲ اَعمال مقدماتی و ماتریس‌های مقدماتی

در این بخش روشی که بکمک آن وابستگی خطی ستون‌های یک ماتریس را می توان تحقیق کرد معرفی می شود. سریعترین و ساده ترین کاربرد آن، یافتن رتبهٔ یک ماتریس است. سطرهای ماتریس دلخواه $A_{m\times n}$ که بردارهایی n–بُعدی هستند را به‌صورت زیر نامگذاری می‌کنیم:

$$A_۱, A_۲, \ldots, A_m$$

جابجایی‌های سادهٔ زیر که روی A انجام می‌شود را **اعمال (سطری) مقدماتی** روی A می‌نامند. این اعمال سطری مقدماتی A را به یک ماتریس مانند A' تبدیل می‌کند[۱۹] به‌طوری‌که در یک سطر و

۱۹. هم‌مرتبه با A

یا دو سطرش (مثلاً سطرهای iام و jام) در مقایسه با A تفاوت‌های کوچکی دیده می‌شود:

(۱) جابجایی سطرها $A'_j = A_i$، $A'_i = A_j$.

(۲) ضرب عددی ناصفر در یک سطر $A'_i = \lambda A_i$.

(۳) تعویض سطرها $A'_i = A_i + \lambda A_j$ که در آن $\lambda \neq 0$.

مثال ۲.۱۶. **هرکدام از سه عمل بالا را بر ماتریس همانی**

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

انجام می‌دهیم. بعد از آن، هر ماتریسی که بدست آید را ماتریس (تبدیل) مقدماتی می‌نامند.

انجام عمل اول روی I_n ماتریس زیر را تولید می‌کند:

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

انجام عمل دوم روی I_n ماتریس زیر را تولید می‌کند:

$$T_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

و در نهایت اِعمال عمل سوم بر I_n ماتریس زیر را تولید می‌کند:

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

تمرین ۱۵.۲. **نشان دهید عمل سطری مقدماتی دوم ترکیبی از تعدادی عملیات از انواع اول و سوم است.**

قضیه ۷.۲. **اگر A' ماتریسی باشد که از اثر یک عمل سطری مقدماتی روی ماتریس A حاصل شده است، آن‌گاه $A' = TA$. که در آن T ماتریس مقدماتی متناظر با عمل مقدماتی انجام شده روی A است.**

برهان. اثبات را به‌عنوان تمرین ۲.۱۷ واگذار می‌کنیم.[۲۰] □

فرض کنید t_1 و t_2 (با ماتریس‌های مقدماتی نظیر T_1 و T_2) دو عمل مقدماتی هستند. ترکیب $t = t_1 t_2$ به این معنی که t_1 و t_2 پشت سر هم روی ماتریس A عمل می‌کنند یک عمل است (اما مقدماتی نیست!). با استفاده از قضیه ۵.۲ داریم:

$$A' = t(A) = t_1 t_2(A) = t_1 t_2(A) = t_1(t_2(A)) = T_1 T_2(A) = TA$$

این تساوی‌ها نشان می‌دهد، t با اثر بر A، آنرا به A' تبدیل کرده است. درواقع، ضرب ماتریس T در A همان کار را بنحو دیگر پیش می‌برد.

خاصیت دیگری که ماتریس‌های مقدماتی دارند این است که همگی آن‌ها معکوس پذیرند. به‌عبارت دیگر، برای هر سه نوع عمل سطری مقدماتی، اَعمالی چنان وجود دارد که روند انجام شده بر ماتریس را برمی‌گردانند (یعنی دارای معکوس‌اند). برای نوع اول (همانند خودش) یک عمل وارون وجود دارد. برای نوع دوم کافی است یک عمل از جنس خودش را این‌بار با اسکالر $\frac{1}{\lambda}$ بسازید.

نهایتاً برای عمل سطری $A_i' = A_i' - \lambda A_j' = A_i$ معکوسی به‌شکل $A_i' = A_i' - \lambda A_j' = A_i$ وجود دارد. واضح است که هر سه نوع وارون بیان شده همگی نوعی عمل سطری مقدماتی هستند و در واقع اثبات کردیم که:

قضیه ۸.۲. **اگر ماتریس A به توسط تعدادی عمل سطری مقدماتی به ماتریس A' تبدیل شود، آن‌گاه اعمال سطری مقدماتی دیگری وجود دارند که A' را به A برگرداند.**

۲۰. فقط اینکه در روند اثبات از این نکته استفاده کنید که ضرب دو ماتریس در اصل ضرب نقطه‌ای بین سطرها و ستون‌هاست.

قضیه ۲.۹. **فرض کنید تعدادی از ستون‌های ماتریس A مانند $A^{i_1},\dots,A^{i_k}$ وابستگی خطی دارند.[21] بعلاوه B را ماتریسی می‌گیریم که از اثر یک دنباله از اعمال سطری مقدماتی روی A پدید آمده است. در این صورت**

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j B^{i_j} = \boldsymbol{0}$$

برهان. با توجه به نکته‌ای که در قبل بیان شد اگر $T_1,\dots,T_q$ دنباله‌ای از ماتریس‌های مقدماتی باشند که ترکیب آن‌ها $T = T_q T_{q-1},\dots T_2 T_1$، A را به B تبدیل می‌کند، آن‌گاه $B = TA$. این تساوی بدین معنی است که هر ستون B^j از ماتریس B دقیقاً با حاصل TA^j برابر است و لذا

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j B^{i_j} = \alpha_1 T A^{i_1} + \cdots + \alpha_k T A^{i_k} = T(\alpha_1 A^{i_1} + \cdots + \alpha_k A^{i_k}) = T\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

□

قضیه ۲.۱۰. **فرض کنیم ماتریس B با اثر دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی بر روی ماتریس A پدید آمده است. در این صورت مجموعه $A^{i_1},\dots,A^{i_k}$ از ستون‌های A وابسته خطی‌اند اگر و تنها اگر ستون‌های متناظر $B^{i_1},\dots,B^{i_k}$ مجموعه وابسته خطی از بردارها بسازد. در اینجا و به‌طور خاص**

$$\boldsymbol{rank}(A) = \boldsymbol{rank}(B)$$

برهان. با توجه به قضیه ۲.۷ ماتریس A را می‌توان با کمک دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی از روی B دوباره ساخت (معکوس‌ها) و بنابراین مجموعه $\{B^{i_1},\dots,B^{i_k}\}$ وابسته خطی است. حکم عکس با استفاده از قضیه ۲.۷ بدست می‌آید. به‌طور خاص و با توجه به تعریف رتبه، نتیجه اضافی هم حاصل است. □

مثال ۲.۱۷. **برای یافتن رتبه ماتریس A در مثال ۲.۱۳، لازم است روی A از انواع اعمال سطری مقدماتی اثر دهیم. داریم:**

$$A \xrightarrow{(A_3 - 2A_2)\to A_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A'$$

۲۱. به این معنی که ترکیبی خطی و نابدیهی از آن‌ها صفر است، پس $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j A^{i_j} = \mathbf{0}$ و همه α_jها باهم صفر نیستند.

سپس $A'_۳$ را با $A'_۳ + A'_۱$ و بعد $A'_۲$ را با $A'_۲ - ۴A'_۱$ تعویض می‌کنیم:

$$A'' = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۳ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

در انتها $A''_۱$ را با $A''_۱ + ۲/۳A''_۲$ تعویض و بعد از ضرب $A''_۲ \to (-۱/۳)A''_۲$ داریم:

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

چون دو ستون $B^۱$ و $B^۲$ مستقل خطی‌اند و البته $B^۳ = -B^۱ + ۲B^۲$، لذا رتبه دو ماتریس A و B عدد ۲ است.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & * & ۰ & * & ۰ \\ & & ۱ & * & \vdots & \vdots \\ & & & & ۱ & * \ \vdots \\ & & & & & ۱ \\ ۰ & & & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & * & ۰ & * & ۰ \\ & & ۱ & * & \vdots & \vdots \\ & & & & ۱ & * \ \vdots \\ & & & & & ۱ \\ ۰ & & & & & \end{pmatrix}$$

تعریف ۴.۲. ماتریس A در شکل کانونی (سطری) خود قرار دارد (شکل ۱۲.۲) اگر چهار شرط زیر برای آن محقق شود:

(۱) همه سطرهای ناصفر A بالای همه سطرهای (کاملاً) صفر ماتریس واقع باشند.

(۲) اولین درآیهٔ ناصفر هر سطر A که سطر پیشرو نامیده می‌شود، درست در سمت راست درآیه پیشرو و سطر بالایی همان سطر قرار گیرد.

(۳) همه درآیه‌های پیشرو عدد ۱ باشند.

(۴) همه درآیه‌هایی که هم‌ستون با درآیه‌های پیشرو و بالای آن‌ها هستند، صفر است.

هرگاه فقط دو مورد اولی برای A برقرار باشد، A را سطری پلکانی شده می‌نامند(شکل ۲. ۱۳).

مثال ۱۸.۲. در مثال قبل ماتریس A'' شکل سطری پلکانی شده A و ماتریس B شکل کانونی ماتریس را نشان می‌دهند.

با توجه به تعاریف فوق، واضح است که رتبه یک ماتریس با تعداد سطرهای غیرصفرش در شکل سطری پلکانی شده آن بدست می‌آید.

قضیه ۱۱.۲. هر ماتریس A را می‌توان با اعمال یک تعداد اعمال سطری مقدماتی به یک ماتریس B از نوع سطری پلکانی شده (و یا شکلی از نوع کانونی متناظر) تبدیل کرد. در این حالت عدد رتبه A با تعداد سطرهای غیرصفر B برابر است.

هم اکنون می‌خواهیم تا به ساختن الگوریتمی جهت سطری پلکانی کردن ماتریسی دلخواه بپردازیم. این‌روند بنام «**روش حذفی گاوس**» مشهور است. در این‌روش مرحله به مرحله ستون‌های A چنان تقلیل می‌یابند که در نهایت، ماتریس بدست آمده همان سطری پلکانی شده A است.

در ابتدا، فرض کنید یک زیر ماتریس از A، شامل $(j-۱)$ سطر ابتدایی ماتریس دارای یک فرم سطری پلکانی است. بعلاوه فرض کنید این زیر ماتریس دارای $(i-۱)$ سطر ناصفر هم هست. کار را از مرحله j شروع می‌کنیم.

(حالت ۱) اگر تمام درآیه‌های ستون jام که با a_{ij} شروع شده و در زیر فقط صفر دیده شود، در این‌صورت روش، پایان‌یافته تلقی ده و در این حال به مرحله $(j+۱)$ام می‌پردازیم.

(حالت ۲) در غیر این صورت، اولین درآیه ناصفر ستون jام و سطر iام (مثلاً a_{ij}) و زیر آن را جستجو می‌کنیم. اگر a_{ij} پیدا نشد سطرهای A_i و A_j را جابجا می‌کنیم (شکل ۱۴.۲). اکنون ماتریسی یافته‌ایم که در آن $a_{pk} \neq ۰$(شکل ۱۵.۲).

(حالت ۳) برای هر $p > j$ جابجایی سطری $A_p \to A_p - (a_{pj}/a_{ij})A_j$ را انجام دهید (شکل ۱۶.۲).

مراحل سه گانه بالا کافی است که یک ماتریس مفروض را به حالت سطری پلکانی خودش درآورد. در مرحله بعدی از الگوریتم، $p+۱$ را به‌جای p و $j+۱$ را به‌جای j قرار می‌دهیم. توجه کنید در مثال ۱۷.۲ از همین روش استفاده کردیم تا A' را به A'' تبدیل کنیم.

$$
\begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{cccccc} & & j & & & \\ & & \downarrow & & & \end{array} & \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ k \\ \\ \end{array} &
\left(\begin{array}{cc|c|ccc}
* & * & * & \cdots & * & * \\
0 & * & * & \cdots & * & \vdots \\ \hline
\vdots & 0 & 0 & a_{ij} & \cdots & * \\ \hline
0 & \cdots & \boxed{a_{kj}} & a_{k,j+1} & \cdots & * \\ \hline
0 & \cdots & * & * & \cdots & *
\end{array}\right) &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow k+1 \end{array}
\end{array}
$$

شکل ۱۴.۲: حذف گاوسی، جابجایی سطرها

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} & & j & & & \\ & & \downarrow & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ k \\ k+1 \longrightarrow \end{array} &
\left(\begin{array}{cc|c|ccc}
* & * & * & \cdots & * & * \\
0 & * & * & \cdots & * & \vdots \\ \hline
\vdots & 0 & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & * \\ \hline
\vdots & \cdots & 0 & a_{k,j+1} & \cdots & * \\ \hline
0 & \cdots & 0 & * & \cdots & *
\end{array}\right)
\end{array}
$$

شکل ۱۶.۲: حذف گاوسی، نتیجه تفاضلات سطری

$$
\begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{cccccc} & & j & & & \\ & & \downarrow & & & \end{array} & \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ k \\ k+1 \longrightarrow \end{array} &
\left(\begin{array}{cc|c|ccc}
* & * & * & \cdots & * & * \\
0 & * & * & \cdots & * & \vdots \\ \hline
\vdots & 0 & \boxed{a_{ij}} & a_{i,j+1} & \cdots & * \\ \hline
0 & \cdots & 0 & a_{k,j+1} & \cdots & * \\ \hline
0 & \cdots & * & * & \cdots & *
\end{array}\right) &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ -A_i(a_{k+1,j}/a_{ij}) \end{array}
\end{array}
$$

شکل ۱۵.۲: حذف گاوسی، تفاضل سطری

مثال ۲.۱۹. با استفاده از الگوریتم گاوس، شکل سطری پلکانی شده ماتریس زیر را می‌یابیم. در ابتدا $i = j = ۱$ (از ستون اول شروع می کنیم):

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۶ & -۲ \\ ۴ & ۱۲ & -۱ \end{pmatrix}$$

اولین درآیه این ستون $a_{۱۲} = ۲$ $(\neq ۰)$ است. سطر اول و دوم را جابجا می کنیم:

$$A \xrightarrow[\text{را جابجا می کنیم}]{\text{سطر اول و دوم}} \begin{pmatrix} ۲ & ۶ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ ۴ & ۱۲ & -۱ \end{pmatrix} \xrightarrow{-۲A_۱ + A_۳ \rightarrow A_۳} \begin{pmatrix} ۲ & ۶ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$

به دو سطر آخری می‌پردازیم که در آن یک زیر ماتریس دیده می‌شود. اولین ستون ناصفر این زیر ماتریس ستون سوم است (لذا $p = ۳$). در مرحله بعد اولین درآیه ناصفر ستون مربوطه قبلی (یعنی $a_{۲۳} = ۳$) را انتخاب می کنیم و با انجام

$$A_۳ - A_۲ \rightarrow A_۳$$

ماتریس زیر بدست می آید و لذا رتبه ماتریس ۲ است:

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۶ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

قضیه بعد، روش قوی‌تری از روش حذفی گاوس را ارائه می‌دهد.[22]

قضیه ۲.۱۲. هر ماتریس A را می‌توان به‌وسیله اعمال سطری مقدماتی به ماتریس کانونی نظیر خودش (مثلاً C) تبدیل کرد. بعلاوه ماتریس C به دست آمده برای A منحصر به‌فرد است.[23]

تمرین ۲.۱۶. اولاً ماتریس زیر را به ماتریس کانونی نظیر خودش تبدیل کرده و سپس رتبه آن را بدست آورید.

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & -۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

۲۲. اثبات آن‌را به‌عنوان تمرین واگذار می کنیم.

۲۳. و این یعنی نحوه استفاده از اعمال سطری مقدماتی در رسیدن از A به C مهم نیست!

۹.۲ مسائل

۱. بردار $\mathbf{x}$ را طوری بدست آورید که:

الف) $\mathbf{z} = (۳, ۲, ۱, -۵)$, $\mathbf{y} = (۰, ۳, ۴, -۲)$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$.

ب) $\mathbf{z} = (۰, ۱, ۷)$, $\mathbf{y} = (-۱, -۱, ۲)$, $۵\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$.

۲. فرض کنید $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ و $\lambda \neq ۰$ یک اسکالر است. ثابت کنید اولاً $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x}$ اگر و فقط اگر $\mathbf{y} = ۰$ و ثانیاً $\lambda \mathbf{x} = ۰$ اگر و فقط اگر $\mathbf{x} = ۰$.

۳. ثابت کنید اگر یکی از بردارهای $\mathbf{z}_۱, \dots, \mathbf{z}_s$ در $\mathbb{R}^n$ بردار صفر باشد، آن‌گاه همگی وابسته خطی‌اند.

۴. تحقیق کنید که آیا بردارهای زیر وابسته خطی‌اند؟

$$\mathbf{a}_۱ = (۱, ۰, ۰, ۲, ۵),\ \mathbf{a}_۲ = (۰, ۱, ۰, ۳, ۴),\ \mathbf{a}_۳ = (۰, ۰, ۱, ۴, ۷),\ \mathbf{a}_۴ = (۲, -۳, ۴, ۱۱, ۱۲)$$

۵. فرض کنید بردارهای $\mathbf{z}_۱, \dots, \mathbf{z}_s$ مستقل خطی و برای بردار $\mathbf{x}$ تساوی زیر برقرار است. نشان دهید این نمایش از $\mathbf{x}$ نمایشی منحصربفرد است.

$$\mathbf{x} = \lambda_۱ \mathbf{z}_۱ + \cdots + \lambda_s \mathbf{z}_s, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\ (i = ۱, \dots, s)$$

۶. نشان دهید n بردار زیر در $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی هستند:

$$\mathbf{x}_۱ = (۱, ۰, ۰, \dots, ۰, ۰),\ \mathbf{x}_۲ = (۰, ۱, ۰, \dots, ۰, ۰), \cdots,\ \mathbf{x}_n = (۰, ۰, ۰, \dots, ۰, ۱)$$

۷. رتبه دو ماتریس زیر را بدست آورید.

$$\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۳ & -۲ & ۴ \\ ۴ & -۲ & ۵ & ۱ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۱ & ۸ & ۲ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۳ & -۱ & ۳ & ۲ & ۵ \\ ۵ & -۳ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & -۳ & -۵ & ۰ & -۷ \\ ۷ & -۵ & ۱ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$$

۸. نشان دهید با فرض ناصفر بودن اسکالرهای η_{ij} که $۱ \leqslant i, j \leqslant n$، n بردار زیر در $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی هستند:

$$\mathbf{x}_۱ = (\eta_{۱۱}, \eta_{۱۲}, \dots, \eta_{۱,n-۱}, \eta_{۱n}),\ \mathbf{x}_۲ = (۰, \eta_{۲۲}, \dots, \eta_{۲,n-۱}, \eta_{۲n}), \cdots,$$

$$\mathbf{x}_n = (۰, ۰, \dots, ۰, \eta_{nn}).$$

۹. درستی تساوی ۲.۱ را برای تمام موارد (۱) تا (۴) بررسی کنید.

۱۰. نشان دهید که نامساوی کوشی (۶.۲) در حالت تساوی خود برقرار است، هرگاه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو بردار وابسته خطی باشند.

۱۱. چه تعداد n–تایی در $\mathbb{R}^n$ با مؤلفه‌های ۰ و ۱ وجود دارد؟[۲۴]

۱۲. ماتریس‌های $A, B \neq \mathbf{0}$ و C را چنان بیابید که $AB = AC$ ولی $B \neq C$.

۱۳. ماتریس‌های $A, B \neq \mathbf{0}$ را چنان بیابید که $AB = \mathbf{0}$.

۱۴. نشان دهید $A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}$.

۱۵. ثابت کنید به ازای هر دو ماتریس A و B و هر دو عدد حقیقی α و β تساوی‌های زیر برقرارند[۲۵]

$$(\alpha A)(\beta B) = (\alpha\beta)AB, \quad (\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$$

۱۶. ماتریس‌های A، B و C از مرتبه $n \times n$ هستند، نشان دهید اگر $AC = CA$ و $BC = CB$ باشد، آن‌گاه $ABC = CBA$.

۱۷. ماتریس‌های $A_{۲\times۳}$ و $B_{۳\times۲}$ را چنان بیابید که $AB = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$.

۱۸. برای ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{pmatrix}$، بردارهای ناصفر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را چنان پیدا کنید که:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{y}A = \mathbf{0}$$

۱۹. به‌ازای دو زاویه α و β، درستی تساوی زیر را برای ماتریس دوران نشان دهید.

$$R_{\alpha+\beta} = R_\alpha + R_\beta$$

۲۰. تمام خاصیت‌های بیان شده برای جمع ماتریسی را اثبات کنید.

۲۱. ضرب زیر را انجام دهید:

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۲ & -۱ \\ -۲ & -۱ & ۲ \\ ۳ & -۲ & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۷۰ & ۳۴ & -۱۰۷ \\ ۵۲ & ۲۶ & -۶۸ \\ ۱۰۱ & ۵۰ & -۱۴۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲۷ & -۱۸ & ۱۰ \\ -۴۶ & ۳۱ & -۱۷ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

۲۲. در هریک از موارد زیر معین کنید AB چگونه تغییر خواهد کرد؟

الف) سطرهای iام و jام A جابجا شوند.

۲۴. به این بردارها بولی می‌گویند.
۲۵. در اینجا فرض می‌شود ضرب AB معنی دارد.

ب) مضرب c از سطر iام را به سطر jام می‌افزاییم.

ج) ستون‌های iام و jام A جابجا شوند.

د) مضرب c از ستون iام را به ستون jام می‌افزاییم.

۲۳. نشان دهید $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(A)$ و $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(B)$.

۲۴. ماتریسهای A و B هم‌مرتبه‌اند. نشان دهید مجموع درآیه‌های ضرب هادامارد $A \circ B$ با $\operatorname{tr}(AB^t)$ یکی است[۲۶]

۲۵. ثابت کنید هر ماتریس A را می‌توان به‌صورت جمع دو ماتریس $B+C$ نوشت که در آن B ماتریسی متقارن و C ماتریسی پادمتقارن[۲۷] است.

۲۶. همه ماتریس‌های $A_{۲\times۲}$ را بیابید که $A^۲ = \mathbf{0}$. برای کدام‌ها $A^۲ = I_۲$؟

۲۷. شکل سطری پلکانی و رتبه ماتریس و شکل کانونی ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۳ \\ -۲ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۴ & ۵ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۱۵ & ۲ & ۱ \\ -۲ & -۶ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

۲۶. این عدد را ضرب فریبینیوس دو ماتریس می‌نامند و با $(A,B)_F$ نشان می‌دهند.
۲۷. یعنی $C^t = -C$

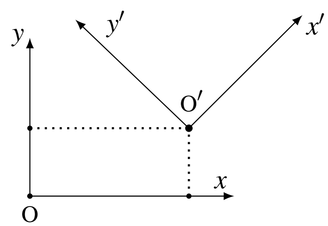
۳

ماتریس‌های مربعی و دترمینان

در این فصل نشان می‌دهیم چگونه یک ماتریس می‌تواند در نمایش یک دستگاه معادلات مورد استفاده قرار گیرد.

۱.۳ تبدیل مختصات

دو دستگاه مختصات بنامهای قدیمی و جدید و شامل بترتیب زوجهای مرتب (x,y) و (x',y') را در نظر می گیریم. مطلوب این‌است که تا با توجه به نحوهٔ ارتباط این دو با هم، یک ارتباط ریاضی بکمک ماتریسها بین آنها ساخته شود. (شکل ۱.۳)

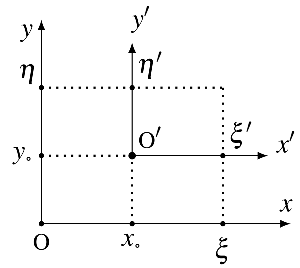


شکل ۱.۳: دو دستگاه مختصات در یک صفحه

اولاً با توجه به‌شکل، واضح است در حرکت از دستگاه اول به دستگاه دوم، از تبدیلات انتقال و دوران کمک گرفته شده می‌شود و ثانیاً انتقالی که بعد از دوران صورت بگیرد خودش بنوعی یک تبدیل مشابه است. اکنون فرم مرتبط با ماتریسهای این دو حرکت را به‌طور جدا بررسی می‌کنیم.

۱.۱.۳ انتقال

مبدأ مختصات (قدیمی) $O=(\circ,\circ)$ را به مبدأ مختصات (جدید) $O'=(x_\circ,y_\circ)$ منتقل کرده به‌طوری که محورها در هر کدام در فرم استاندارد و متعارف همیشگی دیده شوند (شکل ۲.۳).



شکل ۲.۳: دو دستگاه مختصات در یک صفحه

به‌وضوح، هر نقطه $X=(\xi,\eta)$ در دستگاه مختصات اول، مختصات جدید (ξ',η') را پیدا می کند به‌طوری که:

$$\underbrace{\xi'=\xi-x_\circ,\qquad \eta'=\eta-y_\circ}_{(\xi',\eta')=(\xi,\eta)-(x_\circ,y_\circ)\quad (\star)}$$

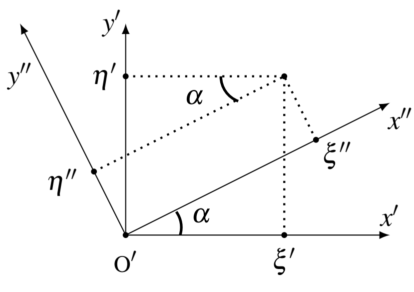
۲.۱.۳ دوران

با توجه به $(\star)$، شکل معادل برداری دو معادله حاصل از انتقال مبدأ های مختصات بازنویسی شد. اکنون دستگاه جدید را حول O' به اندازه زاویه α (و در جهت مثلثاتی) دوران داده (شکل ۳.۳) تا مختصات (ξ',η') به مختصات دیگر (ξ'',η'') بدل شود. آنچه شکل ۳.۳ می‌گوید این‌است که دو معادلهٔ همزمان: $\xi''=\xi'\cos\alpha+\eta'\sin\alpha$ و $\eta''=-\xi'\sin\alpha+\eta'\cos\alpha$ وجود دارند.

این معادلات را با زبان ماتریس‌ها به‌صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}}_{R_{-\alpha}}\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi''\\ \eta''\end{pmatrix}$$

که در آن $R_{-\alpha}$ ماتریس دوران به ازای زاویه $-\alpha$ است (مثال ۱۲.۲ را ببینید).



شکل ۳.۳: دوران

با ترکیب نتایج از بالا داریم:

$$\begin{cases}\xi''=(\xi-x_\circ)\cos\alpha+(\eta-y_\circ)\sin\alpha\\ \eta''=-(\xi'-x_\circ)\sin\alpha+(\eta-y_\circ)\cos\alpha\end{cases}$$

و یا

$$\begin{pmatrix} \xi'' \\ \eta'' \end{pmatrix} = R_{-\alpha}\left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_\circ \\ y_\circ \end{pmatrix}\right)$$

۲.۳ ماتریس‌های مربعی

۱.۲.۳ ماتریس همانی

یکی از خاص‌ترین نوع ماتریس که در بسیاری از اعمال ماتریسی استفاده می‌شود، ماتریس همانی است. اگر چه این ماتریس قبلاً در تعاریف معرفی شد ولی حالت عمومی و کلی آن هنوز بیان نشده است. قبل از ورود به موضوع، یادآوری تابع دو ضابطه‌ای به نام دلتای کرونکر مفید است:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ \circ & i \neq j \end{cases}, \quad \{\circ, ۱, \ldots, n\} \times \{\circ, ۱, \ldots, n\} \to \{\circ, ۱\}$$

بکمک این تابع، ماتریس همانی در حالت عمومی خود به‌شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$I_n = \|\delta_{ij}\|_{n\times n} = \begin{pmatrix} ۱ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & ۱ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & ۱ \end{pmatrix}$$

لم ۱.۳. **فرض کنید** $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$**، آن‌گاه** $AI_n = I_nA = A$.

برهان. ماتریس مرتبهٔ n $\left(\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\delta_{jk}\right) = AI_n$ را در نظر بگیرید. اگر $j \neq k$ در این‌صورت $\delta_{jk} = \circ$ و $a_{ij}\delta_{jk} = \circ$. و اگر $j = k$ آن‌گاه $\delta_{jk} = ۱$ و بنابراین $a_{ij}\delta_{jk} = a_{ij}$. و این یعنی، $AI_n = A$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود $I_nA = A$. و حکم ثابت است. □

۲.۲.۳ توان یک ماتریس و چندجمله‌ای بر حسب یک ماتریس

فرض کنیم A ماتریسی مربعی از مرتبه n است. توان‌های A را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^{\circ} = I_n,\ A^{۱} = A,\ A^{۲} = AA,\ \cdots,\ A^n = AA^{n-۱} = \underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ تا}},$$

حال بکمک تعریف فوق و با استفاده از چندجمله‌ای معمولی

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱x + a_\circ$$

چندجمله‌ای بر حسب ماتریس A همانند سازی می شود:

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-۱}A^{n-۱}+\cdots+a_۱A+a_۰I_n$$

مثال ۳.۱. **اگر** $A=\begin{pmatrix}۲&۳\\۱&۰\end{pmatrix}$ **و** $f(x)=x^۲-۲x-۱$ **آن‌گاه**

$$f(A)=A^۲-۲A-I=\begin{pmatrix}۷&۶\\۲&۳\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۴&۶\\۲&۰\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{pmatrix}$$

۳.۳ دستگاه معادلات خطی-دومجهولی

دربارهٔ مفهوم یک دستگاه معادلات خطی در بخشهای پیشین صحبت شد و خواننده منظور از حل آن را می داند. در این بخش قصد ما حل یک دستگاه معادلات خطی با نگاه ماتریسی است.

دستگاه معادلات خطی دلخواه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲=b_۱\\a_{۲۱}x_۱+a_{۲۲}x_۲=b_۲\end{cases}\qquad(۱.۳)$$

از روی (۱.۳)، سه ماتریس به‌شکل های

$$A=\begin{pmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}\\a_{۲۱}&a_{۲۲}\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_۱\\x_۲\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_۱\\b_۲\end{pmatrix}$$

به‌ترتیب به نام‌های ماتریس ضرایب A، ماتریس مجهولات $\mathbf{x}$ و ماتریس ثابت‌ها $\mathbf{b}$ می‌توان استخراج کرد. با کمک این ماتریس‌ها دستگاه (۱.۳) به‌شکل ماتریسی

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\qquad(۲.۳)$$

باز نویسی می‌شود. قبل از ورود به اصل کاربرد، دستگاه (۱.۳) را به‌شکل عادی و متعارف خود حل می کنیم. در واقع با فرض $a_{۱۱},a_{۲۱}\neq۰$، دو معادله را متناظراً بر آن‌ها تقسیم کرده و لذا

$$\begin{cases}x_۱+(a_{۱۲}/a_{۱۱})x_۲=b_۱/a_{۱۱}\\x_۱+(a_{۲۲}/a_{۲۱})x_۲=b_۲/a_{۲۱}\end{cases}$$

از تفاضل دو معادله دستگاه داریم:

$$\left(\frac{a_{۱۲}}{a_{۱۱}}-\frac{a_{۲۲}}{a_{۲۱}}\right)x_۲=\left(\frac{b_۱}{a_{۱۱}}-\frac{b_۲}{a_{۲۱}}\right)$$

و بنابر این: $x_2 = \frac{b_1/a_{11} - b_1/a_{21}}{a_{11}/a_{22} - a_{12}/a_{21}}$. اگر x_2 را در یکی از معادلات دستگاه فوق جایگزاری کنیم خواهیم داشت:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{۳.۳}$$

البته بدیهی است مخرج کسرهای بالا نباید صفر شود.

۴.۳ دترمینان ماتریس

برای ماتریس ضرایب A (بخش قبل)، تابع $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ را **دترمینان** ماتریس A می‌گویند. این تابع دقیقاً همان عبارت مخرج دو کسر (۳.۳) و (۴.۳) است که در بالا بدست آمد. صورت‌های این دو کسر، به‌ترتیب دترمینان دو ماتریس زیر هستند (A' و A''):

$$b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \det \overbrace{\begin{pmatrix} b_1 & a_{22} \\ b_2 & a_{12} \end{pmatrix}}^{A'}, \quad b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}_{A''}$$

و بنابراین x_1, x_2 بکمک دترمینان قابل بازنویسی است:

$$x_1 = \frac{\det A'}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A''}{\det A}. \tag{۴.۳}$$

حال مجدداً ماتریس $A_{2\times 2}$ را در نظر گرفته و آنرا به‌شکل ستونی $A = (A_1, A_2)$ ببینید که در آن

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

برای این دو ماتریس ستونی، خواص زیر وجود دارد:

خاصیت خطی بودن:

(a) $\det(A_1 + A', A_2) = \det(A_1, A_2) + \det(A'_1, A_2)$

(b) $\det(A_1, A_2 + A'_2) = \det(A_1, A_2) + \det(A_1, A'_2)$

(c) $\det(cA_1, A_2) = c\det(A_1, A_2)$

(d) $\det(A_1, cA_2) = c\det(A_1, A_2)$

خاصیت پادتقارنی:

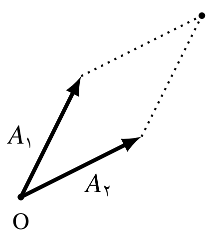
$(e)\ \det(A_۱,A_۲) = -\det(A_۲,A_۱)$

$(f)\ \det(A_۱,A_۲) = ۰$

خاصیت همانی:

$(g)\ \det(I_۲) = ۱$

از نظر هندسی، دترمینان می‌تواند نقش مهمی را ایفا کند. به شکل ۴.۳ توجه کنید:



شکل ۴.۳: مساحت متوازی الاضلاع برابر است با $|\det[A_۱,A_۲]|$

مقدار $|\det(A_۱,A_۲)|$[۱] مساحت متوازی الاضلاع با اضلاع دو برابر $A_۱$ و $A_۲$ را بدست می‌دهد.

مثال ۲.۳. **برای نمونه فرض کنید $A_۱ = (-۲,۰)^t$ و $A_۲ = (۱,۳)^t$ دو بردار ستونی اند. بدیهی است مساحت متوازی الاضلاع که به وسیلهٔ اضلاع $A_۱$ و $A_۲$ ساخته می‌شود برابر است با ضرب طول قاعده در ارتفاع که مقدار $۲\cdot۳ = ۶$ است. از طرف دیگر مقدار دترمینان زیر با مطلب گفته شده قبلی مطابقت دارد.**

$$\det(A_۱,A_۲) = \det\begin{pmatrix} -۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix} = -۶$$

اکنون با ساخت یک روند، دترمینان ماتریس مربعی $A = ||a_{ij}||_{n\times n}$ را تعریف می‌کنیم.

۱. منظور قدر مطلق مقدار دترمینان است

تعریف ۳.۱. **مینور**[۲] M_{ij} **از** A **برابر با دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر** i**ام و ستون** j**ام** A **حاصل می‌شود. همچنین، برای درآیه** a_{ij}**، مقدار** $A_{ij} = (-۱)^{i+j}M_{ij}$ **را همسازه نظیر** a_{ij} **می‌نامند.**

با توجه به تعریف فوق و با توجه به سطر i ام داریم:

$$\det(A) = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{۵.۳}$$

معادله فوق را می‌توان بر حسب ستون jام هم نوشت:

$$\det(A) = \sum_{i=۱}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{۶.۳}$$

اینکه فرمول‌های بالا به یک جواب یکسان منجر می‌شوند قابل اثبات است.[۳]

تمرین ۳.۱. **با استفاده مکرر از فرمول (۳.۷) ثابت کنید دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی با حاصلضرب درآیه‌های روی قطر اصلی ماتریس برابر است.**

مثال ۳.۳. **در ماتریس**

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۰ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{pmatrix}$$

و به ازای سطر دوم $(i = ۲)$ **داریم:**

$$\det(A) = -a_{۲۱}A_{۲۱} + a_{۲۲}A_{۲۲} - a_{۲۳}A_{۲۳} \tag{۷.۳}$$

ولی جمله دوم صفر است و لذا کافی است $A_{۲۱}$ **و** $A_{۲۳}$ **را بدست آوریم.**

$$\det(A) = -(+۵)\det\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۸ & ۹ \end{pmatrix} + ۰ - (+۶)\det\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۷ & ۸ \end{pmatrix} = ۶۶$$

مثال ۳.۴. **برای ماتریس** $A = [a_{ij}]_{۳\times ۳}$ **و بسط فرمول دترمینان بر حسب اولین سطر** A **داریم:**

$$\det\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{pmatrix} = a_{۱۱}\det\begin{pmatrix} a_{۱۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{pmatrix} - a_{۱۲}\det\begin{pmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{pmatrix}$$

۲. در فارسی به آن **کهاد** می‌گویند.
۳. قضیه ۲. ۴. ۵ در منبع ۳۳ مراجعه کنید.

$$+a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

مثال ۵.۳. ماتریس پایین مثلثی زیر مفروض است:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

با استفاده مکرر از فرمول (۶.۳) در حالتی که $j=1$ داریم:

$$\det(A) = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{32} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

دترمینان ماتریس $A_{n\times n}$ که آنرا به‌فرم ستونی از n بردار زیر در نظر گرفته‌ایم، دارای خواصی است که در ادامه می آید.

