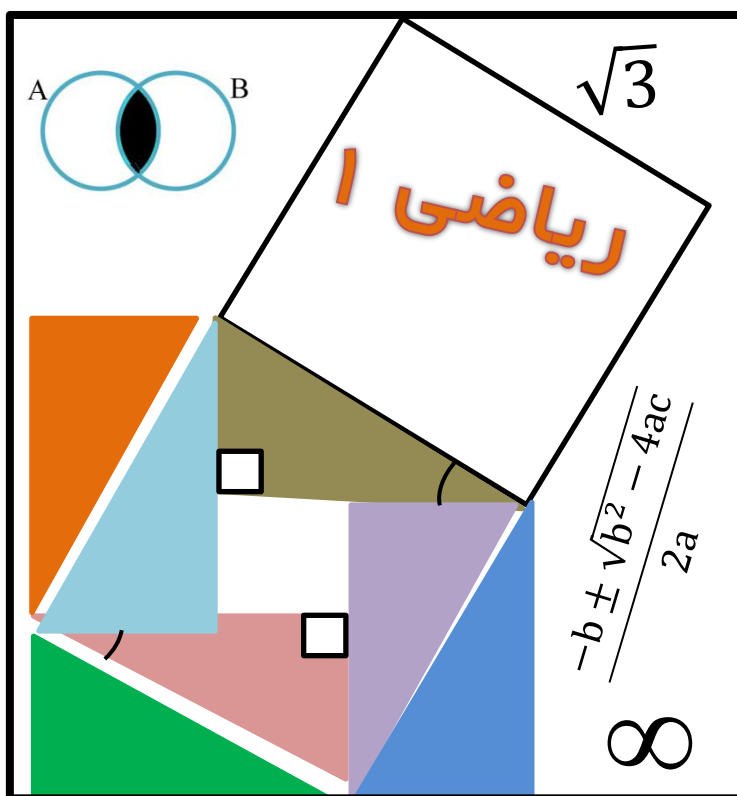


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سال دهم – متوسطه دوره دوم



رشته ریاضی و فیزیک – علوم تجربی

شکراله برازنده • شهریار صالح نسب • مهندس مرضیه شمس

مدیرتألیف: محمد برازنده



گروه آموزشی خوان آموز
مبتکر اولین کتابهای هوشمند ایران



انتشارات آینده دانش

سرشناسه	:	محمد برازنده
عنوان و نام پدیدآور	:	ریاضی پایه دهم
مشخصات نشر	:	تهران: انتشارات آینده دانش ۱۳۹۶
مشخصات ظاهری	:	۱۸۵ص: رحلی
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۸۲۳۱-۳۹-۴
وضعیت فهرست نویسی	:	فیبا
موضوع	:	کتاب آموزشی
موضوع	:	سوالات کار
شناسه افزوده	:	شکراله برازنده/ شهریار صالح نسب/مرضیه شمس آبادی
رده بندی کنگره	:	۱۳۹۶۸۲۸۵۰NA ۲س/گ۸
رده بندی دیویی	:	۹۵۹۲/۷۲۹
شماره کتابشناسی ملی	:	۴۸۸۹۹۳۷۷۶

این کتاب مشمول قانون حمایت از حقوق مولفان و مصنفان است. تکثیر کتاب به هر روش اعم از فتوکپی، ریسوگرافی، تهیه فایل‌های pdf، لوح فشرده، بازنویسی در وبلاگ، سایت‌ها، مجله‌ها، و کتاب جزوه، بدون اجازه کتبی ناشر مجاز نیست و موجب پیگرد قانونی می‌شود.

عنوان: ریاضی پایه دهم

تالیف: محمد برازنده، شکراله برازنده، شهریار صالح نسب، مرضیه شمس آبادی

نام ناشر: انتشارات آینده دانش

صفحه آرای: منیره امیری مقدم

نوبت چاپ: اول

تاریخ انتشار: ۱۳۹۷

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه

چاپ و صحافی: گوه‌راندیش

مسئولیت صحت مطالب کتاب با مولفان است.

کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است.

