



روش‌های تصویر سه‌جمله‌ای بدون مشتق برای حل
دستگاه معادلات غیرخطی یکنوا

استاد راهنما: دکتر کیوان امینی
ارائه دهنده: فرناز محمدصادقی

کلیات مطالب

تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی بر تصویر برای حل دستگاه های غیر خطی یکنوا

یک روش بدون مشتق مبتنی بر تصویر سه جمله ای

یک روش بدون مشتق مبتنی بر تصویر سه جمله ای طیفی

نتایج عددی



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

تعاریف مقدماتی





دستگاه معادلات غیر خطی

در حالت کلی دستگاه معادلات غیر خطی به صورت زیر است

$$F(x) = 0, \quad (1)$$

که در آن $F: R^n \rightarrow R^n$ یک تابع برداری به صورت زیر می باشد

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

جاییکه $x \in R^n$ بردار شامل متغیرهای مجهول است.

تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات غیرخطی

در حالت کلی روش‌های متفاوتی برای حل دستگاه معادلات غیرخطی ارائه شده است، مهم‌ترین روش‌ها عبارت‌اند از روش نیوتن، روش شبه‌نیوتن، روش نیوتن اصلاح شده، روش‌های لونیبرگ-مارکوات و ... هر کدام از این روش‌ها معایب و محاسنی دارند.

یکی از معایب مشترک تمام این روش‌ها استفاده از ماتریس ژاکوبی است.

برخی از دستگاه معادلات غیرخطی ساختار خاصی دارند که حل آن‌ها را ساده‌تر نموده‌اند. یکی از این دستگاه‌ها دستگاه معادلات غیرخطی یکنواست.

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



دستگاه معادلات غیر خطی یکنوا

دستگاه معادلات غیر خطی زیر را یکنوا گویند

$$F(x) = 0, \quad x \in R^n$$

هرگاه در آن $F: R^n \rightarrow R^n$ یک نگاشت پیوسته و یکنوا می باشد. یعنی

$$\forall x, y \in R^n, \quad (x - y)^T (F(x) - F(y)) \geq 0.$$

تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



روش‌هایی که قبلاً ذکر شد برای حل دستگاه معادلات غیرخطی یکنوا قابل استفاده می‌باشد ولی هزینه‌ی محاسباتی زیادی دارند.

با توجه به ویژگی ساختاری دستگاه‌های معادلات غیرخطی یکنوا، روش‌های مبتنی بر تصویر به‌عنوان یک دسته از روش‌های کارا برای حل آن‌ها، در دهه اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است.

هدف این پایان‌نامه بررسی دو روش مبتنی بر تصویر برای حل دستگاه معادلات غیرخطی یکنواست که در پروسه‌ی فرآیند حل آن‌ها از جهاتی استفاده می‌شود که نحوه ساخت آن‌ها مشابه به جهات گرادیان مزدوج است، بنابراین خواص بسیار مناسبی دارد.

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



روش گرادیان مزدوج

جهت گرادیان مزدوج جهاتی هستند که در بهینه‌سازی غیرخطی به کرات استفاده می‌شود. جهت جستجوی d_k به صورت زیر است

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & k = 0, \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, & k \geq 1 \end{cases}$$

یک خاصیت مهم که بعضی از روش‌های گرادیان مزدوج دارند شرط کاهش کافی به صورت

$$g(x_k)^T d_k < -\delta \|g(x_k)\|^2$$

به‌ازای یک پارامتر مثبت δ است.

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی



روش گرادیان مزدوج غیرخطی

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

روش‌های گرادیان مزدوج غیرخطی از مهمترین روش‌های تکراری برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی نامقید است.

تا به حال روش‌های گرادیان مزدوج متفاوتی ارائه شده که تفاوت اصلی آن‌ها در محاسبه پارامتر β_k می‌باشد.



از جمله روش‌های گرادیان مزدوج غیرخطی مهم می‌توان به موارد زیر اشاره کرد

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی

HS

در سال ۱۹۵۲ توسط
Hestenes و Stiefel ابتدا
برای روش گرادیان مزدوج
خطی ارائه شد و بعدها به
روش گرادیان مزدوج
غیرخطی تعمیم داده شد.