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

۱.۴.۳ خاصیت‌های اولیه دترمینان

خطی بودن:

(a) $\det(A_1,\ldots,A_{i-1},A_i+A_i',A_{i+1},\ldots,A_n) =$
$\det(A_1,\ldots,A_{i-1},A_i,A_{i+1},\ldots,A_n)+\det(A_1,\ldots,A_{i-1},A_i',A_{i+1},\ldots,A_n),$

(b) $\det(A_1,\ldots,A_{i-1},cA_i,A_{i+1},\ldots,A_n) = c\det(A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n).$

پادتقارنی:

(c) $\det(A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_j,\ldots,A_n) = -\det(A_1,\ldots,A_j,\ldots,A_i,\ldots,A_n).$

همانی:

(d) $\det(I_n) = 1$

بسیاری دیگر از خواص دترمینان (منجمله فرمول‌های (۶.۳) و (۷.۳) را می‌توان از خواص اولیه (a) تا (d) بالا بدست آورد. مثلاً:

نتیجه ۲.۳. خواص زیر برای دترمینان $A_{n\times n}$ برقرار است:

(e) $\det(A_۱,\ldots,A_{i-۱},B,A_{i+۱},\ldots,A_{j-۱},B,A_{j+۱},\ldots,A_n)=۰$

(f) $\det(A_۱,\ldots,A_{i-۱},A_{i+c}A_j,A_{i+۱},\ldots,A_n)=\det(A_۱,\ldots,A_n)$

(g) $\det(A_۱,\ldots,A_{i-۱},۰,A_{i+۱},\ldots,A_n)=۰$

برهان. اگر

$$A=(A_۱,\ldots,A_{i-۱},B,A_{i+۱},\ldots,A_{j-۱},B,A_{j+۱},\ldots,A_n)$$

در این صورت بنابه پادتقارنی بودن، $\det(A)=-\det(A)$ و این یعنی $\det(A)=۰$ و (e) ثابت می‌شود. برای قسمت بعد، اگر

$$A=(A_۱,\ldots,A_{i-۱},A_i+cA_j,A_{i+۱},\ldots,A_n)$$

آن‌گاه با استفاده از (a) داریم:

$$\det(A)=\det(A_۱,\ldots,A_{i-۱},A_i,A_{i+۱},\ldots,A_n)+\det(A_۱,\ldots,A_{i-۱},cA_j,A_{i+۱},\ldots,A_n)$$

که با کمک گرفتن از تساوی‌های (b) و (e) مولفهٔ دوم در جمع بالا مساوی است با:

$\det(A_۱,\ldots,A_{i-۱},cA_j,A_{i+۱},\ldots,A_j,\ldots,A_n)$

$=c\det(A_۱,\ldots,A_{i-۱},A_j,A_{i+۱},\ldots,A_j,\ldots,A_n)=c\times ۰=۰.$

لذا (f) اثبات می‌شود. اگر در خاصیت (b) قرار دهیم $c=۰$، (g) ثابت می‌شود:

$$\det(A_۱,\ldots,A_{i-۱},\mathbf{0},A_{i+۱},\ldots,A_n)=۰\times\det(A_۱,\ldots,A_{i-۱},\mathbf{0},A_{i+۱},\ldots,A_n)=۰$$

□

قرارداد ۱.۳. برای نمایش دترمینان من بعد از شکل زیر (راست) استفاده می‌کنیم:

$$\det\begin{pmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}&\cdots&a_{۱n}\\a_{۲۱}&a_{۲۲}&\cdots&a_{۲n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n۱}&a_{n۲}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}&\cdots&a_{۱n}\\a_{۲۱}&a_{۲۲}&\cdots&a_{۲n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n۱}&a_{n۲}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

مثال ۶.۳. **دترمینان ماتریس زیر را بکمک خواص گفته شده محاسبه می‌کنیم:**

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳+(-۱)\times ۲ & ۲ & ۷ \\ ۰+(-۱)\times ۱ & ۱ & -۳ \\ ۳+(-۱)\times ۴ & ۴ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ & -۳ \\ -۱ & ۴ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۲+(-۲)\times ۱ & ۷+(-۷)\times ۱ \\ -۱ & ۱+(-۲)\times(-۱) & -۳+(-۷)\times(-۱) \\ -۱ & ۴+(-۲)\times(-۱) & ۱+(-۷)\times(-۱) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۶ & ۸ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۸ & ۶ \end{vmatrix} = ۰$$

در بالا از خاصیت (f) و سطر اول که در آن تعداد صفر وجود دارد استفاده شد. در واقع فرمول (۶.۳) در حالت که $i=۱$ بکار رفت.

دو خاصیت زیر نشان می دهد که چه نکات مهمی بعد از اعمال عملیات ماتریسی برای دترمینان بوجود می آید:

$$\begin{aligned} &(h)\ \det(AB) = \det(A)\times\det(B) \\ &(i)\ \ \det(A^t) = \det(A) \end{aligned} \tag{۸.۳}$$

برهان. روند اثبات (۸.۳) را برای ماتریس‌های ۲ × ۲ انجام داده و فرم اثبات در حالت کلی بکمک استقراء بر تعداد تبدیلات مقدماتی که ماتریس را به حالت کانونی خود در می‌آورد انجام می شود.

به بخش ۵.۵.۲ برمی‌گردیم که در آن:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱} & a_{۱۱}b_{۱۲}+a_{۱۲}b_{۲۲} \\ a_{۲۱}b_{۱۱}+a_{۲۲}b_{۲۱} & a_{۲۱}b_{۱۲}+a_{۲۱}b_{۲۲} \end{pmatrix}$$

$\det(AB)$ را می توان به‌شکل مجموع زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱}b_{۱۱} & a_{۱۱}b_{۱۲} \\ a_{۲۱}b_{۱۱} & a_{۲۱}b_{۱۲} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{۱۲}b_{۱۱} & a_{۱۱}b_{۱۲} \\ a_{۲۲}b_{۲۱} & a_{۲۱}b_{۱۲} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{۱۱}b_{۱۱} & a_{۱۲}b_{۲۱} \\ a_{۲۱}b_{۱۱} & a_{۲۲}b_{۲۲} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{۲۲}b_{۲۱} & a_{۱۲}b_{۲۲} \\ a_{۲۲}b_{۲۱} & a_{۲۲}b_{۲۲} \end{vmatrix}$$

که برابر است با:

$$\begin{aligned} =& b_{۱۱}b_{۱۲}\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۱} \\ a_{۲۱} & a_{۲۱} \end{vmatrix} - b_{۲۱}b_{۱۲}\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۱} \\ a_{۲۱} & a_{۲۱} \end{vmatrix} \\ &+ b_{۱۱}b_{۲۲}\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۱} \\ a_{۲۱} & a_{۲۱} \end{vmatrix} + b_{۲۱}b_{b۲۲}\begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۲} \\ a_{۲۲} & a_{۲۲} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

محاسبه ای ساده نشان می دهد که حاصل فوق با نتایج زیر یکی است:

$$\det(A)(b_{۱۱}b_{۲۲} - b_{۲۱}b_{۱۲}) = \det(A)\det(B)$$

بعلاوه با توجه به تعریف ترانهاده، به‌سادگی دیده می شود: $\det(A^t) = \det(A)$ برقرار است.[۴] □

نکته ۳.۱. **در حالت کلی برای ماتریس $A_{n\times n}$ وقتی c یک عدد حقیقی باشد، داریم:**[۵]

$$c\det(A) \neq \det(cA) = c^n\det(A)$$

با استفاده از خاصیت (i)، خواص (a) تا (g) را می‌توان به جای سطرها، به ستون‌های A تطبیق داد به این شکل که سطرهای A، ستون‌های A^t است (و بالعکس). در واقع:

نتیجه ۳.۳. **اگر تمام ستون‌های $A_۱,\ldots,A_n$ از ماتریس A را با سطر متناظرش جابجا کنیم آن‌گاه تمام خواص دترمینان از (a) تا (g) مجدداً برقرار است.**

۳.۴.۲ دترمینان و عملیات سطری مقدماتی

در بخش ۲.۸ سه عمل (اَعمال سطری مقدماتی) را روی یک ماتریس تعریف کرده و به دنبال آن از ماتریس‌های مقدماتی صحبت شد. اکنون نسبت بین دترمینان یک ماتریس و این اَعمال را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۳.۴. **اگر ماتریس A' به واسطه عمل سطری مقدماتی e از ماتریس مربعی A حاصل شده باشد آن‌گاه $\det A' = q\det A$ که در آن (با توجه به نوع عمل سطری مقدماتی) عدد q یکی از یکی از موارد زیر خواهد بود:**

(۱) $q = -۱$ در حالی که e عمل جابجایی سطرها است.

(۲) $q = \lambda$ در حالی که e عمل ضرب اسکالری یک سطر در λ است.

(۳) $q = ۱$ در حالی که e عمل سطری مقدماتی سوم باشد.

۴. برای اثبات کامل به منبع ۳۳، بخش ۲. ۴ مراجعه کنید.

۵. برقراری آن با مطالبی که بیان شد، بدست می آید. ضمناً به نامساوی سمت چپ توجه کنید!

برهان. با توجه به نتیجه ۲.۳ و استفاده از خواص (a) تا (g) روی سطرهای ماتریس A در اولین حالت از خاصیت پادتقارنی (e) نتیجه می‌شود که دترمینان قرینه خواهد شد. دومین حالت از خاصیت خطی بودن (b) داریم

$$\det(A') = \lambda \det(A)$$

و لذا $q = \lambda$. و در نهایت مجدداً با کمک خطی بودن (f)، $\det(A) = \det(A')$ و این یعنی $q = ۱$. □

مثال ۷.۳. در این مثال، با استفاده از خواص (a) تا (q) و گزارهٔ فوق، دترمینان ماتریسی از مرتبه n را بدست می آوریم. [۶]

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \end{pmatrix}_{n\times n}$$

در اولین مرحله و برای هر $i = ۲,\dots,n$ سطر iام را با

$$A_i - A_۱$$

عوض می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & -۱ & -۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & -۱ & \cdots & -۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

۶. توجه کنید n ممکن است بزرگ باشد.

در مرحله دوم، دو سطر اول را جابجا کرده و سپس سطر دوم را با سطر سوم تعویض می‌کنیم:

$$
|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}
$$

با تکرار این روند به دترمینان زیر می‌رسیم:

$$
|A| = \cdots = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}
= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

که چون ماتریس آخری، بالامثلثی است (بنا به تمرین ۱.۳) داریم:

$$
\det(A) = (-1)^{n-1} \times (-1)^{n-2} = -1 \tag{۹.۳}
$$

برای روش‌هایی که در محاسبه دترمینان‌های مشکل‌تر استفاده می‌شود به ضمیمه B مراجعه کنید.

۵.۳ مسائل

۱. بکمک فرمول مقادیر زیر را بیابید.

$$(a)\ \begin{vmatrix} n+۱ & n \\ n & n-۱ \end{vmatrix},\qquad (b)\ \begin{vmatrix} a^۲ & ab \\ ab & b^۲ \end{vmatrix},\qquad (c)\ \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$(d)\ \begin{vmatrix} a^۲+ab+b^۲ & a^۲-ab+b^۲ \\ a+b & a-b \end{vmatrix},\qquad (e)\ \begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{vmatrix}$$

$$(f)\ \begin{vmatrix} \sin(\alpha)+\sin(\beta) & \cos(\beta)+\cos(\alpha) \\ \cos(\beta)-\cos(\alpha) & \sin(\alpha)-\sin(\beta) \end{vmatrix}$$

۲. بکمک خواص دترمینان، مقادیر زیر را بیابید.

$$(g)\ \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix},\qquad (h)\ \begin{vmatrix} ۷ & ۲ & -۱ \\ -۳ & ۴ & ۰ \\ ۵ & -۸ & ۱ \end{vmatrix},\qquad (i)\ \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$$

$$(j)\ \begin{vmatrix} a^۲+۱ & ab & ac \\ ab & b^۲+۱ & bc \\ ac & bc & c^۲+۱ \end{vmatrix},\qquad (k)\ \begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & ۱ \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & ۱ \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & ۱ \end{vmatrix}$$

$$(l)\ \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ & ۶ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{vmatrix},\qquad (m)\ \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۲ & \cdots & ۱ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & ۱ & \cdots & ۲ \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$(n)\ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \end{vmatrix}_{n\times n}\qquad (p)\ \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \end{vmatrix}_{n\times n}$$

۳. تبدیل مختصاتی در صفحه را در نظر بگیرید که در آن مبدأ به نقطهٔ $(۲, -۳)$ منتقل شده و سپس محورهای مختصات به اندازهٔ $\pi/۴$ در جهت مثلثاتی دوران داده می‌شود. ماتریس را بنویسید که به توسط آن، این تبدیل، نقطهٔ (x, y) را به نقطهٔ (x', y') می‌برد.

۴. به‌ازای $f(x) = x^۳ - ۷x^۲ + ۱۳x - ۵$ و

$$A = \begin{pmatrix} ۵ & ۲ & -۳ \\ ۱ & ۳ & -۱ \\ ۲ & ۲ & -۱ \end{pmatrix}$$

مطلوبست محاسبهٔ $f(A)$.

۵. ماتریس $A_{۲\times۲}$ مفروض است. نشان دهید اگر

$$f(x) = x^۲ - ax + b$$

که در آن $a = \mathrm{tr}(A)$ و $b = \det A$ داده شده‌اند، آن‌گاه $f(A) = \mathbf{0}$.

۶. ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & a \\ ۱ & ۰ & ۱ & b \\ ۱ & ۱ & ۰ & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^۲ + b^۲ + c^۲ - ۲ab - ۲ac - ۲bc + ۲d$$

۷. ماتریس X را چنان پیدا کنید که برای آن داشته باشیم $X - X^۲ = -I_n$.

۸. مقدار متغیر را در معادلات زیر پیدا کنید.

$$(a)\ \begin{vmatrix} x & ۱ & ۲ \\ ۳ & x & -۱ \\ ۴ & x & -۲ \end{vmatrix} = ۲ \qquad (b)\ \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ x^۲ & x-۲ & ۳ \\ x & x+۱ & x \end{vmatrix} = ۳$$

$$(c)\ \begin{vmatrix} -۱ & x & x \\ ۲ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \end{vmatrix} = ۲۷ \qquad (d)\ \begin{vmatrix} -x & ۲ & ۱-x \\ ۳ & -x & ۱ \\ ۱ & ۰ & -x \end{vmatrix} = ۷$$

۹. اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ باشند، آنگاه $|BA|$ چیست؟

۴

ماتریس معکوس

در بخش ۵.۲، اعمال حسابی مقدماتی[1] را بین ماتریسها تعریف کردیم. اکنون به عمل حسابی دیگری یعنی تقسیم ماتریس‌ها می‌پردازیم.

۱.۴ ماتریس معکوس و تقسیم ماتریسی

مطمئناً خواننده می داند که معادلهٔ عددی $ax = b, (a \neq ۰)$ دارای جواب منحصربفرد $x = b/a$ است. این جواب را می‌توان به‌صورت $x = ba^{-۱}$ هم نوشت که در آن $a^{-۱}$ معکوس ضربی a است. اگر با حفظ شکل معادله و بجای a و b از ماتریس استفاده شود به فرم ماتریسی زیر می رسیم:

$$AX = B \tag{۱.۴}$$

ماتریس‌های A و B معلوم و ماتریس X مجهول است.

با مشابه سازی از روی جواب معادلهٔ عددی و برای (۱.۴) انتظار داریم حاصلی همچون

$$X = A^{-۱}B$$

بدست آید که در آن $A^{-۱}$ معکوس A تلقی می‌شود[2]. اگر قرار دهیم، $B = I_n$ آن‌گاه

$$X = A^{-۱}I_n = A^{-۱}$$

و لذا $A^{-۱}A = I_n$. با الهام از تساوی اخیر تعریف زیر را می‌آوریم.

۱. جمع و ضرب
۲. این معادله ماتریسی، برای هر ماتریس B برقرار است.

تعریف ۱.۴. **برای هر ماتریس A، ماتریس C را معکوس (وارون) A می‌نامند، هرگاه**

$$I_n = CA = AC$$

در این حالت C را با A^{-1} نشان می‌دهند.

تمرین ۱.۴. **نشان دهید اگر ماتریس A وارون داشته باشد، A حتماً مربعی است.**

اکنون، معادله (۱.۴) را با فرض وجود A^{-1}، را از چپ در A^{-1} ضرب کنید:

$$X = I_n X = A^{-1}AX = A^{-1}B$$

نتیجه اینکه اگر A^{-1} موجود باشد، معادله (۱.۴) حل‌پذیر بوده و X تنها جواب آن است.

تمرین ۲.۴. **مشابه با معادله (۱.۴)، سعی کنید تا معادله $XA = B$ را حل کنید[3].**

قضیه ۱.۴. **اگر معکوس ماتریس A وجود داشته باشد، A^{-1} منحصر به‌فرد است.**

برهان. چون ماتریس A^{-1} معکوس A است لذا $I = A^{-1}A$. حال اگر A' ماتریس دیگری با خاصیت $I = A'A$ باشد، آن‌گاه با ضرب A^{-1} از راست داریم:

$$A^{-1} = IA^{-1} = A'AA^{-1} = A'(AA^{-1}) = A'I = A'$$

که نشان می‌دهد معکوس یک ماتریس اگر وجود داشته باشد حتماً یکتا است. □

مثال ۱.۴. **برای دو ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ و $C = \begin{pmatrix} ۲ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$ داریم $CA = AC = I_۲$ و لذا A^{-1} همان C است.**

مثال ۲.۴. **چون $I_n = I_n I_n$ لذا $I_n^{-1} = I_n$.**

با چیزی هایی که تا بحال دیدید، ممکن است فکر کنید که ماتریس معکوس برای هر نوع ماتریس مربعی وجود دارد. غلط بودن این ادعا را با در نظر گرفتن دو ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{pmatrix}$$

۳. این معادله را دوگان معادله (۱.۴) می‌نامند.

که در آن B دلخواهست و با تشکیل ماتریس BA نشان می‌دهیم:

$$BA = \begin{pmatrix} ۰ & b_{۱۱} + b_{۱۲} \\ ۰ & b_{۲۱} + b_{۲۲} \end{pmatrix}$$

به‌وضوح هیچگاه نمی‌توان BA را با ماتریس همانی $I_۲$ مساوی کرد. بنابر این وجود وارون برای A منتفی است. به ماتریس‌هایی که وارون‌ناپذیر هستند **منفرد** می‌گویند.

قضیه ۲.۴. اگر $\det(A) = ۰$ باشد، آن‌گاه A ماتریسی منفرد است.

برهان. فرض کنید $\det(A) = ۰$ و بخلف $A^{-۱}$ وجود دارد. در این‌صورت $AA^{-۱} = I$ و لذا

$$۱ = \det(\underbrace{AA^{-۱}}_{I}) = \det(A) \times \det(A^{-۱}) = ۰ \times \det(A^{-۱}) = ۰$$

که تناقض است. از این‌رو $A^{-۱}$ وجود ندارد. $\square$

فرض کنیم $A_{n\times n}$ ماتریسی مربعی و نامنفرد است[۴]. بدنبال الگوریتمی هستیم که محاسبهٔ $A^{-۱}$ را ممکن کند. با کمک زیرماتریس M_{ij}[۵]، عدد

$$A_{ij} = (-۱)^{i+j} \det(M_{ij})$$

یا همان **همسازهٔ** نظیر درآیه a_{ij}[۶]، ماتریس جدیدی بنام **ماتریس الحاقی** A^* را از روی A شکل می‌دهیم:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} & \cdots & A_{۱n} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} & \cdots & A_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n۱} & A_{n۲} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{A^*} \qquad (۲.۴)$$

دقت کنید A_{ij} در A^* دقیقاً در جایگاه a_{ij} متناظر نشسته است. بکمک تعریف دترمینان داریم:

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & d & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & d \end{pmatrix}, \quad d = \det(A) \qquad (۳.۴)$$

۴. پس بنا به قضیه ۲.۴، A معکوس دارد.
۵. در اینجا منظور مینور درآیه a_{ij} و حاصل از حذف سطر iام و ستون jام A است.
۶. تعریف ۱.۳ را ببینید.

حال بکمک خواص دترمینان $d^n = \det(AA^*)$ و چون دترمینان طبیعتی ضربی دارد، داریم:[۷]

$$\det(A^*) = d^{n-1} \tag{۴.۴}$$

همچنین از رابطه (۳.۴) داریم $AA^* = dI_n$ و بنابراین:

$$A^{-1} = \frac{1}{d}A^* = \begin{pmatrix} A_{11}/d & A_{12}/d & \cdots & A_{1n}/d \\ A_{21}/d & A_{22}/d & \cdots & A_{2n}/d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}/d & A_{n2}/d & \cdots & A_{nn}/d \end{pmatrix} \tag{۵.۴}$$

این روشی است برای یافتن معکوس ماتریس نامنفرد A. نتایج حاصل و بعلاوه قضیه ۲.۴، نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

نتیجه ۳.۴. ماتریس A منفرد است اگر و فقط اگر $\det(A) = 0$.

مثال ۳.۴. به‌سادگی می‌توان دید $\det \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} = 5 \neq 0$ و لذا A نامنفرد است.

اکنون:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

تمرین ۳.۴. در مثال ۲.۱۲ دوران یک بردار واقع در صفحه حول مبدأ را با ماتریس $R_{-\alpha}$ متناظر کردیم. از الگوریتم ارائه شده معکوس $R_{-\alpha}$ را که به معنی دوران برخلاف جهت قبلی حول مبدأ است را یافته و نشان دهید

$$R_{-\alpha} = R_{\alpha}^{-1}$$

مثال ۴.۴. ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$، بردار $\mathbf{x} = (1, 0)^t$ را به بردار $\mathbf{y} = (1, 1)^t$ تبدیل می کند (شکل ۱.۴). یعنی $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. در این مثال A^{-1} وجود داشته و برابر است با $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. به‌طور مشابه $\mathbf{y}$ را می‌توان از ماتریس تبدیل $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ هم بدست آورد هرچند چون B وارون ندارد دیگر نمی‌توان $\mathbf{x}$ را از $\mathbf{y}$ نتیجه گرفت.

۷. که نشان می‌دهد، ناصفر بودن دترمینان A، ناصفر بودن دترمینان ماتریس الحاقی A^* را نتیجه می‌دهد.

۲.۴ رتبه و دترمینان

با توجه به بخش ۷.۲ و برای ماتریس زیر

$$A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s۱} & a_{s۲} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n}$$

بعد از درنظر گرفتن ستون‌ها به‌عنوان بردارهایی $s-$بُعدی، ماکزیمم تعداد ستونهای مستقل خطی را رتبه A نام گذاری کردیم. اکنون یک مجموعه دلخواه از k سطر و k ستون از A را انتخاب کرده و به این صورت یک ماتریس مربعی (غیر از A) می‌سازیم. دترمینان این ماتریس جدید k-**اُمین مینور مرتب شده** A نامیده می‌شود.

لم ۴.۴. اگر همه مینورها از مرتبه k ماتریس دلخواه A صفر باشند، آن‌گاه همه مینورها از مراتب بالاتر هم برابر صفر هستند.

برهان. فرض کنید حکم به ازای k برقرار است. زیرماتریس

$$A^{k+۱}$$

از A که شامل $k+۱$ سطر و $k+۱$ ستون از A است را در نظر گرفته و با بسط فرمول محاسبهٔ دترمینان برحسب هر سطر از ماتریس $A^{k+۱}$، مقدار $\det(A^{k+۱})$ صفر شده و لذا حکم برقرار است. □

قضیه ۵.۴. برای هر ماتریس، بالاترین مرتبه از مینورهای ناصفر، با رتبه ماتریس برابر است.

برهان. ماتریس $A = \|a_{ij}\|_{s\times n}$ را انتخاب کرده و فرض کنید بالاترین مرتبه مینورهای ناصفر آن عدد r باشد. این عدد به‌وضوح از $\min\{s,n\}$ عددی کمتر یا مساوی است. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، فرض کنید r سطر و r ستون A مینور ناصفر D[۸] را نتیجه دهند. با این فرض، r ستون اول ماتریس A مستقل خطی هستند (چرا؟).

چون رسیدن به حکم در حالت $r = \min\{s,n\}$ بسیار ساده است، لذا فرض کنید

۸. $D = \det(\|a_{ij}\|_{r\times r})^{۷}$

$r < \min\{s,n\}$. نشان می‌دهیم A[۹] در بین r ستون اول ماتریس A وابسته خطی است. قرار دهید:

$$B^{i,l} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{il} \end{pmatrix}$$

اگر $i > r$ آن‌گاه $\det(B^{i,l})$ مینوری از مرتبه بزرگتر از r بوده و بنابه فرض اولیه حتماً صفر است.

اگر $i \leqslant r$ باشد، آن‌گاه $\det(B^{i,l})$ اصلاً مینوری برای A نیست هرچند به علت یکسان بودن دو سطر از $B^{i,l}$ مجدداً $\det(B^{i,l})$ صفر می شود.

حال با توجه به $\det(B^{i,l}) = 0$، دترمینان را برحسب آخرین سطر $B^{i,l}$ بسط داده و داریم:

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \cdots + a_{ir}A_r + a_{il}D = 0$$

که در آن A_k مینور متناظر به درآیه a_{ik} از $B^{i,l}$ است. چون این مینور به‌وسیله درآیه‌های r سطر اول A شکل داده می‌شود لذا rتایی $A_1, \ldots, A_r$ به ازای هر i یکسان بوده و چون D را غیرصفر گرفتیم پس

$$a_{il} = \frac{-A_1}{D} a_{i1} + \cdots + \frac{-A_r}{D} a_{ir}$$

برای هر $i = 1, \cdots, s$ برقرار شده و بنابراین iامین ستون A مجموعی از r ستون اول A (هرکدام با ضرایب $\frac{-A_1}{D}, \ldots, \frac{-A_r}{D}$ به‌طور متناظر) خواهد شد. □

در حالت خاص، ماتریس مربعی مرتبه n دارای ماکزیمم رتبه n است اگر و فقط اگر دترمینانش ناصفر باشد. یک چنین ماتریسی را از **رتبهٔ کامل** می‌نامند.

نتیجه ۴.۶. ماکزیمم تعداد سطرهای مستقل خطی در ماتریس A با ماکزیمم تعداد ستون‌های مستقل خطی A (که رتبه را نشان می‌دهد) برابر است.

تمرین ۴.۴. با در نظر گرفتن ماتریس A^t نتیجهٔ (۴.۶) را ثابت کنید.

۹. $r < l \leqslant n$

۳.۴ مسائل

۱. برای هریک از ماتریس‌های زیر ماتریس وارون را بدست آورید.[۱۰]

$$(a)\ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix},\quad (b)\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\quad (c)\ \begin{pmatrix} ۲ & ۷ & ۳ \\ ۳ & ۹ & ۴ \\ ۱ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}$$

$$(d)\ \begin{pmatrix} ۱ & +۲ & +۲ \\ ۲ & +۱ & -۲ \\ ۲ & -۲ & +۱ \end{pmatrix},\quad (e)\ \begin{pmatrix} ۰ & -۲ & +۱ & ۵ \\ ۱۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & +۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & +۲ & -۲ & ۳ \end{pmatrix},\quad (f)\ \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ \vdots & ۰ & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$(g)\ \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۰ \end{pmatrix},\quad (h)\ \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & \cdots & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۰ \end{pmatrix}$$

۲. با حل معادلات ماتریس زیر، ماتریس X را بدست آورید.

$$(a)\ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} ۳ & ۵ \\ ۵ & \alpha \end{pmatrix}$$

$$(b)\ X \begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۵ & -۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱ & ۵ \\ -۲ & ۶ \end{pmatrix}$$

$$(c)\ X \begin{pmatrix} ۵ & ۳ & ۱ \\ ۱ & -۳ & -۲ \\ -۵ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۸ & ۳ & ۰ \\ -۵ & ۹ & ۰ \\ -۲ & ۱۵ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$(d)\ \begin{pmatrix} ۲ & -۳ & ۱ \\ ۴ & -۵ & ۲ \\ ۵ & -۷ & ۳ \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} ۹ & ۷ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۱۸ & ۱۲ & +۹ \\ ۲۳ & ۱۵ & ۱۱ \end{pmatrix}$$

۳. ماتریس‌های A و B نامنفرد و از مرتبه n هستند. نشان دهید تساوی‌های زیر با هم معادل‌اند:

$$AB = BA, \quad ,AB^{-۱} = B^{-۱}A, \quad ,A^{-۱}B = BA^{-۱}, \quad ,A^{-۱}B^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$$

۴. فرض کنید A ماتریسی متقارن و نامنفرد است. نشان دهید $A^{-۱}$ نیز متقارن است.

۱۰. ماتریسهای بزرگ $n \times n$ هستند.

۵. فرض کنید A ماتریسی بالا مثلثی (پایین مثلثی) و نامنفرد است. نشان دهید $A^{-۱}$ نیز ماتریسی بالا مثلثی (پایین مثلثی) است.

۶. به ازای هر مقدار ممکن برای λ، رتبه دو ماتریس زیر را بیابید:

$$(a)\ \begin{pmatrix} ۱ & \lambda & -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ & \lambda & ۵ \\ ۱ & ۱۰ & +۶ & ۱ \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & +۱ & -۱ \\ \lambda & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲\lambda & +۲ \\ ۱ & +۲ & -۲ & +۳ \end{pmatrix}$$

۷. فرض کنید ماتریس B یک سطر از ماتریس A بیشتر دارد. ثابت کنید یا هر دو هم‌مرتبه اند و یا $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) + ۱$.

۸. شرط‌های لازم و کافی را برای سه نقطه $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ در صفحه چنان پیدا کنید که هر سه بر یک خط واقع باشند.

۹. برای سه خط زیر، شرط‌های لازم و کافی را چنان ارائه دهید که همرس باشند:

$$\begin{cases} a_۱x + b_۱y + c_۱ = ۰ \\ a_۲x + b_۲y + c_۲ = ۰ \\ a_۳x + b_۳y + c_۳ = ۰ \end{cases}$$

۱۰. ماتریس $A_{m\times n}$ را به‌شکل مجموعه‌ای از ستون‌ها

$$A = (A_۱, A_۲, \ldots, A_n)$$

بنویسید. فرض کنید $c \neq ۰$ و ماتریس A' را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$(a)\ A' = (A_۱, A_۲, \ldots, A_{i-۱}, cA_i, A_{i+۱}, \ldots, A_n)$$

$$(b)\ A' = (A_۱, A_۲, \ldots, A_{i-۱}, A_j, A_{i+۱}, \ldots, A_{j-۱}, A_i, A_{j+۱}, \ldots, A_n)$$

در هر دو حالت نشان دهید $\operatorname{rank}(A') = \operatorname{rank}(A)$.

۱۱. نشان دهید $\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

۱۲. ثابت کنید اگر $A_{۲\times۲}$ ماتریسی پوچ توان[۱۱] از مرتبه k باشد، هرگاه $A^۲ = \mathbf{0}_{۲\times۲}$.

۱۱. ماتریس A را پوچ توان از مرتبه k می‌نامند آن‌گاه $A^k = \mathbf{0}$ باشد.

۵

دستگاه معادلات خطی

مدل اقتصادی را که در مقدمه کتاب آمد، نمونه‌ای از مسائل اصلی است که در آن به پیدا کردن زمان تطبیق تقاضا و عرضه در نقطه تعادل پرداخته می‌شود.[۱] از این‌رو یافتن شرایط موردنظر در مدل آنهم به روشی بسیار کلی تر مطلوب خواهد بود.

خواننده با مفهوم یک معادلهٔ خطی در بخشهای ۱.۱ به بعد تا حدود قابل قبولی آشنا شده است و می داند که یک مجموعه از معادلات خطی اصطلاحاً یک **دستگاه** نامیده می‌شود. اینکه منظور از حل یک دستگاه معادلات خطی چیست، موضوعی است که در بیان مفهوم نقطه تعادل در یک مدل اقتصادی به آن پرداخته شد. در مثال زیر، سه نمونهٔ مختلف دستگاه معادلات خطی ارائه شده است که از نظر جواب داشتن، خروجی های متفاوت دارند.

در این فصل آنچه مورد علاقه ماست، یافتن شرایطی است که اولاً دستگاه دارای جواب بوده و ثانیاً جواب منحصر به‌فرد هم بدست آید. از این نظر، دستگاههای فاقد جواب و یا دارای بیشمار جواب در اولویت بعدی توجه قرار می گیرند.

مثال ۱.۵. دستگاه زیر فاقد جواب است زیرا دو معادلهٔ موجود در آن دو خط موازی با هم هستند.:

$$\begin{cases} x_۱ + ۵x_۲ = ۱ \\ x_۱ + ۵x_۲ = ۷ \end{cases}$$

دستگاه زیر دارای جواب منحصربه‌فرد $x_۱ = ۱, x_۲ = ۳$ است زیرا دو معادلهٔ آن دو خط

۱. به عبارت دیگر قیمت مدنظر است.

متقاطع هستند:

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ = ۷ \\ x_۱ + x_۲ = ۴ \end{cases}$$

و دستگاه زیردارای بیشمار جواب است (چرا؟)

$$\begin{cases} ۳x_۱ - x_۲ = ۱ \\ ۶x_۱ - ۲x_۲ = ۲ \end{cases}$$

در ادامه، به سه نوع روش که در یافتن جواب‌های چنین دستگاه‌هایی کارآمد است، می‌پردازیم. اولین آن‌ها که فرمول ساده‌ای را برای جواب ارائه می‌دهد، **روش کرامر** نام دارد[۲]. روش دوم بر پایه الگوریتمی کلی به جهت یافتن جواب دستگاه معادلات خطی قرار دارد[۳] و سومین روش فرمولی صریح برای جواب خصوصی و یا یک جواب تقریبی دستگاه را ارائه می‌کند.[۴]

برای شروع دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n = b_۲ \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{s۱}x_۱ + a_{s۲}x_۲ + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{۱.۵}$$

بدنبال شرایطی هستیم که تحت آنها فعلاً دستگاه فوق دارای جواب است. در ابتدا فرض کنید ماتریس

$$A = \|a_{ij}\|_{s\times n}$$

حاوی تمام ضرایب متغیرها در (۱.۵) و ماتریس $\tilde{A}$ حاصل ادغام ظاهری A و تمام اعداد ثابت b_i باشند. برای این دو ماتریس لم‌ای وجود دارد که اثبات آن به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} & b_۱ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} & b_۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s۱} & a_{s۲} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

۲. این‌روش برای دستگاه‌هایی از نوع خاص به‌کار می‌رود.
۳. در این‌روش وابستگی جواب به اطلاعات ورودی معلوم و مشخص نیست.
۴. این الگو بر پایه آنچه ما آن را شبه معکوس یک ماتریس می نامیم، ساخته شده است.

لم ۱.۵. برای A و $\tilde{A}$ یکی از دو حالت زیر امکان پذیر است:

$$\boldsymbol{rank}(\tilde{A}) = \boldsymbol{rank}(A) \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{rank}(\tilde{A}) = \boldsymbol{rank}(A) + ۱$$

قضیه ۲.۵ (کرونکر-کاپلّی[۵]). **دستگاه معادلات خطی (۱.۵) دارای جوابست اگر و فقط اگر $\boldsymbol{rank}(\tilde{A}) = \boldsymbol{rank}(A)$.**

برهان. فرض کنید (۱.۵) دارای جواب با مؤلفه های $k_۱, k_۲, \ldots, k_n$ است. با جایگزینی آن‌ها در متغیرهای $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ به‌طور متناظر، دستگاهی از s تساوی بدست می‌آید که در آن ستون

$$b = (b_۱, b_۲, \ldots, b_n)^t$$

به‌شکل ترکیبی از ستون‌های A نوشته شده است. از آنجایی‌که همه ستون‌های $\tilde{A}$ (به غیر از b) همگی از A آمده‌اند؛ لذا مجموعه ستون‌های مستقل خطی در $\tilde{A}$ و در A یکی بوده و بنابراین دو ماتریس A و $\tilde{A}$ رتبهٔ یکسان دارند.

اکنون فرض کنیم رتبه A و رتبه $\tilde{A}$ برابرند (یعنی ماکزیمم تعداد ستون‌های مستقل خطی در دو ماتریس یکی است). در این‌صورت آخرین ستون $\tilde{A}$ (اجباراً) برحسب زیرماتریسی از خودش که شامل ماکزیمم تعداد ستون‌های مستقل خطی $\tilde{A}$ است، نوشته می‌شود. به عبارت دیگر اعداد $k_۱, k_۲, \ldots, k_n$ چنان وجود دارند که برای

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} k_j = b_i, \qquad (i = ۱, \ldots, s)$$

و این یعنی $k_۱, k_۲, \ldots, k_n$ جوابی برای (۱.۵) است. □

هرچند (۱.۵) معیاری را برای وجود جواب ارائه می‌دهد، اما اولاً هنوز راه یافتن جواب را نمی‌دانیم و ثانیاً در صورت وجود بی‌شمار جواب چگونه همه آن‌ها را پیدا کنیم؟

دستگاه (۱.۵) را مجدداً در نظر گرفته و فرض کنید $\operatorname{rank}(A) = r$[۶]. به عبارت معادل، بقیه سطرهای ماتریس (غیر از این r–تای مشخص) را می‌توان ترکیبی خطی از این r سطر تلقی کرد. هیچ مشکلی نیست اگر این r سطر، r سطر اول ماتریس باشند و در این‌صورت r سطر اول $\tilde{A}$ هم

5. A. Capelli

۶. یعنی r ماکزیمم تعداد سطرهای مستقل خطی A را خواهد بود.

مستقل خطی خواهند شد (چرا؟). چون رتبه این دو ماتریس برابر است لذا r سطر اول در $\bar{A}$ یک مجموعه از ماکزیمم تعداد سطرهای مستقل خطی ساخته و از این‌رو هر معادله در (۱.۵) را می‌توان با در نظر گرفتن ضرایب مناسبی به‌صورت ترکیبی خطی از اولین r معادله‌ها نوشت. به‌علاوه هر جوابی که برای این r معادله اول (۱.۵) پیدا شود در بقیه معادلات (۱.۵) نیز صدق می‌کند. بنابراین کافی است که خود را به یافتن جوابی برای دستگاه معادله زیر که شامل r معادله اول (۱.۵) می‌شود، محدود کنیم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{۲.۵}$$

معادله (۱.۵) را به‌صورت ماتریسی

$$\begin{cases} A'\mathbf{x}' = b', \quad A' = \|a_{ij}\|_{r\times n} \\ \mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_n)^t \\ b' = (b_1, \ldots, b_r)^t \end{cases}$$

می‌توان نوشت. واضح است که $\operatorname{rank}(A') = r$ (چرا؟).

اگر $r = n$، آن‌گاه تعداد معادلات و تعداد مجهولات یکی شده و لذا دستگاه (۱.۵) دارای جواب منحصر به‌فرد

$$\mathbf{x}' = (A')^{-1}b'$$

خواهد شد. اگر $r < n$ [۷] دستگاه فوق را به‌شکل زیر بازنویسی کرده

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{۳.۵}$$

و سپس فرم ماتریسی متناظر آن را به ازای $i = 1, \ldots, r$ می‌سازیم:

$$\begin{cases} A''\mathbf{x}'' = b'', \quad A'' = \|a_{ij}\|_{r\times r} \\ \mathbf{x}'' = (x_1, \ldots, x_r)^t, \quad b'' = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^t \\ \beta_i = b_i - (a_{ir+1}x_{r+1} + \cdots + a_{in}x_n) \end{cases}$$

۷. در این حالت $\det(\|a_{ij}\|_{r\times n}) \neq 0$.

حال در مجهولات $x_{r+1}, \dots, x_n$ مقادیری دلخواه $c_{r+1}, \dots, c_n$ را جایگزین کرده که در این‌صورت دستگاهی از r معادله و r مجهول با $\det(A'') \neq 0$ به‌دست می‌آوریم. به‌عبارت دیگر:

$$\mathbf{x}'' = (A'')^{-1} b'' \qquad (۴.۵)$$

جوابی برای دستگاه (۱.۵) است. نهایتاً با فرض $\mathbf{x}'' = (c_1, \dots, c_r)^t$ به‌وضوح n-تایی

$$(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)^t$$

جوابی برای (۱.۵) خواهد شد.