بها: ۲۹۵۰۰۰ ریال

(انتشارات آینده دانش)

خیابان انقلاب خیابان اردیبهشت خیابان لبافی نژاد پلاک ۲۴۸

تلفن ۰۲۱۶۶۴۹۷۱۱۶ - ۰۲۱۶۶۴۹۷۱۳۷

فروشگاه اینترنتی

www.khanamooz.ir

www.parsuniversitypress.com

www.asanketab.com

فهرست

فصل ۱: مجموعه‌ها، الگو و دنباله ۱



فصل ۲: مثلثات ۳۳۹



فصل ۳: توان‌های گویا و عبارات‌های جبری ۶۷



فصل ۴: معادلات و نامعادلات ۹۱



فصل ۵: تابع ۱۲۵



فصل ۶: شمارش بدون شمارش ۱۴۵



فصل ۷: آمار و احتمال ۱۶۱



مقدمه

سلام. چطور می‌باشه؟ امیدوارم حال و احوالت میزون باشه. حالا که اومدی وقت گذاشتی اومدی مقدمه رو بخونی، نگاه گرم‌تر متمرکز کن تا اطلاعات درست و حسابی از کتاب و روش مطالعه‌اش رو بهت بگیم. حتما میدونی که درس ریاضی دهم جزء مهم‌ترین درس‌های دهم و پایه‌ی درس‌های ریاضی سال یازدهم و دوازدهم در رشته‌های ریاضی و تجربی هست.

حالا میدونی یک مؤلف خوب کیه؟ (چرا به ما نگاه میکنید!!) مؤلف خوب کسی که تمام مزایا و معایب کتاب‌های دیگه رو بشناسه و بعد با تسلط کامل روی کتاب درسی، کتابی بنویسه که تمام مزایای کتاب‌های موجود رو داشته باشه و تمام معایب رو برطرف کنه (که کار بسیار سختیه خدایی). با یک تلاش ۱۵ ماهه (با کلی تجربه پشتش) ما به اندازه توان آموزشی خود، تولید محتوا کردیم و این کتاب رو نوشتیم و طراحی کردیم و محصول نهاییش همین کتاب هوشمندی هست که تو دستته. امیدواریم که کم و کاستی‌های اون رو بر ما ببخشید.

گفتیم هوشمند. یعنی چی؟

بچه‌ها سعی کردیم نکات اصلی و مهم رو توی کتاب بنویسیم و هر جا که توضیح بیشتر می‌خواد یا اینکه توضیح صوتی تصویری می‌خواد براتون فیلم کوتاه تهیه کنیم و کنار همون نکته بارکد بذاریم که شما بتونید در لحظه با اپلیکیشن خوان آموز به فیلم اون دسترسی پیدا کنید و حتی اون رو برای شب امتحان خودتون دانلود کنید. بچه‌ها در ضمن حل تمام سؤالات آموزشی هم به صورت متن آورده شده و هم به صورت فیلم که به راحتی بتونید حل سؤال رو یاد بگیرید و اینکه پایان هر بخش کلی تمرین امتحانی حل نشده داریم، البته باز نگران نباشید توی کتاب حل نشده ولی باز بارکد داره و میتونید با اپلیکیشن به عکس حل تشریحی و فیلم حل تشریحی اون به راحتی دسترسی پیدا کنید. پس اینجا همه چی مهیا است که ریاضی دهم رو با موفقیت بگذرونیم.

یادت باشه که همه‌ی همه‌ی فیلم‌های متصل به کتاب (۹۶۶ تا!!!) برای شما رایگان.

سخن پایانی و چند تشکر:

در آخر امیدواریم با این کتاب قدم بسیار محکم و بلندی برای موفقیت شما دهمی‌های عزیز در درس ریاضی برداشته باشیم. فقط یادتون باشه که اگر به امید خدا به تمام موفقیت‌ها دست پیدا کردید ما رو دعا کنید.

تا فرصت هست از همه ی کسانی که تلاش‌های زیادی کردند که این کتاب آماده بشود تشکر کنیم:

- استاد عزیزمون **شکراهه برازنده** که تجربه ۳۵ سال تدریس خودشون در دانشگاه و مدارس برتر رو در اختیار ما قرار داده و افتخار حضور در مؤلفین این کتاب را به تیم ما دادند، کمال تشکر را داریم.
- استاد و دوست عزیز **شهریار صالح نسب** که تلاش بسیار زیادی برای تالیف تمرینات پایان هر بخش و تولید فیلم‌های بخش تمرینات چندین فصل را بر عهده داشتند.
- سرکار خانم **مهندس مرضیه شمس** که در تمام مراحل تالیف کتاب و فیلم‌های آموزشی، ایده دهنده و همراه ما بودند.
- جناب آقای **سجاد فاتحی** که طراحی سایت و اپلیکیشن ریاضی دهم خوان آموز رو برعهده داشتند.
- جناب آقای **مجید رضابنده‌لو** که بسیاری از شکل‌های کتاب و فرمول‌ها و نمودارهای کتاب رو مدیون تلاش‌های ایشون هستیم.
- جناب آقای **مهدی صادقی** که کار طراحی جلد رو بر عهده داشتند.
- سرکار خانم **امیری مقدم** که صفحه آرایی و غلط‌گیری نهایی کتاب رو بر عهده داشتند.
- جناب آقای **علیلو و دکتر جهانی** مسئولین انتشارات **آینده‌ی دانش** که زحمت چاپ این کتاب را برعهده داشتند.
- دانش آموزان عزیز ما که با انرژی‌های مثبتشون باعث شدن این کتاب تالیف بشه.