PRP

در سال ۱۹۶۴ توسط
Polak، Ribiere و
Polyak ارائه شد.

FR

در سال ۱۹۶۴ توسط
Reeves و Fletcher
ارائه شد.



روش گرادیان مزدوج طیفی

الگوریتم‌های گرادیان مزدوج طیفی (SCG) در سال ۲۰۰۱ نخستین بار توسط Birgin و Martinez ارائه گردید، با اضافه کردن یک پارامتر مقیاس θ_k جهت جستجو را به صورت زیر معرفی نمودند

$$d_{k+1} = -\theta_k g_{k+1} + \beta_k s_k,$$

جاییکه $d_1 = -\theta_1 g_1$ و پارامترها مقیاس θ_k و پارامتر مزدوج β_k به صورت زیر محاسبه می گردند

$$\theta_k = \frac{s_k^T s_k}{s_k^T y_k}, \quad \beta_k = \frac{(\theta_k y_k - s_k)^T g_{k+1}}{s_k^T y_k}$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



روش گرادیان مزدوج سه جمله‌ای

روش‌های گرادیان مزدوج سه جمله‌ای ضمن تعمیم خواص روش‌های گرادیان مزدوج دو جمله‌ای، به ازای پارامترهای مناسب شرط کاهش کافی را برقرار می‌کنند. در این روش جهت جستجوی d_k به صورت زیر می‌باشد

$$d_k = -g_k + \beta_{k-1} s_{k-1} + \theta_{k-1} y_{k-1}$$

در اینجا $y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$ ، $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}$ ، $g_k = \nabla f(x_k)$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی



یک جهت گرادیان مزدوج سه جمله‌ای

یکی از روش‌های گرادیان مزدوج سه جمله‌ای معروف، روش ارائه شده توسط Liu و Li در سال ۲۰۱۶ می‌باشد.

روش گرادیان مزدوج LCG ارائه شده توسط Liu در عمل بسیار عالی عمل می‌کند، اما در شرط مزدوج DL صدق نمی‌کند، بنابراین Liu و Li جهت گرادیان مزدوج LCG به صورت زیر اصلاح نمودند

$$d_k = -g_k + \beta_k^{LCG} s_{k-1} + \theta_k y_{k-1}$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



جاییکه پارامتر مزدوج β_k و پارامتر θ_k به صورت زیر تعریف می گردند

$$\theta_k = \frac{g_k^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T y_{k-1}},$$

$$\beta_k^{LCG} = \frac{1}{s_{k-1}^T y_{k-1}} \left(y_{k-1} - s_{k-1} - s_{k-1} \frac{\|y_{k-1}\|^2}{s_{k-1}^T y_{k-1}} \right)^T g_k$$

بعدا با استفاده از این جهت یک جهت گرادیان مزدوج سه جمله ای مبتنی بر تصویر می سازیم.

این جهت جستجو در شرط کاهش کافی و شرط مزدوج DL، مستقل از جستجوی خطی صدق می کند.

تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

یک جهت گرادیان مزدوج سه جمله‌ای طیفی

در سال ۲۰۱۸ Peiting و Chuanjiang با افزودن یک پارامتر طیفی به روش گرادیان مزدوج سه جمله‌ای ارائه شده توسط Liu و Li جهت جستجوی d_k را به صورت زیر ارائه کردند

$$d_k = -\lambda_{k-1}g_k + \beta_k s_{k-1} + \varphi_{k-1}\bar{y}_{k-1},$$

با انتخاب $r \in (0,1)$ داریم

$$\bar{y}_{k-1} = g_k - g_{k-1} + r s_{k-1}.$$



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



و داریم

$$\varphi_{k-1} = \lambda_{k-1} \theta_{k-1}$$

پارامتر طیفی λ_{k-1} ، پارامتر مزدوج β_k و پارامتر θ_k به صورت زیر می باشند

$$\theta_{k-1} = \frac{g_k^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T \bar{y}_{k-1}},$$