اکنون در مرحله‌ای هستیم که می‌توان یک قاعده کلی برای یافتن جواب‌های یک دستگاه ارائه کرد. فرض کنید دستگاه (۱.۵) را در حالت

$$\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A) = r$$

قرار دارد. تعداد r سطر مستقل خطی در A را انتخاب کرده و در (۱.۵) آن معادلاتی را نگه دارید که با این r سطر متناظر هستند. در سمت چپ این معادلات، r متغیر را طوری نگه دارید که دترمینان ضرایب متناظر این متغیرهای عددی ناصفر شود. برای هر معادله، بقیه متغیرها[۸] را در سمت راست تساوی منتقل کرده، به‌جای آن‌ها مقادیر دلخواهی را جایگزین و بقیه متغیرها در(۱.۵) را محاسبه کنید. به این صورت همه مجهولات در(۱.۵) به‌دست آمده‌اند.

مثال ۲.۵. در دستگاه زیر به‌سادگی می‌توان دید اولاً $\boldsymbol{rank}(\tilde{A}) = \boldsymbol{rank}(A) = 2$ و ثانیاً سطرهای اول و سوم مستقل هستند:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

لذا تنها به دو معادله

$$x_1 + x_2 = 2x_3 + x_4 - x_5, \qquad x_1 + 5x_2 = 9x_3 + 8x_4 - x_5$$

۸. متغیرهای آزاد

اکتفا کرده و با حل توأمان آنها

$$x_1=\frac{5}{4}-\frac{x_3}{4}-\frac{3x_4}{4}-x_5,\quad x_2=\frac{-1}{4}+\frac{7x_3}{4}+\frac{7x_4}{4}$$

مؤلفه های جواب هستند. این جواب را جواب عمومی نامیده و در آن متغیرهای حقیقی x_1,x_2,x_3 متغیرهای آزاد هستند.

نتیجه ۳.۵. جواب دستگاه (۱.۵) در صورت وجود منحصر به‌فرد است اگر و فقط اگر رتبه ماتریس A، با تعداد متغیرها مساوی باشد.

۱.۵ جواب منحصر بفرد (روش کرامر)

همان‌طورکه در (۳.۵) دیده شد، مؤلفه‌های جواب دستگاه (دو معادله دو مجهولی) به‌صورت نسبتی از دترمینان‌هایی خاص بیان می‌شد. هم اکنون می‌خواهیم این‌روند را برای دستگاه‌های بزرگتری تعمیم دهیم. در این‌روش نامنفرد بودن ماتریس ضرایب (مثلاً A) لازم است.[9]

قضیه ۴.۵. (روش کرامر) شکل ماتریسی $AX=B$ از یک دستگاه از معادلات خطی را که در آن تعداد مجهولات و تعداد معادلات برابر اند، داده شده است. در این صورت

$$x_i=\det(A_i)/\det(A),\quad (i=1,\dots,n)$$

و A_i ماتریسی است که از روی A با جایگزین کردن ستون iام A با ماتریس B به‌دست می آید.

برهان. از تساوی $AX=B$ داریم: $X=AB^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*B$ و بنابراین x_i با مقدار کسر $\frac{(B,A^* \text{ سطر } i\text{ام})}{\det(A)}$ برابر خواهد شد. بعلاوه با توجه به ماتریس الحاقی (۲.۴) صورت کسر بالا برابر است با $\det(A_i)=\sum_{k=1}^{n}A_{ki}b_k$. □

مثال ۳.۵. برای حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases}x+3y-z=4\\ 2x-y+z=3\\ 3x-2y+2z=5\end{cases}$$

۹. A ماتریسی مربعی از مرتبه $n\times n$ است.

اولاً دترمینان ماتریس ضرایب A برابر است با عدد غیرصفر ۲− که نشان می‌دهد A نامنفرد بوده و لذا دستگاه دارای جواب منحصر به‌فرد است. بعلاوه:

$$\det A_۱ = \underbrace{\begin{vmatrix} ۴ & ۳ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۱ \\ ۵ & -۲ & ۲ \end{vmatrix}}_{=-۲}, \quad \det A_۲ = \underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & -۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۲ \end{vmatrix}}_{=-۴}, \quad \det A_۳ = \underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & -۲ & ۵ \end{vmatrix}}_{=-۶}.$$

و لذا مؤلفه های جواب به‌صورت $x_۱ = \frac{-۲}{-۲} = ۱$، $x_۲ = \frac{-۴}{-۲} = ۲$ و $x_۳ = \frac{-۶}{-۲} = ۳$ به‌دست می آیند.

۲.۵ روش گاوس (روش متوالی حذف متغیرهای مجهول)

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n = b_۲ \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{۵.۵}$$

فرض کنید $c \neq ۰$ یک عدد ثابت و دلخواه بوده و ترتیب عملیاتی زیر را بین معادلات اول و دوم انجام می‌دهیم به‌طوری‌که ضریب جدید $a'_{۲k}$ در معادله دوم جدید به‌صورت $a_{۲k} - ca_{۱k}$ به‌دست آید. به همین ترتیب $b'_۲ = b_۲ - cb_۱$ لذا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n = b_۱ \\ a'_{۲۱}x_۱ + a'_{۲۲}x_۲ + \cdots + a'_{۲n}x_n = b'_۲ \\ a_{۳۱}x_۱ + a_{۳۲}x_۲ + \cdots + a_{۳n}x_n = b_۳ \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{۶.۵}$$

مثال ۴.۵. **در دستگاه زیر، با در نظر گرفتن ضریب (۱−) برای معادله اول، آنرا با معادلهٔ دوم جمع می کنیم تا معادلهٔ دوم جدیدی بوجود آید:**

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + ۵x_۳ = -۹ \\ x_۱ - x_۲ + ۳x_۳ = ۲ \\ ۳x_۱ - ۶x_۲ - x_۳ = ۲۵ \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + ۵x_۳ = -۹ \\ -۳x_۲ - ۲x_۳ = ۱۱ \\ ۳x_۱ - ۶x_۲ - x_۳ = ۲۵ \end{cases}$$

دستگاه اول را جای (۵.۵) و دستگاه معادلات دوم را مانند (۶.۵) بگیرید.

تا به اینجا، طبیعتاً دو سئوال مطرح می شود:

اول آنکه آیا دو دستگاه (۵.۵) و (۶.۵) معادل هستند؟ به‌این معنی که آیا اگر دستگاه (۵.۵) فاقد جواب باشد، (۶.۵) هم جواب ندارد؟

دوم اینکه آیا از نظر تعداد جواب یکسانند؟

خوشبختانه بکمک لم زیر پاسخ این دو سئوال مثبت است. قبل از اثبات نکته‌ای قابل ذکر است. ماتریس $\tilde{A}$ از دستگاه (۶.۵) را می‌توان با یک عمل مقدماتی از نوع سوم از ماتریس $\tilde{A}$ نظیر دستگاه (۵.۵) به‌دست آورد. بنابراین در صورت اثبات حکم فوق، هر عمل سطری مقدماتی که روی $\tilde{A}$ انجام شود ماتریس $\tilde{A}$ دیگری را نتیجه می‌دهد که ماتریس ضرایب در یک دستگاه معادل است.

لم ۵.۵. دو دستگاه (۵.۵) و (۶.۵) معادل هستند.

برهان. فرض کنید $K = (k_1, \ldots, k_n)$ جواب دستگاه (۵.۵) باشد. نشان می‌دهیم K جوابی برای دستگاه (۶.۵) نیز هست. چیزی که برای اثبات نیاز داریم این است که $(k_1, \ldots, k_n)$ معادله دوم در دستگاه (۶.۵) را برقرار می‌کند.[10] داریم:

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = b_1$$
$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = b_2$$

مشابه روندی که در ابتدای فصل توضیح داده شد به تساوی زیر می رسیم:

$$a'_{21}k_1 + a'_{22}k_2 + \cdots + a'_{2n}k_n = b'_2$$

که در آن $(c \neq 0)$ $a'_{2k} = a_{2k} - ca_k,$ ، $b'_2 = b_2 - cb_1$. بنابراین نشان دادیم K جواب (۶.۵) است. مابقی اثبات را واگذار می‌کنیم تا نشان دهید هر جواب(۶.۵) هم یک جواب (۵.۵) است. □

این نکته بدیهی است که تبدیلاتی که روی یک دستگاه معادلات به‌کار می‌روند(به هر تعداد هم که باشند) مجدداً یک دستگاه معادل تولید می‌کنند.

۱۰. بدیهی است این n تایی در مابقی معادلات صدق می‌کند.

تذکر ۱.۵. **روش حذفی گاوس باعث می‌شود که مرحله به مرحله تعدادی از متغیرها از هر معادله حذف و بی‌اثر شوند. اگر در انتهای کار فقط یک معادله باقی بماند (مثلاً i امین معادله) که در آن همه ضرایب متغیرهای مجهول در آن صفر شوند ولی در عین حال سمت راست آن معادله (منظور $\tilde{b_i}$ است) صفر نشود آن‌گاه دستگاه نمی‌تواند جوابی را برای خود پیدا کند. این حالت دستگاه را با بیان اینکه ناسازگار است می شناسند.**

اما در توضیح روش حذفی گاوس: دستگاه (۵.۵) را مفروض گرفته و برای همه iها و jها، ضرایب a_{ij} را با a°_{ij} و b_i را با b°_i تغیر نماد می دهیم. i شماره سطر با شروع $i=۱$ و j شماره متغیر با شروع $j=۱$ است. روش به این شکل شروع می‌شود:

(مرحله اول) مشخص کنید که آیا $a^{i-۱}_{ij}$ صفر است یا نه؟ اگر $a^{i-۱}_{ij}=\circ$ آن‌گاه بدنبال سطر kام $k\in\{i+۱,\ldots,m\}$ چنان بگردید که $a_{kj}\neq\circ$ شود. اگر چنین k ای وجود نداشت به مرحله چهارم رجوع و در غیر این صورت با همان k، سطر iام و kام را جابه‌جا می کنیم. در واقع به ازای $l=۱,\ldots,n$، $a^{i-۱}_{il}\leftrightarrow a^{i-۱}_{kl}$ و $b^{i-۱}_{i}\leftrightarrow b^{i-۱}_{k}$ انجام می شود.

(مرحله دوم) برای حذف x_j از همه معادلات که با اندیس‌های $k=i+۱,\ldots,m$ نشان داده شده‌اند، معادله kام را از معادله iام که قبلاً در $\frac{a^{i-۱}_{kj}}{a^{i-۱}_{ij}}$ ضرب شده کم کنید تا ضرایب تقلیل پیدا کنند، یعنی

$$a^{i}_{kl}=a^{i-۱}_{kl}-a^{i-۱}_{il}\left(a^{i-۱}_{kj}/a^{i-۱}_{ii}\right)$$

و تساوی $b^{i}_{k}=b^{i-۱}_{k}-b^{i-۱}_{i}\left(a^{i-۱}_{kj}/a^{i-۱}_{ij}\right)$ برای هر $l=۱,\ldots,n$ بدست آید.

(مرحله سوم) i را به $i+۱$ تبدیل کنید.

(مرحله چهارم) j را به $j+۱$ تبدیل کنید.

(مرحله پنجم) اگر $i=m$ و یا $j=n$ باشند، آن‌گاه روند یافتن متغیرها را با حل آخرین معادله به پایان برسانید. اگر هم $i<m$ و $j<n$ باشد به مرحله اول رجوع کنید. بعد از اتمام مراحل فوق، دستگاهی مشابه دستگاه زیر که به‌وضوح سبکتر شده است بدست می آید:

$$\begin{cases}a^{\circ}_{۱۱}x_۱+a^{\circ}_{۱۲}x_۲+\cdots+a^{\circ}_{in}x_n=b^{\circ}_۱\\ a^{\circ}_{۲۲}x_۲+a^{\circ}_{۲۳}x_۳+\cdots+a^{۱}_{۲n}x_n=b^{۱}_۲\\ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\ a^{m-۲}_{m-۱,m-۱}x_{m-۱}+a^{m-۲}_{m-۱,m}x_m+\cdots+a^{m-۲}_{m-۱,n}x_n=b^{m-۲}_{m-۱}\\ a^{m-۱}_{m,m}x_{m-۱}+a^{m-۱}_{m,m+۱}x_{m+۱}+\cdots+a^{m-۱}_{m,n}x_n=b^{m-۱}_{m}\end{cases}\qquad(\star)$$

اگر در دستگاه بالا برای k هایی[11]، همهٔ $a_{kj}^{k-۱}$ ها به ازای $j=k+۱,\dots,n$ صفر شود در حالیکه $b_k^{k-۱}\neq ۰$ آن‌گاه دستگاه (۵.۵) مطمئناً ناسازگار است.

به‌همین صورت اگر برای همان مقادیر k، $a_{kk}^{k-۱}$ ها غیر صفر شوند آن‌گاه (۵.۵) سازگار بوده و جواب را به شرح زیر از دستگاه $(\star)$ به‌دست می‌آوریم:

اولاً اگر $m=n$، مقدار x_n را از آخرین معادله، $x_{n-۱}$ را از $(n-۱)$ام معادله (که فقط x_n و $x_{n-۱}$ را دارد) یافته و ادامه دهید.

ثانیاً در حالت $m<n$، تعداد $x_{m-۱},\dots,x_n$ متغیر آزاد داریم که می‌توان به جای آن‌ها هر مقدار دلخواهی جایگزین کرد و لذا بقیه متغیرهای مجهول $x_۱,\cdots,x_n$ را بیابیم.

تذکر ۲.۵. **در الگوریتم بیان شده بالا، به‌نوعی ماتریس افزوده[12] $(A|B)$ را به فرم سطری پلکانی نظیرش تبدیل کردیم. این‌روند مشابه اثباتی است که برای قضیه ۹.۲ انجام شد.**

مثال ۵.۵. **برای حل دستگاه معادلات خطی زیر**

$$\begin{cases} x_۱+۲x_۲+۵x_۳=-۹\\ x_۱+x_۲+۳x_۳=۲\\ ۳x_۱+۶x_۲+x_۳=۲۵\end{cases}$$

با تشکیل ماتریس افزوده،مراحل بیان شدهٔ قبلی را بترتیب را روی آن اعمال می کنیم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۵ & -۹\\ ۱ & -۱ & ۳ & ۲\\ ۳ & ۶ & ۱ & ۲۵\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۵ & -۹\\ ۰ & -۳ & -۲ & ۱۱\\ ۰ & -۱۲ & -۱۶ & ۵۲\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۵ & -۹\\ ۰ & -۳ & -۲ & ۱۱\\ ۰ & ۰ & -۸ & ۸\end{array}\right)$$

از روی ماتریس آخر، دستگاه تقلیل‌یافته زیر باز نویسی می شود که با دستگاه اصلی معادل است:

$$\begin{cases} x_۱+۲x_۲+۵x_۳=-۹\\ -۳x_۲-۲x_۳=۱۱\\ -۸x_۳=۸\end{cases}$$

و به‌سادگی $x_۳=-۱$، $x_۲=-۳$ و $x_۱=۲$ به‌ترتیب از معادله آخر، معادله دوم و اولین معادله به‌دست می آیند.

۱۱. $۱\leqslant k\leqslant m$.

۱۲. ماتریسی که از افزودن ماتریس ضرایب A در کنار ماتریس ثابت‌های B از معادله $A\times B$ به‌دست آمده است.

اگر در طی مراحل بالا، احتمالاً ضرایب کسری بوجود آمد (همان‌طورکه در مرحله دوم الگوریتم آمد) می‌توان با ضرب مناسب در $a_{ij}(\neq 0)$ مخرج کسر را گویا کرد.

مثال ۶.۵. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ -7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$$

همانند مثال قبل داریم:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & +11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -89 & -56 & -88 \\ 0 & 0 & 89 & 56 & 120 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -89 & -56 & -88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{array}\right)$$

با نگاه به سطر آخر در ماتریس نهایی، نکته‌ای که در مورد ناسازگار بودن (جواب نداشتن) دستگاه (۵.۵) تذکر دادیم به‌وضوح مشاهده می شود.

مثال ۷.۵. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$$

با استفاده از روش حذفی گاوس داریم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

حال، دستگاه متناظری از روی ماتریس آخر بسازید و یک متغیر (مثلاً $x_۳$) را در آن آزاد فرض کنید:

$$\begin{cases} x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = ۰ \\ -x_۲ + ۲x_۳ = ۱ \end{cases}$$

در این صورت $x_۲ = ۲x_۳ - ۱$ **و با جایگذاری در معادله اول** $x_۱ = ۲x_۲ - x_۳ = ۳x_۳ - ۲$ **و نهایتاً جواب به‌شکل ماتریسی زیر قابل ارائه است:**

$$X = \begin{pmatrix} ۳x_۳ - ۲ \\ ۲x_۳ - ۱ \\ x_۳ \end{pmatrix}_{۳\times ۱}$$

۳.۵ معادلات خطی همگن

تا به اینجا، اغلب دستگاههای مورد بحث، دستگاههای بودند که لااقل یکی از ثابتهای طرف راست معادلات، عددی غیر از صفر دیده می شود. این دستگاهها را **غیر همگن** می‌نامند.

بالعکس دستگاهی به مانند

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n = ۰ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n = ۰ \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{s۱}x_۱ + a_{s۲}x_۲ + \cdots + a_{sn}x_n = ۰ \end{cases} \tag{۷.۵}$$

که در آن، مقادیر ثابت سمت راست در همه تساوی‌ها صفر اند[۱۳] ، یک دستگاه **همگن** است. در یک دستگاه همگن، به‌وضوح، اگر بجای همهٔ x_i ها صفر قرار دهیم، همهٔ تساوی ها برقرار می مانند. چنین جوابی را **جواب بدیهی** گویند. در واقع، بنابه قضیه کرونکر-کاپّلی، دستگاه (۷.۵) همواره دارای جواب بدیهی بوده و لذا همواره سازگار است:

$$(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = (۰, ۰, \ldots, ۰) = \mathbf{0}$$

شکل متناسب این قضیه در حالت دستگاه همگن (۷.۵) به‌صورت زیر درمی‌آید:

۱۳. یعنی $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

قضیه ۶.۵. **فرض کنید $AX = \boldsymbol{O}$ دستگاه معادلات خطی همگن از n متغیر است و بعلاوه داریم، $\boldsymbol{rank}(A) = n$. در این صورت دستگاه فقط دارای جواب بدیهی $X = \boldsymbol{O}$ بوده و در غیر این صورت[۱۴] دستگاه دارای بی‌شمار جواب است.**

برهان. با کمک گرفتن از روش حذفی گاوس، $\tilde{A}$ را از روی A یافته و تحقیق کنید شکل سطری پلکانی $\tilde{A}$ چگونه به رتبه A وابسته است. اثبات را کامل کنید. □

مثال ۸.۵. **(یک نمونهٔ کاربردی) اقتصادی با m نماینده که به تبادل n نوع کالا مشغول هستند را در نظر بگیرید. فرض کنید a_{ij} مقداری از کالای i باشد که به‌وسیله نمایندهٔ jام دریافت (یا فروخته) شده است. اگر علامت a_{ij} مثبت باشد این‌طور تصور می‌کنیم که نماینده jام، کالای iام را فروخته و اگر منفی باشد فرض می گیریم که مقدار $|a_{ij}|$ را خریده است و لذا $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ برداری خواهد شد که مبادلات مأمور jام از هر کالای $i = 1, \ldots, n$ را نشان می‌دهد.**

به‌طور مشابه، مؤلفه‌های بردار $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im})$ نحوه تبادلات کالای iام را به‌وسیله هر نماینده نمایش می‌دهد. فرض کنید $p_1, \ldots, p_m$ قیمت‌های واحد متناظر کالاهای $1, \ldots, m$ باشند. اگر نمایندهٔ jام اقدام به فروش k کالای اول و خرید $k+1, \ldots, m$ کالاهای بعدی کند، در این صورت عبارت:

$$R_j = p_1 a_{ij} + p_2 a_{2j} + \cdots + p_4 a_{4j} - p_{k+1} a_{k+1\, j} - \cdots - p_m a_{mj}$$

حقیقتاً مقدار درآمد این فرد را حین فعالیت اقتصادی نشان می‌دهد. با قرار دادن $R_j = 0$، درمی یابیم که چگونه می‌توان یک مجموعه از معادلات خطی داشت به‌طوری‌که هر معادله توصیف کننده این مسئله باشد[۱۵].

مثال ۹.۵. **چهارتایی $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ جوابی بدیهی برای دستگاه زیر است:**

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

۱۴. $\mathrm{rank}(A) < n$.
۱۵. یعنی قیمت کالاها را طوری به دست آوریم که درآمد خالص هر نماینده صفر شود.

از طرفی، رتبهٔ دستگاه از تعداد متغیرها عددی کوچکتر بوده و بنابه نکات بیان شده، طبیعتاً بدنبال جواب‌های دیگری هستیم. ماتریس ضرایب را تشکیل داده و عملیات سطی مقدماتی را روی آن به‌کار می‌بریم. دقت دارید چون ماتریس ثابتها ماتریس صفر است، لذا بکاربردن روش گوس-جردن رو ماتریس افزوده عیناً مانند کار روی ماتریس ضرایب است:

$$\begin{pmatrix} ۴ & ۱ & -۳ & -۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ & -۵ \\ ۱ & -۲ & -۲ & ۳ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ۰ & ۹ & ۵ & -۱۳ \\ ۰ & ۷ & ۵ & -۱۱ \\ ۱ & -۲ & -۲ & ۳ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۷ & ۵ & -۱ \\ ۱ & -۲ & -۲ & ۳ \end{pmatrix}$$

از ماتریس آخر دستگاه تقلیل‌یافته زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} +۲x_۲ - ۲x_۴ = ۰ \\ -۷x_۲ + ۵x_۳ - ۱۱x_۴ = ۰ \\ x_۱ - ۲x_۲ - ۲x_۳ + ۳x_۴ = ۰ \end{cases}$$

که اگر $x_۴$ را آزاد فرض کرده مثلاً به آن مقدار α را نسبت دهیم، آن‌گاه $x_۲ = x_۴ = \alpha$، $x_۳ = \frac{۴}{۵}\alpha$ و $x_۱ = \frac{۳}{۵}\alpha$ بدست می‌آیند. نهایتاً جواب به‌شکل ماتریسی زیر قابل ارائه است:

$$X = \begin{pmatrix} ۳\alpha/۵ \\ \alpha \\ ۴\alpha/۵ \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳/۵ \\ ۱ \\ ۴/۵ \\ ۱ \end{pmatrix} \alpha.$$

توجه کنید وقتی $\alpha = ۰$ باشد، آن‌گاه جواب، همان جواب بدیهی خواهد شد.

۴.۵ مسائل

۱. جواب هر یک از دستگاه معادلات خطی زیر را بدست آورید.

$$(a) \begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ + x_۴ = ۴ \\ ۴x_۱ + ۳x_۲ - x_۳ + ۲x_۴ = ۶ \\ ۸x_۱ + ۵x_۲ - ۳x_۳ + ۴x_۴ = ۱۲ \\ ۳x_۱ + ۳x_۲ - ۲x_۳ + ۲x_۴ = ۶ \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} ۲x_۱ + ۷x_۲ + ۳x_۳ + x_۴ = ۶ \\ ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۲x_۳ + ۲x_۴ = ۴ \\ ۹x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + ۷x_۴ = ۲ \end{cases}$$

۲. جواب دستگاه معادلات خطی زیر را بر حسب λ توصیف کنید.

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = ۱ \\ x + \lambda y + z = ۱ \\ x + y + \lambda z = ۱ \end{cases}$$

• دستگاههای معادلات خطی زیر را بکمک یک روش بیان شده دلخواه حل کنید.

.۳

$$\begin{cases} ۳x_۱ - ۲x_۲ - ۵x_۳ + x_۴ = ۳ \\ ۲x_۱ - ۳x_۲ + x_۳ + ۵x_۴ = -۳ \\ x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ - ۴x_۴ = -۳ \\ x_۱ - x_۲ - ۴x_۳ + ۹x_۴ = ۲۲ \end{cases}$$

.۴

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ + ۲x_۴ = ۴ \\ ۴x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۵ \\ ۵x_۱ + ۱۱x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ = ۲ \\ ۲x_۱ + ۵x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱ \\ x_۱ - ۷x_۲ - x_۳ + ۲x_۴ = ۷ \end{cases}$$

۵. چندجملهای $f(x) = ax^۲ + bx + c$ را چنان پیدا کنید که $f(۱) = -۱$، $f(-۱) = ۹$ و $f(۲) = -۳$.

۶. چندجملهای $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ را چنان پیدا کنید که $f(۱) = -۰$، $f(۱) = ۴$، $f(۲) = ۳$ و $f(۳) = ۱۶$.

۶

فضاهای خطی

در این فصل به تعمیم مفاهیم بیان شده در فصل‌های گذشته با نگاهی دیگر می پردازیم.

مجموعه ای مانند $\mathscr{L}$ از اعضای $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ ، $\mathbf{z}$، ... را در نظر بگیرید. این مجموعه را یک **فضای خطی** می‌نامند هرگاه واجد دو شرط مهم باشد:

(۱) برای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از $\mathscr{L}$، عضو $\mathbf{z} \in \mathscr{L}$ وجود داشته باشد که $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$.

(۲) به ازای هر عدد حقیقی λ و هر $\mathbf{x} \in \mathscr{L}$، $\lambda\mathbf{x}$ عضوی از $\mathscr{L}$ شود.

اعضای فضای خطی را **بردار** می‌نامند[۱] و لذا گاهی به فضای خطی، فضای برداری هم می گویند. عملگرهای برداری $+$ (جمع برداری) و $\bullet$ (ضرب نقطه‌ای) روی $\mathscr{L}$ و برای اعضای آن، در اصول موضوع زیر صدق می‌کنند. اعداد α و β حقیقی و دلخواهند.

I (i) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x},$ (جابجایی)

I (ii) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}),$ (شرکت‌پذیری)

I (iii) $\exists\, \mathbf{0} \in \mathscr{L},\ \forall \mathbf{x} \in \mathscr{L}:\ \mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x},$ (وجود عضو خنثی[۲] در جمع)

I (iv) $\forall \mathbf{x} \in \mathscr{L},\ \exists\,(-\mathbf{x}) \in \mathscr{L}:\ \mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0},$ (وجود عضو معکوس جمعی)

II (i) $۱(\mathbf{x})=\mathbf{x},$ II (ii) $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x},$

III (i) $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x},$ III (ii) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}.$

توجه کنید $+$ و $\bullet$ دو عمل ریاضی هستند که کارکرد آنها را در بالا میبینید. بعبارت دیگر آنها را با جمع و ضرب معمولی بین اعدادحقیقی که می‌شناسید، اشتباه نگیرید!

مثال ۶.۱. **مجموعه $\mathbb{R}^n$ متشکل از همه بردارهای با مولفه‌های حقیقی را در نظر گرفته و نشان**

۱. توجه کنید کلمهٔ بردار می‌تواند به هر مفهوم دیگر چون ماتریس، تابع و یک بردار حقیقی نیز اطلاق شود.

دهید این مجموعه تحت جمع و ضرب معمولی بین بردارها (فصل ۲)، یک فضای خطی است (نشان دهید همه ۸ اصل موضوع بالا برقرارند).

مثال ۶.۲. مجموعه M_n متشکل از همه ماتریس‌های مربعی از مرتبه n را در نظر بگیرید. اعمال جمع ماتریس، ضرب یک ماتریس در یک اسکالر و ماتریس صفر (پوچ) به فرم عادی تعریف می‌شود. مجموعه M_n یک فضای خطی است.

مثال ۶.۳. مجموعه $\mathscr{L} = C[a,b]$ متشکل از همه توابع حقیقی مقدار پیوسته روی $[a,b]$ است. جمع بین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به‌صورت معمول $f(x)+g(x)$ و ضرب اسکالری $\lambda f(x)$ نیز به فرم مشابه تعریف می‌شود. این مجموعه $\mathscr{L}$ یک فضای خطی است.

مثال ۶.۴. مجموعه P_n را مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها بر حسب x و از مرتبه حداکثر n می‌گیریم. این مجموعه یک فضای خطی با دو عمل جمع معمولی و ضرب اسکالری است.

تذکر ۶.۱. توجه کنید اگر در مثال ۶.۴ شرط حداکثر از مرتبه n به چند جمله‌ای‌هایی دقیقاً از مرتبه n عوض شود آن‌گاه مجموعه متناظر یک فضای خطی باقی نمی‌ماند. مثال نقض آن چنین است:

$$\underbrace{(t^n+t^{n-1})}_{\text{دقیقاً از مرتبه } n}+\overbrace{(-t^n+t^{n-1})}^{\text{دقیقاً از مرتبه } n} = \underbrace{2t^{n-1}}_{\text{دقیقاً از مرتبه } (n-1)}$$

که نشان می‌دهد جمع دو عضو در این مجموعه همیشه خوش تعریف نیست!

۶.۱ استقلال خطی بردارها

تعریف ۶.۱. فرض کنید $\mathscr{L}$ یک فضای خطی است. بردارهای $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ را وابسته خطی می‌نامند هرگاه اعداد α_1 و α_2 و ... و α_k (که همگی باهم صفر نیستند) یافت شود که

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$$

بردارهایی که وابسته خطی نیستند را مستقل خطی می‌گویند. یک ترکیب خطی از بردارهای $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ برداری است به‌شکل

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k$$

که در آن $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ و ... و α_k اعداد حقیقی دلخواهی هستند.[۳]
با توجه به این تعریف، یک دسته بردار مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر هیچ ترکیب خطی از آن‌ها با حداقل یک ضریب ناصفر، بردار پوچ $\boldsymbol{0}$ نشود.

تعریف ۲.۶ (بُعد یک فضای خطی). **فضای خطی $\mathscr{L}$ را $n-$ بُعدی می گویند هرگاه بیشینه تعداد بردارهای مستقل خطی در آن همان عدد n باشد. در این حالت می‌نویسیم** $\dim(\mathscr{L}) = n$.

مثال ۵.۶. دستگاهی از بردارهای

$$\boldsymbol{e}_۱ = (۱, ۰, \ldots, ۰, ۰),\ \boldsymbol{e}_۲ = (۰, ۱, \ldots, ۰, ۰),\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n = (۰, ۰, \ldots, ۰, ۱)$$

در $\mathbb{R}^n$ استقلال خطی دارند. در واقع اگر ترکیب خطی دلخواه $\alpha_۱\boldsymbol{e}_۱ + \alpha_۲\boldsymbol{e}_۲ + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$ از آنها که در واقع همان $(\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n)$ است غیر از بردار صفر باشد، آن‌گاه حداقل یکی از α_iها ناصفر خواهد بود و لذا $\dim(\mathbb{R}^n) \geqslant n$. از طرف دیگر به ازای m بردار $\boldsymbol{v}_۱$ و $\boldsymbol{v}_۲$ و ... و $\boldsymbol{v}_m$ از $\mathbb{R}^n$ که $m > n$ می‌توان ماتریسی $n \times m$ چنان ساخت که ستون‌هایش $\boldsymbol{v}_i$ها باشند. از آنجایی که در این فضا، رتبه یک ماتریس از تعداد n (تعداد سطرها) بزرگتر نمی شود لذا این m بردار وابسته خطی بوده و بنابراین $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

مثال ۶.۶. ماتریس‌های

$$A^{k,l} = \left(a_{i,j}^{k,l}\right)_{n\times n}, \quad (k, l = ۱, \ldots, n)$$

را در نظر بگیرید. در چنین ماتریسهایی فقط وقتی $i = k$ و $j = l$ باشد، آن‌گاه

$$a_{i,j}^{k,l} = ۱$$

و در غیر این‌صورت $a_{i,j}^{k,l} = ۰$ خواهند شد. چنین بردارهای ماتریسی، مستقل خطی‌اند.

مثال ۷.۶. فضای خطی P_n متشکل از هر چندجمله‌ای با مرتبه کوچکتر یا مساوی n مثال ۴.۶ را در نظر بگیرید. می‌توان دید که بردارهای ۱ و t و ... و t^n مستقل خطی هستند.

۳. به این اعداد، ضرایب ترکیب خطی هم می گویند.

لم ۶.۱. فرض کنید $f_1,\dots,f_k$
مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی و هر عضو از بردارهای $g_1,\dots,g_l$ ترکیب خطی از بردارهای $f_1,\dots,f_k$ است. اگر $g_1,\dots,g_l$ بردارهایی مستقل خطی باشند آن‌گاه $l \leqslant k$. [۴]

برهان. اثبات را به استقرا روی k انجام می‌دهیم. ادعا برای $k=1$ به وضوح برقرار است. فرض کنیم حکم برای $k-1$ بردار

$$\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{k-1}$$

درست است. k بردار مستقل خطی $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_k$
در نظر گرفته و تعداد l ترکیب خطی از آن‌ها را به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$\begin{cases}\mathbf{g}_1=\alpha_{11}\mathbf{f}_1+\cdots+\alpha_{1k}\mathbf{f}_k\\ \mathbf{g}_2=\alpha_{21}\mathbf{f}_1+\cdots+\alpha_{2k}\mathbf{f}_k\\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\ \mathbf{g}_l=\alpha_{l1}\mathbf{f}_1+\cdots+\alpha_{lk}\mathbf{f}_k\end{cases}$$

فرض کنیم $\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_l$ مستقل خطی‌اند. برای اینکه اثبات کامل شود باید ثابت کنیم $l\leqslant k$. دو حالت پیش می‌آید. **(۱)** اگر برای همه $j=1,\dots,l$ها $\alpha_{jk}=0$، آن‌گاه $l\leqslant k-1\leqslant k$، و لذا حکم بدست می‌آید. **(۲)** فرض کنیم $j\in\{1,\dots,l\}$ای هست که $\alpha_{jk}\neq 0$. تعداد $l-1$ بردار مستقل خطی (جدید) چنان می‌سازیم که هر کدام ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_k$
باشند. بدون اینکه از کلیت مسئله کم شود α_{lk} را غیرصفر گرفته و $\mathbf{f}_k$ را بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{f}_k=\frac{1}{\alpha_{jk}}\mathbf{g}_l-\frac{\alpha_{l1}}{\alpha_{lk}}\mathbf{f}_1-\cdots-\frac{\alpha_{l,k-1}}{\alpha_{lk}}\mathbf{f}_{k-1}$$

اکنون $\mathbf{f}_k$ را در دسته معادلات قبلی جانشین کرده و یک مرتب سازی، دسته معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\mathbf{g}_1-(\alpha_{1k}/\alpha_{lk})\mathbf{g}_l=\beta_{11}\mathbf{f}_1+\cdots+\beta_{1,k-1}\mathbf{f}_{k-1}$$
$$textbfg_2-(\alpha_{2k}/\alpha_{lk})\mathbf{g}_l=\beta_{21}\mathbf{f}_1+\cdots+\beta_{2,k-1}\mathbf{f}_{k-1}$$
$$\vdots \qquad = \qquad \vdots$$

۴. به‌طور معادل، نمی‌توان بیشتر از تعداد k بردار مستقل خطی که خودشان ترکیب خطی k بردار مستقل خطی $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_k$ هستند، داشت.

$$textbfg_{l-1}-(\alpha_{i-1,k}/\alpha_{lk})\mathbf{g}_l=\beta_{i-1,1}\mathbf{f}_1+\cdots+\beta_{i-1,k-1}\mathbf{f}_{k-1}$$

که در آن

$$\beta_{i,j}=\alpha_{i,j}-(\alpha_{i,k}\alpha_{i,j}/\alpha_{l,k}),\qquad (i=1,\ldots,l-1,\ j=1,\ldots,k-1)$$

واضح است که بردارهای

$$\mathbf{g}'_i=\mathbf{g}_i-\frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{lk}}\mathbf{g}_l,\qquad (i=1,\ldots,l-1)$$

ترکیب خطی از $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_{k-1}$

هستند. اگر ثابت شود $\mathbf{g}'_1,\ldots,\mathbf{g}'_{i-1}$ مستقل خطی هستند، آن‌گاه با در نظر گرفتن فرض استقراء، $l-1\leqslant k-1$ و یا اینکه حکم اثبات است.

برای اثبات استقلال خطی، بخلف فرض کنیم این بردارها وابسته خطی‌اند. از این‌رو اعداد ثابتی مانند $\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1}$ چنان وجود دارد که $\lambda_1\mathbf{g}'_1+\lambda_2\mathbf{g}'_2+\lambda_{i-1}\mathbf{g}'_{i-1}=\mathbf{0}$. اگر چنانکه قبلاً بود، $\alpha_{lk}\neq 0$ آن‌گاه

$$\lambda_1\left(\mathbf{g}_1-\tfrac{\alpha_{1k}}{\alpha_{lk}}\mathbf{g}_l\right)+\cdots+\lambda_{l-1}\left(\mathbf{g}_{l-1}-\tfrac{\alpha_{l-1}}{\alpha_{lk}}\mathbf{g}_l\right)=\mathbf{0}$$

و با مرتب کردن آن به تساوی زیر می‌رسیم:

$$\lambda_1\mathbf{g}_1+\cdots+\lambda_{l-1}\mathbf{g}_{l-1}-\left(\lambda_1\tfrac{\alpha_{1k}}{\alpha_{lk}}+\cdots+\lambda_{l-1}\tfrac{\alpha_{l-1k}}{\alpha_{lk}}\right)\mathbf{g}_l=\mathbf{0}$$

چون بردارهای $\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_{l-1}$ بنا به فرض استقراء مستقل اند لذا همه ضرایب λ_i در تساوی فوق صفر بوده و بنابراین فرض خلف باطل و $\mathbf{g}'_1,\ldots,\mathbf{g}'_{l-1}$ بردارهایی مستقل خطی‌اند. $\square$

تعریف ۳.۶. مجموعه‌ای از n بردار مستقل خطی $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ در یک فضای خطی n بُعدی $\mathscr{L}$ را یک پایه برای $\mathscr{L}$ می‌نامند.

تعریف ۴.۶. بردارهای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ را در صورتی که موازی با یک خط باشند، هم خط (هم راستا) و در غیر این‌صورت غیر هم خط شناخته می‌شوند.

مثال ۸.۶. در فضای $\mathbb{R}^2$، هر دو بردار غیر هم راستا، مستقل خطی‌اند.