و در آخر از **محمد جواد باقری** عزیز که مدیریت تیم خوان آموز را بر عهده داشتند و با توصیه‌های راهبردی خود در اجرایی کردن این ایده به ما بسیار کمک کردند و همواره حضور گرمی در کنار ما داشتند، تشکر ویژه ای می کنیم.

منتظر نظرات و پیشنهادات سازنده ی شما هستیم: M.Barazandeh@Aut.ac.ir

ارادتمند شما

محمد برازنده



مجموعه‌ها، الگو و دنباله

مفهوم مجموعه نقش بسیار مهمی در همه ی شاخه های ریاضیات جدید دارد. درک واقعی هر شاخه از ریاضیات جدید نیاز به آگاهی از نظریه مجموعه‌ها دارد. برای اولین بار این نظریه به وسیله‌ی ریاضی دان آلمانی به نام کانتور ارائه شد.



نام: گئورگ فردیناند لودویگ فیلیپ کانتور

(Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor)

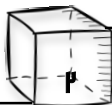
به اشتباه جرج کانتور هم نامیده می شود.

تولد: ۳ مارس ۱۸۴۵ - سن پترزبورگ، امپراطوری روسیه

ملیت: آلمانی

شهرت: ریاضی‌دان، نظریه مجموعه‌ها

درگذشت: ۶ ژانویه ۱۹۱۸، در سن ۷۲ سالگی، شهر هاله، امپراطوری آلمان

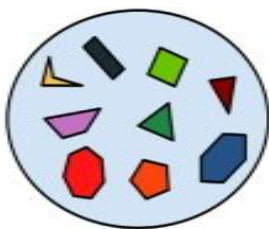


این فصل به دو بخش مجموعه‌ها و دنباله‌ها تقسیم می‌شود.

مجموعه‌ها

در این بخش قرارمون اینه که مطالب زیر رو با هم مرور کنیم و مطالب جدید رو یاد بگیریم:
۱. یادآوری مجموعه‌ها از سال نهم فصل اول شامل:

- تعریف مجموعه، نمایش مجموعه‌ها، مجموعه‌های خاص، اعمال روی مجموعه‌ها.
۲. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، بازه‌ها.
۳. متمم یک مجموعه.



درس صفر: یادآوری مجموعه‌ها



تعریف مجموعه (Set):

مجموعه، گردایه‌ای از اشیاء دو به دو متمایز هستند که اعضای آن برای همه یکسان مشخص شده باشد. این اشیاء عضوها یا عناصر مجموعه نامیده می‌شوند. اعضای یک مجموعه ممکن است هر چیزی باشند، مثلاً اعداد، حروف الفبا، اشکال هندسی، انسان و ...

در زندگی روزمره گاهی از واژه‌ی مجموعه استفاده می‌کنیم در صورتی که مفهوم مجموعه در ریاضیات را ندارد. مثلاً وقتی می‌گوییم گروهی از دانش آموزان وارد کلاس شدند نام دانش آموزان را مشخص نکرده‌ایم در حالی که ما از مجموعه برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیرتکراری) استفاده می‌کنیم.

مثلاً سه عدد بزرگ‌تر از ۲ مجموعه نیست ولی اعداد طبیعی یک رقمی، تیم‌های لیگ برتر فوتبال در سال ۱۳۹۶، گوشی‌های هوشمند سال ۲۰۱۷ مجموعه هستند.

که البته ما در درس ریاضیات بیشتر با مجموعه‌هایی سر و کار داریم که اعضای آن‌ها اعداد هستند.

نمایش مجموعه‌ها:

الف) نمایش هندسی (نمودار ون)

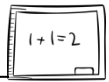
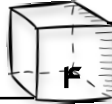
قرار دادن اعضای یک مجموعه در یک منحنی بسته مانند دایره، مربع، مستطیل و ... را نمایش هندسی آن مجموعه می‌گوییم.



ب) نمایش تفضیلی (نوشتن عضوها)

قرار دادن اعضای یک مجموعه در داخل دو آکولاد { } را نمایش تفضیلی مجموعه می‌گوییم.