$$\beta_k = \frac{1}{s_{k-1}^T \bar{y}_{k-1}} \left(\lambda_{k-1} \bar{y}_{k-1} - s_{k-1} - \lambda_{k-1} s_{k-1} \frac{\|\bar{y}_{k-1}\|^2}{s_{k-1}^T \bar{y}_{k-1}} \right)^T g_k$$

$$\lambda_{k-1} = \frac{(\bar{y}_{k-1} s_{k-1}^T)}{(\|s_{k-1}\|^2)}.$$

تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



تعاريف مقدماتي

روش‌هاي مبتني
بر تصوير

دو روش مبتني
بر تصوير

نتايج عددي

روش‌های مبتنی بر تصویر برای حل دستگاه‌های غیرخطی یکنوا



دستگاه معادلات غیرخطی یکنوای زیر را در نظر بگیرید
 $F(x) = 0, x \in R^n.$

اساس کار روش‌های مبتنی بر تصویر برای حل دستگاه‌های غیرخطی یکنوا، تولید یک ابر صفحه جدا کننده نقطه x_k از مجموعه جواب‌های دستگاه و استفاده از تصویر متعامد این نقطه روی ابر صفحه جدا کننده به عنوان تقریب جدید x_{k+1} است. برای این منظور ابتدا جهت d_k به گونه‌ای تعیین می‌شود که

$$F(x_k)^T d_k \leq -\delta \|F(x_k)\|^2$$

به ازای یک پارامتر مثبت δ است.

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



سپس با بکارگیری یک جستجوی مناسب، طول گام α_k به گونه‌ای تعیین می‌گردد که

$$F(z_k)^T(x_k - z_k) > 0 \quad (2)$$

که در آن $z_k = x_k + \alpha_k d_k$ ، با توجه به این تعاریف ابرصفحه

$$H_k = \{x \in R^n \mid F(z_k)^T(x - z_k) = 0\}.$$

نقطه x_k را بطور اکید از مجموعه جواب دستگاه جدا خواهد کرد. زیرا خاصیت یکنوایی نگاشت F برای هر \bar{x} که $F(\bar{x}) = 0$ نتیجه می‌دهد

$$F(z_k)^T(\bar{x} - z_k) \leq 0$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی



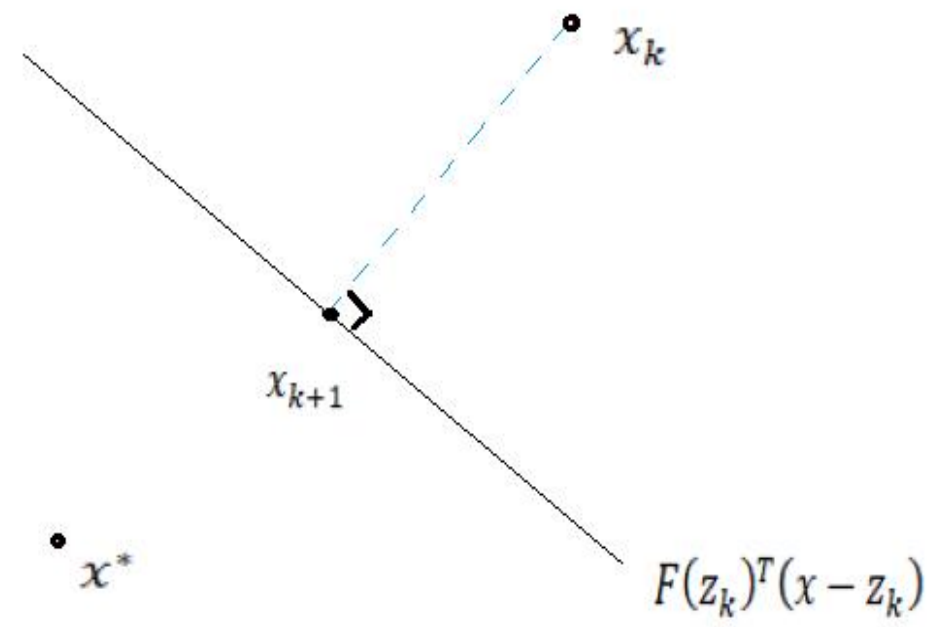
دانشگاه رازی

تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی





در نهایت تقریب جدید x_{k+1} با تصویر x_k به روی ابر صفحه H_k محاسبه می گردد. یعنی قرار می دهیم