مثال ۹.۶. **در فضای $\mathbb{R}^{۲}$ هر دو بردار غیر هم راستا، یک پایه برای $\mathbb{R}^{۲}$ می‌سازند.**

مثال ۱۰.۶. **در مثال ۵.۶، n بردار آمده، یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ می‌سازند. این پایه خاص را بنام پایهٔ استاندارد (کانونیک) $\mathbb{R}^n$ می‌شناسند.**

لم ۲.۶. **هر مجموعه‌ی شامل $k < n$ بردار مستقل خطی $\mathbf{x}_۱, \cdots, \mathbf{x}_k$ را می‌توان به پایه‌ای برای فضای خطی n بُعدی $\mathscr{L}$ توسعه داد.**

برهان. فرض کنیم بردارهای $\mathbf{e}_۱, \ldots, \mathbf{e}_n$ را یک پایه برای فضای خطی $\mathscr{L}$ هستند. اگر هر عضو از این دسته بردار، ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{x}_۱, \ldots, \mathbf{x}_k$ باشد، آن‌گاه بنابه حکم لم ۱.۶، $n \leqslant k$ بوده و با $k < n$ در تناقض است. از این‌رو برداری چون $\mathbf{e}_p$ در بین بردارهای $\mathbf{e}_۱, \ldots, \mathbf{e}_n$ هست که ترکیبی خطی از $\mathbf{x}_۱, \ldots, \mathbf{x}_k$ نیست. این بردار را به $\mathbf{x}_۱, \ldots, \mathbf{x}_k$ اضافه و مجدداً مجموعه $(k+۱)$ -تایی $\mathbf{e}_p, \mathbf{x}_۱, \ldots, \mathbf{x}_k$ را در نظر می‌گیریم. این بردارها مستقل خطی اند (چرا؟). اگر $k+۱ = n$ که به نتیجه دلخواه رسیده‌ایم و اگر $k+۱ < n$، با تکرار استدلال قبلی یک مجموعه عضوی از بردارها شامل $\mathbf{x}_۱, \ldots, \mathbf{x}_k$ ساخته می‌شود. □

قضیه ۳.۶. **به ازای پایهٔ مفروض برای فضای خطی n بُعدی $\mathscr{L}$، هر بردار فضا را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی منحصر به فرد بر حسب اعضای پایه نوشت.**

برهان. فرض کنیم $\mathbf{e}_۱, \ldots, \mathbf{e}_n$ پایه‌ای برای $\mathscr{L}$ است. بردار $x \in \mathscr{L}$ را انتخاب کرده، به این مجموعه افزوده و چون فضای $\mathscr{L}$ n بُعدی است پس لزوماً این $n+۱$ بردار وابسته خطی اند. یعنی به ازای ضرایب مناسب: $\alpha_۱\mathbf{e}_۱ + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n + \beta\mathbf{x} = \mathbf{0}$. به وضوح $\beta \neq ۰$ (چرا؟) و بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathbf{x} = \left(\frac{-\alpha_۱}{\beta}\right)\mathbf{e}_۱ + \cdots + \left(\frac{-\alpha_n}{\beta}\right)\mathbf{e}_n$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{x}$ ترکیبی خطی از اعضای پایه است. برای اتمام اثبات، نشان می‌دهیم ضرایب بالا، منحصر به‌فرد هستند. فرض کنیم دو ترکیب خطی

$$\mathbf{x} = \xi_۱\mathbf{e}_۱ + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n, \qquad \mathbf{x} = \eta_۱\mathbf{e}_۱ + \cdots + \eta_n\mathbf{e}_n$$

برای نمایش بردار $\mathbf{x}$ و به ازای ضرایب متفاوت وجود دارد. در این صورت با تفاضل دو تساوی داریم: $(\xi_۱ - \eta_۱)\mathbf{e}_۱ + \cdots + (\xi_n - \eta_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$

و چون اعضای پایه مستقل خطی‌اند لزوماً برای هر i، $\xi_i = \eta_i$ و لذا ترکیب خطی نمایش $\mathbf{x}$ منحصر به‌فرد است. $\square$

تعریف ۶.۵. فرض کنید $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ پایه‌ای برای A و $\mathbf{x}$ به‌صورت ترکیب خطی

$$\underbrace{\xi_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \xi_n \mathbf{e}_n}_{\mathbf{x}}$$

نوشته شده است. ضرایب $\xi_{i_{1\leqslant i\leqslant n}}$ را مختصات $\mathbf{x}$ در پایهٔ E می‌نامند.

قضیه ۶.۳ می‌گوید که به ازای پایه‌ای مفروض، مختصات هر بردار $\mathbf{x}$ نسبت به آن به‌طور منحصر به‌فردی وجود دارد.

۶.۱.۱ جمع برداری و ضرب اسکالری دو بردار

فرض کنید $\mathbf{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ و $\mathbf{y} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ مختصات دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را در پایه $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ نشان دهند.[5] در این‌صورت

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1 + \eta_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)\mathbf{e}_n$$

که نشان می‌دهد، $\{\xi_i + \eta_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ ها مختصات $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ در پایه بالاست. بعلاوه،

$$\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\{\lambda \xi_i\}}$$

ها مختصات $\lambda \mathbf{x}$ در این پایه را نشان می‌دهد.

مثال ۶.۱۱. الف) در فضای $\mathbb{R}^2$، تعریف فوق از مختصات یک بردار، با تعریف متعارف از مختصات منطبق است.

ب) فضای $\mathscr{L}$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ای‌های با مرتبه کمتر یا مساوی $n-1$ را در نظر می‌گیریم. قبلاً نشان داده شد، اعضای $\mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 = t, \ldots, \mathbf{e}_n = t^{n-1}$، بدیهی‌ترین پایه‌ای است که $\mathscr{L}$ دارد و در این پایه، هر چندجمله‌ای به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$P(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

۵. یعنی $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{e}_i$ و $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mathbf{e}_i$.

آیا می‌توانید مختصات بردار $P(t)$ را در این پایه بدست آورید؟ حال اگر پایه را به

$$\mathbf{e}'_1 = 1, \mathbf{e}'_2 = t-a, \ldots, \mathbf{e}'_n = (t-a)^{n-1}$$

عوض کنیم، چندجمله‌ای $P(t)$ به‌صورت زیر قابل نمایش است:

$$P(t) = P(a) + P'(a)(t-a) + \cdots + \frac{P^{n-1}(a)}{(n-1)!}(t-a)^{n-1}$$

است. این نمایش را بنام بسط تیلور $P(t)$ هم می شناسند. سعی کنید تا مختصات $P(t)$ را در این پایه بیابید.

۲.۶ یکریختی فضاهای خطی

تعریف ۶.۶. دو فضای خطی $\mathscr{L}$ و $\mathscr{L}'$ یکریخت هستند هرگاه تناظری یک به یک و پوشا چنان پیدا شود که دو عضو $\boldsymbol{x} \in \mathscr{L}$ و $\boldsymbol{x}' \in \mathscr{L}$ را بهم متناظر کرده (یعنی $\boldsymbol{x}' \leftrightarrow \boldsymbol{x}$) و بعلاوه حافظ جمع و ضرب اسکالری نیز باشد. یعنی:

(۱) اگر $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ و $\boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{y}'$ آن‌گاه $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'$.

(۲) اگر $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ آن‌گاه به ازای هر اسکالر λ، $\lambda\boldsymbol{x} \leftrightarrow \lambda\boldsymbol{x}'$.

لم ۴.۶. اگر $\mathscr{L}$ و $\mathscr{L}'$ دو فضای خطی یکریخت باشند آن‌گاه هر دسته از بردارهای مستقل خطی در $\mathscr{L}$، در فضای $\mathscr{L}'$ هم مستقل خطی‌اند و بالعکس.

لم ۵.۶. دو فضای خطی $\mathscr{L}$ و $\mathscr{L}'$ با بُعدهای متفاوت نمی‌توانند یکریخت باشند.

برهان. از لم ۴.۶ کمک گرفته و اثبات را انجام دهید. □

قضیه ۶.۶. همهٔ فضاهای خطی از مرتبه‌ی n باهم یکریخت هستند.

برهان. دو فضای خطی از بُعد n، $\mathscr{L}$ و $\mathscr{L}'$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ پایه‌ای برای $\mathscr{L}$ و $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ پایه‌ای برای $\mathscr{L}'$ است. به ازای هر بردار

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n \qquad (۱.۶)$$

برداری به‌صورت

$$\mathbf{x}' = \xi_1 \mathbf{e}'_1 + \cdots + \xi'_n \mathbf{e}_n \qquad (۲.۶)$$

متناظر به آن بسازید.[۶]

چون هر $x \in \mathscr{L}$ با توجه به پایه‌ی $\mathscr{L}$ به‌صورت منحصر به‌فرد (۱.۶) نمایش داده می‌شود، از این‌رو بردار $\mathbf{x}'$ با توجه به $\mathbf{x}$ به‌طور منحصر بفردی ساخته و تعریف می‌شود، لذا این نحوه ساختن یک نگاشت یک به یک و پوشا بین $\mathscr{L}$ و $\mathscr{L}'$ تعریف می‌کند. حال اگر $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ و $\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{y}'$ آن‌گاه با ترتیب فوق $\mathbf{x}+\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}'+\mathbf{y}'$ و به ازای هر اسکالر λ، $\lambda\mathbf{x} \leftrightarrow \lambda\mathbf{x}'$ و بنابراین $\mathscr{L}$ و $\mathscr{L}'$ دو فضای خطی یکریختند. $\square$

۳.۶ زیرفضاها

زیرفضای $\mathscr{L}'$ از یک فضای خطی $\mathscr{L}$ زیرمجموعه‌ای از اعضای $\mathscr{L}$ است چنانکه خودش با اعمال جمع و ضرب تعریف شده روی $\mathscr{L}$ یک فضای خطی شود. به عبارت دیگر $\mathscr{L}' \subseteq \mathscr{L}$ زیر فضایی از $\mathscr{L}'$ است هرگاه با اعمال $+$ و ضرب (اسکالری) $\bullet$ روی $\mathscr{L}$، اصول موضوع $\mathrm{I}(i)$ تا $\mathrm{III}(ii)$ همگی برای بردارهای $\mathscr{L}'$ مجدداً برقرار باشند.

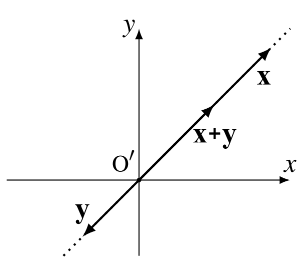
۱.۳.۶ مثال‌هایی از زیرفضاها

(۱) فضای پوچ و خود $\mathscr{L}$.

(۲) مجموعه همه بردارهایی در صفحه $\mathbb{R}^2$ که بر یک خط گذرنده از مبدأ واقع‌اند (منطبقند) یک زیرفضای خطی است (شکل ۱.۶).

(۳) فرض کنید $\mathscr{L}$ مجموعه‌ای از nتایی‌های $\mathbf{x} = (\xi_1, \ldots, x_n)$ از اعداد حقیقی است. زیرمجموعه $\mathscr{L}'$ از $\mathscr{L}$ را شامل همه $\mathbf{x}$ هایی از $\mathscr{L}$ می‌گیریم که ξ_1 در آنها صفر است. در این‌صورت $\mathscr{L}'$ زیرفضایی از $\mathscr{L}$ است.

(۴) فرض کنید $\mathscr{L}$ فضای همه توابع پیوسته روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشد. ثابت کنید مجموعه همه چندجمله‌ای‌هایی با مرتبه



شکل ۱.۶: یک زیر فضای ۱- بعدی در $\mathbb{R}^2$

[۶] توجه کنید ضرایب در هر دو ترکیب خطی یکی‌اند.

کمتر یا مساوی $n-۱$ زیرفضایی از $\mathscr{L}$ است.
از آنجاییکه هر زیرفضا از یک فضای خطی خود فضایی خطی است لذا تمام مفاهیم‌ای چون استقلال خطی، بُعد و غیره عیناً برای آن‌ها نیز قابل استفاده است. به عنوان یک نکته، بُعد زیرفضای $\mathscr{L}'$ از فضای خطی $\mathscr{L}$ نمی‌تواند از بُعد $\mathscr{L}$ بزرگتر باشد.

۲.۳.۶ روشی برای ساختن زیرفضاها

بردارهای $\mathbf{g}_۱, \mathbf{g}_۲, \dots, \mathbf{g}_n$ را در فضای خطی $\mathscr{L}$ انتخاب کنید. مجموعه S شامل همه ترکیبات خطی

$$\alpha_۱\mathbf{g}_۱ + \alpha_۲\mathbf{g}_۲ + \cdots + \alpha_n\mathbf{g}_n$$

که در آن $\alpha_i \in \mathbb{R}_{(۱\leqslant i\leqslant n)}$ اعداد حقیقی دلخواهی هستند، یک زیر فضاست. زیرفضای S را **زیرفضای تولید شده** توسط بردارهای $\mathbf{g}_۱, \mathbf{g}_۲, \dots, \mathbf{g}_n$ نامیده و درواقع کوچکترین زیرفضایی از $\mathscr{L}$ شامل چنین بردارهایی است. نماد زیر نمایش دیگری برای این مجموعه است:

$$S = \langle \mathbf{g}_۱, \dots, \mathbf{g}_n \rangle$$

تمرین ۱.۶. ادعای بالا را ثابت کنید.

قضیه ۷.۶. زیرفضای $\mathscr{L}'$ تولید شده به‌وسیله بردارهای مستقل خطی $\mathbf{e}_۱, \dots, \mathbf{e}_k$ از بُعد k بوده و بعلاوه $\{\mathbf{e}_۱, \dots, \mathbf{e}_k\}$ یک پایه برای $\mathscr{L}'$ است.

برهان. در حقیقت، در زیرفضای $\mathscr{L}'$ یک مجموعه مستقل خطی که خود $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_۱, \dots, \mathbf{e}_k\}$ است وجود دارد. اگر $\mathbf{x}_۱, \dots, \mathbf{x}_l$ بردارهایی مستقل خطی دیگری در $\mathscr{L}'$ فرض شوند، آن‌گاه هر یک ترکیب خطی از اعضای $\mathscr{B}$ بوده و با توجه به لم ۱.۶: $l \leqslant k$ و لذا $\dim(\mathscr{L}') = k$. □

۳.۳.۶ زیرفضاهای یک بُعدی

برای زیرفضایی یک بُعدی مانند $\mathscr{L}$ به وضوح پایه‌ای شامل فقط یک بردار (مثلاً $\mathbf{e}_۱$) وجود دارد[7] و از این‌رو با توجه به تعریف پایه، $\mathscr{L}$ شامل بردارهایی به‌شکل $\alpha\mathbf{e}_{۱(\alpha\in\mathbb{R})}$ خواهد شد. اگر $\mathbf{x}_۰$

۷. شکل ۱.۶ را برای نمونه دوباره ببینید.

برداری مفروض و دلخواه در $\mathscr{L}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ای از بردارها به فرم

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{e}_1$$

که در آن α اسکالری حقیقی و دلخواه است (اصطلاحاً) یک **خط** در $\mathscr{L}$ می‌نامند.

۴.۳.۶ اَبَر صفحه

مشابه تعریفی که برای یک خط در فضای $\mathscr{L}$ انجام شد، مجموعه ای از بردارها به‌شکل

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2$$

که در آن $\mathbf{x}_0$ و $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بردارهایی مفروض در $\mathscr{L}$ و α و β اسکالرهایی حقیقی و دلخواهند را درنظر می‌گیریم. این مجموعه (با شباهتی که با $\mathbb{R}^3$ دارد) یک صفحه در $\mathscr{L}$ نامیده می‌شود. با توسیع این مفهوم مجموعه بردارهایی از نوع

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_l \mathbf{e}_k$$

یک **اَبَر صفحه** در $\mathscr{L}$ نامیده می‌شود.

۴.۶ تغییر مختصات

فرض کنید مختصات بردار $\mathbf{x}$ را نسبت به یک پایه مفروض می‌شناسیم. چون امکان تغییر پایه برای فضا وجود دارد لذا بدیهی است که در صورت تغییر پایه، مختصات جدیدی را برای $\mathbf{x}$ بدست آوریم.

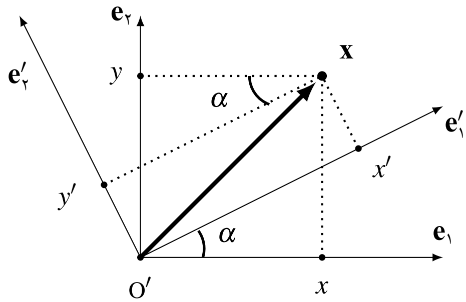
برای نمونه اگر (x,y) مختصات بردار $\mathbf{x}$ نسبت به پایه $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ از $\mathbb{R}^2$ را نشان دهد، با دوران دستگاه مختصات به اندازه زاویه α، پایه دیگر $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ حاصل شده و مختصات $\mathbf{x}$ به (x', y') تبدیل می‌گردد (شکل ۲.۶). رابطه (۱۲.۲) مختصات جدید را با معادلهٔ زیر نتیجه می‌دهد:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{-\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

سوال این‌است که چگونه می‌توان در حالت کلی مختصات تغییر یافته یک بردار را وقتی پایه عوض می‌شود یافت؟
فضای $n-$ بُعدی $\mathscr{L}$ را با دو پایه

$$\{\mathbf{e}_۱, \cdots, \mathbf{e}_n\}, \{\mathbf{e}'_۱, \cdots, \mathbf{e}'_n\}$$

در نظر بگیرید. هر عضو $\mathbf{e}'_{i(۱\leqslant i\leqslant n)}$ را می‌توان در پایه دیگر به‌صورت زیر نوشت:



شکل ۲.۶: مختصات بعد و قبل از دوران

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_۱ &= \alpha_{۱۱}\mathbf{e}_۱ + \alpha_{۲۱}\mathbf{e}_۲ + \cdots + \alpha_{n۱}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_۲ &= \alpha_{۲۱}\mathbf{e}_۱ + \alpha_{۲۲}\mathbf{e}_۲ + \cdots + \alpha_{n۲}\mathbf{e}_n, \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{e}'_n &= \alpha_{۱n}\mathbf{e}_۱ + \alpha_{۲n}\mathbf{e}_۲ + \cdots + \alpha_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{۳.۶}$$

به‌عبارت دیگر، تبدیل از پایه $\{\mathbf{e}_i\}_۱^n$ به پایه $\{\mathbf{e}'_i\}_۱^n$ با ماتریس $A = \|\alpha_{ik}\|$ صورت می‌گیرد[۸] و لذا ماتریس A را ماتریس **تبدیل پایه** می‌نامند. در این ماتریس، ستون jام A شامل مختصات jامین عضو از پایه جدید در پایه قدیم است.

حال فرض کنید X با مختصات $(\xi_۱, \cdots, \xi_n)$ در پایه نخست و با $(\xi'_۱, \cdots, \xi'_n)$ در پایه دیگر شناخته می‌شود، یعنی:

$$\xi_۱\mathbf{e}_۱ + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n = \mathbf{x} = \xi'_۱\mathbf{e}'_۱ + \cdots + \xi'_n\mathbf{e}'_n$$

به دنبال نحوه بیان $\xi'_{i\,(۱\leqslant i\leqslant n)}$ برحسب ξ_iها هستیم. با توجه به (۳.۶) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \xi'_۱\,(\alpha_{۱۱}\mathbf{e}_۱ + \cdots + \alpha_{n۱}\mathbf{e}_n) + \xi'_۲\,(\alpha_{۱۲}\mathbf{e}_۱ + \cdots + \alpha_{n۲}\mathbf{e}_۲) + \\ \cdots + \xi'_n(\alpha_{۱n}\mathbf{e}_۱ + \cdots + \alpha_{nn}\mathbf{e}_n) \end{aligned}$$

چون $\{\mathbf{e}_i\}_۱^n$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارهاست پس ضرایب $\mathbf{e}_i$ها از هر دو طرف (بعداز

۸. این ماتریس نامنفرد است (چرا؟).

مرتب کردن) دقیقاً مساوی‌اند. یعنی:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \alpha_{11}\xi'_1 + \alpha_{12}\xi'_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi'_n,\\
\xi_2 &= \alpha_{21}\xi'_1 + \alpha_{22}\xi'_2 + \cdots + \alpha_{2n}\xi'_n,\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\xi_n &= \alpha_{n1}\xi'_1 + \alpha_{n2}\xi'_2 + \cdots + \alpha_{nn}\xi'_n.
\end{aligned} \tag{۴.۶}$$

با اندک دقتی، تبدیل‌ای که در (۴.۶) دیده می‌شود همان A^t (ترانهاده A) است.

اکنون قادریم هر $\xi_{i(1\leqslant i\leqslant n)}$ را با کمک (۴.۶) بر حسب ξ'_i بیان کنیم:

$$\begin{aligned}
\xi'_1 &= b_{11}\xi'_1 + b_{12}\xi'_2 + \cdots + b_{1n}\xi'_n,\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\xi'_n &= b_{n1}\xi'_1 + b_{n2}\xi'_2 + \cdots + b_{nn}\xi'_n
\end{aligned}$$

که در آن $B = \|b_{ik}\|$ همان A^t است. در واقع، همه مختصات با توجه به ماتریس $(A^t)^{-1}$ که در آن A (به ترتیبی که بیان شد) ماتریس تبدیل است، تبدیل می‌شوند.

۵.۶ نمونهٔ اقتصادی (مجموعهٔ فناوری تولید)

کارخانه ای را در نظر بگیرید که از سه دستگاه (که هر کدام در مکانهای متفاوتی قرار دارند) جهت ساخت یک محصول بنام y_1 استفاده می‌کند. دو فاکتور ظرفیت تولید و فناوری تولید در این دستگاهها متفاوت است، ضمن اینکه، دستگاه سوم تحت تأثیر تفاوت‌هایی که در ترکیب تجهیزات ورودی فناوری‌های تولید برایش وجود دارد، قرار دارد. در هر فناوری، یک ترکیب ثابت از تجهیزات استفاده شده و همگی با توجه به مقیاس عملیات تولید، پایا هستند. بعلاوه (حجم و تعداد) خروجی‌ها و ورودیها (که با y_1، y_3 و y_4 نمایش داده ایم) طوری است که انتخاب اعداد گویا برای آنها مجاز است. حال فرض کنید اطلاعات فنی (مرتبط با دستگاه‌ها) به‌صورت زیر است:

	دستگاه ۱	دستگاه ۲	دستگاه ۳
ظرفیت سطح خروجی y_1	۱۰۰	۸۰	۱۲۰
ورودی y_2	۲۶	۱۷	۳۸
ورودی y_3	۲۵	۱۹	۳۰
ورودی y_4	۲۴	۲۱	۲۵

در این جدول خروجی ها و ورودی‌ها در واحدهای مقیاس خود اندازه گرفته شده اند. همچنین، ارقام ورودی با سطوحی که دستگاه‌ها را قادر به تولید ظرفیت خروجی خود می کند، در تطابق است. بنابه فرض، دستگاه‌ها نمی‌توانند بیش از ظرفیت سطوح خروجی (که در سطر اول آمده اند)، تولید داشته باشند. با این حال، اگر لازم به تولید کمتر باشد، قادرند با صرف ورودی‌های کمتر و بدون تغییر در ترکیبشان، کار را پیش ببرند.

سئوال ۱.۶. فرض کنید تمامی دستگاه‌ها از تمامی ظرفیت خود استفاده می کنند. تمام مقادیر خروجی و ورودی‌های استفاده شده برای تولید را بیابید.

پاسخ. جواب را به‌سادگی با جمع کردن ظرفیت خروجی و سطوح ورودی دستگاه‌ها میتوان یافت. در واقع، مجموع ستون‌های جدول که اطلاعات عددی را ارائه کرده است همان جواب مسئله است: ظرفیت کلی $y_۱$ برابر با $۱۰۰ + ۸۰ + ۱۲۰ = ۳۰۰$ واحد، مقدار کلی ورودی $y_۲$ که استفاده شده $۲۶ + ۱۷ + ۳۸ = ۸۱$ واحد، مقدار کلی ورودی $y_۳$ که استفاده شده

$$۷۴ = ۳۰ + ۱۹ + ۲۵,$$

واحد و مقدار کلی ورودی $y_۴$ که استفاده شده $۲۴ + ۲۱ + ۲۵ = ۷۰$ واحد است.

سئوال ۲.۶. فرض کنید براساس کاهش تقاضا در محلی که دستگاه ۱ قرار دارد، خروجی برابر ۶۵ باشد. سطوح جدید ورودی چقدر خواهد شد؟

پاسخ. با این فرضیات، هرکدام از فناوری‌های تولید را می‌توان با صحیح نگاه داشتن ترکیب ورودی‌ها برای سطح مطلوبی از خروجی‌ها استفاده کرد. بنابراین، با ضرب ستونی که ظرفیت دستگاه ۱ را نشان می‌دهد در $۶۵/۱۰۰ = ۰.۶۵$ به سطوح جدیدی می‌رسیم: ورودی $y_۲$، $۰.۶۵ \times ۲۶ = ۱۶.۹$، ورودی $y_۳$، $۰.۶۵ \times ۲۵ = ۱۶.۳$ و ورودی $y_۴$، $۰.۶۵ \times ۲۴ = ۱۵.۶$. این نتایج با دید ریاضی به‌صورت زیر قابل استنتاج هستند.

فرض کنید

$$\mathbf{y}^j = (y_۱^j, -y_۲^j, -y_۳^j, -y_۴^j), \qquad (j = ۱, ۲, ۳)$$

که در آن $\mathbf{y}^j$، jامین فناوری تولید برای $y_۱$ است (برای سادگی، ورودی‌ها با علامت منفی مشخص شده‌اند). اگر Y نمایشگر مجموعهٔ تولید برای $y_۱$ باشد که همان مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن بردار

$\mathbf{y} = (y_۱, -y_۲, -y_۳, -y_۴)$ است، آن‌گاه

$$\mathbf{y}_۱^j \in Y, \qquad (j = ۱, ۲, ۳)$$

توجه کنید بردار $\mathbf{y}$ برداری ۴-بُعدی بوده و لذا Y زیرمجموعه $\mathbb{R}^۴$ است.

سئوال ۶.۳. نشان دهید Y زیرمجموعهٔ یک فضای خطی سه بُعدی مانند L است که $L \subset \mathbb{R}^۴$.

پاسخ. فرض در مثال (که با توجه به تکنیک‌های تولید گرفته شده است) به ما اجازه می دهد تا به جمع بستن ستون‌های جدول بالا و همچنین ضرب آن‌ها در یک مقدار اسکالر اقدام کنیم. با انجام این دو عمل ریاضی، ترکیبات جدید قابل اجرا در ورودی و خروجی (که همان تکنیک‌های تولید هستند) را می سازیم. از این‌رو مجموعهٔ Y شامل بردارهای به‌صورت زیر است:

$$\sum_{j=۱}^{۳} \alpha_j \mathbf{y}^j \subset Y, \qquad \alpha_j \subset [۰, ۱]$$

در نتیجه، Y زیرمجموعه‌ای از فضای خطی L است که با بردارهای $\mathbf{y}^۱$، $\mathbf{y}^۲$ و $\mathbf{y}^۳$ تولید می‌شود.

برای اینکه نشان دهیم L فضایی سه بعدی است، طبق قضیه ۶.۷ کافی است نشان دهیم سه بردار $\mathbf{y}^۱$، $\mathbf{y}^۲$ و $\mathbf{y}^۳$ مستقل خطی‌اند. به‌عبارت دیگر، تنها جواب معادله زیر باید فقط و فقط جواب بدیهی $x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۰$ باشد:[۹]

$$x_۱\mathbf{y}^۱ + x_۲\mathbf{y}^۲ + x_۳\mathbf{y}^۳ = \mathbf{0}$$

معادله برداری بالا معادل با معادلهٔ ماتریسی $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ است که در آن

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} ۱۰۰ & ۸۰ & ۱۲۰ \\ -۲۶ & -۱۷ & -۳۸ \\ -۲۵ & -۱۹ & -۳۰ \\ -۲۴ & -۲۱ & -۲۵ \end{pmatrix}$$

و A ماتریسی است که با بردارهای $\mathbf{y}^۱$، $\mathbf{y}^۲$ و $\mathbf{y}^۳$ از ستون‌های جدول بالا ساخته شده است.

اکنون با توجه به قضیه ۶.۵، باید ثابت شود، A ماتریسی با رتبهٔ کامل است. محاسبهٔ دترمینان یک مینور از آن:

$$\begin{vmatrix} ۱۰۰ & ۸۰ & ۱۲۰ \\ -۲۶ & -۱۷ & -۳۸ \\ -۲۵ & -۱۹ & -۳۰ \end{vmatrix} = ۶۸۰ \neq ۰$$

۹. توجه کنید اگر اینطور نشود، یک جواب نابدیهی با حداقل یک مؤلفهٔ غیرصفر برای معادله وجود داشته و بنابر این بردارها وابسته خواهند شد.

نشان می‌دهد این ماتریس با رتبهٔ کامل (یعنی عدد ۳) بوده و این لذا $\dim(L) = ۳$.

تفسیر نتیجه: در مثال بالا، هر فناوری تولید با ۴ عدد نشان داده شد. بنابه نکته قبل تولید سه بُعد دارد و لذا یکی از این ۴ عدد اضافی است. این عدد اضافی هیچ اطلاعات اضافی را به فناوری که از سه عدد دیگر استفاده می‌کند، نمی افزاید. این مطلب را می توان با تقسیم همه مقادیر یک ستون بر درآیه های اولین سطر انجام داده و حاصل را دید. مقادیر جدید، ورودی‌های موردنیاز هر واحد خروجی را به ما می‌دهد. اینها ضرایب ورودی/خروجی نامیده می‌شوند. در این مثال مجموعهٔ ضرایب ورودی/خروجی به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{pmatrix} ۰.۲۶۰ & ۰.۲۱۳ & ۰.۳۱۷ \\ ۰.۲۵۰ & ۰.۲۷۶ & ۰.۲۵۰ \\ ۰.۲۴۰ & ۰.۲۶۳ & ۰.۲۰۸ \end{pmatrix}$$

توجه کنید که این اطلاعات برای محاسبهٔ مقادیر کلی موردنیاز ورودی‌ها فقط در سطح مشخصی از خروجی‌ها مناسب است و فرضیاتی که تاکنون درنظر گرفته شد، برای مطمئن شدن از اینکه با استفاده از این ضرایب می‌توان مقادیر موردنیاز ورودی ها برای سطح مشخصی از خروجی را به‌دست آورد، کافی نیست. به‌منظور رسیدن به سطح تعمیم یافته، باید فرضیات دیگر با نام «بازده ثابت نسبت به مقیاس فناوری» معرفی شود. این فرض یعنی اینکه چنین ضرایبی از مقیاس تولید مستقل اند و بنابراین در لحظهٔ محاسبهٔ شان می‌توان با اطمینان از آنها برای ایجاد رابطه ورودی/خروجی برای هر سطح ممکنی از تولید استفاده کرد[۱۰].

۶.۶ مسائل

۱. آیا مجموعه همه توابع پیوسته روی $[a,b]$ به‌طوری‌که $|f(x)| \leqslant ۱$ یک فضای خطی است؟

۲. تفسیری هندسی از اصول موضوع $\mathrm{I}(i)$ تا $\mathrm{III}(ii)$ ارائه دهید.

۳. فضای $\mathscr{L}$ را فضای خطی همه $n-$ تایی‌های حقیقی بگیرید. مختصات $\eta_۱,\dots,\eta_n$ از بردار

$$\mathbf{x} = (\xi_۱,\dots,\xi_n)$$

۱۰. علی‌رغم استفاده وسیع در اقتصاد، فرض بازده ثابت نسبت به مقیاس در بسیاری از موارد واقعی نیست. خصوصاً در صنعت تولید، مشاهده شده است که با افزایش مقیاس تولید ممکن است سطح نیاز به ورودی‌ها کاهش یابد. این مورد «افزایش بازده نسبت به مقیاس» است. از طرفی دیگر، در برخی موارد، تولید ممکن است مربوط به «کاهش بازده نسبت به مقیاس» باشد. چنین مفهومی در بخش کشاورزی و گاهی اوقات در «شرکت‌های بزرگ» دیده می‌شود.

را نسبت به پایهٔ زیر بدست آورید.

$$\mathscr{B}=\{\underbrace{(1,0,\ldots,0,0)}_{\mathbf{e}_1},\overbrace{(0,1,0,\ldots,0,0)}^{\mathbf{e}_2},\ldots,\underbrace{(0,\ldots,0,0,1)}_{\mathbf{e}_n}\}$$

۴. مسئله قبل را با پایه زیر مجدداً انجام دهید.

$$\mathscr{B}=\{\underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{\mathbf{e}_1},\overbrace{(0,1,\ldots,1)}^{\mathbf{e}_2},\ldots,\underbrace{(0,\ldots,0,1)}_{\mathbf{e}_n}\}$$

۵. مجموعهٔ M_n را شامل همه ماتریس‌های مربعی از مرتبه n و با درآیه‌های حقیقی می‌گیریم. دو عمل جمع و ضرب را به‌طور معمول در نظر گرفته و ثابت کنید M_n یک فضای خطی است. یک پایه برای فضا و بعلاوه بُعد M_n را بدست آورید.

۶. مجموعهٔ $\mathscr{L}$ را فضای خطی همهٔ n-تایی‌های حقیقی $\mathbf{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ گرفته و ثابت کنید مجموعهٔ $\mathscr{L}'=\{\mathbf{x}\mid \alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n=0\}$ که α_iها مفروض و معین هستند، یک زیرفضا از $\mathscr{L}$ است.

۷. آیا نگاشت $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $(x_1,x_2)\xrightarrow{f}(2x_1,x_2-x_1)$ یک یکریختی است؟

۸. حکم مسئله قبل را برای نگاشت $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ و با ضابطهٔ زیر مجدداً تحقیق کنید.

$$(x_1,x_2,x_3)\xrightarrow{f}(x'_1,x'_2,x'_3)$$

که در آن

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&5&10\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

۹. ثابت کنید M_2 (مسئله ۵ را ببینید) و فضای خطی P_3 از همه چندجمله‌ای‌های از مرتبه حداکثر ۳ یکریخت بوده و یک فرمول صریح برای چنین یکریختی ارائه دهید.

۱۰. نشان دهید مجموعه S از همه ماتریس‌های متقارن از مرتبه n، یک زیرفضا از M_n است. بُعد S را بدست آورید.

۱۱. نشان دهید اگر $\mathscr{L}'$ یک زیرفضای $\mathscr{L}$ و هم بُعد با آن باشد لزوماً $\mathscr{L}=\mathscr{L}'$ خواهد بود.

۱۲. نشان دهید در $\mathscr{L}$ فضای همه $n-$ تایی‌های حقیقی $(\xi_۱,\cdots,\xi_n)$ مجموعه همه بردارهایی که در شرط $\alpha_۱\xi_۱+\alpha_n\xi_n=۰$ به ازای α_iهایی حقیقی صدق می‌کنند یک زیرفضای خطی از $\mathscr{L}$ می‌سازد (اسکالرهای $\alpha_۱,\cdots,\alpha_n$ همگی باهم صفر نیستند)

۱۳. فرض کنید $\mathscr{L}_۱$ و $\mathscr{L}_۲$ دو زیرفضا از $\mathscr{L}$ هستند که $\mathscr{L}_۱\cap\mathscr{L}_۲=\mathbf{0}$. نشان دهید:

$$\dim(\mathscr{L}_۱)+\dim(\mathscr{L}_۲)\leqslant\dim(\mathscr{L})$$

۱۴. فرض کنید $\mathscr{L}'$ زیرفضایی است که به وسیله بردارهای $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\cdots\}$ پیموده می‌شود. نشان دهید بُعد $\mathscr{L}'$ با ماکزیمم تعداد بردارهای مستقل خطی از مجموعه فوق مساوی است.

۱۵. مطلوبست مختصات بردار $\mathbf{x}=(۷,۱۴,-۱,۲)$ در پایهٔ

$$\mathscr{B}=\{\underbrace{(۱,۲,-۱,۰)}_{\mathbf{e}_۱},\overbrace{(۲,۳,۰,-۱)}^{\mathbf{e}_۲},\overbrace{(۱,۲,۱,۳)}^{\mathbf{e}_۳},\underbrace{(۱,۳,-۱,۰)}_{\mathbf{e}_۴}\}$$

قبل از هر چیز، حتماً نشان دهید $\mathscr{B}$ یک پایه است.

۱۶. فرض کنید $\{\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_۲,\mathbf{e}_۳\}$ و $\{\mathbf{e}'_۱,\mathbf{e}'_۲,\mathbf{e}'_۳\}$ پایه‌هایی برای یک فضای خطی هستند. اعضای مجموعه دوم برحسب اعضای پایه اول به‌صورت زیر توصیف شده‌اند:

$$textbfe'_۱=۵\mathbf{e}_۱-\mathbf{e}_۲-۲\mathbf{e}_۳,\quad \mathbf{e}'_۲=۲\mathbf{e}_۱+۳\mathbf{e}_۲,\quad \mathbf{e}'_۳=-۲\mathbf{e}_۱+\mathbf{e}_۲+۳\mathbf{e}_۳$$

مطلوبست مختصات بردار $\mathbf{x}=-۷\mathbf{e}_۱+۱۱\mathbf{e}_۲+۳\mathbf{e}_۳$ در پایهٔ دوم.

۱۷. اولاً ثابت کنید مجموعه بردارهای زیر جداگانه پایه می‌سازند:

$$\mathscr{B}=\{\underbrace{(۱,۱,۱,۱)}_{\mathbf{e}_۱},\overbrace{(۱,۲,۱,۱)}^{\mathbf{e}_۲},\overbrace{(۱,۱,۲,۱)}^{\mathbf{e}_۳},\underbrace{(۱,۳,۲,۳)}_{\mathbf{e}_۴}\}$$

$$\mathscr{B}'=\{\underbrace{(۱,۰,۳,۳)}_{\mathbf{e}_۱},\overbrace{(-۲,-۳,-۵,-۴)}^{\mathbf{e}_۲},\overbrace{(۲,۲,۵,۴)}^{\mathbf{e}_۳},\underbrace{(-۲,-۳,-۴,-۴)}_{\mathbf{e}_۴}\}$$

ثانیاً مختصات برداری مانند $\mathbf{y}$ در پایه $\mathscr{B}'$ را چنان بیابید اگر بدانیم مختصات آن در پایه $\mathscr{B}$ به‌صورت $\mathbf{y}_{\mathscr{B}}=(۱,۲,۳,۴)$ داده شده است.

۱۸. آیا مجموعه‌های زیر یک زیرفضای خطی تعریف می‌کنند؟
الف) همه بردارهای $n-$ بُعدی با مولفه‌های صحیح.
ب) همه بردارهای روی صفحه که یا روی محور x و یا روی محور منطبق می‌شوند.
ج) همه بردارهای $n-$ بُعدی که مولفه اول همه عدد مفروض c است.

۱۹. همه انواع هندسی از زیرفضاهای خطی یک فضای ۳- بعدی را پیدا کنید.

۲۰. مجموعه $\mathscr{L}$ را شامل همه بردارهایی فرض کنید که مولفه اول و آخر آن‌ها مساوی‌اند. ثابت کنید $\mathscr{L}'$ یک زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^n$ است. یک پایه از $\mathscr{L}$ و همچنین بُعد آن را بدست آورید. توصیفی از $\mathscr{L}'$ در حالات $n=۲$ و $n=۳$ ارائه دهید.