{1, 2, 3, 4} , {Δ, ∇, ■}

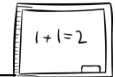
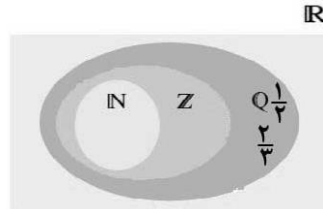


تمرین پاتخته



تمرین ۱: دو عدد گویا مثال بزنید که عدد طبیعی نباشند و روی شکل آن‌ها را نشان دهید.

پاسخ: $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

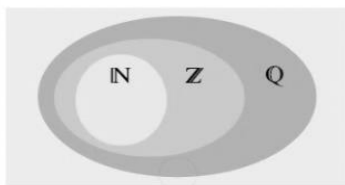


تمرین پاتخته

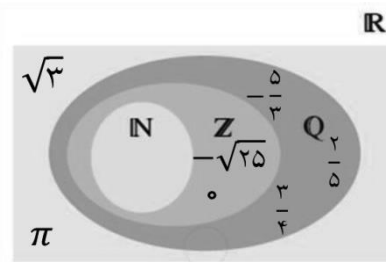


تمرین ۲: اعداد زیر را روی شکل و در جای مناسب قرار دهید.

$0, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \sqrt{3}, \pi, -\sqrt{25}, -\frac{5}{3}$



پاسخ:

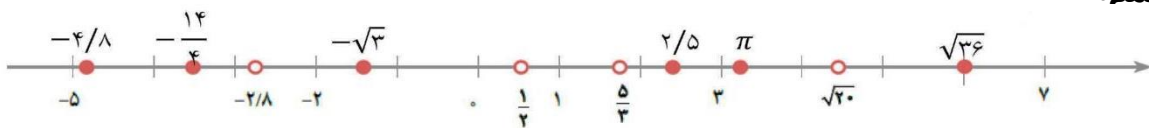


تمرین ۳: هریک از اعداد زیر را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور قرار دهید و اعداد گنگ (اصم) را مشخص کنید.

$-\sqrt{3}, \pi, -4/8, -\frac{14}{4}, 2/5, \sqrt{36}$



پاسخ:



اعمال روی مجموعه‌ها:

اشتراک دو مجموعه

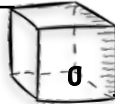
نمایش هندسی

نمایش ریاضی $A \cap B = \{x \in A, x \in B\}$

اجتماع دو مجموعه

نمایش هندسی

نمایش ریاضی $A \cup B = \{x \in A \text{ یا } x \in B\}$



عدد اصلی مجموعه

تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A عدد آن را گوییم و با $n(A)$ نمایش داده می‌شود.

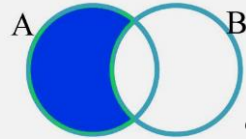


دو مجموعه مساوی

دو مجموعه زمانی با هم برابرند که هر کدام زیرمجموعه دیگری باشد.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$$

تفاضل دو مجموعه



نمایش هندسی



$$A - B = \{x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

نمایش ریاضی

تمرین ۴: اگر مجموعه‌های A, B به صورت زیر باشند، جدول زیر را کامل کنید.

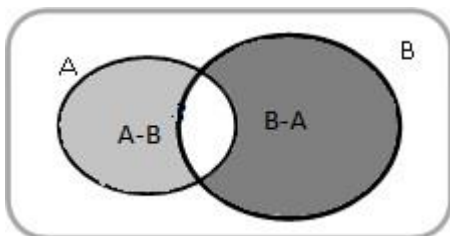
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 7\}$$



$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$B - A$	$n(A)$	$n(B)$
$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$	$n(A - B)$	$n(B - A)$		

پاسخ:

$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$B - A$	$n(A)$	$n(B)$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	$\{2, 7\}$	$\{1, 3, 5\}$	$\{4, 6\}$	۵	۴
$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$	$n(A - B)$	$n(B - A)$		
۷	۲	۳	۲		



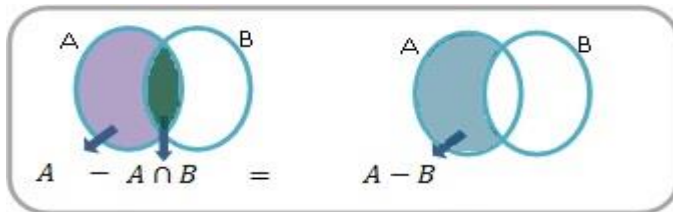
نتیجه تمرین:

الف) تفاضل دو مجموعه در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارند.
 $A - B \neq B - A$

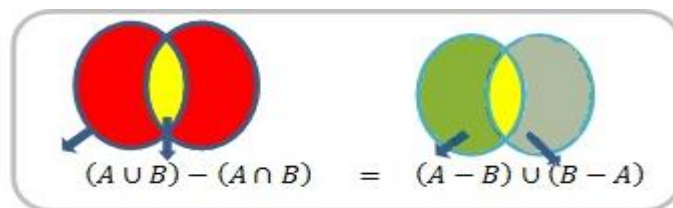
این تساوی فقط زمانی می‌تواند درست باشد که هر دو مجموعه مساوی باشند.
 ب) برای تعداد اعضای تفاضل دو مجموعه می‌توان به فرمول زیر رسید.