$$x_{k+1} = P_{H_k}(x_k) = x_k - \frac{F(z_k)^T(x_k - z_k)}{\|F(z_k)\|^2} F(z_k) \quad (3)$$

تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی

با توجه به ساختار روش های مبتنی بر تصویر آیتم های زیر اساسی ترین مراحل روش های مبتنی بر تصویر هستند.

۱. انتخاب جهت جستجو

۲. محاسبه طول گام



بیشتر هزینه محاسباتی بخصوص تعداد محاسبات توابع، در روش‌های مبتنی بر تصویر مربوط به تولید ابرصفحه جداکننده است.

در تولید این ابرصفحه نیز مهم‌ترین مرحله پیدا کردن طول گام α_k است.

تلاش‌های علمی برای پیدا کردن طول گام α_k منجر به ایجاد روش‌های جستجوی نادقیق شده است که یکی از مهم‌ترین آن‌ها طول گام α_k ارائه شده توسط Zhang و Zhou به صورت زیر است

$$\alpha_k = \max\{\beta\rho^i \mid i = 0,1,2, \dots\}$$

است بطوریکه رابطه زیر برقرار باشد

$$-F(z_k)^T d_k \geq \sigma\alpha_k \|d_k\|^2 \quad (4)$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی

الگوریتم (۱) روش‌های مبتنی بر تصویر

ورودی: تقریب اولیه $x_0 \in R^n$ و پارامترهای $\rho \in (0,1), \beta \in (0,1), \sigma > 0, \epsilon > 0$.

گام (۰): قرار ده $k := 0$.

گام (۱): اگر $\|F(x_k)\| \leq \epsilon$ توقف کن. در غیر این صورت، جهت d_k صادق در

$$F(x_k)^T d_k < -\delta \|F(x_k)\|^2$$

را تعیین کن.

گام (۲): جستجوی خطی α_k را از رابطه‌ی

$$\alpha_k = \max\{\beta \rho^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$$

تعیین کن به گونه‌ای که رابطه زیر

$$-F(z_k)^T d_k \geq \sigma \alpha_k \|d_k\|^2$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی

برقرار باشد.

گام (۳): قرار ده $z_k = x_k + \alpha_k d_k$.

گام (۴): اگر $\|F(z_k)\| \leq \epsilon$ توقف کن. در غیراینصورت، تقریب جدید را از رابطه

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(z_k)^T (x_k - z_k)}{\|F(z_k)\|^2} F(z_k)$$

محاسبه کن.

گام (۵): قرارده $k = k + 1$ و به گام ۱ برو.



اولین d_k ارائه شده در روش‌های مبتنی بر تصویر، جهتی شبیه جهت روش گرادیان به صورت

$$d_k = -F_k,$$

است، که نتایج عددی مناسبی تولید نمی‌کند.

بنابراین محققان سعی نمودند که جهات متفاوتی ارائه دهند، از آنجاییکه جهت d_k باید در شرطی شبیه شرط کاهش کافی صدق کند معمولاً از جهات گرادیان مزدوجی استفاده می‌شود که در شرط کاهش کافی صادق باشد که نتایج عددی بهتری تولید کردند.

یکی از مهم‌ترین خواص این جهات، کاهش بودن آنها است که در شرط

$$F_k^T d_k < 0,$$

صدق می‌کنند.