۲۱. یک پایه و بعد فضای خطی که به وسیله بردارهای زیر تولید می‌شود بدست آورید.

$$\mathbf{a}_۱ = (۱, ۱, ۱, ۱, ۰)$$

$$\mathbf{a}_۲ = (۱, ۱, -۱, -۱, -۱)$$

$$\mathbf{a}_۳ = (۲, ۲, ۰, ۰, -۱)$$

$$\mathbf{a}_۴ = (۱, ۱, ۵, ۵, ۲)$$

$$\mathbf{a}_۵ = (۱, -۱, -۱, ۰, ۰)$$

۷

فضاهای اقلیدسی

در این فصل به بررسی این موضوع می‌پردازیم که چگونه مفاهیمی متریک (اندازه‌ای) همچون طول یک بردار، زاویه بین دو بردار و غیره به فضاهای خطی مربوط می‌شوند. باید توجه کنید که چنین مفاهیمی را در یک فضای خطی به‌طور مستقیم نمی‌توان تعریف کرد چرا که حاصل‌ضرب نقطه‌ای در این فضا می‌بایست قبلاً تعریف شده باشد.

۱.۷ تعاریف کلی

تعریف ۱.۷. فرض کنید $\mathscr{L}$ فضایی خطی روی $\mathbb{R}$ و در آن بردارهای $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ و اسکالرهای α و β را در نظر بگیرید. تابعی که زوج مرتب $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ از بردارها را به $\mathbb{R}$ می‌نشاند یک ضرب نقطه‌ای[1] می‌نامند، هرگاه شرایط زیر را برقرار کند:

(۱) $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$ یا همان تقارنی.

(۲) $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x},\mathbf{z})+\beta(\mathbf{y},\mathbf{z})$ که به آن دوخطی بودن هم می‌گویند.

(۳) $(\mathbf{x},\mathbf{x}) > ۰$ که به مثبت بودن معروف است.

گزاره ۱.۷. تنها برداری از $\mathscr{L}$ که برای آن $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = ۰$، بردار پوچ $\mathbf{x} = \boldsymbol{0}$ است.

برهان. بکمک شرط (۲) و برای بردار $\mathbf{x}$ داریم:

$$(\mathbf{0},\mathbf{0}) = (۰\times\mathbf{0},\mathbf{0}) = ۰\times(\mathbf{0},\mathbf{0}) = ۰$$

حال به‌وسیلهٔ شرط (۳) و برای هر $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$: $(\mathbf{x},\mathbf{x}) > ۰$.

۱. به آن، ضرب داخلی یا ضرب اسکالر هم گفته می شود.

□

تعریف ۲.۷. فضای n-بُعدی و خطی $\mathscr{L}$ روی $\mathbb{R}$ و همراه با ضرب داخلی $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ را فضای اقلیدسی می‌نامند.

مثال ۱.۷. الف) برای دو n -تایی از اعداد حقیقی $\mathbf{x}=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ و $\mathbf{y}=(\eta_1,\dots,\eta_n)$ تعریف می‌کنیم:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$$

به ازای این ضرب داخلی، فضای متناظر اقلیدسی است (بررسی کنید).

ب) دو n-تایی $\mathbf{x}=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ و $\mathbf{y}=(\eta_1,\dots,\eta_n)$ از $\mathbb{R}^n$، ماتریس $\|a_{ik}\|_{n\times n}$ و تابع

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\xi_i\eta_i \tag{۱.۷}$$

مفروض هستند. دنبال شرایط محدودکننده‌ای روی ماتریس $\|a_{ik}\|$ می‌گردیم که با وجود آن، ضرب داخلی بودن تابع فوق تضمین شود. در ابتدا، شرط (۱) موقعی برقرار است که ماتریس فوق متقارن بوده و البته شرط (۲) همواره برقرار است. اما درباره شرط سوم توجه کنید که

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_i\geqslant 0 \tag{۲.۷}$$

و تساوی $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ مستلزم برقراری $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0$ است.

چنین خاصیتی را تعیّن مثبت چندجمله‌ای $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\eta_i$ می گویند. بنابراین، اگر ماتریس $\|a_{ik}\|$ متقارن بوده و چندجمله‌ای متناظر[۲] به‌طور مثبت تعریف شود، آن‌گاه تابع تعریف شده را در (۱.۷) یک ضرب داخلی خواهد شد.

ج) فضای خطی روی همه توابع پیوسته روی $[a,b]\subset\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. تابع زیر یک ضرب داخلی برای فضا تعریف می کند: $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$.

تعریف ۳.۷. به‌ازای فضای اقلیدسی $\mathscr{E}$، طول بردار $\mathbf{x}\in\mathscr{E}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$$

۲. گاهی این چندجمله‌ای را فرم درجه دوم می‌نامند.

تعریف ۴.۷. **در فضای اقلیدسی $\mathscr{E}$، فاصله دو بردار $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathscr{E}$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود:**

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

تعریف ۵.۷. **در فضای اقلیدسی $\mathscr{E}$، زاویه بین دو بردار $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathscr{E}$ در تعریف زیر می‌آید:**

$$\cos\gamma_{\mathbf{x},\mathbf{y}}=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$$

$\gamma_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ را همچنین ضریب همبستگی دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ نیز می‌گویند.

تعریف ۶.۷. **دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از فضای اقلیدسی $\mathscr{E}$ را متعامد گویند هرگاه $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$.**

لم ۲.۷ (نامساوی کوشی). **در فضای اقلیدسی $\mathscr{E}$ و به ازای هر دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ داریم:**

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\leqslant(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})$$

برهان. برای اثبات، روش متناظر در اثبات نامساوی ۶.۲ از فصل دوم را ببینید. □

۲.۷ پایه‌های متعامد

در فضای اقلیدسی $\mathscr{E}$، مجموعه‌ای از n بردار ناصفر $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\in\mathscr{E}$ یک پایه متعامد برای $\mathscr{E}$ می‌سازند، هرگاه:

(۱) این n بردار، $\mathscr{E}$ را تولید کند.

(۲) هر زوج $(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ از این مجموعه دوبه‌دو متعامد باشند.

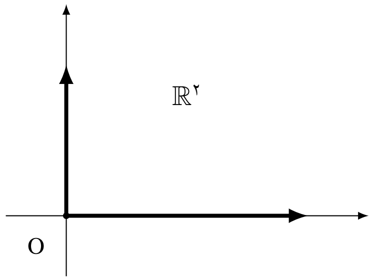
برای یک نمونه شهودی از یک مجموعه پایه متعامد در صفحه $\mathbb{R}^2$، به‌شکل ۱.۷ نگاه کنید.

پایه متعامد $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ را **متعامد یکه** می‌گویند هرگاه هر زوج از اعضای این مجموعه دوبه‌دو متعامد بوده و همه اعضا دارای طول واحد باشند. به‌طور معادل

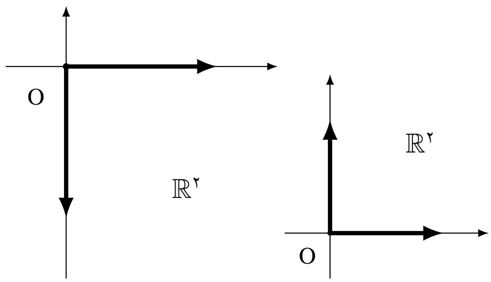
$$(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases},\qquad i,j=1,\dots,n \qquad (\dagger)$$

دو نمونه متفاوت از دو پایه متعامد یکه در صفحه $\mathbb{R}^2$ در شکل ۷.۲ آمده است.

اکنون نشان می دهیم اعضای مجموعه $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\}$ مستقل خطی‌اند، اگر این اعضاء یک پایه متعامد بسازند. اگر چنین ادعایی ثابت شود آن‌گاه با در نظر گرفتن شرط (۱) می‌توان گفت که



شکل ۱.۷: اعضای یک پایهٔ متعامد در صفحه



شکل ۲.۷: دو پایهٔ متعامد یکه در صفحه

این مجموعه از بردارها برای $\mathscr{E}$ به‌عنوان یک فضای خطی نیز یک پایه خواهند بود. برای اثبات (به خلف) فرض کنید اسکالرهای $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ که همگی باهم صفر نیستند چنان وجود دارد که

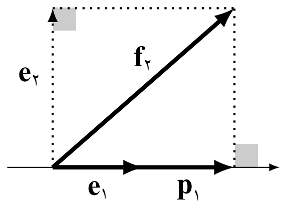
$$\lambda_1\mathbf{e}_1+\cdots+\lambda_n\mathbf{e}_n=\mathbf{0}$$

یعنی مجموعه $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ را مجموعه‌ای وابسته خطی بگیریم. با استفاده از تساوی اخیر، یک ضرب داخلی با عضوهای $\mathbf{e}_{i(1\leqslant i\leqslant n)}$ بسازید:

$$\lambda_1(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_i)+\cdots+\lambda_n(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_i)=(\mathbf{0},\mathbf{e}_i)=0$$

با توجه به اینکه مجموعه $\mathbf{e}_i$ها پایه‌ای متعامد هستند، داریم $\lambda_i(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)=0$ و چون این ضرب داخلی غیر صفر است لزوماً $\lambda_{i(1\leqslant i\leqslant n)}=0$ که تناقض است. از این رو اثبات کردیم $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای $\mathscr{E}$ است.

قضیه ۳.۷. برای هر فضای اقلیدسی n -بُعدی، همواره یک پایه متعامد یکه وجود دارد.



شکل ۳.۷: ساختن دومین بردار از یک پایه متعامد

برهان. $\mathscr{E}$ را فضای اقلیدسی دلخواهی گرفته و پایه $\{\mathbf{f}_۱,\dots,\mathbf{f_n}\}$ از آن را در نظر بگیرید. از این پایه، یک پایهٔ متعامد $\{\mathbf{e}_۱,\dots,\mathbf{e}_n\}$ می سازیم. اگر $\mathbf{e}_۱=\mathbf{f}_۱$، بردار $\mathbf{e}_۲=\mathbf{f}_۲+\alpha\mathbf{e}_۱$ را متعامد نسبت به $\mathbf{e}_۱$ بسازید (شکل ۳.۷). در واقع، $(\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_۲)=۰$ اگفگر $(\mathbf{e}_۱,\mathbf{f}_۲+\alpha\mathbf{e}_۱)=۰$. پس کافی است $\alpha=-\frac{(\mathbf{e}_۱,\mathbf{f}_۲)}{(\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_۱)}$ انتخاب شود.

حال فرض کنید مجموعه $\{\mathbf{e}_۱,\dots,\mathbf{e}_{k-۱}\}$ را مانند قبل ساخته‌اید. بردار $\mathbf{e}_k$ بر هریک از اعضای مجموعه اخیر متعامد است[3] (شکل ۴.۷ را در حالت $k=۳$ ببینید). چون بردارهای $\mathbf{e}_۱,\dots,\mathbf{e}_{k-۱}$ دوبه‌دو متعامد هستند، پس

$$(\mathbf{e}_i,\mathbf{f}_k)+\lambda_i(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)=۰,\ \ i=۱,\dots,k-۱$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda_i=-\frac{(\mathbf{e}_i,\mathbf{f_k})}{(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)}$$

برای اثبات اینکه $\mathbf{e}_k\neq ۰$، توجه کنید به ازای همه $i<k$ و به ازای ضرایب معین λ_i ها:

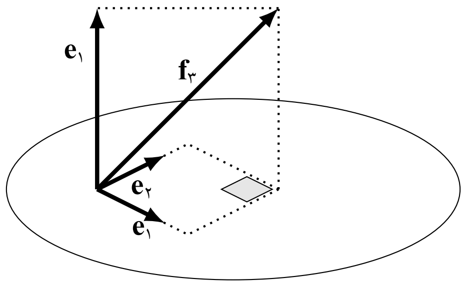
$$\mathbf{e}_i=\mathbf{f_i}+\lambda_۱\mathbf{e}_۱+\dots+\lambda_{i-۱}\mathbf{e}_{i-۱}$$

با کمک تساوی‌های اخیر داریم:

$$\mathbf{e}_k=\mathbf{f_k}+\lambda_۱\mathbf{e}_۱+\dots+\lambda_{k-۱}\mathbf{e}_{k-۱}=\alpha_۱\mathbf{f}_۱+\alpha_۲\mathbf{f}_۲+\dots+\alpha_{k-۱}\mathbf{f_{k-۱}}+\mathbf{f}_k$$

اگر $\mathbf{e}_k=۰$ باشد، چون ضریب $\mathbf{f}_k$ عدد ۱ می‌باشد لذا بردارهای $\mathbf{f}_۱,\dots,\mathbf{f}_k$ لزوماً و اجباراً وابسته خطی بوده که تناقض است (پس $\mathbf{e}_k\neq ۰$).

3. $(\mathbf{e}_i,\mathbf{f}_k+\lambda\mathbf{e}_i+\dots+\lambda_{k-1}\mathbf{e}_{k-1})=0$



شکل ۴.۷: ساختن سومین بردار از یک پایه متعامد

با تکرار رویّه فوق، n بردار دوبه‌دو متعامد $\mathbf{e}_۱, \dots, \mathbf{e}_n$ چنان ساخته می‌شود که استقلال خطی هم دارند. به‌طور معادل $\{\mathbf{e}_۱, \dots, \mathbf{e}_n\}$ یک پایه متعامد برای فضای اقلیدسی $\mathscr{E}$ است. $\square$

تذکر ۱.۷. **روندی که در قضیه قبل برای ساختن یک پایه متعامد از روی یک پایه مفروض مورد استفاده قرار گرفت را فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت می‌نامند.**

تذکر ۲.۷. **فرض کنید $\{\mathbf{e}_۱, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ پایه‌ای متعامد است. در این صورت به وضوح**

$$\left\{\frac{\mathbf{e}_۱}{|\mathbf{e}_۱|}, \dots, \frac{\mathbf{e}_n}{|\mathbf{e}_n|}\right\}$$

پایه‌ای متعامد و یکه است.

مثال ۲.۷. **L زیرفضایی از $\mathbb{R}^۴$ تولید شده توسط سه بردار زیر است:**

$$\mathbf{f}_۳ = (-۱, ۲, -۳, ۲), \quad \mathbf{f}_۲ = (۳, ۱, ۱, -۱), \quad \mathbf{f}_۱ = (۱, ۱, ۰, ۱)$$

می‌خواهیم با کمک قضیه قبل یک پایه متعامد و یک پایه متعامد یکه برای L بسازیم. چون مجموعه $\{f_۱, f_۲, f_۳\}$ مستقل خطی است لذا پایه ای برای L است. فرض کنیم $\mathbf{e}_۱ = \mathbf{f}_۱ = (۱, ۱, ۰, ۱)$ اولین عضو بردار پایه متعامد باشد. قرار دهید $\mathbf{e}_۲ = \mathbf{f}_۲ + \alpha_{۲۱}\mathbf{e}_۱$ که در آن

$$\alpha_{۲۱} = -\frac{(\mathbf{e}_۱, \mathbf{f}_۲)}{(\mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۱)} = -\frac{۳}{۳} = -۱$$

و لذا $\mathbf{e}_۲ = \mathbf{f}_۲ - \mathbf{e}_۱ = (۲, ۰, ۱, -۲)$ دومین عضو پایه متعامد است. برای سومین بردار $\mathbf{e}_۳$ قرار دهید

$$\mathbf{e}_۳ = \mathbf{f}_۳ + \alpha_{۳۱}\mathbf{e}_۱ + \alpha_{۳۲}\mathbf{e}_۲$$

که در آن

$$\alpha_{۳۱}=-\frac{(\mathbf{e}_۱,\mathbf{f}_۳)}{(\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_۱)}=-\frac{۳}{۳}=-۱ \quad \text{و} \quad \alpha_{۳۲}=-\frac{(\mathbf{e}_۲,\mathbf{f}_۳)}{(\mathbf{e}_۲,\mathbf{e}_۲)}=-\frac{-۹}{۹}=۱$$

پس $\mathbf{e}_۳=\mathbf{f}_۳-\mathbf{e}_۱+\mathbf{e}_۲=(۰,۱,-۲,-۱)$ و $\{\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_۲,\mathbf{e}_۳\}$ پایه متعامد مورد نظر است.

با توجه به تذکر ۲.۷ داریم:

$$\mathbf{e'}_۱=\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},۰,\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right),\quad \mathbf{e'}_۲=\left(\frac{۲}{۳},۰,\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳}\right)^{۴}$$

بعلاوه با ضرب $\frac{۱}{\sqrt{۶}}$ در بردار $\mathbf{e}_۳$، به بردار یکهٔ $\mathbf{e'}_۳=\left(۰,\frac{۱}{\sqrt{۶}},-\frac{۱}{\sqrt{۳}},-\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right)$ می رسیم. مجموعهٔ $\{\mathbf{e'}_۱,\mathbf{e'}_۲,\mathbf{e'}_۳\}$ پایه متعامد یکه متناظر برای L است.

تذکر ۳.۷. **اگر تغییری در ترتیب اعضای پایه $\{\mathbf{f}_۱,\cdots,\mathbf{f}_n\}$ انجام دهید، با اعمال روند متعامدسازی گرام-اشمیت ممکن است پایه متناظر متفاوت دیگری به‌دست آورید. به‌همین دلیل، پایه متعامد برای یک فضای اقلیدسی منحصر به‌فرد نیست.**

فرض کنید $\mathscr{L}$ یک فضای اقلیدسی و مجموعه $\{\mathbf{e}_۱,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ پایه‌ای متعامد و دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از فضا را در پایه به‌صورت زیر نوشته شوند:

$$\mathbf{x}=\xi_۱\mathbf{e}_۱+\cdots+\xi_n\mathbf{e}_n,\quad \mathbf{y}=\eta_۱\mathbf{e}_۱+\cdots+\eta_n\mathbf{e}_n.$$

می‌خواهیم ضرب داخلی

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\xi_۱\mathbf{e}_۱+\cdots+\xi_n\mathbf{e}_n,\eta_۱\mathbf{e}_۱+\cdots+\eta_n\mathbf{e}_n)$$

را برحسب مختصات این بردارها پیدا کنیم. بکمک رابطهٔ $(\dagger)$ داریم:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=۱}^{n}\xi_i\eta_i$$

و این یعنی، ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بر حسب پایه‌ای متعامد از فضای $\mathscr{L}$ با مجموع حاصل‌ضرب دوبه‌دو متناظر مختصات آن‌ها به‌دست می‌آید. برای $\mathbf{x}\in\mathscr{L}$، با فرض

۴. توجه داریم که طول دو بردار $\mathbf{e}_۱$ و $\mathbf{e}_۲$ هر دو $\sqrt{۳}$ است.

$\xi_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)_{(1\leqslant i\leqslant n)}$، نمایش زیر معنی دار است:

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n$$

و علت این است که

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = \xi_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) + \cdots + \xi_n(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i) = \xi_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}) = \xi_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \xi_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \xi_i$$

به این صورت $x \in \mathscr{L}$ بر حسب پایه متعامد $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ بیان می‌شود. بردار $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$ که $\mathbf{e}_i$ برداری یکه است به نام **تصویر $\mathbf{x}$ روی $\mathbf{e}_i$** شناخته می‌شود. نتیجه اینکه مختصات هر بردار در پایه متقارن فوق (که دلخواه است) را می‌توان طول‌های تصاویر بردار بر هر عضو پایه در نظر گرفت.

تعریف ۷.۷. فرض کنید $\mathscr{L}$ یک فضای اقلیدسی است. بردار $\mathbf{x} \in \mathscr{L}$ را متعامد بر زیرفضای B از $\mathscr{L}$ می‌نامند، هرگاه $\mathbf{x}$ بر هر $\mathbf{y} \in B$ متعامد باشد.

لم ۴.۷. فرض کنید $\mathscr{L}$ یک فضای اقلیدسی است. اگر $\mathbf{x} \in \mathscr{L}$ بر بردارهای $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ از $\mathscr{L}$ متعامد باشد، آن‌گاه $\mathbf{x}$ بر هر ترکیب خطی از چنین بردارهایی نیز متعامد است.

برهان. چون برای هر $i = 1, \ldots, n$، $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = 0$ لذا به ازای اسکالرهای حقیقی λ_i:

$$(\mathbf{x}, \lambda_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n) = \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) + \cdots + \lambda_n(\mathbf{x}, \mathbf{e}_n) = 0$$

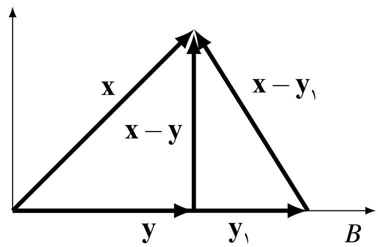
□

نتیجه ۵.۷. فضای اقلیدسی $\mathscr{L}$ و زیرفضای B از آن مفروضند. اگر بردار $\mathbf{x} \in \mathscr{L}$ بر یک پایه از B متعامد باشند، آن‌گاه $\mathbf{x}$ بر خود B متعامد است.

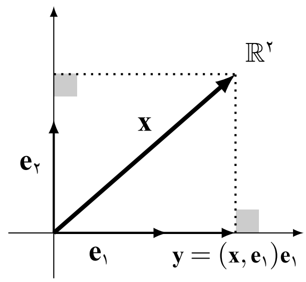
اکنون مسئله زیر را در نظر بگیرید:

آیا به ازای یک زیرفضای نابدیهی B از فضای اقلیدسی $\mathscr{L}$ و هر $x \in \mathscr{L}\backslash B$ عضو $\mathbf{y} \in B$ وجود دارد تا $(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y})$ بر $\mathbf{x}$ عمود شود؟

چنین برداری را در صورت وجود یک **تصویر (متعامد)** از $\mathbf{x}$ بر B می‌نامند.



شکل ۵.۷: کوچکترین فاصله از بردار $\mathbf{x}$ تا یک زیر فضای B



شکل ۶.۷: تصویر روی یک خط

لم ۶.۷. فضای اقلیدسی و n–بُعدی $\mathscr{L}$ و زیرفضای m–بُعدی B از آن مفروضند[5]. فرض کنید $\mathbf{y}$ تصویر بردار دلخواه $\mathbf{x}\in\mathscr{L}$ بر B باشد[6]، آن‌گاه

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}_۱| > |\mathbf{x}-\mathbf{y}_۰|$$

برهان. فرض کنید $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ و $\mathbf{y}-\mathbf{y}_۱$ متعامدند. با استفاده از قضیه فیثاغورث داریم:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^۲+|\mathbf{y}-\mathbf{y}_۱|^۲=|\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}-\mathbf{y}_۱|^۲=|\mathbf{x}-\mathbf{y}_۱|^۲$$

و در نتیجه $|\mathbf{x}-\mathbf{y}_۱|>|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ (شکل ۵.۷). □

لم بعدی نشان می‌دهد تصویر یک بردار بر یک زیرفضا همواره وجود دارد.

5. $0<m<n$

۶. به عبارت دیگر $\mathbf{y}\in B$ و $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ برداری متعامد بر B است.

لم ۷.۷. فضای اقلیدسی n−بعدی $\mathscr{L}$ و زیرفضای m−بعدی B از آن مفروضند[۷]. اگر مجموعه $\{\mathbf{e}_۱,\cdots,\mathbf{e}_m\}$ یک پایه متعامد یکه برای B باشد، آن‌گاه تصویر متعامد هر بردار $\mathbf{x}\in\mathscr{L}\backslash B$ بر زیرفضای B به‌صورت زیر قابل بیان است

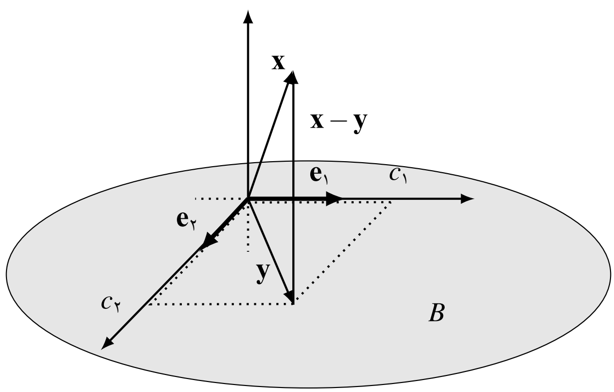
$$\mathbf{y}_۰ = c_۱\mathbf{e}_۱+\cdots+c_m\mathbf{e}_m$$

که در آن $c_i=(\mathbf{x},\mathbf{e}_i)_{(۱\leqslant i\leqslant m)}$

برهان. فرض کنید $\mathbf{y}=c_۱\mathbf{e}_۱+\cdots+c_m\mathbf{e}_m$ تصویر متعامد $\mathbf{x}\in\mathscr{L}\backslash B$ بر B باشد. در این صورت تفاضل $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ برداری متعامد بر B است، یعنی برای هر $i=۱,\ldots,m$، $(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{e}_i)=۰$. و در نتیجه برای هر مقدار i ، $(\mathbf{x},\mathbf{e}_i)=(\mathbf{y},\mathbf{e}_i)$ و لذا

$$\underset{(i=۱,\cdots,m)}{(\mathbf{x},\mathbf{e}_i)} = \sum_{k=۱}^{i} c_k(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i)=c_i(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)=c_i$$

$\square$



شکل ۷.۷: تصویر بر یک صفحه

فاصله بردار $\mathbf{x}$ و زیرفضای B از یک فضای اقلیدسی را کمترین طول برداری مانند $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ که $\mathbf{y}\in B$ دلخواه است، در نظر می‌گیرند. به عبارت دیگر

$$d(\mathbf{x},B)=\min_{y\in B}\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\}$$

۷. شرط بین m و n مانند لم قبل در اینجا نیز برقرار است.

مثلاً اگر $x \in B$ آن‌گاه $d(\mathbf{x}, B) = ۰$ و بالعکس. ایدهٔ فاصله باعث می شود تا به بازنویسی لم ۷.۶ در قالب نتیجه زیر اقدام کنیم:

نتیجه ۸.۷. فاصله بین یک بردار $\mathbf{x}$ و یک زیرفضای B از فضای اقلیدسی $\mathscr{L}$ مساوی است با $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ که در آن $\mathbf{y} \in B$ تصویر $\mathbf{x}$ بر B است.

تذکر ۴.۷. فرض کنید به دنبال تصویر متعامد بردار دلخواه $\mathbf{x} \in \mathscr{L}$ بر زیرفضای B نسبت به یک پایه $\{\mathbf{e}_۱, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ از B هستیم. در این صورت با توجه به لم قبل، فرم ماتریسی یک دستگاه همانند زیر بدست می آید:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_۲) & (\mathbf{e}_۲,\mathbf{e}_۱) & \cdots & (\mathbf{e}_m,\mathbf{e}_۱) \\ (\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_۲) & (\mathbf{e}_۲,\mathbf{e}_۲) & \cdots & (\mathbf{e}_m,\mathbf{e}_۲) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_m) & (\mathbf{e}_۲,\mathbf{e}_m) & \cdots & (\mathbf{e}_m,\mathbf{e}_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x},\mathbf{e}_۱) \\ (\mathbf{x},\mathbf{e}_۲) \\ \cdots \\ (\mathbf{x},\mathbf{e}_m) \end{pmatrix}$$

ماتریس $m \times m$ بالا که شامل حاصلضرب‌های داخلی دو بدوی اعضای پایه متعامد است را ماتریس گرام بردارهای $\mathbf{e}_۱, \ldots, \mathbf{e}_m$ می‌نامند. ادعا می کنیم که این دستگاه تنها یک جواب دارد. در واقع، منحصر بفرد بودن جواب یک دستگاه معادلات خطی (m معادله m مجهولی)، به نامنفرد بودن ماتریس ضرایب آن بر می گردد. در اینجا بردار$\mathbf{y}$ موجود و منحصر به‌فرد است[۸] و لذا دستگاه بالا (که تصویر متعامد x بر B را توصیف می کند) می‌بایست تنها یک جواب داشته باشد. از این مطلب نتیجه می گیریم که:

به ازای هر پایه (مستقل خطی)، دترمینان ماتریس گرام غیرصفر است.

بدیهی است، یکه بودن بردارهای پایه متعامد، ماتریس گرام را به ماتریس همانی با دترمینان ۱ تبدیل خواهد کرد.

مثال ۳.۷ (مسئله). **بردار $\mathbf{x} = (۲۵, ۰, ۲۵)$ از $\mathbb{R}^۳$ و زیرفضای $B \subset \mathbb{R}^۳$ تولید شده توسط دو بردار $\mathbf{a} = (۳, ۴, ۵)$ و $\mathbf{b} = (-۴, ۳, ۵)$ مفروضند. مطلوب است تصویر متعامد $\mathbf{x}$ بر B و فاصله $\mathbf{x}$ از B. برای حل، فرض کنیم $\mathbf{y} = c_۱\mathbf{a} + c_۲\mathbf{b}$ تصویر موردنظر باشد. از مطالب بالا داریم:**

$$G \begin{pmatrix} c_۱ \\ c_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x},\mathbf{a}) \\ (\mathbf{x},\mathbf{b}) \end{pmatrix}$$

۸. با استفاده از لم‌های (۶.۷) و (۷.۷).

که در آن

$$G=\begin{pmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{a}) & (\mathbf{a},\mathbf{b})\\ (\mathbf{b},\mathbf{a}) & (\mathbf{b},\mathbf{b})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۵۰ & ۲۵\\ ۲۵ & ۵۰\end{pmatrix}$$

ماتریس گرام متناظر است. لذا

$$\begin{pmatrix}۵۰ & ۲۵\\ ۲۵ & ۵۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_۱\\ c_۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲۰۰\\ ۲۵\end{pmatrix}$$

و از آنجاکه $c_۱=۵$ و $c_۲=-۵$. بنابراین $\mathbf{y}=۵\mathbf{a}-۲\mathbf{b}=(۲۳,۱۴,۱۵)$. حال با استفاده از گزاره ۲.۷ خواهیم داشت

$$d(\mathbf{y},B)=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=|(۲,-۱۴,۱۰)|=۱۰\sqrt{۳}\approx ۱۷/۳۲$$

۳.۷ روش حداقل مربعات

در این بخش به بیان یک تفسیر (از نوع جبرخطی) از روش(تقریب) حداقل مربعات که بسیار در اقتصاد کاربرد دارد می‌پردازیم.[۹] تابع y را تابع خطی از m متغیر $x_۱,\dots,x_m$ از $\mathbb{R}$ به‌شکل

$$y(x_۱,\dots .x_m)=c_۱x_۱+\cdots+c_mx_m$$

در نظر بگیرید که در آن $c_i\in\mathbb{R}$ ها ضرایبی مجهولند.

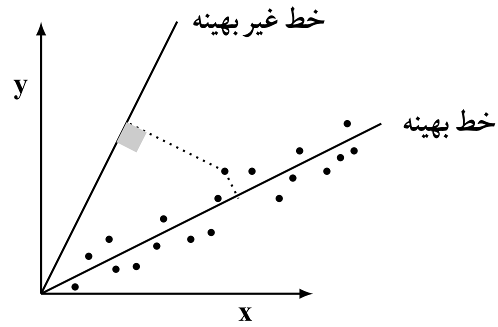
فرض کنید از طریق n آزمایش می توان این ضرایب را مشخص کرد که در آن $x_۱,\dots,x_m$ و لذا y اندازه‌گیری می‌شود. البته پذیرفتنی است که در جواب خطا دیده شود ولی به‌وضوح بدنبال به حداقل مقدار رساندن چنین خطایی هستیم (شکل ۸.۷). فرض کنید k امین آزمایش، مقادیر $x_{k۱},\dots,x_{km}$ و y_k را نتیجه داده و لذا دستگاه معادلات خطی زیر از ثابت‌های c_i

$$\begin{cases}x_{۱۱}c_۱+x_{۱۲}c_۲+\cdots+x_{۱m}c_m=y_۱,\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\vdots\\ x_{n۱}c_۱+x_{n۲}c_۲+\cdots+x_{nm}c_m=y_n\end{cases}\tag{۳.۷}$$

و یا معادلاً به‌شکل ماتریسی

$$A\mathbf{c}=\mathbf{y}\tag{۴.۷}$$

۹. تعبیر دیگری در ضمیمه D از این‌روش به بحث گذاشته شده است.



شکل ۸.۷: تقریب حداقل مربعات

به‌وجود آید که در آن، ماتریس $A=\|x_{ij}\|_{n\times m}$ ماتریس ضرایب، $\mathbf{c}=(c_۱,\dots,c_m)$ بردار مجهول و $\mathbf{y}=(y_۱,\dots,y_n)$ ماتریس ثابت‌ها (طرف راست تساوی) است.[۱۰]

چون x_iها و همچنین y با درصدی از خطا محاسبه می‌شوند لذا امید به یافتن جوابی دقیق برای (۴.۷) یا (۳.۷) بی‌معنی به‌نظر می‌رسد. هدف این است که ثابت‌های نامشخص c_i طوری بدست آیند که دو طرف تساوی‌های (۳.۷) تا جایی که امکان دارد بهم نزدیک و نزدیکتر شوند. برای این منظور تابع زیر را در نظر گرفته

$$d(c_۱,\dots,c_m)=\sum_{k=۱}^{n}(x_{k۱}c_۱+\cdots+x_{km}c_m-y_k)^۲ \qquad (۵.۷)$$

و مسئله به این حکم بر می گردد که به ازای چه c_iهایی $d(c_۱,\dots,c_m)$ می‌نیمم مقدار است؟ البته توجه داریم که مجموع $x_{k۱}c_۱+\cdots+x_{km}c_m$، k-امین مؤلفه بردار $A\mathbf{c}$ در فضای $\mathbb{R}^n$ و بنابر این $d(c_۱,\cdots,c_m)=|A\mathbf{c}-\mathbf{y}|^۲$.[۱۱] اینکه بدنبال می نیمم کردن (۵.۷) باشیم در واقع با یافتن $c_۱,\dots,c_m$ هایی که فاصلهٔ $\mathbf{y}$ و

$$\mathbf{y}_۰=A\mathbf{c}=c_۱\mathbf{A}^۱+\cdots+c_m\mathbf{A}^m$$

را مینیمال کند، صورت می گیرد که در آن

$$\mathbf{A}^k=(x_{۱k},x_{۲k},\dots,x_{nk}),\qquad (k=۱,\dots,m)$$

۱۰. فرض می‌کنیم $m>n$.
۱۱. مربع فاصله بین $\mathbf{y}$ و $A\mathbf{c}$.

ستونهای ماتریس A هستند. با در نظرگرفتن فضای B، زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ که توسط ستون‌های A تولید شده است و توضیحات فوق، مسئله به یافتن تصویر $\mathbf{y}$، بر B تحویل می‌شود.

فرض کنید

$$\mathbf{A}^{۱}, \ldots, \mathbf{A}^m$$

مستقل خطی هستند[۱۲]. با استفاده از لم ۷.۷ و برای هر $k = ۱, \cdots, m$، داریم:

$$(\mathbf{A}^{۱}, \mathbf{A}^k)c_{۱} + (\mathbf{A}^{۲}, \mathbf{A}^k)c_{۲} + \cdots + (\mathbf{A}^m, \mathbf{A}^k)c_m = (\mathbf{y}, \mathbf{A}^k) \qquad (۶.۷)$$

که در آن $(\mathbf{y}, \mathbf{A}^k) = \sum_{j=۱}^n y_j x_{jk}$ و $(\mathbf{A}^j, \mathbf{A}^k) = \sum_{i=۱}^n x_{ij} x_{ik}$.

نتیجه اینکه، مسئله از یافتن یک جواب تقریبی از دستگاه (۳.۷) به یافتن یک جواب دقیق از (۶.۷) بدل شد.

مثال ۴.۷. تقریب به‌وسیله حداقل مربعات در صفحه (شکل ۸.۷) را در نظر بگیرید. فرض کنید اندازه‌گیری‌های

$$\mathbf{x} = (x_{۱}, x_{۲}, \cdots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_{۱}, y_{۲}, \cdots, y_n)$$

برای دو متغیر x و y داده شده‌اند. هدف یافتن شیب c از خط $y = cx$ با استفاده از دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} y_{۱} = cx_{۱} \\ y_{۲} = cx_{۲} \\ \quad \vdots \\ y_n = cx_n \end{cases}$$

که با کمک (۶.۷) به‌سادگی بدست می آید:

$$c = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \frac{\sum_{k=۱}^n x_k y_k}{\sum_{k=۱}^n x_k^{۲}}.$$

مثلاً به ازای $n = ۴$، $(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}, x_{۴}) = (۱, ۲, ۳, ۴)$ ، $(y_{۱}, y_{۲}, y_{۳}, y_{۴}) = (۲, ۳, ۴, ۱۰)$ و $c = ۲$ است.

۱۲. به عبارت دیگر A پر رتبه است. برای حالت دلخواه ماتریس A به ضمیمه D مراجعه کنید.

۴.۷ یکریختی فضاهای اقلیدسی

تعریف ۸.۷. فضاهای اقلیدسی $\mathscr{L}$ و $\mathscr{L}'$ یکریختند هرگاه به‌عنوان دو فضای خطی یکریخت بوده و بعلاوه وقتی $\mathscr{L} \ni \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}' \in \mathscr{L}'$ و $\mathscr{L} \ni \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{y}' \in \mathscr{L}'$، آن‌گاه $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}',\mathbf{y}')$.

قضیه ۹.۷. هر دو فضای n-بُعدی اقلیدسی یکریخت هستند.

برهان. برای اثبات کافی است نشان دهیم هر دو چنین فضایی با $\mathbb{R}^n$ یکریخت هستند. از آنجائی که یکریختی بین فضاهای خطی $\mathscr{L}$ و $\mathscr{L}'$ شناخته شده است لذا به قسمت اصلی برهان می‌پردازیم. یک پایه متعامد یکه $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ از $\mathscr{L}$ را دلخواه گرفته و بعلاوه فرض کنید ضرب داخلی دو بردار

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n, \qquad \mathbf{y} = \eta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \eta_n\mathbf{e}_n$$

در $\mathscr{L}$ به‌صورت

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n$$

تعریف شده است. اکنون $\mathscr{L}$ را به‌عنوان فضایی n-بُعدی اقلیدسی در نظر بگیرید که پایه‌ای متعامد و یکه همانند $\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n\}$ دارد (چرا چنین چیزی باید درست باشد؟). به ازای هر دو بردار

$$\mathbf{x}' = (\xi_1,\cdots,\xi_n), \qquad \mathbf{y}' = (\eta_1,\cdots,\eta_n)$$

در $\mathscr{L}$، $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را به‌شکل $\mathbf{x} = (\xi_1,\cdots,\xi_n)$ و $\mathbf{y} = (\eta_1,\cdots,\eta_n)$ اختیار کرده[۱۳] و داریم

$$(\mathbf{x}',\mathbf{y}') = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n$$

از طرف دیگر $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i$ و لذا $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}',\mathbf{y}')$ و اثبات کامل است. □

۵.۷ مسائل

۱. بررسی کنید که آیا تابع تعریف شده در (۱.۷) برای دو ماتریس زیر یک ضرب داخلی خواهد شد یا خیر؟

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

۱۳. توجه کنید پایه کانونیک و استاندارد در $\mathbb{R}^n$ استفاده کردیم.