$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$



$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

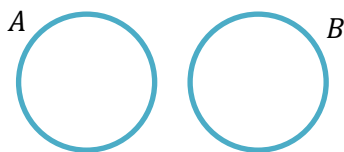


پ)



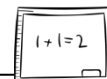
دو مجموعه جدا از هم (ناسازگار):

دو مجموعه A, B را جدا از هم یا مجزا گوئیم هرگاه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند یا به عبارتی دیگر اشتراک این دو مجموعه تهی باشد.



$$A \cap B = \phi$$

$$n(A \cap B) = 0$$



تمرین پاتخته

تمرین ۹: تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$W - N =$$

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} =$$

$$n(W - N) =$$

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q}' =$$

$$\mathbb{N} - \mathbb{Z} =$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' =$$

$$n(\mathbb{N} - \mathbb{Z}) =$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' =$$

$$W - N = \{0\}$$

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$$

$$n(W - N) = 1$$

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \emptyset$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$

$$n(\mathbb{N} - \mathbb{Z}) = 0$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

پاسخ:



سوالات درس صفر- یادآوری مجموعه‌ها



۱- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

(الف) جمعی از شاعران معروف ایران معرف یک مجموعه است.

(ب) مجموعه‌ی $\{0\}$ و $(-1)^2$ و 1 دارای ۳ عضو است.

(پ) مجموعه‌ی $\{10000, \dots, 3, 2, 1\}$ بی‌شمار عضو دارد.

(ت) دو مجموعه $\{1\}$ و $\{(-1)^2\}$ با هم مساوی اند.

(ث) مجموعه‌ی $W = \{k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ مجموعه‌ی اعداد حسابی است.

(ج) هر عدد حسابی یک عدد طبیعی است.

۲- جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.

(الف) مجموعه‌ای که هیچ عضو نداشته باشد را مجموعه گویند.

(ب) هر مجموعه، خودش می‌باشد.

(پ) مجموعه‌ی $\{4\}$ و $(-2)^2$ دارای $A = \{2\}$ زیر مجموعه است.

(ت) مجموعه‌ی $\{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$ مساوی است با

(ث) اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه $A - B =$

(ج) مجموعه‌ی $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ برابر است با مجموعه‌ی

۳- گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید.

(الف) کدام گزینه مجموعه‌ی تهی را مشخص می‌کند؟

(ب) اعداد گویای بین ۱ و ۲

(الف) اعداد زوج اول

(د) اعداد طبیعی بین ۷ و ۸

(ج) اعداد صحیح بین ۱ و -۱

(ب) مجموعه‌ی $\{3, -3, \sqrt{9}, \text{ و } \frac{-9}{3}\}$ دارای چند عضو است؟

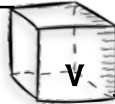
(ب) ۳ عضو

(الف) ۴ عضو

(د) ۱ عضو

(ج) ۲ عضو





پ) کدام یک از رابطه‌های زیر درست است؟

الف) $N \not\subseteq W$ ب) $Z \subseteq Q$ ج) $Q \subseteq Z$ د) $W \subseteq N$

ت) مجموعه‌ی $\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq 4\}$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

الف) $\{1, 2, 3, 4\}$ ب) $\{\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}\}$

ج) $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$ د) $\{\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}\}$

ث) مجموعه اعداد حسابی کوچکتر از صفر کدام است؟

الف) $\{-1, -2, -3, \dots\}$ ب) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

ج) $\{\}$ د) $\{0\}$

ج) کدام یک از مثال‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) چهار عدد زوج طبیعی ب) اعداد گویای بین ۱ و ۱۰

ج) شمارنده‌های اول عدد ۳۰ د) تمام موارد

چ) کدام گزینه صحیح است؟

الف) $-1 \in W$ ب) $0 \in N$

ج) $\sqrt{2} \notin Q'$ د) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{47}} \in Q$

ح) کدام گزینه صحیح است؟

الف) $W \subseteq N \subseteq Q \subseteq Z \subseteq R$ ب) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

ج) $W \subseteq N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ د) $R \subseteq Q \subseteq Z \subseteq N \subseteq W$

۴- تمام زیرمجموعه‌های $A = \{2, 3, 4\}$ را بنویسید.