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



تعاريف مقدماتي

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

دو روش مبتنی بر تصویر برای حل دستگاه‌ها معادلات غیر خطی یکنوا



یک روش بدون مشتق مبتنی بر تصویر سه جمله‌ای

در این بخش با استفاده از ساختار مشابه جهت گرادیان مزدوج ارائه شده توسط Li و Liu و ترکیب آن با روش تصویر، الگوریتم موثر برای حل دستگاه‌های غیرخطی یکنوا ارائه می‌گردد. در این راستا جهت d_k را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$d_k = -F_k + \beta_k s_{k-1} + \theta_k \omega_{k-1}, \quad (5)$$

که در آن

$$s_{k-1} = x_k - x_{k-1}$$

$$\omega_{k-1} = F_k - F_{k-1} + r s_{k-1}$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

که $r > 0$ و جایکه

$$\theta_{k-1} = t \frac{F_k^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T \omega_{k-1}}$$

اسکالر β_k به صورت زیر تعریف شده است

$$\beta_k = \frac{1}{s_{k-1}^T \omega_{k-1}} \left(\omega_{k-1} - s_{k-1} - s_{k-1} \frac{\|\omega_{k-1}\|^2}{s_{k-1}^T \omega_{k-1}} \right)^T F_k$$

که $t \in [0,1)$ یک اسکالر دلخواه است، تعریف می گردد. این روش را روش *TTDFP* نامیدند.



تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

به راحتی می‌توان نشان داد که جهت فوق در شرط کاهش کافی

$$F_k^T d_k \leq -c \|F_k\|^2$$

صدق می‌کند، بنابراین در فرآیند روش‌های مبتنی بر تصویر قابل استفاده است.



الگوریتم (۲) روش $(TTDFP)$

ورودی: تقریب اولیه $x_0 \in R^n$ و پارامترهای $t \in [0,1), \beta \in (0,1], r > 0, \sigma > 0, \epsilon > 0$.

گام (۰): قرار ده $k := 0$.

گام (۱): اگر $\|F(x_k)\| \leq \epsilon$ توقف کن. در غیر این صورت، جهت d_k از رابطه (۵) تعیین کن.

گام (۲): جستجوی خطی α_k از فرآیند ذکر شده محاسبه کن.

گام (۳): قرار ده $z_k = x_k + \alpha_k d_k$.

گام (۴): اگر $\|F(z_k)\| \leq \epsilon$ توقف کن. در غیر این صورت، تقریب جدید را از رابطه (۳) محاسبه کن.

گام (۵): قرار ده $k = k + 1$ و به گام ۱ برو.

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



فرضیات (۱)

در بخش بعدی به بررسی خاصیت همگرایی الگوریتم (TTDFP) پرداخته می شود. برای این منظور به دو فرض زیر نیاز داریم.

(H_1) مجموعه جواب $F(x) = 0$ که توسط Ω^* تعریف می گردد، ناتهی است.

(H_2) تابع $F: R^n \rightarrow R^n$ پیوسته لپ شیتز است. یعنی یک ثابت $L > 0$ وجود دارد بطوریکه

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in R^n$$

در لم ها و قضیه های بعدی، همواره فرض می کنیم که فرضیات (H_1) و (H_2) برقرار می باشد.

در این بخش از آوردن اثبات صرفه نظر شده است.

تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



قضیه (۱)

فرض کنید جهت جستجوی d_k تولید شده توسط رابطه (۵) باشد آنگاه داریم

$$\forall k \geq 0, \quad F_k^T d_k \leq -c \|F_k\|^2 .$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



لم (۱)

فرض کنید دنباله‌های $\{x_k\}$ و $\{z_k\}$ توسط الگوریتم (۲) تولید شده‌اند، آنگاه داریم

$$\alpha_k \geq \min \left\{ 1, \frac{c\beta \|F_k\|^2}{(L + \sigma) \|d_k\|^2} \right\}$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



لم (۲)

فرض کنید که دنباله‌های $\{x_k\}$ و $\{z_k\}$ توسط الگوریتم (۲) تولید شده‌اند. آنگاه برای هر \bar{x} بطوریکه $F(\bar{x}) = 0$ باشد، داریم

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - x_k\|^2,$$

همچنین دنباله $\{x_k\}$ کراندار است و رابطه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0.$$

برقرار است.