۲. دو بردار دلخواه $\mathbf{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ و $\mathbf{y} = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ را در $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفته و تحقیق کنید کدامیک از دو تابع زیر یک ضرب داخلی است؟

$$(a)\ \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} |\xi_i||\eta_i|, \qquad (b)\ \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} |\xi_i^2||\eta_i^2|$$

۳. پایه‌ای با اعضای برداری زیر داده شده است:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= (1, 1, \ldots, 1, 1) \\
\mathbf{f}_2 &= (0, 1, \ldots, 1, 1) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\mathbf{f}_n &= (0, 0, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}$$

آیا این پایه متعامد است؟ اگر نیست یک پایه متعامد از روی آن با کمک فرآیند گرام-اشمیت به‌دست آورید. سپس از روی پایه متعامد، یک پایه متعامد یکه بسازید.

۴. ثابت کنید برای هر فضای اقلیدسی $\mathscr{L}$، برای هر دو بردار $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{L}$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$ اگر $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ باشد، آن‌گاه $|\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{y}|$.

۵. دو زیر فضای خطی $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ را از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ مفروضند، به‌طوری‌که

$$\dim(\mathscr{L}_1) = \dim(\mathscr{L}_2)$$

ثابت کنید بردار ناصفر $\mathbf{x} \in \mathscr{L}_2$ چنان وجود دارد که بر $\mathscr{L}_1$ متعامد است.

۶. تحقیق کنید کدام جفت از بردارهای زیر متعامدند. سپس آن‌ها به پایه‌ای برای $\mathbb{R}^4$ توسیع دهید.

الف) $\mathbf{f}_2 = (2, -3, 2, 4)$, $\quad \mathbf{f}_1 = (1, -2, 2, -3)$.

ب) $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 3, -3)$, $\quad \mathbf{f}_1 = (1, 1, 1, 2)$.

۷. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^4$، زوایای بین خط $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4$ و بردارهای زیر را بیابید.

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

۸. اگر $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ دو زیرفضای متعامد اقلیدسی $\mathscr{L}$ باشند، ثابت کنید $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \mathbf{0}$.

۹. فضای چندجمله‌ای‌ها با مرتبه حداکثر n را در نظر بگیرید. تعریف کنید

$$(P(t), Q(t)) = \int_a^b P(t)Q(t)dt$$

اولاً نشان دهید نگاشت فوق یک ضرب داخلی است و سپس فاصله بین دو چندجمله‌ای زیر

$$P(t) = ۳t^۲ + ۶, \quad Q(t) = ۲t^۲ + t + ۱$$

را با توجه به ضرب داخلی فوق به‌دست آورید.

۱۰. با استفاده از فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت، از روی بردارهای زیر یک پایه متعامد یکه بسازید.

$$\mathbf{f}_۱ = (۲,۱,۳,-۱),\ \mathbf{f}_۲ = (۷,۴,۳,-۳),\ \mathbf{f}_۳ = (۱,۱,-۶,۰),\ \mathbf{f}_۴ = (۵,۷,۷,۸).$$

۱۱. فاصله دو بردار $\mathbf{x} = (۴,-۱,-۳,۴)$ و زیرفضای خطی تولید شده توسط بردارهای

$$\mathbf{e}_۱ = (۱,۱,۱,۱),\ \mathbf{e}_۲ = (۱,۲,۲,-۱),\ \mathbf{e}_۳ = (۱,۰,۰,۳),$$

را بدست آورید.

۱۲. زیرفضای $\mathscr{L}$ تعریف شده توسط معادلات خطی

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۰ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ = ۰ \\ x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ - ۹x_۴ = ۰ \end{cases}$$

مفروض است. مطلوب است تصویر متعامد (به نام $\mathbf{y}$) از بردار $\mathbf{x} = (۷,-۴,-۱,۲)$ بر $\mathscr{L}$. حاصل $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ چیست؟

۱۳. اولاً فاصله بین بردار $\mathbf{x} = (۴,۲,-۵,۱)$ و فضای خطی $\mathscr{L}$ تعریف شده با معادلات خطی

$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ + ۲x_۴ = ۹ \\ ۲x_۱ - ۴x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ = ۱۲ \end{cases}$$

را بیابید و سپس حکم را مجدداً برای بردار $\mathbf{x} = (۲,۴,-۴,۲)$ و به ازای دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ - x_۴ = ۱ \\ x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ - ۳x_۴ = ۲ \end{cases}$$

تکرار کنید.

۱۴. تقریب حداقل مربعات را برای تابع $y(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$ در حالتی که با ۳ آزمایش، اطلاعات $y(0,1)=3,\ y(1,2)=8,\ y(-1,0)=0$ را بدهد، بدست آورید.

۱۵. قیمت بازار (p) از تعدادی کالا در روزهایی متفاوت در جدول زیر آمده است:

روز	۱۲ ژانویه	۱۴ ژانویه	۱۵ ژانویه	۲۰ ژانویه
قیمت	۲.۱۳ دلار	۲.۱۰ دلار	۸.۹ دلار	۹.۱۲ دلار

با استفاده از تقریب حداقل مربعات تابع $p(x)=a+bx$ که در آن p قیمت و x روز است، قیمت را در ۲۷ ژانویه حدس بزنید.

۸

تبدیلات خطی

در این فصل به معرفی و تعمیم دسته ای خاص از توابع (مانند دوران و یا تصویر کردن یک بردار) می پردازیم. ابتداً با مفهوم تبدیل شروع کرده و در ادامه فصل به انواع خطی و خواص آنها خواهیم رسید.

تعریف ۸.۱. **یک نگاشت از مجموعهٔ S به مجموعهٔ S' رابطه ای است که هر عضو $x \in S$ را به یک عضو $y \in S'$ متناظر می کند. این نگاشت را با $F : S \to S'$ نمایش می‌دهند. اگر $x \in S$ باشد، آن‌گاه $y = F(x)$ را تصویر x تحت F می گویند. با این تعریف، مجموعهٔ**

$$B = \{F(x)\big|x \in S\}$$

تصویر S تحت F نامیده می‌شود. (و طبیعتاً $B \subseteq S'$). به‌طور مشابه برای $W \subseteq S$، مجموعه

$$F(W) = \{F(x)\big|x \in W\}$$

را تصویر W تحت F (یا تصویر کامل) می گویند.

مثال ۸.۱. **الف) فرض کنید $S = S' = \mathbb{R}$ و $F(x) = x^۲$ است در این‌صورت $F(S) = \mathbb{R}^+$[1]**

ب) فرض کنید $L : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ نگاشتی با تعریف $L(x) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ است که در آن $\boldsymbol{a} = (۳, ۲, ۱)$.

ج) به ازای هر مجموعه مانند S، نگاشت همانی I_S به‌صورت $I_S(x) = x$ است که در آن $x \in S$.

۱. منظور اعداد حقیقی نامنفی است.

تعریف ۲.۸. نگاشت $F:S\to S'$ دارای وارون (معکوس) است، اگر نگاشت $G:S'\to S$ چنان موجود باشد که

$$G\circ F=I_S,\qquad F\circ G=I_{S'}$$

به‌عبارت دیگر برای هر $x\in S$ ، $G(F(x))=x$ و به‌ازای هر $y\in S'$، $F(G(y))=y$.

مثال ۲.۸. الف) نگاشت g وارون نگاشت f است:

$$\overbrace{\mathbb{R}^+}^{S'}\xrightarrow{g}\overbrace{\mathbb{R}^+}^{S}\qquad,\qquad \overbrace{\mathbb{R}^+}^{S}\xrightarrow{f}\overbrace{\mathbb{R}^+}^{S'}$$
$$x\to g(x)=\sqrt{x}\qquad\qquad x\to f(x)=x^{۲}$$

ب) فرض کنید R یک فضای خطی و $\boldsymbol{u}\in R$ عضوی ثابت از آن است. نگاشت $T_u:R\to R$ با ضابطهٔ

$$T_u(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$$

که در آن $\boldsymbol{x}\in R$، انتقال به‌وسیله $\boldsymbol{u}$ نامیده می‌شود.

برای $S\subset R$ می‌توان نشان داد که $T_u(S)=\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}|\boldsymbol{x}\in S\}$.

تعریف ۳.۸. نگاشت A از فضای خطی R به فضای خطی S را یک تبدیل می‌نامند. در حالتی که $S=R$، به این تبدیل، عملگر هم گفته می شود.

تعریف ۴.۸. به تبدیل (عملگر) A از فضای خطی R به فضای خطی S، خطی می گویند هرگاه برای هر دو $\boldsymbol{x}_۱,\boldsymbol{x}_۲\in R$ و هر اسکالر $\lambda_۱,\lambda_۲\in\mathbb{R}$:

$$A(\lambda_۱\boldsymbol{x}_۱+\lambda_۲\boldsymbol{x}_۲)=\lambda_۱A(\boldsymbol{x}_۱)+\lambda_۲A(\boldsymbol{x}_۲)$$

(قرارداد می کنیم تا به‌جای $A(\boldsymbol{x})$ از $A\boldsymbol{x}$ استفاده شود.)

مثال ۳.۸. به تعدادی از تبدیلات خطی که در ادامه می آیند، توجه کنید.

الف) دوران بردارها در صفحه $\mathbb{R}^۲$ حول مبدأ مختصات به اندازه زاویه ثابت φ.[۲]

ب) برای هر $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^۲$، تصویر $\boldsymbol{x}$ بر خط $y=cx$ که در آن $c\in\mathbb{R}$ (شکل ۸.۱).

۲. شکل ۱۰.۲ و مثال ۱۲.۲ را ببینید.

ج) فرض کنید $R=\mathbb{R}^n$ و $S=\mathbb{R}^m$ و به ازای هر $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ در R، بردار متناظر $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ را که در آن $A=\|a_{ik}\|_{m\times n}$ یک ماتریس و

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_k$$

نسبت دهیم.[۳]

د) فضای خطی R را شامل همه چندجمله‌ای‌های (روی اعداد حقیقی) با مرتبه حداکثر $n-1$ در نظر بگیرید. نگاشت A با ضابطهٔ $A\left(P(t)\right)=P'(t)$ یک عملگر روی R است. در واقع برای هر دو عضو P و Q از R و هر اسکالر λ_1 و λ_2 از $\mathbb{R}$ داریم:

$$A\left(\lambda_1 P(t)+\lambda_2 Q(t)\right)=\left(\lambda_1 P(t)+\lambda_2 Q(t)\right)'=\underbrace{\lambda_1 P'(t)+\lambda_2 Q'(t)}_{\lambda_1 A(P(t)+\lambda_2 Q(t))}.$$

ه) فضای خطی R را شامل همه توابع پیوسته $f(t)$ روی $[0,1]$ گرفته و تعریف کنید

$$A(f(t))=\int_0^1 f(r)dr$$

A یک تبدیل خطی از R به فضای برداری یک بُعدی $\mathbb{R}$ است. در واقع برای هر f_1 و f_2 از R و هر λ_1 و λ_2 از $\mathbb{R}$ داریم:

$$A(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\int_0^1[\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)]dt=\lambda_1 A(f_1)+\lambda_2 A(f_2)$$

و) دو تبدیل خطی خاص را به‌ازای هر فضای خطی R می‌توان در نظر گرفت:

- ⋆ عملگر همانی (I): به‌ازای هر $\boldsymbol{x}\in R$، $I\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.
- ⋆ عملگر پوچ (Θ): به‌ازای هر $\boldsymbol{x}\in R$، $\Theta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

قضیه ۱.۸. فرض کنید R یک فضای خطی n-بُعدی و $\mathscr{B}=\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ پایه‌ای برای آن است. در این صورت به ازای هر مجموعه از بردارهای $\boldsymbol{g}_1,\ldots,\boldsymbol{g}_n$ از فضای خطی دیگر S، یک تبدیل خطی منحصر به‌فرد A از R به S چنان وجود دارد که $A\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{g}_i\ _{(i=1,\ldots,n)}$.

۳. حتماً تبدیل خطی بودن A را بررسی کنید.

برهان. (وجود A): برای هر مجموعه $\{\mathbf{g}_۱,\dots,\mathbf{g}_n\}$ از بردارها، تبدیل خطی A چنان هست که برای $i=۱,\dots,n$ داشته باشیم $A\mathbf{e}_i=\mathbf{g}_i$. از پایه بودن $\mathscr{B}$ برای R استفاده می‌شود که $\mathbf{x}\in R$ به‌صورت

$$\mathbf{x}=\xi_۱\mathbf{e}_۱+\cdots+\xi_n\mathbf{e}_n\in R$$

قابل نمایش بوده و بردار $\mathbf{y}=\xi_۱\mathbf{g}_۱+\cdots+\xi_n\mathbf{g}_n\in S$ متناظراً ساخته می شود (منحصر به‌فرد بودن نمایش $\mathbf{x}$ در پایه $\mathscr{B}$، خوش تعریف بودن نمایش $\mathbf{y}$ را نتیجه می دهد).

اکنون تبدیل A را با ضابطه $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ تعریف کرده و به‌سادگی می‌توان نشان داد که این تبدیل، خطی است. با توجه به برقراری

$$A_۱\mathbf{e}_i=A_۲\mathbf{e}_i=\mathbf{g}_i,\qquad (i=۱,\dots,n)$$

و برای اینکه نشان دهید A بر حسب $\mathbf{g}_i$ها به‌طور منحصر به‌فردی معین می‌شود (به خلف) فرض کنید دو تبدیل خطی $A_۱$ و $A_۲$ با این خاصیت وجود دارند که برای بردار

$$\mathbf{x}=\xi_۱\mathbf{e}_۱+\cdots+\xi_n\mathbf{e}_n\in R$$

$A_۱\mathbf{x}$ و $A_۲\mathbf{x}$ متمایزند. لذا داریم:

$$\begin{aligned}\xi_۱\mathbf{g}_۱+\cdots+\xi_n\mathbf{g}_n&=\xi_۱A_۱\mathbf{e}_۱+\cdots+\xi_nA_۱\mathbf{e}_n\\&=\xi_۱A_۲\mathbf{e}_۱+\cdots+\xi_nA_۲\mathbf{e}_n\end{aligned}$$

و لذا $A_۱\mathbf{x}=A_۲\mathbf{x}$ و این تناقض، منحصر به‌فرد بودن A را نشان داد. □

لم ۲.۸. دو پایه $\mathscr{B}$ و $\mathscr{F}$ را بترتیب برای فضای خطی n-بُعدی R و m-بُعدی S در نظر بگیرید. در این صورت به‌ازای هر تبدیل خطی A از R به S یک ماتریس منحصر به‌فرد

$$\|a_{ik}\|_{n\times m}$$

وجود دارد و بالعکس برای هر چنین ماتریسی یک تبدیل خطی متناظر است. در حالت خاص، به‌ازای هر عملگر خطی روی R می‌توان یک ماتریس مربعی از مرتبه n نسبت داد.

برهان. فرض کنید $\mathscr{F} = \{\mathbf{f}_۱, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ یک پایه برای فضای خطی S است. مختصات هر $\mathbf{g}_k = A\mathbf{e}_k$ را با توجه به این پایه با $a_{۱k}, a_{۲k}, \ldots, a_{mk}$ نمایش دهید. در واقع

$$\mathbf{g}_k = A\mathbf{e}_k = \sum_{i=۱}^{m} a_{ik}\mathbf{f}_i, \quad (k = ۱, \ldots, n) \tag{۱.۸}$$

همهٔ این مختصات ها را می‌توان در ماتریس $\|a_{ik}\|_{m\times n}$ خلاصه کرد که به آن **ماتریس تبدیل خطی** A با توجه به پایه‌های $\mathscr{B}$ و $\mathscr{F}$ می‌گویند. این همان ماتریس دلخواه است. $\square$

مثال ۴.۸. در نمونه های ذیل از روی تبدیل‌های خطی، ماتریس تبدیل خطی آن‌ها را می‌سازیم.

الف) فرض کنید $R = \mathbb{R}^۳$ و A را تبدیلی خطی بگیرید که به هر بردار $\boldsymbol{a} \in R$، تصویر آن روی صفحه xy را نسبت می‌دهد (شکل ۲.۸). حال با توجه به پایه استاندارد $\mathbb{R}^۳$ یعنی،

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^۳} = \{\underbrace{(۱, ۰, ۰)}_{\mathbf{e}_۱}, \overbrace{(۰, ۱, ۰)}^{\mathbf{e}_۲}, \underbrace{(۰, ۰, ۱)}_{\mathbf{e}_۳}\}$$

داریم: $A\mathbf{e}_۱ = \mathbf{e}_۱$، $A\mathbf{e}_۲ = \mathbf{e}_۲$ و $A\mathbf{e}_۳ = \boldsymbol{O}$ و لذا ماتریس تبدیل متناظر A برابر است با $I_{۳\times ۳}$.

ب) ماتریس تبدیل متناظر با تبدیل خطی همانی I در فضای n–بُعدی R به‌شکل ماتریس $I_{n\times n}$ است. در واقع

$$I\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i, \quad (i = ۱, \ldots, n)$$

به‌طور مشابه، ماتریس مربعی صفر $O_{n\times n}$، ماتریس تبدیل خطی Θ روی R است.

اکنون دو پایهٔ $\mathscr{B}$ و $\mathscr{F}$ را بترتیب برای فضاهای خطی R و S انتخاب کرده و $A : R \to S$ را یک تبدیل خطی می گیریم. بعلاوه فرض کنید $\|a_{ik}\|$ ماتریس تبدیل نظیر A با توجه به پایه‌های فوق باشد. اگر $\mathbf{x} \in R$، آن‌گاه

$$\mathbf{x} = \xi_۱\mathbf{e}_۱ + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n$$

و $A\mathbf{x} = \eta_۱\mathbf{f}_۱ + \cdots + \eta_m\mathbf{f}_m$. ولی نحوه بیان مختصات $A\mathbf{x}$ برحسب مختصات x چگونه است؟ چون

$$A\mathbf{x} = A(\xi_۱\mathbf{e}_۱ + \cdots + \xi_n\mathbf{e}_n) = \xi_۱(a_{۱۱}\mathbf{f}_۱ + a_{۲۱}\mathbf{f}_۲ + \cdots + a_{m۱}\mathbf{f}_m)$$

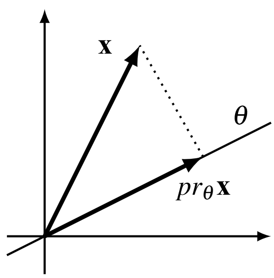
$$+\xi_۲(a_{۱۲}\mathbf{f}_۱+a_{۲۲}\mathbf{f}_۲+\cdots+a_{m۲}\mathbf{f}_m)+\cdots$$
$$+\xi_n(a_{۱n}\mathbf{f}_۱+a_{۲n}\mathbf{f}_۲+\cdots+a_{mn}\mathbf{f}_m)$$
$$=(a_{۱۱}\xi_۱+a_{۱۲}\xi_۲+\cdots+a_{۱n}\xi_n)\mathbf{f}_۱$$
$$+(a_{۲۱}\xi_۱+a_{۲۲}\xi_۲+\cdots+a_{۲n}\xi_n)\mathbf{f}_۲+\cdots$$
$$+(a_{m۱}\xi_۱+a_{m۲}\xi_۲+\cdots+a_{mn}\xi_n)\mathbf{f}_m$$

لذا برای $i=۱,\ldots,n$ داریم $\eta_i=\sum\limits_{k=۱}^{n}a_{ik}\xi_k$.

تساوی اخیر را می‌توان برحسب ماتریس بازنویسی کرد به این صورت که اگر ξ بردار سطری مختصات[۴] بردار $\mathbf{x}$ و η بردار سطری مختصات بردار $A\mathbf{x}$ باشد، آن‌گاه $\eta=||a_{ik}||\xi$ که در آن

$$\eta=\begin{pmatrix}\eta_۱\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix},\quad \xi=\begin{pmatrix}\xi_۱\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

نتیجه فوق را در قالب قضیه ذیل خلاصه می‌کنیم:



شکل ۸.۱: یک تصویر

قضیه ۳.۸. تبدیل خطی A را از فضای R به فضای خطی S با پایه‌هایی متناظر در نظر بگیرید. ξ را یک بردار سطری از مختصات یک بردار $x\in R$ و η را یک بردار سطری از مختصات بردار متناظر Ax در S فرض کنید. اگر M ماتریس تبدیل نظیر A باشد، آن‌گاه $\eta=M\xi$.

مثال ۵.۸. تبدیل خطی A از فضای $\mathbb{R}^۳$ به $\mathbb{R}^۲$ را طوری در نظر بگیرید که بردارهای پایهٔ

۴. مختصات در پایه‌های متناظر موردنظر است.

استاندارد

$$\boldsymbol{e}_۱ = (۱, ۰, ۰), \qquad \boldsymbol{e}_۲ = (۰, ۱, ۰), \qquad \boldsymbol{e}_۳ = (۰, ۰, ۱)$$

را به بردارهای $(۱, ۲) = A\boldsymbol{e}_۱$، $(-۱, -۲) = A\boldsymbol{e}_۲$ و $(۱۱, ۲۲) = A\boldsymbol{e}_۳$ می‌نگارد. در این صورت ماتریس نظیر A در پایه استاندارد به‌شکل $M = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۱۱ \\ ۲ & -۲ & ۲۲ \end{pmatrix}$ است. با نمادهای فوق بردارها $\xi = \boldsymbol{x}^t$ و $\eta = (A\boldsymbol{x})^t$ همان بردارهای $\boldsymbol{x}$ و $A\boldsymbol{x}$ در شکل سطری خود هستند و بنابراین

$$\eta = M\xi = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۱۱ \\ ۲ & -۲ & ۲۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳۲ \\ ۶۴ \end{pmatrix}$$

و لذا $A\boldsymbol{x} = (۳۲, ۶۴)$ که همان حاصل اثر ماتریس A بر بردار $\boldsymbol{x}$ است.

مثال ۸.۶ (قیمت‌ها و تقاضا). **دستگاه زیر شامل معادلات تقاضای n کالا را در نظر بگیرید:**

$$q_i = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_{ij} p_j, \qquad (j = ۱, \ldots, n) \tag{۸.۲}$$

خواننده از این نکته مهم آگاهست که تقاضای کالا صرفاً به قیمت خود کالا بستگی ندارد بلکه به قیمت بقیه کالاها نیز وابسته است. معادلهٔ فوق را می‌توان به فرم فشرده‌تر

$$\boldsymbol{q} = A\boldsymbol{p} \tag{۸.۳}$$

هم نوشت که در آن $q_{n\times ۱}$ ماتریس ستونی شامل مقادیر کالاهای مورد تقاضا و p بردار شامل قیمت‌های کالاهای متناظر است. A در اینجا ماتریس معرفی شده در (۸. ۲) است.

حال فرض کنید P و Q بترتیب فضای قیمت‌ها و فضای قیمتها بوده و به‌علاوه متغیرها کاملاً قسمت‌پذیرند. در واقع می‌توانیم فرض کنیم هر دو فضا، زیرفضایی از فضای اقلیدسی n بُعدی $\mathbb{R}^n$ هستند.[۵] اکنون با این فرض:

سئوال ۸.۱. نشان دهید رابطه (۸. ۳) یک تبدیل خطی (یکریختی) از فضای P به فضای Q است.

۵. البته چون مقادیر منفی در اقتصاد معنی ندارند لذا محدوده اعداد، اعداد نامنفی خواهد بود.

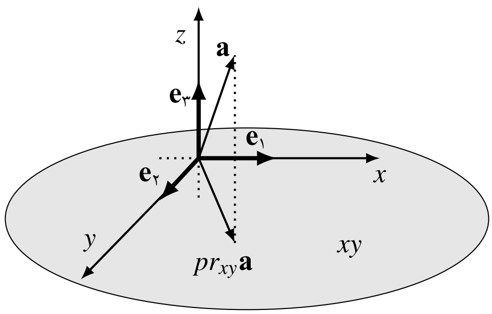
پاسخ. معادله (۳.۸) را به‌صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\mathbf{q} = f(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} \qquad (۴.۸)$$

که $P \ni \mathbf{p}$ و $Q \ni \mathbf{q}$ و P و Q هر دو فضاهای اقلیدسی هستند. برای اینکه نشان دهیم $P \xrightarrow{f} Q$ یک تبدیل خطی است کافی است تا تساوی

$$f(\alpha\mathbf{p}^{۱} + \beta\mathbf{p}^{۲}) = \alpha f(\mathbf{p}^{۱}) + \beta f(\mathbf{p}^{۲})$$

اثبات شود. به جای آن، با استفاده از (۴.۸) و کمک از اعمال جبری روی ماتریس‌ها به‌سادگی می‌توان تساوی معادلش یعنی $A(\alpha\mathbf{p}^{۱} + \beta\mathbf{p}^{۲}) = \alpha A(\mathbf{p}^{۱}) + \beta A(\mathbf{p}^{۲})$ را ثابت کرد و بنابراین (۴.۸) یک تبدیل خطی است.



شکل ۲.۸: عملگر تصویر بر صفحهٔ $xy-$

۱.۸ جمع و ضرب عملگرهای خطی

تعریف ۵.۸. فرض کنید R، S و T فضاهایی خطی‌اند. تبدیل $R \xrightarrow{C} T$ را حاصلضرب دو عملگر $R \xrightarrow{A} S$ و $S \xrightarrow{B} T$ به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$C\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in R$$

برای اسکالرهای حقیقی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ و اعضای دلخواه $\mathbf{x}_۱$ و $\mathbf{x}_۲$ از R می‌توان نوشت:

$$C(\lambda_۱\mathbf{x}_۱ + \lambda_۲\mathbf{x}_۲) = A[B(\lambda_۱\mathbf{x}_۱ + \lambda_۲\mathbf{x}_۲)] = A(B\lambda_۱\mathbf{x}_۱ + B\lambda_۲\mathbf{x}_۲)$$

$$= \lambda_1 AB\mathbf{x}_1 + \lambda_2 AB\mathbf{x}_2 = \lambda_1 C\mathbf{x}_1 + \lambda_2 C\mathbf{x}_2$$

و بنابراین تبدیل C تبدیلی خطی هم هست.

حالت خاص زمانی است که عملگرهای خطی دلخواه را که روی یک فضای خطی R اثر می‌کنند در هم ضرب کنیم. مثلاً اگر I را عملگر همانی و A را یک عملگر دلخواه (هر دو روی یک فضای خطی R) باشند، در این صورت $AI = IA = A$. و همچنین در نمونه ای جالب

$$A^0 = I,\ A^2 = AA,\ A^3 = A^2A, \cdots, A^n = AA^{n-1}, \cdots$$

مثال ۷.۸. عملگر دوران به اندازه زاویه α در صفحه $\mathbb{R}^2$ را با A_α نشان می‌دهیم. به‌وضوح حاصلضرب دو عملگر A_α و A_β همان دوران به اندازه زاویه $\alpha+\beta$ بوده و $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$. بعلاوه، به ازای هر عدد صحیح و مثبت (طبیعی) n، حاصل دوران n بار به اندازه زاویه α همان دوران به اندازه $n\alpha$ است و $A_\alpha^n = A_{n\alpha}$.

اکنون A و B را مجدداً دو تبدیل خطی از فضای خطی R در نظر گرفته به‌طوری که

$$\hat{A} = \|a_{ik}\|, \quad \hat{B} = \|b_{ik}\|$$

به‌ترتیب ماتریس‌های نظیر A و B، با توجه به پایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ از R باشند. مطلوب یافتن ماتریس عملگر خطی $C = AB$ است. بکمک تعریف داریم:

$$C\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\mathbf{e}_i$$

و

$$AB\mathbf{e}_k = A\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}A\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij}\mathbf{e}_i.$$

حال با مقایسه ضرایب طرفین تساوی داریم:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad (i,k = 1, \dots, n)$$

این تساوی دقیقاً همان مفهوم ضرب ماتریس‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ است و در واقع $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$.

مثال ۸.۸. دو تبدیل $\mathbb{R}^۲ \xrightarrow{A} \mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳ \xrightarrow{B} \mathbb{R}^۲$ با ماتریس‌های $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۲ & ۲۰ \end{pmatrix}$ داده شده‌اند. به ازای بردار $\boldsymbol{x} = (۱, ۲, ۳)$ داریم:

$$B\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۲ & ۲۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳۲ \\ ۶۴ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A(B\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳۲ \\ ۶۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۶۴ \\ ۹۶ \end{pmatrix}$$

از طرف دیگر

$$C = AB = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۲ & ۲۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۲۰ \\ ۰ & ۳ & ۳۰ \end{pmatrix}$$

و

$$A(B\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۲۰ \\ ۰ & ۳ & ۳۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۶۴ \\ ۹۶ \end{pmatrix}$$

که همان نتیجه قبلی است.

نکته ۱.۸. جمع دو تبدیل خطی A و B از فضای خطی R به فضای خطی S نیز مجدداً یک تبدیل خطی بین همان دو فضای خطی بوده برای آن داریم:

$$C = (A+B)\boldsymbol{x} \equiv A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in R$$

از جنبهٔ ماتریسی اگر $A = \|a_{ik}\|$ و $B = \|b_{ik}\|$ بترتیب ماتریسهای متناظر دو تبدیل خطی در پایه های $\mathscr{B}$ از R و $\mathscr{F}$ از S باشند، آن‌گاه ماتریس عملگر $C = A + B$ به‌صورت زیر قابل بیان است. اگر:

$$A\boldsymbol{e}_k = \sum_{i=۱}^{m} a_{ik}\boldsymbol{f}_i, \qquad B\boldsymbol{e}_k = \sum_{i=۱}^{m} b_{ik}\boldsymbol{f}_i, \qquad C\boldsymbol{e}_k = \sum_{i=۱}^{m} c_{ik}\boldsymbol{f}_i$$

آن‌گاه $(A+B)\boldsymbol{e}_k = \sum_{i=۱}^{m}(a_{ik}+b_{ik})\boldsymbol{f}_i$ که نشان می دهد $C = A + B$ اگر و فقط اگر

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \qquad (i, k = ۱, \ldots, n)$$

بنابر این ماتریس تبدیل مجموع دو تبدیل خطی با شرایط بیان شده، با جمع دو ماتریس تبدیل متناظر بدست می آید.

مثال ۸.۹. اگر A و B دو عملگر خطی بر $\mathbb{R}^۲$ با ماتریسهای متناظر $A=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} ۱۰ & ۲۰ \\ ۳۰ & ۴۰ \end{pmatrix}$ در پایهٔ استاندارد باشند آن‌گاه ماتریس تبدیل نظیر $A+B$ برابر است با

$$C=\begin{pmatrix} ۱۰ & ۲۱ \\ ۳۲ & ۴۳ \end{pmatrix}$$

تذکر ۸.۱. از آنجایی که یک تناظر یک به یک بین تبدیلات و ماتریسهای تبدیل متناظرشان وجود دارد، خواصی که برای ضرب ماتریسها و جمع آنها همانند جابجایی در جمع، شرکتپذیری در جمع و ضرب، پخشی و غیره سراغ داریم، به عملگرهای خطی هم به ارث می رسد.

۸.۲ تبدیل معکوس، تصویر و هستهٔ یک تبدیل

تعریف زیر یک حالت خاص از تعریف (۸.۲) است.

تعریف ۸.۶. دو عملگر خطی A,B روی فضای خطی R مفروضند. عملگر خطی B را وارون (معکوس) عملگر خطی A گویند هرگاه $AB=BA=I$ که در آن I عملگر همانی روی R است. معکوس عملگر A را با $A^{-۱}$ نشان می‌دهند. [6]

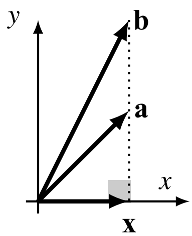
پس به ازای هر $\boldsymbol{x}\in R$ داریم:

$$A^{-۱}(A\boldsymbol{x})=A(A^{-۱}\boldsymbol{x})=I\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

مثال ۸.۱۰. عملگر دوران در صفحه $\mathbb{R}^۲$ به اندازه زاویه φ در مثال ۸.۳ الف را مجدداً در نظر بگیرید. عملگر وارون متناظر به A_φ یا $A_\varphi^{-۱}$ همان $A_{-\varphi}$ است. [7]

تذکر ۸.۲. ممکن است این سؤال به نظر خواننده برسد آیا هر عملگر خطی دارای وارون است؟ برای پاسخ به این سئوال عملگری را روی فضای خطی $\mathbb{R}^۲$ که هر بردار $\boldsymbol{t}$ را به تصویر آن بر محور x می نگارد در نظر بگیرید. به‌سادگی می‌توانید نشان دهید این عملگر خطی، معکوس ندارد. با توجه به‌شکل ۸.۳، بردار $\boldsymbol{x}$ تصویر بردار $\boldsymbol{a}$ و در عین حال تصویر بردار $\boldsymbol{b}$ روی محور طولهاست.

۶. اگر A، $\mathbf{x}$ را به $A\mathbf{x}$ بنگارد، $A\mathbf{x}$ توسط $A^{-۱}$ به $\mathbf{x}$ برمی‌گردد.
۷. $-\varphi$ زاویه مخالف φ است. (در جهت عکس).



شکل ۳.۸: $\mathbf{x}$ یک تصویر از دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است.

اگر A یک عملگر خطی و A^{-1} عملگر معکوس آن وجود داشته باشد، آن‌گاه برای ماتریس تبدیل نظیر آن‌ها (مشابه به رابطه تعریف ۶.۸) داریم:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

که I ماتریس همانی است[۸].

تعریف ۷.۸. دو فضای خطی R و S و تبدیل خطی $A : R \to S$ مفروضند. مجموعهٔ شامل همه $A\boldsymbol{x}$ که $\boldsymbol{x}$ برداری در R است را تصویر R تحت A نامیده و با $\boldsymbol{Im}_R(A)$ نشان می‌دهند. گاهی به مجموعه اخیر تصویر تبدیل A نیز گفته می‌شود[۹].

مثال ۱۱.۸. فضای خطی R را $\mathbb{R}^2$ و تبدیل خطی A را تصویر هر بردار دلخواه $\boldsymbol{z} \in R$ بر محور x بگیرید. در این صورت $\boldsymbol{Im}_R(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.

لم ۴.۸. به ازای تبدیل خطی $A : R \to S$، $\boldsymbol{Im}_R(A)$ زیرفضایی از S است.

برهان. فرض کنید $\mathbf{y}_1$ و $\mathbf{y}_2$ بردارهایی در $\mathrm{Im}_R(A)$ هستند. در این‌صورت

$$\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R, \quad \mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$$

برای λ_1 و λ_2 اسکالرهایی از $\mathbb{R}$ داریم:

$$\lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2 = \lambda_1 A\mathbf{x}_1 + \lambda_2 A\mathbf{x}_2 = A(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) \in \mathrm{Im}_R(A)$$

تساوی آخر از اینجا برقرار است که $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2$ عضوی از $\mathrm{Im}_R(A)$ است. □

۸. در اینجا هر دو ماتریس را بدون هیچ مشکلی با نمادهای خود عملگرها نشان دادیم.
۹. در این حالت آن را با $\mathrm{Im}(A)$ نشان می‌دهند.

لم ۸.۵. فرض کنید R یک فضای خطی و A عملگری روی آن است. اگر A وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $\boldsymbol{Im}_R(A) = R$.

تعریف ۸.۸. برای فضاهای خطی R و S و تبدیل خطی $A : R \to S$، مجموعه همه بردارهای $\mathbf{x} \in R$ که $A\mathbf{x} = \boldsymbol{0}_S$ را هستهٔ A می‌نامند. هستهٔ A را با $\ker_R(A)$ نشان می‌دهند.

لم ۸.۶. برای تبدیل خطی A، $\ker_R(A)$ زیرفضایی از R است.

قضیه ۸.۷. دو فضای خطی R و S و تبدیل خطی $A : R \to S$ مفروضند. در این‌صورت

$$\dim(\boldsymbol{Im}_R(A)) + \dim(\ker_R(A)) = \dim R$$

برهان. بُعد فضای R را n و $\dim(\ker_R(A)) = k$ که $k \leqslant n$ را فرض بگیرید. اگر مجموعهٔ

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$$

پایه‌ای برای هسته R تحت A باشد می‌توان آن را به پایه‌ای برای R با افزودن بردارهای مناسب

$$\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

تبدیل نمود.

به‌ازای بردارهای دلخواه $A\mathbf{e}_n, \ldots, A\mathbf{e}_{k+1}$، مجموعهٔ همه ترکیبات خطی شان با $\mathrm{Im}_R(A)$ دقیقاً یکی است. اکنون برای $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}_R(R)$ و با استفاده از تعریف $\mathbf{x} \in R$ ای وجود دارد که $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. با نگاه پایه‌ای به بردار $\mathbf{x}$، اسکالرهای $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ موجودند که

$$\mathbf{x} = \gamma_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \gamma_n \mathbf{e}_n$$

و چون $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ پایه‌ای برای $\ker_R(A)$ هست، پس

$$A\mathbf{e}_1 = A\mathbf{e}_2 = \cdots = A\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$$

و لذا $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \gamma_{k+1} A\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \gamma_n A\mathbf{e}_n$. نشان می‌دهیم $n-k$ برداری که در تساوی فوق به‌عنوان ترکیب خطی وجود دارند، مستقل خطی نیز هستند. اگر مستقل خطی نباشند پس به ازای اسکالرهای $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-k}$ (که همگی باهم صفر نیستند) خواهیم داشت:

$$\alpha_1 A\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \alpha_{n-k} A\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

با اثر A روی بردار $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \alpha_{n-k}\mathbf{e}_n$ داریم:

$$A\mathbf{x} = A(\alpha_1\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \alpha_{n-k}\mathbf{e}_n) = \alpha_1 A\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \alpha_{n-1}A\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

و این یعنی $\mathbf{x} \in \ker_R(A)$.