۵- زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه‌ی $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را بنویسید.



۶- در یک مجموعه‌ی عددی ۶ زیرمجموعه‌ی دو عضوی میتوان نوشت. بزرگ ترین زیرمجموعه‌ی این مجموعه چند

عضو دارد؟ (یک مثال بیاورید)



۷- اگر $A = \{2, y - 2\}$, $B = \{x + 3, 5\}$ دو مجموعه مساوی باشند، x, y را بدست آورید.



۸- مجموعه‌های زیر را با اعضایش مشخص کنید.

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 7\}$

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 5\}$

$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{12}{x} \in \mathbb{Z}\}$

$D = \left\{ \frac{x+2}{2} \mid x \in E, 12 < x \leq 22 \right\}$





$$F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \leq \sqrt{x} < 10\} \quad G = \{x^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x \times y = 12\}$$

$$H = \{x \times y \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 6\}$$

۹- مجموعه‌های زیر را علائم ریاضی نمایش دهید.

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$C = \{12, 14, 16, 18, \dots\}$$

$$F = \{3, 6, 9, 12, \dots, 45\}$$

$$G = \{1, 4, 9, \dots, 169\}$$

$$H = \{9, 99, 999, 9999, \dots\}$$



۱۰- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A - B$

ب) $B - A$

پ) $A \cap B$

ت) $A \cup B$

ث) $n(A - B)$

ج) $n(A \cap B)$

چ) $n(A \cup B)$



۱۱- کدام یک از عبارتهای زیر صحیح است؟

الف) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

ب) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$

پ) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

ت) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{N}$



۱۲- تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $\mathbb{N} \cap \mathbb{W} =$

ب) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} =$

پ) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} =$

ت) $n(\mathbb{W} - \mathbb{N}) =$

ث) $n(\mathbb{Z} - \mathbb{Q}) =$

ج) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} =$



۱۳- اگر $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C = \{2, 3, 5, 8\}$ باشند، نشان دهید:

الف) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ب) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

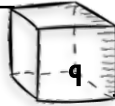


۱۴- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ باشند، نشان دهید:

الف) $A \cup (A \cap B) = A$

ب) $B \cap (A \cup B) = B$

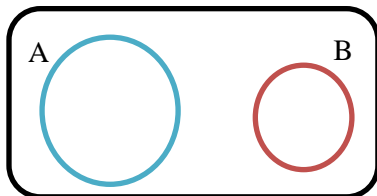




درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی. بازه‌ها

مجموعه مرجع یا جهانی:


در هر بحث، مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه مرجع گوییم و معمولاً این مجموعه را با U یا M نشان می‌دهیم.

 $U (M)$ 

مجموعه مرجع در نمودارهای ون معمولاً به شکل مستطیل کشیده می‌شود.

مجموعه‌های متناهی نامتناهی:

بچه‌ها می‌خواهیم با هم یک خاصیت مهم از مجموعه‌ها رو بررسی کنیم. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید.

	$A =$ مجموعه دانش آموزان مدرسه شما
$B =$ مجموعه مدل‌های مختلف ماشین	$C =$ مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی
$D =$ مجموعه تمام مورچه‌های روی کره زمین	$E =$ مجموعه اعداد طبیعی
$F =$ مجموعه کسرهای منفی با صورت ۲	

با کمی دقت متوجه خواهیم شد که تعداد اعضای مجموعه‌های A, B, C, D محدود می‌باشند و عدد این مجموعه برابر با یک عدد طبیعی خواهد شد، ولی تعداد اعضای مجموعه‌های E, F نامحدود است یعنی نمی‌توانیم یک عدد را برای تعداد اعضای این دو مجموعه انتخاب کنیم.

مجموعه‌ای که تعداد محدود عضو داشته باشد، یعنی اگر عضوهایش را یکی یکی بشماریم در نهایت شمارش به پایان برسد، (حتی اگر توسط انسان زمان بر باشد) و همچنین عدد اصلی آن یک عدد حسابی باشد را مجموعه متناهی یا باپایان می‌گوییم.

تعریفی دیگر:

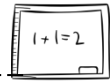
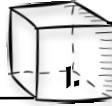
مجموعه‌ای که با خارج کردن اعضای آن بالاخره آن مجموعه خالی می‌شود را مجموعه متناهی می‌گویند. به عنوان مثال مجموعه‌های A, B, C, D در بالا متناهی می‌باشند.