به‌عبارت دیگر بردار $\mathbf{x}$ هم عضوی از هسته و در نتیجه ترکیبی خطی از $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ و هم ترکیبی خطی از $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ در تصویر R تحت A. چون چنین چیزی به‌علت منحصر به‌فرد بودن نوع نمایش $\mathbf{x}$ در پایه $\{\mathbf{e}_1, \ldots, e_n\}$ وجود ندارد پس آخرین تساوی یک تناقض است. در نتیجه $n-k$ بردار $A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n$ مستقل خطی بوده و بنابراین می‌توانند $\mathrm{Im}_R(A)$ را تولید کنند و این یعنی $\dim(\mathrm{Im}_R(A)) = n-k$. □

مثال ۱۲.۸. تبدیل خطی A را یک عملگر روی $R = \mathbb{R}^3$ و با ماتریس زیر در نظر بگیرید.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

فضای برداری $\boldsymbol{Im}_R(A)$ توسط بردارهای $A\boldsymbol{e}_1$، $A\boldsymbol{e}_2$ و $A\boldsymbol{e}_3$ (همان ستون‌های A) تولید می‌شود. دو بردار از این سه بردار اخیر مستقل خطی‌اند (علت این است که ستون سوم ماتریس A مجموعی از دو ستون قبلی است) و بنابراین $\dim(\boldsymbol{Im}_R(A)) = 2$ و لذا الزاماً $\dim(\ker_R(A)) = 1$. زیرفضای هستهٔ شامل همه بردارهایی است که $Ax = \boldsymbol{O}$. به‌طور معادل

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و به‌سادگی خواهیم داشت $\boldsymbol{x} = \lambda(1, 1, -1)$ که در آن $\lambda \in \mathbb{R}$.

۳.۸ ماتریس‌های تبدیلات خطی با توجه به پایه‌های متفاوت

فرض کنید دو مجموعهٔ $\overbrace{\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}}^{\mathscr{B}}$ و $\overbrace{\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}}^{\mathscr{F}}$ دو پایه از فضای n-بُعدی و خطی R باشند. عملگر A را روی R در نظر گرفته و C را ماتریس تبدیل از پایه $\mathscr{B}$ به پایه $\mathscr{F}$ (مانند زیر) گرفته و عملگر C را با $C\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_{i\,(i=1,\ldots,n)}$ تعریف کنید:

$$\mathbf{f}_1 = c_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots + c_{n1}\mathbf{e}_n,$$

$$\mathbf{f}_2 = c_{12}\mathbf{e}_1 + \cdots + c_{n2}\mathbf{e}_n,$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{f}_n = c_{1n}\mathbf{e}_1 + \cdots + c_{nn}\mathbf{e}_n$$

اگر ماتریس‌های $A = \|a_{ik}\|$ و $B = \|b_{ik}\|$ به‌ترتیب ماتریس تبدیل A در پایه $\mathscr{B}$ و $\mathscr{F}$ را نشان دهند، آن‌گاه

$$A\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e}_i, \quad A\mathbf{f}_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\mathbf{f}_i$$

و در نتیجه $AC(\mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}C\mathbf{e}_i$. دو طرف تساوی را در C^{-1} ضرب کنید[10]، داریم:

$$C^{-1}AC\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} C^{-1}b_{ik}C\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\mathbf{e}_i$$

تساوی آخر نشان می‌دهد که ماتریس تبدیل B، ماتریس نظیر عملگر $C^{-1}AC$ با توجه به پایهٔ اولی بوده و لذا

$$B = C^{-1}AC \qquad (۵.۸)$$

مثال ۱۳.۸. می‌خواهیم ماتریس تبدیل عملگر خطی A و با ماتریس تبدیل $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ نسبت به پایه $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ را نسبت به پایهٔ

$$\{\boldsymbol{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{f}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_1\}$$

به‌دست آوریم. با توجه به تعریف $\boldsymbol{f}_1$ و $\boldsymbol{f}_2$، ماتریس تبدیل مختصات C به‌شکل $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ خواهد بود و لذا

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & -77 \\ 33 & 46 \end{pmatrix}$$

تذکر ۳.۸. ماتریس‌های A و B که در (۵.۸) در رابطه‌اند، متشابه نامیده می‌شوند. همچنین به ماتریس B مزدوج ماتریس A (که با توجه به C به‌دست آمده است) نیز می‌گویند.

۱۰. ماتریس C^{-1} وجود دارد چون $\{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ اعضایی مستقل خطی‌اند.

مثال ۱۴.۸. ماتریس‌های $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ متشابه و مزدوج با توجه به $C = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ هستند.

تذکر ۴.۸. رابطه تشابه (۵.۸) هنگامی که تبدیل خطی از یک فضای خطی به فضای دیگر در نظر گرفته شود مقداری پیچیده‌تر خواهد شد. به این ترتیب که با فرض دو فضای خطی R و S، پایه‌های E و E' برای R، پایه‌های F و F' برای S و ماتریس‌های تبدیل از E به F و از E' به F' به نام‌های C و D داریم:

$$A' = D^{-۱}AC$$

که در آن A و A' به‌ترتیب ماتریس‌های تبدیل یک تبدیل خطی از R به S در پایه E و F و پایه‌های E' به F' است.

۴.۸ مسائل

۱. تبدیل T_u یک انتقال است. ثابت کنید $T_u(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T_u\mathbf{x} + T_u\mathbf{y}$.

۲. با فرض بردار $\mathbf{a} = (۲, ۴, -۳)$، نگاشت

$$F : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R},\ F(\mathbf{x}) = ۳(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + ۱$$

مفروض است. مطلوب است مقدار $F((۳, ۲, ۱))$. مسئله را برای $\mathbf{x} = (۱, ۲, ۳)$ تکرار کنید.

۳. کدامیک از نگاشت‌های زیر خطی هستند؟

$(a)\ F : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲,\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}),$

$(b)\ F : \mathbb{R}^۴ \to \mathbb{R}^۴,\ F(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$

$(c)\ F : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳,\ F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (۰, -۱, ۰),$

$(d)\ F : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲,\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (۲\mathbf{x} + ۴, \mathbf{y}),$

$(e)\ F : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R},\ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{y}.$

۴. ثابت کنید نگاشت دوران در صفحه xy به اندازه زاویه مفروض α یک تبدیل خطی است.

۵. مجموعه R یک فضای سه بُعدی و با پایه $\{\mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲, \mathbf{e}_۳\}$ است. فرض کنید عملگری دارید که هر عضو $\mathbf{x} \in R$ را به تصویرش بر روی فضای تولید شده توسط $\mathbf{e}_۱$ می‌نگارد. اولاً ثابت کنید این عملگر

خطی است و ثانیاً ماتریس تبدیل متناظر را با توجه به پایه استاندارد پیدا کنید وقتی که R همان $\mathbb{R}^۳$ باشد.

۶. برای بردار $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^۳$، تبدیل F را تصویر ساز متعامد آن بر صفحه xy تعریف کنید. ثابت کنید F یک تبدیل خطی بوده و سپس ماتریس تبدیل متناظرش را با توجه به پایه استاندارد $\mathbb{R}^۳$ بیابید.

۷. در هریک از مسائل زیر اولاً بررسی کنید کدامیک از نگاشت‌های $\mathbb{R}^۳ \xrightarrow{F} \mathbb{R}^۳$ خطی هستند و ثانیاً ماتریس تبدیل متناظر F را با توجه به پایه‌هایی که $\mathbf{x} = (x_۱, x_۲, x_۳)$ و $F(\mathbf{x})$ در آن نمایش داده می‌شوند، به‌دست آورید.

$(a)\ \ F(\mathbf{x}) = (۲x_۱ + x_۲, x_۱ + x_۳, x_۳^۲),$

$(b)\ \ F(\mathbf{x}) = (x_۲ + x_۳, ۲x_۱ + x_۳, ۳x_۱ - x_۲ + x_۳),$

$(c)\ \ F(\mathbf{x}) = (x_۱, x_۲ + ۱, x_۳ + ۲),$

$(d)\ \ F(\mathbf{x}) = (x_۱ - x_۲ + x_۳, x_۳, x_۲).$

۸. عملگری را در نظر بگیرید که هر $\mathbf{a}_i$ را به $\mathbf{b}_i$ و با قاعدهٔ زیر می‌نگارد

$$\mathbf{a}_۱ = (۲,۳,۵) \longrightarrow \mathbf{b}_۱ = (۱,۱,۱), \qquad \mathbf{a}_۲ = (۰,۱,۲) \longrightarrow \mathbf{b}_۲ = (۱,۱,-۱)$$

$$\mathbf{a}_۳ = (۱,۰,۰) \longrightarrow \mathbf{b}_۳ = (۲,۱,۲)$$

ماتریس تبدیل این نگاشت را نسبت به پایه‌هایی به‌دست آورید که بردارها در آن داده شده‌اند.

۹. فرض کنید $F : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ با $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{a}$ که در آن $\mathbf{a} = (۱,۲,۳)$ تعریف شده است. اولاً نشان دهید F تبدیلی خطی است سپس ماتریس تبدیل متناظرش را با توجه به پایه استاندارد $\mathbb{R}^۳$ بیابید. ماتریس F نسبت به پایهٔ زیر چیست؟

$$\{\underbrace{(۱,۰,۱)}_{\mathbf{b}_۱},\ \overbrace{(۲,۰,-۱)}^{\mathbf{b}_۲},\ \underbrace{(۱,۱,۰)}_{\mathbf{b}_۳}\}$$

۱۰. فرض کنید ماتریس یک عملگر خطی با توجه به پایه $\{\mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲, \mathbf{e}_۳, \mathbf{e}_۴\}$ به‌شکل زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۰ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

مطلوب است ماتریس متناظر این عملگر در پایه‌های

$$\{\mathbf{e}_۲,\mathbf{e}_۳,\mathbf{e}_۴,\mathbf{e}_۱\},\qquad \{\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_۱+\mathbf{e}_۲,\mathbf{e}_۱+\mathbf{e}_۲+\mathbf{e}_۳,\mathbf{e}_۱+\mathbf{e}_۲+\mathbf{e}_۳+\mathbf{e}_۴\}$$

۱۱. یک عملگر خطی دارای ماتریس متناظری نسبت به پایه $\{\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_۲,\mathbf{e}_۳\}$ به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{pmatrix} ۱۵ & -۱۱ & ۵ \\ ۲۰ & -۱۵ & ۸ \\ ۸ & -۷ & ۶ \end{pmatrix}$$

ماتریس تبدیل آنرا نسبت به پایه ای با اعضای $\mathbf{f}_۱=۲\mathbf{e}_۱+۳\mathbf{e}_۲+\mathbf{e}_۳$، $\mathbf{f}_۲=۳\mathbf{e}_۱+۴\mathbf{e}_۲+\mathbf{e}_۳$ و $\mathbf{f}_۳=\mathbf{e}_۱+\mathbf{e}_۲+\mathbf{e}_۳$ بیابید.

۱۲. یک عملگر با ماتریس تبدیل $A=\begin{pmatrix} ۱ & -۱۸ & ۱۵ \\ -۱ & -۲۲ & ۱۵ \\ ۱ & -۲۵ & ۲۲ \end{pmatrix}$ نسبت به پایهٔ

$$\{\underbrace{(۸,-۶,۷)}_{\mathbf{a}_۱},\ \overbrace{(-۱۶,۷,-۱۳)}^{\mathbf{a}_۲},\ \underbrace{(۹,-۳,۷)}_{\mathbf{a}_۳}\},$$

داده شده است. ماتریس این عملگر را با توجه به پایهٔ زیر به‌دست آورید.

$$\{\underbrace{(۱,-۲,۱)}_{\mathbf{b}_۱},\ \overbrace{(۳,-۱,۲)}^{\mathbf{b}_۲},\ \underbrace{(۲,۱,۲)}_{\mathbf{b}_۳}\},$$

۱۳. فرض کنید $F_۱:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ در پایهٔ $\{\mathbf{a}_۱=(-۳,۷),\mathbf{a}_۲=(۱,-۲)\}$ دارای ماتریس تبدیل

$$\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۵ & -۳ \end{pmatrix}$$

و $F_۲:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ در پایهٔ $\{\mathbf{b}_۱=(۶,-۷),\mathbf{b}_۲=(-۵,۶)\}$ دارای ماتریس تبدیل

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix}$$

است. ماتریس تبدیل حاصلضرب $F_۱F_۲$ را در پایه $\{\mathbf{a}_۱,\mathbf{a}_۲\}$ و سپس در پایه $\{\mathbf{b}_۱,\mathbf{b}_۲\}$ و در نهایت در پایه استاندارد $\mathbb{R}^۲$ بیابید.

۱۴. ثابت کنید هر عملگر خطی $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را می‌توان با قاعده $F(\mathbf{x})=\alpha\mathbf{x}$ که در آن α اسکالر حقیقی دلخواهی است، نمایش داد.

۱۵. برای دو انتقال T_{u_1} و T_{u_2} ثابت کنید $T_{u_1}T_{u_2} = T_{u_1+u_2}$.

۱۶. نگاشت‌های $A : R \to S$ و $B : S \to T$ دو تبدیل خطی هستند که $\ker B = \mathrm{Im}(A)$. ثابت کنید:

$$\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im} B) = \dim R - \dim S + \dim T.$$

۱۷. برای دو ماتریس مزدوج A و B نشان دهید B و A هم ماتریس‌هایی مزدوج هستند[۱۱] به‌علاوه نشان دهید اگر A و B ماتریس‌هایی مزدوج و B و C هم ماتریس‌هایی مزدوج باشند، آن‌گاه A و C هم در تزویج هم قرار دارند[۱۲].

۱۸. فرض کنید A و B ماتریس‌هایی از مرتبه n و مزدوج هستند. ثابت کنید:

(a) $\det A = \det B$

(b) $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} B$

(c) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

۱۱. تزویج یک رابطه تقارنی است.
۱۲. رابطه تزویج بین ماتریس ها رابطه‌ای تعدی است.

پیوست‌ها

آ

اعداد طبیعی و استقراء

در این ضمیمه، به بسط یکی از قویترین و عمومی ترین ابزار در اثبات قضایا و فرمولهایی که به یک پارامتر طبیعی (عدد طبیعی) وابسته اند،می پردازیم. این روش به **استقراء** موسوم است.

قبل از ورود منطقی به داستان یک مثال می‌آوریم. یک بازی دومینو را در نظر آورید. اگرچه پایان یافتن یک بازی نمی‌تواند همانند به اثبات رسیدن یک ادعای ریاضی باشد اما یک شباهت ظاهری در این نوع بازی با اثبات به روش استقراء وجود دارد. در این بازی اجزای خاصی پشت سرهم قرار گرفته، با ضربه ای کوچک به یکی از آنها، پی در پی و تا پایان فرو ریخته و بازی پایان می‌یابد. این پی‌درپی افتادنها برای ما در روند اثبات با استقراء ایده آفرین است.

به یک مثال ساده دیگر و البته به ریاضی نزدیک‌تر در زیر توجه کنید.

حکم: نشان دهید مساحت یک مستطیل فرضی $n \times ۵$ برابر است با $S_n = ۵n$.

روند اثبات را به شکل خاص و با تمرکز بر n صورت‌بندی می‌کنیم. فرض کنیم $n = ۱$. در این‌صورت مستطیل داده شده را می توان به ۵ مستطیل کوچکتر هر یک با مساحت ۱ تقسیم کرد و لذا مساحت برابر است با

$$S_۱ = ۵ = ۵ \times ۱$$

این مرحله را همانند افتادن جزء اول دومینو ببینید.

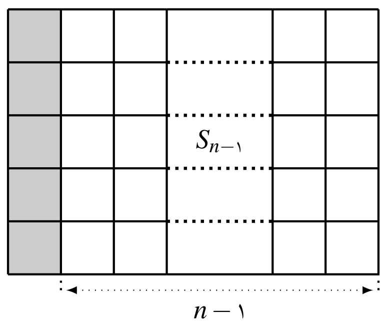
اگر $n = ۲$ آن‌گاه مستطیل را به دو مستطیل نواری شکل که هر یک دارای ۵ مستطیل با مساحت ۱ هستند،جدا کنید. در این‌حالت مساحت کل با معادله زیر بدست می‌آید:

$$S_۲ = ۱۰ = ۵ + ۵ = ۵ \times ۲$$

برای $n = ۳$ مستطیل را به ۳ نوار مستطیلی ۱×۵ بریده و این‌چنین مساحت کلی برابر است با:

$$S_۳ = ۵ + ۵ + ۵ = ۵ \times ۳$$

و به همین شکل، یک مستطیل $n \times ۵$ را به دو مستطیل $(n - ۱) \times ۵$ و ۱×۵ جدا کرده (شکل زیر) و فرض کنید مساحت مستطیل اول $S_{n-۱} = ۵(n - ۱)$ است.[1] نهایتاً مساحت کلی مستطیل $n \times ۵$ با جمع دو زیر مساحت $۵n = ۱ \times ۵ + (n - ۱)۵$ بدست می آید(شکل زیر را ببینید).



شکل A.۱: مساحت یک مستطیل (اثبات باستقراء)

روندی که در مثال بالا طی شد، را می‌توان در بسیاری از مسائل ولی با فرمی کم و بیش پیچیده انجام داد. برای اینکه به یک توصیف دقیق تر دست پیدا کنیم لازم است تا دربارهٔ اعداد طبیعی و سرشت آنها بدقت بحث کنیم.

آ.۱ اعداد طبیعی: تعریف اصل موضوعی

اعداد طبیعی را به‌عنوان اشیایی **اصلی** و **پایه ای** در ریاضیات می شناسند. بسیاری از مفاهیم پیچیده‌تر همانند اعداد گویا، اعداد حقیقی، بردارها و ماتریسها را می توان بکمک آنها تعریف کرد. بقول یکی از بزرگترین جبردانان قرن نوزدهم میلادی، لئوپولد کرونکر[2]:

خداوند اعداد صحیح را آفرید و بقیه اعداد را بشر

۱. این دقیقاً حالتی است که جزء $n - ۱$-اُم دومینو افتاده است.

2. Leopold Kronecker (۱۸۲۳-۱۸۹۱)

اما براستی اعداد طبیعی چه هستند؟ برای این سئوال جوابهای بسیار زیادی آنهم در سطوح مختلفی از ریاضیات داده شده است. بر طبق تعریفی ابتدایی از آنها، اعداد طبیعی، اعدادی هستند که در فرم شمارشی زیر ظاهر شده و استفاده می شوند:

$$۰, ۱, ۲, ۳, \cdots$$

اگر خط اعداد حقیقی را تجسم کنید، در فرم هندسی، مجموعهٔ این اعداد (که آنرا با $\mathbb{N}$ نشان می دهند) نقاطی روی این خط و بفاصله یک واحد از هم هستند. در واقع، نقطه شروع (حرف O) متناظر با صفر، نقطهٔ بعدی در سمت راست آن بفاصلهٔ یک واحد برای عدد ۱ و به‌همین ترتیب الی نهایت.

در نظریهٔ مجموعه‌ها، هر عدد طبیعی را با یک مجموعهٔ n عضوی (که در آن عدد n را می‌شناسیم)، یکی می گیرند:

$$\Big\{۰ = \varnothing, ۱ = \{۰\}, ۲ = \{۰, ۱\}, ۳ = \{۰, ۱, ۲\}, \cdots\Big\} \qquad (\star)$$

و لذا این اعداد، با چنین تعریفی، نقش بنیادی در شمارش همهٔ مجموعه‌های متناهی پیدا می‌کنند.

اکنون به تعریف عام تر از این دسته از اعداد به‌طوری که همهٔ آنچه دربارهٔ آنها آمد را پوشش دهد، می پردازیم. این تعریف بر ۳ اصل که توسط ژوزف پئانو[۳] ارائه شد، متکی است. این اصول به نام **اصول موضوع پئانو** معروف‌اند:

فرض کنیم $\mathscr{N}$ یک مجموعه، ۰ عضوی از آن و $s : \mathscr{N} \to \mathscr{N}$ تابع[۴] (بنام تالی) است. در این‌صورت مجموعهٔ $\mathscr{N}$ را همانند مجموعهٔ اعداد طبیعی می انگاریم هرگاه:

(۱) اگر $s(m) = s(n)$ آن‌گاه $m = n$ و این یعنی تابع s یک تابع ۱-۱ است.

(۲) هیچ عدد n ای نداریم که تحت s به صفر نگاشته شود.

(۳) برای هر n اگر $n \in A$ آن‌گاه $s(n) \in A$ نتیجه دهد $A = \mathscr{N}$.

تمرین آ.۱. با توجه به دو نوع تعریفی که در بالا آمد، یک عملگر مناسب s برای هر کدام (جداگانه) تعریف کنید. می توانید مجموعهٔ $\mathscr{N}$ را در اولی مجموعهٔ همهٔ نقاط روی خط

3. Giuseppe Peano(۱۸۵۸-۱۹۳۲)

۴. مثلاً $s : n \mapsto n + ۱$.

اعداد حقیقی و در نمونه دوم آنرا با توجه به $(\star)$ در نظر بگیرید. حال یک نگاشت به‌صورت:

$$n \overset{s}{\mapsto} n+m$$
$$n+(m+۱) = s(m+n), \quad n+۰ = n$$

تعریف می کنیم. فرض کنید مجموعهٔ A، همهٔ اعدادی مانند $m \in \mathscr{N}$ باشند که با توجه به قاعدهٔ فوق عدد $m+n$ را بتوان محاسبه کرد. بنابر قاعدهٔ اول $۰ \in A$ و بنابر قاعدهٔ دوم، به‌ازای هر $m \in A$، داریم $m+۱ \in A$. مابقی اثبات بکمک اصل استقراء حاصل می‌شود. در واقع، به‌ازای هر $m,n \in \mathscr{N}$، عدد $m+n$ تعریف شدنی است.

تمرین آ.۲. تعریفی را مشابه با تعریف بالا که برای جمع ارائه شد و برای عملگرهای زیر بیاورید. به‌ازای هر عدد طبیعی n و m:

(۱) $m \cdot n$

(۲) m^n

روند تعریفی یک عملگر را که از هر عدد طبیعی m، به عدد $m+۱$ رسیده و تا الی آخر ادامه دارد را **بازگشتی** می نامند. مثلاً در فرمول (۳.۶)، شاهد یک روند بازگشتی جهت محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس مرتبهٔ n هستیم. این نوع تعاریف، همان‌طور که در ادامه می آید، برای استفاده در انجام استنتاجهای استقرایی مناسب اند.

آ.۲ اصل استقراء

برای اینکه بتوان هر خاصیت مهم از اعداد طبیعی را از اصول موضوع پئانو استنتاج کرد، لازم است تا فرم خاصی از نتیجه گیری بنام **اصل استقراء (استقرای ریاضی)** را بکار بریم. بدین منظور، فرض کنیم $P(n)$ گزاره ای دلخواه و تابعی از عدد طبیعی n باشد.[۵]

قضیه آ.۱. فرض کنیم $P(n)$ گزاره ای وابسته به $n \in \mathbb{N}$ و صادق در شرطهای زیر است:

(۱) $P(۰)$ گزاره ای درست است (که به آن پایهٔ اسقراء و یا شروع استقراء می گویند).

(۲) گزارهٔ $P(n+۱)$ (مرحلهٔ استقرایی) درست است به‌شرطی که $P(n)$ درست باشد. در این‌صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n صحیح و برقرار است.

۵. برای نمونه، "n مساوی ۵ است"، "$n+۲ = ۲+n$" و یا "$n \leqslant ۲$" و یا برای هر سه عدد طبیعی x,y,z داریم "$x^n+y^n = z^n$".

برهان. فرض کنید A مجموعه ای شامل همهٔ $n \in \mathbb{N}$هایی است که به‌ازای آنها $P(n)$ درست است. با توجه به فرض قضیه، $P(۰)$ درست بوده و این یعنی $۰ \in A$. از طرفی از برقراری مرحلهٔ استقرایی که می گوید برای هر $n \in A$، $n + ۱ \in A$ و بکمک اصل استقراء نتیجه می‌شود $A = \mathbb{N}$. □

مثال آ.۱. **فرمول زیر را اثبات می کنیم. در ابتدا، اسم گزاره (تساوی) را $P(n)$ بگذارید:**

$$۰ + ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲} \tag{آ.۱}$$

به‌وضوح $P(۰)$ درست است زیرا

$$P(۰) : ۰ = \frac{۰ \times ۱}{۲}$$

که نشان می دهد پایهٔ استقراء برقرار است.

اکنون $P(n)$ را گزاره ای صحیح گرفته و [۶] و به طرفین $n + ۱$ را بیافزایید:

$$\begin{aligned}(۰ + ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n) + (n + ۱) &= \frac{n(n+۱)}{۲} + (n + ۱) \\ &= (n + ۱)\left(\frac{n}{۲} + ۱\right) = \frac{N(N+۱)}{۲}\end{aligned}$$

که در آن $N = n + ۱$. برقراری تساوی آخر نشان می دهد که $P(n + ۱)$ درست است. لذا حکم استقراء اثبات و ادعای (آ.۱) در واقع به‌عنوان اتحادی در اعداد طبیعی قابل استفاده است.

مثال آ.۲. **در این مثال، به استنتاج تعدادی از خواص اعداد طبیعی ناشی از اصول موضوع پئانو بکمک استقراء، می پردازیم. همهٔ حروف اعدادی طبیعی هستند.**

(۱) گزارهٔ $P(n) : ۰ + n = n$ مفروض است. به‌ازای جمیع $m \in \mathbb{N}$، $۰ + m = m$ و در حالت خاص $۰ = ۰ + ۰$ و بنابر این $P(۰)$ یعنی پایهٔ استقراء درست است.

اکنون $P(n)$ را درست فرض کرده، داریم:

$$۰ + (n + ۱) = s(۰ + n) = s(n) = n + ۱$$

و این یعنی $P(n + ۱)$ درست است. چون هم پایهٔ استقراء و هم مرحلهٔ استقرایی، استنتاجهایی درستند لذا برای هر عدد طبیعی n، گزارهٔ $P(n)$ نیز درست است.

۶. به‌عبارت دیگر می پذیریم که این ادعا به‌ازای عدد فرضی n برقرار باشد.

(۲) نگاهی به خاصیت شرکت پذیری انداخته و درستی آنرا نسبت به جمع معمولی در اعداد طبیعی بررسی می کنیم:

$$S_{l,m}(n) : (l+m)+n = l+(m+n)$$

پایهٔ استقراء درست است چون:

$$S_{l,m}(۰) = (l+m)+۰ = l+m = l+(m+۰)$$

حال با فرض درستی $S_{l,m}(n)$ به‌ازای n ای طبیعی، باید درستی مرحلهٔ استقرایی $S_{l,m}(n+۱)$ را نشان دهیم. داریم:

$$\overbrace{(l+m)+(n+۱)}^{S_{l,m}(n+۱)} = \overbrace{s((l+m)+n)}^{s(l+(m+n))} = \underbrace{l+s(m+n)}_{l+(m+(n+۱))},$$

که نشان می دهد خاصیت شرکتپذیری هم در بین اعداد طبیعی و با عمل جمع برقرار است.

(۳) دربارهٔ درستی گزارهٔ زیر را در اعداد طبیعی

$$Q_m(n) = m+(n+۱) = (m+۱)+n$$

پایهٔ استقراء درست است زیرا

$$Q_m(۰) : m+(۰+۱) = (m+۱)+۰$$

با فرض صحت $Q_m(n)$ برای n ای، به تحقیق درستی $Q_m(n+۱)$ می پردازیم:

$$\overbrace{m+(n+۱+۱)}^{Q_m(n+۱)} = s(m+(n+۱)) = s((m+۱)+n) = (m+۱)+(n+۱)$$

و لذا بنابه اصل استقراء، $Q_m(n)$ برای هر دو عدد طبیعی m,n گزاره ای بامعنی و یک اتحاد است.

(۴) گزاره $m+n = n+m$ داده شده است. به‌وضوح اگر $n = ۰$ آن‌گاه $m+۰ = ۰+m$ گزاره ای همیشه درست است. اگر این ادعا به‌ازای n ای صحیح باشد آن‌گاه بکمک قسمت قبل:

$$m+(n+۱) = s(m+n) = s(n+m) = n+(m+۱) = (n+۱)+m$$

تمرین آ.۳. بکمک ضرب بیان شده در تمرین (آ.۲)، دو خاصیت استاندارد $m(nk) = (mn)k$ و $mn = nm$ را در اعداد طبیعی اثبات کنید.

در ادامه، به دو صورت از قضیهٔ آ.۱ می پردازیم:

نتیجه آ.۲. (استقرای ضعیف) فرض کنید $P(n)$ گزاره ای بر حسب عدد طبیعی n و صادق در شرایط زیر است:

(۱) به‌ازای $n_۰$ای، $P(n_۰)$ درست است.

(۲) برای $n \geqslant n_۰$، گزارهٔ $P(n+۱)$ درست است هرگاه $P(n)$ درست باشد. در این‌صورت برای $n \geqslant n_۰$، گزارهٔ $P(n)$ برقرار است.

برهان. گزارهٔ $P'(n)$ را به شکل "$P(n+n_۰)$ درست است" در نظر می گیریم. در این صورت، شرایط فوق روی $P(n)$ معادل با برقراری شرایط قضیهٔ آ.۱ روی گزارهٔ $P'(n)$ خواهد بود. لذا با بکار بردن اصل استقراء و بعد از آن استنتاج اینکه $P'(n)$ برای هر عدد طبیعی درست است، اثبات را پیش برده، اثبات را کامل کنید(در واقع، به‌ازای $n \geqslant n_۰$، گزارهٔ $P(n)$ گزاره ای همیشه درست می شود.). □

مثال آ.۳. فرض کنیم $n > ۰$ عددی صحیح است. می‌خواهیم تا به اثبات نامساوی زیر بپردازیم:

$$۲^n > ۳n \qquad (آ.۲)$$

با کمی دقت و برای $۰ < n \leqslant ۳$، ادعای فوق کاملاً غلط است. عدد $n = ۴$ را امتحان می‌کنیم:

$$۲^۴ = ۱۶ > ۱۲ = ۳ \times ۴$$

که درست است.

حال فرض کنیم نامعادله برای $n \geqslant ۴$ برقرار باشد. رویه اثبات این‌طور است که مقدار $n_۰ = ۴$ مطابق با اولین شرط (برقرار شده) گزارهٔ آ.۲ بوده و از این‌رو با تعریف زیر، $P(۴)$ گزاره‌ای درست است:

$$P(n) : ۲^n > ۳n$$

بدنبال استنتاج درستی $P(n+1)$ از روی درستی $P(n)$ هستیم که در آن $n \geqslant 4$. حال:

$$\xrightarrow[\text{را در ۲ ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین } P(n)} 2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2 \times 3n = 6n$$

چون $n \geqslant 4$ لذا

$$6n \geqslant 3n + 3n > 3n + 3 = 3(n+1)$$

و بنابر این $2^{n+1} > 6n > 3(n+1)$ که برقراری $P(n+1)$ را به‌ازای $n \geqslant 4$ نشان می‌دهد. از این‌رو آ.۲ برای مقادیر $n \geqslant 4$ ادعایی همواره درست است.

نتیجه آ.۳. (استقرای قوی) فرض کنید $P(n)$ گزاره ای بر حسب عدد طبیعی n و واجد شرایط زیر است:

(۱) به‌ازای $n_0 \in \mathbb{N}$ای، $P(n_0)$ درست است.

(۲) گزارهٔ $P(n+1)$ درست است به‌شرطی که برای $n \geqslant k \geqslant n_0$، $P(n)$ درست باشد. در این صورت برای هر $n \geqslant n_0$، گزارهٔ $P(n)$ برقرار است.

برهان. گزارهٔ $P'(n)$ را به صورت "$P(k)$ برای $n \geqslant k \geqslant n_0$ گزاره ای درست است" تعریف کرده و سپس نتیجهٔ آ.۲ را برای $P'(n)$ بکار برید. □

مثال آ.۴. برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس زیر:

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

فرض کنید $D_n = \det(A_n)$. از اینکه $D_1 = 3$ و $D_2 = 7$ حدس می زنیم:

$$D_n = 2^{n+1} - 1, \quad (n \geqslant 1)$$

و برای اثبات این ادعا، از استقرای قوی کمک می گیریم.

اگر $n_0 = 1$ آن‌گاه پایهٔ استقراء، $P(1)$، به‌سادگی حاصل می شود ($D_1 = 3$).

حال $D_{n+۱}$ را برای ورود به مرحلهٔ اسقرایی محاسبه می کنیم. واضح است اگر $n = ۱$ آن‌گاه

$$D_{n+۱} = D_۲ = ۷$$

و لذا حدس ما درست است. اگر $n \geqslant ۲$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} D_{n+۱} = \det(A_{n+۱}) &= \det \left(\begin{array}{cc|ccc} ۳ & ۲ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۲ & \cdots & ۰ \\ \hline ۰ & ۱ & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{n-۱} & \\ ۰ & ۰ & & & \end{array}\right) \\ &= ۳ \times \det(A_{n-۱}) - ۲ \times ۱ \times \det(A_{n-۱}) - ۲ \times ۲ \times ۰ \\ &= ۳D_n - ۲D_{n-۱} \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از $P(n)$ و $P(n-۱)$ داریم:

$$D_{n+۱} = ۳(۲^{n+۱} - ۱) - ۲(۲^n - ۱) = ۲ \times ۲^{n+۲} - ۱$$

و به این‌صورت $P(n+۱)$ استنتاج شد و حدس ما برای مقادیر بزرگتر یا مساوی یک برقرار است.[۷]

آ.۳ مسائل

۱. نشان دهید تساوی $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n-۱) = n^۲$ همواره برقرار است.

۲. مجموع $\frac{۱}{۱\times۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \cdots + \frac{۱}{n(n-۱)}$ را بدست آورید.

۳. نامعادلهٔ زیر (بنام نامعادلهٔ برنولی) را که در آن $x \geqslant ۰$ عدد حقیقی دلخواه و n عددی طبیعی است را ثابت کنید:

$$(۱+x)^n \geqslant ۱ + nx$$

۴. ثابت کنید اگر $x + \frac{۱}{x}$ عددی صحیح باشد آن‌گاه $x^n + \frac{۱}{x^n}$ نیز هم عددی صحیح است.

۵. فرض کنید یک ماشین اتوماتیک دو نوع کارت اعتباری تلفن، یکی به قیمت ۳ دلار (برای ۳۰ دقیقه مکالمه) و دیگری به قیمت ۵ دلار (برای ۷۰ دقیقه مکالمه) عرضه می کند. نشان دهید به‌ازای هر

۷. بقیهٔ روشهای محاسبهٔ دترمینان را در ضمیمهٔ **ب** بیان می کنیم.

مقدار بزرگتر از ۷ دلار می‌توان از این کارتها بدون اینکه مبلغی اضافی پرداخت یا دریافت شود، خریداری کرد.

۶. همهٔ اعداد طبیعی را پیدا کنید که برای آنها نامساوی $n^۲ < ۲^n$ برقرار باشد. این اعداد چه توصیفی دارند؟

۷. حاصل ماتریسهای $\begin{pmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{pmatrix}^n$ و $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$ را پیدا کنید.

۸. نشان دهید حاصل زیر به‌ازای یک مقدار c همواره درست است:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} c & ۰ \\ ۰ & c \end{pmatrix}$$

۹. ثابت کنید برای عدد طبیعی n،

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & -۱ & ۰ \end{vmatrix} = \frac{۱ + (-۱)^n}{۲}$$

ب

روش‌های محاسبهٔ دترمینان

در این قسمت به بیان روشهای عالی‌تر محاسبهٔ دترمینان ماتریسهای خاص می‌پردازیم (این روشها را به آنچه در بخش ۳.۴ آمد، می‌افزاییم). هرچند این ضمیمه را می‌توان اساساً در مرجع [۲۵] یافت ولی برای مطالعهٔ بیشتر به مرجع [۱۵] هم مراجعه کنید.

ب.۱ تبدیل دترمینان

در مواقعی، اتحادهای شامل دترمینان را می‌توان بدون محاسبهٔ مستقیم دترمینان و صرفاً با انجام اَعمالی که به آنها **تبدیل** می‌گویند، به‌سادگی اثبات کرد. به دو مثال زیر توجه کنید:

مثال ب.۱. برای اثبات درستی اتحاد زیر:

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & bc \\ ۱ & b & ca \\ ۱ & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{vmatrix}$$

قادریم تا یک ستون از دترمینان را به مضربی از ستونی دیگر افزوده به‌طوری که مقدار دترمینان بدون تغییر بماند (به خاصیت (a) در بخش ۳.۴ رجوع کنید):

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & bc \\ ۱ & b & ca \\ ۱ & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & a & bc+a(a+b+c)-۱\times(ab+ac+bc) \\ ۱ & b & ac+b(a+b+c)-۱\times(ab+ac+bc) \\ ۱ & c & ab+c(a+b+c)-۱\times(ab+ac+bc) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{vmatrix}$$

مثال ب.۲. برای اثبات درستی تساوی

$$\begin{vmatrix} ۰ & x & y & z \\ x & ۰ & z & y \\ y & z & ۰ & x \\ z & y & x & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & z^۲ & y^۲ \\ ۱ & z^۲ & ۰ & x^۲ \\ ۱ & y^۲ & x^۲ & ۰ \end{vmatrix}$$

از این نکته استفاده می‌کنیم که:

$$\frac{۱}{x^۲y^۲z^۲}\begin{vmatrix} ۰ & xyz & xyz & xyz \\ x & ۰ & xz^۲ & xy^۲ \\ y & yz^۲ & ۰ & x^۲y \\ z & y^۲z & x^۲z & ۰ \end{vmatrix} = \frac{(xyz)^۲}{x^۲y^۲z^۲}\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & z^۲ & y^۲ \\ ۱ & z^۲ & ۰ & x^۲ \\ ۱ & y^۲ & x^۲ & ۰ \end{vmatrix}$$

ب.۲ روش‌های محاسبهٔ دترمینان از مراتب بالا

ب.۲.۱ تحویل به ماتریس‌های مثلثی

یکی از مناسب‌ترین روشهای محاسبهٔ دترمینان، تحویل ماتریس به فرمی مثلثی بکمک عملیات سطری مقدماتی و سپس ارائه دترمینان ماتریس با ضرب درآیه‌های روی قطر اصلی ماتریس تحویل شده است[1]. مثلثی شدن یک ماتریس هم می‌تواند از نوع بالا مثلثی و هم از نوع پایین مثلثی انجام شود و در یافتن دترمینان ماتریس اصلی، از این حیث فرقی وجود ندارد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ب.۳. با تحویل ماتریس

$$\begin{vmatrix} a_۱ & x & x & \cdots & x \\ x & a_۲ & x & \cdots & x \\ x & x & a_۳ & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

به ترتیبی که می‌آید، ماتریس را بالا مثلثی می‌کنیم. در ابتدا سطر اول را از همهٔ سطرها کم کنید:

$$\begin{vmatrix} a_۱ & x & x & \cdots & x \\ x-a_۱ & a_۲-x & ۰ & \cdots & ۰ \\ x-a_۱ & ۰ & a_۳-x & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-a_۱ & ۰ & ۰ & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

۱. مثال ۳.۵ را ببینید.

حال جملات $a_۱ - x$ را از ستون اول، $a_۲ - x$ را از ستون دوم و الی آخر تا به ماتریس زیر برسید:

$$(a_۱ - x)(a_۲ - x)\cdots(a_n - x)\begin{vmatrix} \frac{a_۱}{a_۱-x} & \frac{x}{a_۲-x} & \frac{x}{a_۳-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{vmatrix}$$

اگر $\frac{a_۱}{a_۱ - x}$ را به‌شکل $\frac{x}{a_۱ - x} + ۱$ ببینید و همهٔ ستونها را با ستون اول جمع ببندید، ماتریس بالا مثلثی زیر بدست می‌آید:

$$(a_۱ - x)(a_۲ - x)\cdots(a_n - x)\begin{vmatrix} \left(۱ + \sum_{i=۱}^{n} \frac{x}{a_i-x}\right) & \frac{x}{a_۲-x} & \frac{x}{a_۳-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{vmatrix}$$

و بنابر این دترمینان ماتریس اصلی با حاصلضرب درآیه‌های روی قطر اصلی ماتریس فوق برابر است:

$$\det A = (a_۱ - x)(a_۲ - x)\cdots(a_n - x)\left(۱ + \sum_{i=۱}^{n} \frac{x}{a_i - x}\right)$$

ب.۲.۲ روش مبتنی بر ضرایب

در این قسمت فرض می‌کنیم D، دترمینان ماتریس $A = ||a_{ij}||_{n\times n}$ را نشان دهد.

گزاره ب.۱. اولاً D چندجمله‌ای بر حسب $n^۲$ متغیر a_{ij} و از مرتبهٔ n است. ثانیاً D با توجه به اعضای $a_{i۱}, \ldots, a_{in}$ (iاُمین سطر A)، چندجمله‌ای خطی است.

برهان. با رجوع به تعریف D و تجزیهٔ آن بر حسب سطر iام: $D = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}A_{ij}$ که در آن A_{ij} همسازهٔ نظیر a_{ij} است. چون A_{ij} مستقل از درآیه‌های سطر iام است لذا D چندجمله‌ای خطی بر حسب $a_{i۱}, \ldots, a_{in}$ بوده و بنابر این دومین قسمت گزاره اثبات می‌گردد.

برای اثبات اولین ادعا، می‌توان با یک دید استقرایی چنین فرض کرد که مینورهای M_{ij} از مرتبهٔ $n-۱$ همگی چندجمله‌هایی از مرتبهٔ $n-۱$ هستند. چون $A_{ij} = (-۱)^{i+j}M_{ij}$ لذا D می‌بایست مجموعی از چندجمله‌هایی از مرتبهٔ n باشند.

اکنون به‌جهت یافتن مقدار D، آنرا به‌صورت چندجمله‌ای از تعدادی متغیر در نظر گرفته و چون چندجمله‌ای را می‌توان (گاهی) به‌شکل عوامل ضربی (ضرایب) تجزیه کرد لذا با مقایسه اعضای D و عوامل ضربی در ضرایب خطی، D به‌دست می‌آید. $\square$

مثال ب.۴. دترمینان $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$ **را در نظر بگیرید. ستونهای آنرا با** A_1، A_2، A_3 **و** A_4 **نام گذاری کرده و همهٔ آنها را با ستون اول جمع می‌زنیم:**

$$D = \begin{vmatrix} x+y+z & x & y & z \\ x+y+z & 0 & z & y \\ x+y+z & z & 0 & x \\ x+y+z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \overbrace{(x+y+z)}^{\text{ضریب خطی}} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

حال $A_1 + A_2 - A_3 - A_4$ **را انجام دهید:**

$$D = \begin{vmatrix} x-y-z & x & y & z \\ x-y-z & 0 & z & y \\ -x+y+z & z & 0 & x \\ -x+y+z & y & x & 0 \end{vmatrix} = -(-x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ -1 & z & 0 & x \\ -1 & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

با انجام $A_1 + A_3 - A_2 - A_4$ **داریم:**

$$D = \begin{vmatrix} -x+y-z & x & y & z \\ x-y-z & 0 & z & y \\ -x+y-z & z & 0 & x \\ x-y+z & y & x & 0 \end{vmatrix} = -(x-y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ -1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ -1 & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

و بهمین صورت با $A_1 + A_4 - A_2 - A_3$ **بدست می آوریم:**

$$D = \begin{vmatrix} -x-y+z & x & y & z \\ x+y-z & 0 & z & y \\ x+y-z & z & 0 & x \\ -x-y+z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y-z) \begin{vmatrix} -1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ -1 & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

این ضرایب اختیاری هستند (به‌فرم دیگری هم ممکن است بدست آیند).

نتیجه اینکه D **بوسیلهٔ حاصلضرب این ضرایب یعنی**

$$\tilde{D} = (x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z)$$

عاد می‌شود. با توجه به اولین حکم در گزاره ب.۱، مرتبهٔ چندجمله‌ای D برابر است با ۴ که این با مرتبهٔ $\tilde{D}$ یکسان است. از این‌رو به‌ازای مقدار ثابت c می‌توان نوشت $D = c\tilde{D}$. در تجزیهٔ D، مضرب $z^۴$ عدد ۱− و برای همین جمله در $\tilde{D}$ ضریب عدد ۱+ و لزوماً $c = -۱$. نتیجه اینکه D بدست آمد.

ب.۳.۲ تعریف بازگشتی از دترمینان

اساس این روش بر تجزیهٔ دترمینان بوسیلهٔ سطرها و ستونهای آن و لذا تقلیل (تبدیل) آن به دترمینانی از شکل مشابه ولی از مرتبهٔ کمتر است. در این بخش به مثال A.۴ که درآن از این ایده استفاده شد، توجه کرده و برای دترمینان‌هایی مانند آن، یک فرمول عمومی همانند زیر ارائه می‌کنیم:

$$D_n = pD_{n-۱} + qD_{n-۲}, \quad (n > ۲)$$

معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - px - q = ۰$ را می‌شناسیم که در آن $\alpha + \beta = p$ و $\alpha\beta = -q$ به‌ترتیب مجموع و حاصلضرب جوابهای α, β از معادله است. با قرار دادن آنها در فرمول ادعایی بالا و برای $n > ۲$ داریم: $D_n = (\alpha+\beta)D_{n-۱} - \alpha\beta D_{n-۲}$. در حالتی که $\alpha \neq \beta$ و بکمک استقراء می‌توان نشان داد: $D_n = c_۱\alpha^n + c_۲\beta^n$ که در آن

$$c_۱ = \frac{D_۲ - \beta D_۱}{\alpha(\alpha-\beta)}, \quad c_۲ = \frac{\alpha D_۱ - D_۲}{\beta(-\beta+\alpha)}$$

اگر $\alpha = \beta$، به فرمول $D_n = (c_۱ n + c_۲)\alpha^{n-۲}$ می‌رسیم که در آن

$$c_۱ = D_۲ - \alpha D_۱, \quad c_۲ = ۲\alpha D_۱ - D_۲$$

مثال ب.۵. برای محاسبهٔ $D = \begin{vmatrix} ۵ & ۳ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۵ & ۳ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۵ & ۳ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۲ & ۵ \end{vmatrix}$**، با بسط بر حسب سطر اول داریم:**

$$D_n = ۵D_{n-۱} - ۶D_{n-۲}$$

حال بکمک جوابهای $\alpha = ۲, \beta = ۳$ از معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$ فرمول کلی یافتن دترمینان بدست می آید، یعنی: $D_n = c_۱\alpha^n + c_۲\beta^n = ۳^{n+۱} - ۲^{n+۱}$.

ب.۲.۴ نمایش یک دترمینان به‌صورت مجموعی از دو دترمینان

با رجوع و مرور خاصیت (a) از بخش ۱.۴.۳ که دربارۀ خاصیت خطی بودن دترمینان بیان شد، گاهی می‌توان یک دترمینان (بظاهر) پیچیده را به‌صورت مجموعی از دو شکل ساده‌تر درآورده و حل کرد.

مثال ب.۶. برای یافتن

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

آنرا می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

با تکرار این نحوه تفکیک و بعد از n بار، به تعداد 2^n دترمینان کوچکتر (و در قالب یک جمعوند) میرسیم. با این کار، و در هر تجزیه، یا $a_i, a_i, \cdots, a_i$ را در هر سطر می‌بینیم و یا $b_1, b_2, \cdots, b_n$. در هر صورت چون امکان یکی شدن حداقل دو سطر (وقتی $n > 2$) هست، لذا در این حالت $D_n = 0$. از این رو

$$D_1 = a_1 + b_1, \quad D_2 = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$$

ب.۲.۵ تغییر در درآیه‌های دترمینان

فرض کنید

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{pmatrix}$$

بکمک روشی که در ب.۴.۲ آمد داریم:

$$D' = D + \begin{pmatrix} x & \cdots & x \\ a_{۲۱} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ x & \cdots & x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x & \cdots & x \end{pmatrix}$$

در نتیجه $D' = D + x\sum_{i,j}^{n} A_{ij}$ که در آن A_{ij} همسازهٔ نظیر درآیهٔ a_{ij} است.

مثال ب.۷. برای محاسبهٔ

$$D' = \begin{vmatrix} a_۱ & x & \cdots & x \\ x & a_۲ & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

مقدار x را از همهٔ درآیه‌ها کم می‌کنیم:

$$D = \begin{vmatrix} a_۱ - x & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_۲ - x & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_n - x \end{vmatrix} = (a_۱ - x)(a_۲ - x)\cdots(a_n - x)$$

توجه داریم که برای $i \neq j$، همسازه‌های A_{ij} همگی صفر بوده و برای $i = j$:

$$A_{ii} = (a_۱ - x)(a_۲ - x)\cdots(a_{i-۱} - x)(a_{i+۱} - x)\cdots(a_n - x)$$

پس $D' = (a_۱ - x)(a_۲ - x)\cdots(a_n - x) + x\sum_{i=۱}^{n} A_{ii}$ که برابر است با:

$$D' = x(a_۱ - x)(a_۲ - x)\cdots(a_n - x)\left(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{a_۱ - x} + \cdots + \frac{۱}{a_n - x}\right)$$

ب.۶.۲ دو دترمینان خاص

دترمینان زیر را بنام دترمینان **واندرموند** می‌شناسند:

$$V(x_۱, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} ۱ & x_۱ & x_۱^۲ & \cdots & x_۱^{n-۱} \\ ۱ & x_۲ & x_۲^۲ & \cdots & x_۲^{n-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & x_n & x_n^۲ & \cdots & x_n^{n-۱} \end{vmatrix} \qquad (\text{ب.۱})$$

قضیه ب.۲.

$$V(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

ماتریس زیر بنام ماتریس **دوری** معروف است:[2]

$$C=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

قضیه ب.۳. **اگر** $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ **آن‌گاه** $\det(C)=\prod_{i=0}^{n-1}f(\varepsilon_i)$ **که در آن** $\varepsilon_{i(0\leqslant i\leqslant n-1)}$**ها ریشه‌های مختلط و متمایز عدد ۱ هستند.**

ب.۳ مسائل

۱. ثابت کنید که اگر همهٔ درآیه‌های یک ماتریس از مرتبهٔ ۳، ± 1 باشند آن‌گاه دترمینان آن همواره عددی زوج است.

۲. درستی تساویهای زیر را بدون محاسبهٔ تک تک دترمینانها نشان دهید:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1\\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2\\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc\\ 1 & b & ac\\ 1 & c & ab \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b),\qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

۳. محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0\\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0\\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Circulant Matrix

۴. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

۵. با استفاده از سطر سوم، دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ را بدست آورید.

۶. دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ را محاسبه کنید.

۷. دترمینان ماتریسهای زیر را با تبدیل آنها به نوع متناظر بالا مثلثی‌شان بیابید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}_{n\times n}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}_{n\times n}$$

۸. دترمینانهای زیر را بکمک روش بخش ب.۲.۲ بدست آورید.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}_{n\times n}, \quad \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}_{4\times 4}$$

۹. دترمینانهای زیر را بکمک روش بخش ب.۳.۲ بدست آورید.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & a_۲ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & ۰ & a_۳ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{n\times n}, \quad \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۲ \end{vmatrix}_{n\times n}, \quad \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۲ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۳ \end{vmatrix}_{n\times n}$$

۱۰. دترمینان زیر را با روش بخش ب.۴.۲ بدست آورید.[۳]

$$\begin{vmatrix} x_۱ & a_۱ & \cdots & a_n \\ a_۱ & x_۲ & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_۱ & a_۲ & \cdots & x_n \end{vmatrix}_{n\times n}$$

۱۱. فرض کنید $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ همگی متغیر و $p_۰, p_۱, \cdots p_n$ چندجمله‌هایی از شکل

$$p_j = a_j x^j + (\text{جملات با توان کمتر})$$

باشند. نشان دهید:

$$\begin{vmatrix} p_۰(x_۰) & p_۱(x_۰) & \cdots & p_n(x_۰) \\ p_۰(x_۱) & p_۱(x_۱) & \cdots & p_n(x_۱) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_۰(x_n) & p_۱(x_n) & \cdots & p_n(x_n) \end{vmatrix} = (a_۰ a_۱ \cdots a_n) V(x_۰, x_۱, \cdots, x_n)$$

۳. راهنمایی: بنویسید $x_i = (x_i - a_i) + a_i$.

پ

اعداد مختلط

در صفحهٔ $\mathbb{R}^{2}$، علاوه بر ضرب نقطه‌ای (که حاصل آن عدد است)، ضرب دیگری بنام ضرب مختلط وجود دارد که نتیجهٔ آن یک بردار در $\mathbb{R}^{2}$ است:

$$(x,y)(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx')$$

خواصی که از این نوع ضرب در ادامه می‌آید، به‌شکلی به ضرب معمولی رایج در بین اعداد حقیقی نزدیک بوده و در واقع باعث می‌شود تا اعضای صفحه (نقاط) به اَشکالی که آنها را اعداد مختلط می‌نامیم، مرتبط شوند. این ایده، صفحه (مجموعهٔ $\mathbb{R}^{2}$) را با مجموعه‌ای شامل تلقی جدید از نقاط (مجموعهٔ $\mathbb{C}$) عوض می‌کند. در این نگاه، هر عدد $x \in \mathbb{R}$ روی محور طول، با زوج مرتب (بردار مکان افقی) $(x,0)$ یکی انگاشته می‌شود. مثلاً بردار $(1,0)$ که نمایش یک نقطه بر محور xها (اولین عضو از پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^{2}$)، متناظر عدد ۱ روی این خط است. اینچنین، محور افقی (xها)، محور حقیقی باقی مانده و ثابت می‌شود که $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. بردار $(0,1)$ را که همان دومین پایه از پایهٔ استاندار $\mathbb{R}^{2}$ است را به‌عنوان یک عدد مختلط محض در نظر گرفته و با i نمایش می‌دهند. عدد مختلط i را موهومی واحد و یا جذر عدد ۱− هم می‌گویند.[1]

به‌طور مشابه، محور عمودی (yها) را محور موهومی (محض) در نظر گرفته و هر بردار $(0,y) = y(0,1) = (0,1)y$ را یک عدد موهومی محض می‌نامند.

برای عدد مختلط $z=(x,y)$ داریم:

$$z=(x,y)=x(1,0)+\underbrace{y(0,1)}_{\text{یا } (0,1)y}=x+\underbrace{yi}_{\text{یا } iy}$$

۱. علت این‌است که $i^{2}=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

در این نحو نمایش، x را قسمت حقیقی z (و با نماد $\mathrm{Re}(z)$) و y را قسمت موهومی z (و با نماد $\mathrm{Im}(z)$) می‌گویند. برای ضرب مختلط خواصی وجود دارد:[۲]

برای z, z' و z'' اولاً $zz' = z'z$ که نشان می‌دهد، ضرب جابجایی است.

ثانیاً خاصیت شرکت پذیری $z(z'z'') = (zz')z''$ و پس از آن خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع کمک گرفت به‌طوری که $z(z'+z'') = zz' + zz''$.

ثالثاً اگر $\mathbf{0} = (۰,۰)$ آن‌گاه $۱ \cdot z = z$ و $\mathbf{0} \cdot z = \mathbf{0}$ برقرارند.

مثال پ.۱. برای $z = (۱,۲)$ و $z' = (۴,۳)$ داریم:

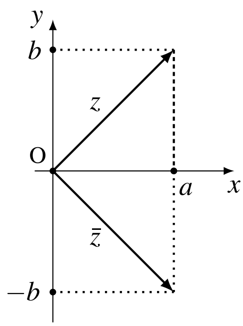
$$zz' = (۱+۲i)(۴+۳i) = ۴+۳i+۸i+۶i^۲ = ۴+۱۱i+۶(-۱) = -۲+۱۱i = (-۲,+۱۱)$$

پ.۱ اَعمال جبری با اعداد مختلط

در این بخش، به معرفی تعدادی از اعمالی که با اعداد مختلط و یا از روی آنها می‌توان انجام داد، می‌پردازیم. معمولاً $z = (a,b) = a+ib$ یک عدد مختلط دلخواه است مگر خلاف آن ذکر شود.

پ.۱.۱ مزدوج

منظور از مُزدوج یک بردار، انعکاس آن نسبت به محور حقیقی (xها) است. در واقع برای عدد مختلط z، مزدوج به‌صورت $\bar{z} = (a,-b) = a+i(-b) = a-ib$ تعریف می‌شود. بکمک این مفهوم خواص زیر برقرار اند:



شکل پ.۱: عدد مختلط و مزدوج آن

(۱) $\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}$

(۲) $\overline{zz'} = \overline{z'}\bar{z}, \quad z\bar{z} = a^۲+b^۲ \in \mathbb{R}_+$

(۳) اگر $z = (a,۰) \in \mathbb{R}$ آن‌گاه $\bar{z} = z$.

(۴) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{۲}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{i(z-\bar{z})}{۲} = \frac{-z+\bar{z}}{۲i}$

پ.۲.۱ طول(قدر مطلق)

عددی نامنفی به‌صورت $|z| = \sqrt{a^۲+b^۲} = \sqrt{z\bar{z}}$ را بنام قدرمطلق (اندازه یا طول) عدد مختلط z معرفی می‌کنند. این عدد در واقع، طول بردار مکان $z = (a,b)$ در صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ است. بدیهی است که داشته باشیم: $|z\bar{z}| = |z||\bar{z}|$.

۲. این خواص را مستقیماً و با فرض $z = (x,y),\ z' = (x',y'),\ z'' = (x'',y'')$ می‌توان ثابت کرد.

مثال پ.۲. برای $z=۳+۴i$ داریم:

$$|z|=\sqrt{(۳+۴i)(\overline{۳+۴i})}=\sqrt{(۳+۴i)(۳-۴i)}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

پ.۱.۳ وارون و تقسیم

برای عدد مختلط و ناصفر z، عدد مختلط $z^{-۱}=|z|^{-۲}\bar{z}$ را وارون z تعریف می‌کنند. در واقع، $z^{-۱}z=(|z|^{-۲}\bar{z})z=|z|^{-۲}(z\bar{z})=|z|^{-۲}|z|^۲=۱$. از این‌رو فرم کلی تقسیم را بدست می‌آوریم:

$$\frac{a'+ib'}{a+ib}=\frac{(a'+ib')(a-ib)}{a^۲+b^۲}$$

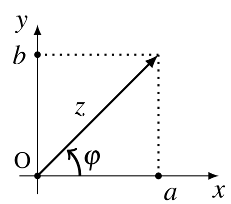
مثال پ.۳.

$$\frac{۱۸+i}{۳-۴i}=\underbrace{(۱۸+i)(۳+۴i)}_{۵۰+۷۵i}\times(۳^۲+۴^۲)^{-۱}=۲+۳i$$

پ.۱.۴ آرگومان و نمایش قطبی

عدد مختلط و ناصفر $z=a+ib$ را در نظر بگیرید. با نگاه برداری، $z=(a,b)$ بردار مکانی را نشان می‌دهد که از مبدأ بسمت z نشانه رفته است. با توجه به شکل پ.۲، زاویهٔ φکه سمت مثبت محور طول را تا به این بردار اندازه می‌گیرد وجود داشته و آنرا آرگومان عدد z می‌نامند.

از آنجایی‌که $\sin(\varphi)=\frac{b}{|z|},\cos(\varphi)=\frac{a}{|z|}$، لذا این زاویه به‌طور بدیهی و منحصر بفردی به $[۰,۲\pi)$ تعلق دارد. در این‌حالت آنرا با $\arg(z)$ نشان می‌دهند. اگر منظور از چنین زاویه‌ای، همهٔ زوایایی با چنین خصوصیاتی باشند، یعنی عضوی از $\{\arg(z)+۲k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$، در این‌صورت آنرا با $\mathrm{Arg}(z)$ نمایش می‌دهند. اگر φ را یکی از اعضای مجموعهٔ فوق بگیریم، آن‌گاه $z=|z|(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ و به آن نمایش قطبی عدد z می‌گویند. چون



شکل پ.۲: عدد مختلط و مزدوج آن

$$\begin{aligned} zz' &=|z|\Big(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)\Big)\times|z'|\Big(\cos(\beta)+i\sin(\beta)\Big)\\ &=|zz'|\Big(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\Big)\end{aligned} \quad (پ.۱)$$

پس $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

به‌همین ترتیب $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z')$ که در آن z' ناصفر است. بعلاوه اگر n عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$z^n = |z|^n \Big(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \Big) \qquad (\text{پ}.۲)$$

مثال پ.۴. برای محاسبهٔ $(۱+i)^{۱۰۰}$، قرار می‌دهیم $z = ۱ + i$ و سپس آنرا به‌شکل قطبی بازنویسی می‌کنیم:

$$|z| = \sqrt{۲}, \boldsymbol{arg(z)} = \frac{\pi}{۴}$$

توجه داریم که z در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار دارد. حال بکمک پ. ۲ داریم:

$$z^{۱۰۰} = (\sqrt{۲})^{۱۰۰} \Big(\cos(۱۰۰ \times \frac{\pi}{۴}) + i\sin(۱۰۰ \times \frac{\pi}{۴}) \Big)$$

چون $۲۵\pi = ۲۴\pi + \pi$ **پس** $z^{۱۰۰} = ۲^{۵۰}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -۲^{۵۰}$.

پ.۱.۵ شکل نمایی یک عدد مختلط

اگر $z = a + ib$ عددی مختلط باشد، شکل نمایی آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \Big(\cos(b) + i\sin(b) \Big)$$

این فرمول را منتسب به ریاضیدان سوییسی لئونارد اویلر(۱۷۰۷-۱۷۸۳) می‌دانند. نتیجهٔ سریعی که از این تعریف حاصل می‌شود این است که: $z = |z|e^{i\arg(z)}$. مثلاً

$$-۱ = e^{۰} \Big(\cos(\pi) + i\sin(\pi) \Big)$$

بکمک پ.۱، خواص زیر بدست می‌آید:

$$e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'},\ e^{-z} = \frac{۱}{e^z},\ e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$

پ.۱.۶ معادلات جبری

بر طبق جبر دبیرستانی، معادلات جبری نظیر وجود دارند که فاقد جواب حقیقی هستند. ساده ترین از این دسته می‌تواند معادلهٔ $z^۲ + ۱ = ۰$ و با مقدار مفسر منفی ($\Delta = b^۲ - ۴ac < ۰$) باشد. با

توجه به اینکه اگر $\Delta < ۰$ آن‌گاه $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{|\Delta|}$ لذا دو عدد $z = \pm i$ در معادله صادقند! این، یک مثال بود و در واقع، معادلات جبری بسیاری را می‌توان یافت که به مانند معادلهٔ اخیر نه تنها دارای جوابند بلکه این جوابها از نوع حقیقی هم نیستند. در این قسمت قصد داریم تا کمی به این نوع معادلات و یافتن جواب آنها بپردازیم.

معادلهٔ $z^n = c$ که در آن $c \in \mathbb{C} \neq ۰$ را در نظر بگیرید. بنابر پ.۲ داریم:

$$|z|^n\Big(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\Big) = |c|\Big(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\Big)$$

که در آن $\arg(z) = \alpha$ و $\arg(c) = \phi$ و همچنین:

$$|z| = \sqrt[n]{|c|}, \quad \alpha = \frac{\phi + ۲k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

از آنجایی‌که $۰ \leqslant \alpha < ۲\pi$ پس با توجه به فرمول قبل می‌توان تعداد n مقدار متمایز $\alpha_k = \frac{\phi+۲k\pi}{n}$ یافت که در آن $k = ۰, \ldots, n-۱$. داریم:

$$z_k = \sqrt[n]{|c|}\Big(\cos(\alpha_k) + i\sin(\alpha_k)\Big)$$

همهٔ ریشه‌هایی که در تساوی بالا می‌بینید را اصطلاحاً ریشهٔ nام عدد مختلط c می‌نامند. این ریشه‌ها برروی دایره‌ای بشعاع $\sqrt[n]{|c|}$ و بمرکز مبداء واقعند طوری که رئوس یک چندضلعی منتظم هم هستند. چنین چند ضلعی را در حالت $n = ۴$ در شکل پ.۲ مشاهده می‌کنید.

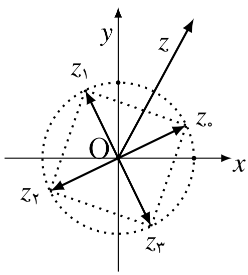
مثال پ.۵. برای حل معادلهٔ $z^۳ = i$، داریم: $n = ۳, |c| = ۱, \phi = \pi/۲$ و بنابراین:

$$|z| = \sqrt[۳]{۱} = ۱, \quad \alpha_۰ = \frac{\pi/۲ + ۲\pi \times ۰}{۳}, \quad \alpha_۱ = \frac{\pi/۲ + ۲\pi \times ۱}{۳}, \quad \alpha_۲ = \frac{\pi/۲ + ۲\pi \times ۲}{۳}$$

و لذا $z_۰ = \frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ، $z_۱ = \frac{-۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ **و** $z_۲ = -i$.

قضیه پ.۱. (قضیهٔ اساسی جبر) هر چندجمله‌ای غیر ثابت بر حسب x با ضرایب مختلط، حداقل یک ریشهٔ مختلط دارد.

برهان. به قضیهٔ ۳.۳.۱ در مرجع [۳۳] مراجعه کنید. □



شکل پ.۲: ریشهٔ چهارم عدد مختلط z

همان‌طور که ملاحظه شد، ریشه‌های چندجمله‌ای‌های از مرتبهٔ ۲ و یا به‌شکل خاص $x^n = z$ را یافتیم. بنابه قضیه‌ای که به **نیلز هنریک آبل** (۱۸۰۲-۱۸۲۹) ریاضیدان نروژی منسوب است، فرمول و قاعده‌ای جامع که بواسطهٔ آن، قادر به یافتن ریشه‌های یک چندجمله‌ای دلخواه از مرتبهٔ $d > ۴$ باشیم، وجود ندارد. فرض کنیم $x = x_۱$ ریشهٔ یک چندجمله‌ای $f(x)$ با مرتبهٔ d باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت $f(x) = (x - x_۱)g(x)$ که در آن مرتبهٔ $g(x)$ مسلماً $d - ۱$ است. با فرض مثبت بودن $d - ۱$ و تکرار عمل فوق داریم: $g(x) = (x - x_۲)h(x)$ که در آن $x_۲$ یک ریشهٔ مختلط معادلهٔ $g(x) = ۰$ است. نهایتاً، تا موقعی که مرتبهٔ چندجملهٔ باقی مانده به صفر نرسیده باشد به تجزیه‌ای برای $f(x)$ به مانند زیر می‌رسیم:

$$f(x) = c(x - x_۱)(x - x_۲)\cdots(x - x_d)$$

که در آن c عددی مختلط است. بدیهی است که $x_۱, x_۲, \cdots, x_d$ ریشه‌های $f(x) = ۰$ بوده و هر ریشه از آن، لزوماً در این تجزیه قابل مشاهده است. اگر بر فرض در این تجزیه، تعدادی از پرانتزها تکراری باشند (که در واقع بر مکرر بودن تعدادی از ریشه‌ها دلالت دارد)، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$f(x) = c(x - x_۱)^{k_۱}(x - x_۲)^{k_۲}\cdots(x - x_s)^{k_s}$$

که در آن $s < d$ و $k_۱ + k_۲ + \cdots + k_s = d$[۳]. با این تعاریف، ریشه‌ای با تکرار ۱ را ساده می‌گویند.

نتیجه پ.۲. برای یک چندجمله‌ای $p(x)$ از مرتبهٔ d، تعداد ریشه‌های $p(x) = ۰$ از عدد d بزرگتر نبوده و بعلاوه مجموع همهٔ تکرارها با d برابر است.

مثال پ.۶. برای حل معادلهٔ

$$z^۲ - ۴iz - (۷ + ۴i) = ۰$$

۳. منظور از k_i، تکرار ریشه x_i است.

و با نگاه دبیرستانی به یک معادلهٔ مرتبهٔ دو داریم: $z = \frac{(۴i)+d}{۲}$ که در آن

$$d^۲ = \overbrace{(-۴i)^۲ + ۴(۷+۴i)}^{۱۲+۱۶i}$$

یافتن d زیاد سخت نیست. فرض کنیم به‌ازای اعداد حقیقی y,x: $d = x+iy$ و لذا

$$d^۲ = (x^۲ - y^۲) + ۲i(xy)$$

و بنابر این باید دو معادلهٔ همزمان $x^۲ - y^۲ = ۱۲$ و $۲xy = ۱۶$ برقرار باشند. این دستگاه معادلهٔ غیر خطی به نتایج متناظر $x = \pm۴$ و $y = \pm۲$ می‌رسد. پس $d_۱ = ۴ + ۲i$ و $d_۲ = -۴ - ۲i$ مقادیر مختلطی است که برای d در عبارت کسری فوق می‌توان قرار داده و جواب را کامل کرد. این معادلهٔ جواب دیگری ندارد(چرا؟)

قضیه پ.۳. **اگر عدد مختلط z یک ریشه چندجمله‌ای $f(x)$ با ضرایب حقیقی باشد، آن‌گاه $\bar{z}$ نیز یک جواب بوده و تکرارهای هر دو جواب در تجزیهٔ $f(x)$ یکسان است.**

برهان. فرض کنیم $f(x) = a_d x^d + \cdots + a_۱ x + a_۰$ و $f(z) = ۰$. در این‌صورت

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= a_d \bar{z}^{\,d} + \cdots + a_۱ \bar{z} + a_۰ \\ &= \bar{a}_d \bar{z}^{\,d} + \cdots + \bar{a}_۱ \bar{z} + \bar{a}_۰ = \overline{a_d z^d} + \cdots + \overline{a_۱ z} + \bar{a}_۰ \\ &= \bar{۰} = ۰ \end{aligned}$$

اثبات قسمت بعد، بکمک استقراء روی چندجمله‌ای $g(x)$ از مرتبهٔ $d - ۲$:

$$f(x) = (x-z)(x-\bar{z})g(x)$$

انجام می‌گیرد □

مثال پ.۷. **برای چندجمله‌ای $f(z) = z^۴ - ۵z^۳ + ۷z^۲ - ۵z + ۶$ بدنبال یک تجزیه می گردیم. با کمی دقت، $z = i$ یک ریشهٔ $f = ۰$ بوده و لذا $\bar{i} = -i$ نیز یک جواب است. از این‌رو $f = \underbrace{(z-i)(z+i)}_{u} g(z)$ و با تقسیم f بر u داریم: $g(z) = (z-۲)(z-۳)$. این نتیجه، تجزیهٔ f را بما می‌دهد:**

$$f(z) = (z-i)(z+i)(z-۲)(z-۳)$$

پ.۲ مسائل

۱. حاصل سه عبارت زیر را با ساده‌تر کردن آنها بدست آورید:

$$\frac{(۱+i)(۲+i)}{۳-i}, \qquad \frac{i-۳}{۲-۳i}+\frac{i+۳}{۲+۳i}, \qquad \frac{(۱+i)^{۴}}{(i-۱)^{۵}}.$$

۲. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}(۱+۲i)x-۲iy=۵+۹i,\\ (-۱+۳i)x+(۱+i)y=-۶+۴i\end{cases}$$

۳. مطلوبست جوابهای حقیقی معادلهٔ $(۲i-۲)x-(۱+i)y=۲i-۱۰$.

۴. معادلات زیر را حل کنید.

$a)\ z^{۲}+۲z+۳۷=۰, \quad b)\ iz^{۲}+(۳i-۲)z+(۱۲+۴i)=۰$

$c)\ z^{۲}+۶z-۴iz+(۵-۱۲i)=۰, \quad d)\ z^{۲}-۵z+۴iz+(۹-i)=۰$

$e)\ z^{۶}=i, \quad f)\ z^{۴}=-۱۲۸+۱۲۸\sqrt{۳}i, \quad g)\ z^{۵}=۵e^{۵i}.$

۵. مقادیر $i^{۱۰۰}$ و $(۱-i)^{n}$ که در آن n عددی طبیعی است را بدست آورید.

۶. مکان جوابهای معادلهٔ $z^{۶}=۱۱۷+۴۴i$ را در صفحهٔ مختلط نشان دهید.

۷. تکرار ریشهٔ $z=۲$ در چندجمله‌ای $z^{۵}-۶z^{۴}+۱۳z^{۳}-۱۴z^{۲}+۱۲z-۸$ چیست؟

۸. تکرار ریشهٔ $z=۱+i$ در چندجمله‌ای $z^{۵}-۶z^{۴}+۱۶z^{۳}-۲۴z^{۲}+۲۰z-۸$ چیست؟

۹. ثابت کنید برای دو عدد مختلط، رابطهٔ $|z_۱+z_۲|\leqslant|z_۱|+|z_۲|$ برقرار است.

۱۰. معادلهٔ پ.۱ را اثبات کنید.

۱۱. ثابت کنید برای دو عدد مختلط، رابطهٔ $e^{z_۱+z_۲}=e^{z_۱}\cdot e^{z_۲}$ برقرار است.

۱۲. معادلهٔ $e^{z}=z$ را به‌ازای عدد مختلط z حل کنید.

کتاب‌نامه

[1] Abadir, K.M., Magnus, J.R.: Matrix Algebra, Econometric Exercises Series, No. 1. Cambridge University Press, Cambridge (2005)

[2] Ben-Israel, A., Greville, T.: Generalized Inverses. Theory and Applications, 2nd edn. Springer, New York (2003)

[3] Bapat, R.B., Raghavan, T.E.S.: Nonnegative Matrices And Applications. Cambridge University Press, Cambridge (1997)

[4] Braverman, E.M.: Mathematical Models of Planning and Control in Economic Systems. Nauka, Moscow [in Russian] (1976)

[5] Campbell, S.L., Meyer, C.D., Jr.: Generalized Inverses of Linear Transformations. Dover, New York (1991)

[6] Dasgupta, D.: Using the correct economic interpretation to prove the Hawkins-Simon-Nikaido theorem: One more now. J. Macroecon. 14(4), 755-761 (1992)

[7] Debreu, G., Herstein, I.N.: Nonnegative square matrices. Econometrica 21, 597-607 (1953) (see also in [20, pp. 57-67])

[8] Dhrymes, P.J.: Mathematics for Econometrics, 3rd edn. Springer, New York (2000)

[9] Diewert, E.: Index numbers. In: Durlauf, S.N., Blume, L.E. (eds.) The New Palgrave Dictionary of Economics, 2nd edn. Palgrave Macmillan, New York (2008)

[10] Gantmacher, F.R.: Theory of Matrices, Vols. 1, 2. Chelsea Publishing, New York (1959)

[11] Gel'fand, I.M.: Lectures on Linear Algebra (with the collaboration of Z. Ya. Shapiro), Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, New York (1989)

[12] Hawkins, D., Simon, H.A.: Note: some conditions of macroeconomic stability. Econometrica 17, 245-248 (1949)

[13] Hawkins, Th.: Continued fractions and the origins of the Perron-Frobenius theorem. Archive History Exact Sci. 62(6), 655-717 (2008)

[14] Judge, G.G., Griffiths, W.E., Hill, R.C., L ̈utkepohl, H., Lee, T.-C.: The Theory and Practice of Econometrics, 2nd edn. Wiley, New York (1985)

[15] Krattenthaler, C.: Advanced Determinant Calculus, The Andrews Festschrift (Maratea, 1998). S ́em. Lothar. Combin. 42, Art. B42q, 67 pp. (electronic) (1999)

[16] Kurz, M.D., Salvatori, N.: Theory of Production. Cambridge University Press, Cambridge (1995)

[17] Kurz, M.D., Salvadori, N.: "Classical" roots of input-output analysis: a short account of its long history. Econ. Syst. Res. XII, 153-179 (2000)

[18] Kurz, M.D., Salvadori, N.: Input-output analysis from a wider perspective: a comparison of the early works of Leontief and Sraffa. Econ. Syst. Res. 18(4), 373-390 (2006)

[19] Lang, S.: Linear Algebra, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York (1989)

[20] Newman, P.: Readings in Mathematical Economics-I, Value Theory. The Johns Hopkins Press, Baltimore (1968)

[21] O'Neill, M.J., Wood, R.J.: An Alternative Proof of the Hawkins-Simon Condition. Asia-Pacific J. Oper. Res. 16(2), 173-184 (1999)

[22] Pasinetti, L.: Lectures on the Theory of Production. Columbia University Press, New York (1977)

[23] Persky, J.: Price indexes and general exchange values. J. Econ. Perspect. 12(1), 197-205 (1998)

[24] Prasolov, V.V.: Problems and Theorems in Linear algebra, Translations of Mathematical Monographs, vol. 134. American Mathematical Society, Providence, RI (1994)

[25] Proskuryakov I.V.: Problems in Linear Algebra. Mir, Moscow (1978)

[26] Searle, S.R., Willett, L.S.: Matrix Algebra for Applied Economics. Wiley, New York (2001)

[27] Shilov, G.E.: Linear Algebra. Dover Publications, New York (1977)

[28] Sraffa, P.: Production of Commodities by Means of Commodities-Prelude to a Critique of Economic Theory. Cambridge University Press, Cambridge (1960)

[29] Stiglitz, J.E., Walsh, C.E.: Economics, 4th edn. W.W. Norton, New York (2006)

[30] Takayama, A.: Mathematical Economics, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge (1985)

[31] Tinbergen, J.: On The Theory of Economic Policy. North Holland, Amsterdam (1952)

[32] Varian, H.R.: Intermediate Microeconomics - A Modern Approach, 6th edn. W.W. Norton, New York (2003)

[33] Vinberg, E.B.: A Course in Algebra, Graduate Studies in Mathematics, vol. 56. American Mathematical Society, Providence, RI (2003)

[34] Yaari, M.E.: Linear Algebra for Social Sciences. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1971)