تعریفی دیگر:

مجموعه‌ای که با خارج کردن اعضای آن هیچگاه آن مجموعه خالی نمی‌شود را مجموعه نامتناهی می‌گویند. به عنوان مثال مجموعه‌های E, F در بالا نامتناهی می‌باشند. مجموعه‌هایی را که متناهی نباشند را نامتناهی یا بی پایان می‌نامیم. از مجموعه‌های نامتناهی مهم می‌توان به \mathbb{Q} و \mathbb{R} و \mathbb{N} و \mathbb{W} و \mathbb{Q} اشاره کرد.

مثال:

مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰: $A = \{1, 2, 3, \dots, 98, 99\} \leftarrow n(A) = 99 \leftarrow$ متناهی
 مجموعه اعداد زوج طبیعی یک رقمی: $B = \{2, 4, 6, 8\} \leftarrow n(B) = 4 \leftarrow$ متناهی
 مجموعه تهی: $\phi = \{\} \leftarrow n(\phi) = 0 \leftarrow$ متناهی
 مجموعه اعداد فرد طبیعی: $O = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \leftarrow$ نامتناهی
 مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۵: $C = \{5, 10, 15, 20, \dots\} \leftarrow$ نامتناهی



تمرین پاتخته

تمرین ۴: اگر مجموعه‌های زیر را داشته باشیم، موارد پرسیده شده و جدول را کامل کنید.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{1, 2, 3, \dots, 100\}, E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$A \cap B = \quad A \cap E = \quad A - E = \quad E - A =$$



پاسخ:

	A	B	E	$A \cap B$	$A \cap E$	$A - E$	$E - A$
متناهی	✓	✓		✓	✓	✓	
نامتناهی			✓				✓

$$A - E = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$E - A = \{8, 10, 12, \dots\}$$

$$A \cap B = A$$

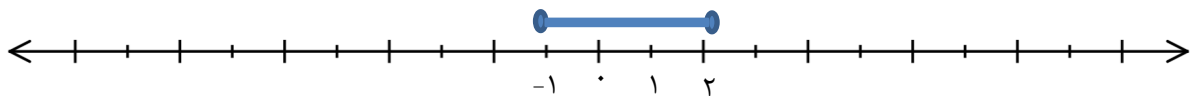
$$A \cap E = \{2, 4, 6\}$$

بازه‌ها:

فرض کنیم مجموعه A یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی \mathbb{R} باشد که شامل همه‌ی اعداد حقیقی بین ۱ تا ۲ به همراه خود این دو عدد باشد. می‌دانیم که نمایش ریاضی این مجموعه به صورت زیر است:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$$

حال می‌خواهیم اعضای این مجموعه را روی محور زیر نمایش دهیم:



می‌دانیم که تمام اعضای مجموعه A را نمی‌توان فهرست کرد و همچنین نمی‌توانیم اولین عدد حقیقی بعد از -1 را مشخص کنیم. (بین هر دو عدد حقیقی بی‌شمار عدد حقیقی دیگر وجود دارد) بنابراین برای نمایش این مجموعه‌ها که نمایانگر همه‌ی اعضای آن‌ها باشد باید فکر دیگری کرد که این تفکر همان بازه‌ها هستند.

تعریف بازه:

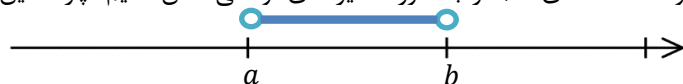
زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص می‌باشند را بازه یا فاصله می‌نامیم. به عبارتی دیگر بازه برای نمایش زیرمجموعه‌های پیوسته از مجموعه اعداد حقیقی به کار می‌رود. از آنجایی که بازه‌ها نقش بسیار مهمی در ریاضیات بازی می‌کنند بایستی برای نشان دادن آن‌ها از نمادهای ساده تری استفاده کنیم. از این رو در اینجا به معرفی نمادهای بازه‌ها می‌پردازیم.

انواع بازه‌ها:

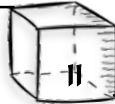
فرض کنیم a, b دو عدد حقیقی باشند که $a < b$ باشد، در این صورت بازه‌های اعداد را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم:

(الف) بازه‌ی باز:

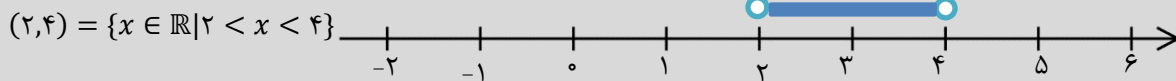
تمامی اعداد حقیقی که بین دو عدد حقیقی a, b باشند را به صورت بازه‌ی باز (a, b) نمایش می‌دهیم. در نمایش بازه‌ی باز روی محور دقت شود که نقطه‌های a, b را به صورت دایره‌های توخالی نشان دهیم، چراکه این دو نقطه خودشان عضو این بازه نیستند.



$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



مثال:



ب) بازه‌ی بسته:

هرگاه به بازه‌ی باز (a, b) خود اعداد a, b را نیز اضافه کنیم، بازه‌ی بسته a, b به وجود می‌آید که این بازه را به صورت $[a, b]$ نمایش می‌دهیم. در نمایش بازه‌ی بسته روی محور دقت شود که نقطه‌های a, b را به صورت دایره‌های توپر نشان دهیم، چراکه این دو نقطه خودشان عضو این بازه هستند.

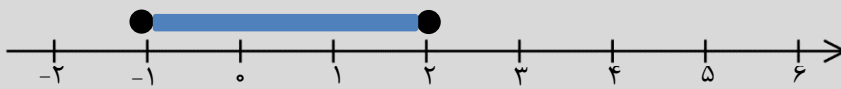
$$[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$



مثال:

$$[-1, 2] = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 2\}$$



پ) بازه‌های نیم باز (نیم بسته):

بازه‌هایی را که از یک طرف باز (بسته) و از طرف دیگر بسته (باز) باشند را گوییم. با توجه به توضیحات قبل مشخص است که در نمایش این بازه‌ها روی محور قسمتی که بسته است را با دایره‌های توپر و قسمتی که باز است را با دایره‌های توخالی نشان می‌دهیم.

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$



توجه

فرض کنید تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۱ موردنظر باشد در اینصورت انتهای این بازه را نمی‌توان مشخص کرد. برای اینکه بتوانیم این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم از نماد $+\infty$ (مثبت بی نهایت) استفاده می‌کنیم. این نماد برای اعداد خیلی بزرگ استفاده می‌شود. همچنین برای اعداد خیلی کوچک نیز از نماد $-\infty$ (منفی بی نهایت) استفاده می‌کنیم. بعضی از بازه‌های اعداد از یک یا دو طرف نامحدود هستند:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$



$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$$



$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

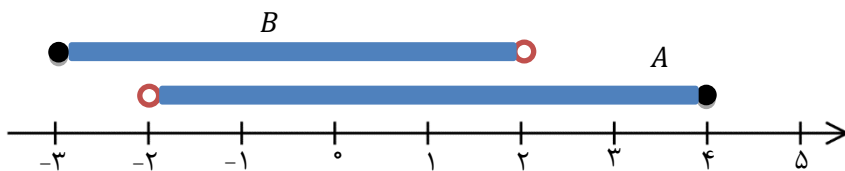




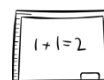
اعمال روی بازه‌ها:

اگر A, B دو بازه روی اعداد حقیقی باشند اعمال اجتماع و اشتراک و تفاضل را نیز می‌توان روی این دو بازه‌ها اعمال کرد. به مثال زیر توجه کنید:

اگر $A = (-2, 4]$, $B = [-3, 2)$ باشد،



$$A \cup B = [-3, 4] \quad A \cap B = (-2, 2) \quad B - A = [-3, -2] \quad A - B = [2, 4]$$



تمرین پاتخته

تمرین ۷: جدول‌های زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه	نمایش هندسی
باز	$(-3, 1)$		
بسته			
نیم باز (نیم بسته)		$\{x \in \mathbb{R} 2 < x \leq 3\}$	

A	B	نمایش هندسی $A \cap B$	نمایش هندسی $A \cup B$	نمایش بازه $A \cap B$	نمایش بازه $A \cup B$
$[-1, 2)$	$(-3, 4]$				
$(-1, +\infty)$	$[-3, 7)$				
$(-\infty, 2)$	$[1, +\infty)$				
$(-3, 4)$	$[4, 7)$				
$(-\infty, 5]$	$[5, 10)$				



پاسخ: فیلم را ببینید.



سوالات درس اول - مجموعه‌های متناهی و نامتناهی. بازه‌ها



۱- درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(الف) مجموعه اعداد صحیح کوچکتر از ۲۰ یک مجموعه متناهی است.

(ب) مجموعه $A = \{x | x \in \mathbb{Q} \text{ و } 1 < x \leq 3\}$ یک مجموعه نامتناهی است.

(پ) مجموعه اعداد صحیح بین ۱ و ۱۰ یک مجموعه متناهی است.

(ت) مجموعه سلول‌های بدن یک انسان یک مجموعه متناهی است.

(ث) $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$ یک مجموعه‌ی متناهی است.

(ج) مجموعه شماره‌های عدد ۱۲۰۰ یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

(چ) بازه‌ی $[1, \frac{5}{4}]$ یک مجموعه‌ی متناهی است.