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



لم (۳)

فرض کنید که دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم (۲) تولید شده است، آن گاه جهت جستجوی d_k کراندار می باشد، یعنی یک ثابت $M > 0$ وجود دارد بطوری که

$$\forall k \geq 0, \|d_k\| \leq M.$$

تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



قضیه (۲)

فرض کنید که دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم (۲) تولید شده است، آن گاه داریم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F_k\| = 0 .$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



یک روش بدون مشتق مبتنی بر تصویر طیفی

در این بخش با استفاده از ساختار مشابه جهت گرادیان مزدوج ارائه شده توسط Peiting و Chuanjiang و ترکیب آن با روش تصویر، الگوریتم موثر برای حل دستگاه‌های غیرخطی یکنوا ارائه می‌گردد.

در این راستا جهت جستجوی d_k را به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$d_k = -\lambda_{k-1}F_k + \beta_k S_{k-1} + \varphi_{k-1}\omega_{k-1} \quad (6)$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

که در آن

$$\lambda_{k-1} = \frac{(\omega_{k-1} S_{k-1}^T)}{(\|S_{k-1}\|^2)}$$

$$\theta_{k-1} = t \frac{F_k^T S_{k-1}}{S_{k-1}^T \omega_{k-1}}$$

و اسکالر β_k به صورت زیر تعریف شده است

$$\beta_k = \lambda_{k-1} \frac{F_k^T \omega_{k-1}}{\omega_{k-1} S_{k-1}^T} - \left(1 + \lambda_{k-1} \frac{\|\omega_{k-1}\|^2}{\omega_{k-1} S_{k-1}^T} \right) \frac{S_{k-1}^T F_k}{\omega_{k-1} S_{k-1}^T}.$$



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

به راحتی می‌توان نشان داد که جهت فوق در شرط کاهش کافی

$$F_k^T d_k \leq -c \|F_k\|^2$$

صدق می‌کند، بنابراین در فرآیند روش‌های مبتنی بر تصویر قابل استفاده است.



الگوریتم (۳) روش گرادیان مزدوج طیفی

ورودی: تقریب اولیه $x_0 \in R^n$ و پارامترهای $\epsilon > 0, \sigma \in (0,1), \rho \in (0,1), r \in (0,1), t \in [0,1)$.

گام (۰): قرارده $k := 0$.

گام (۱): اگر $\|F(x_k)\| \leq \epsilon$ توقف کن. در غیر این صورت، جهت d_k از رابطه (۶) تعیین کن.

گام (۲): از یک فرآیند جستجوی خطی مقدار $\alpha_k = \rho^m$

بگونه‌ای بیابید که m کوچکترین عدد صحیح نامنفی صادق در معادله (۴) است.

گام (۳): بردار z_k را از رابطه زیر محاسبه کن

$$z_k = x_k + \alpha_k d_k$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



گام (۴): اگر $z_k \in \Omega^*$ ، پس $x_{k+1} = z_k$ ، حل را متوقف کن. در غیر اینصورت تکرار بعدی x_{k+1} توسط معادله (۳) محاسبه کن.

گام (۵): قرار دهید $k = k + 1$ ، به گام (۱) برو.

در این بخش خواص الگوریتم فوق مورد بررسی قرار می گیرد.

تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی



لم (۴)

فرض کنید دنباله های $\{x_k\}$ و $\{z_k\}$ توسط الگوریتم (۳) تولید شده‌اند. آن گاه داریم

$$\alpha_k \geq \min \left\{ \rho, \frac{c_1 \rho \|F_k\|^2}{(L + \sigma) \|d_k\|^2} \right\}$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

فرض کنید دنباله‌های $\{x_k\}$ و $\{z_k\}$ توسط الگوریتم (۳) تولید شده‌اند. آنگاه خواهیم داشت

$$\|d_k\| \leq A \|F_k\|$$

از سوی دیگر

$$\alpha_k \geq \min \left\{ \rho, \frac{c_1 \rho}{(L + \sigma) A^2} \right\} \triangleq B$$

$$A = (2+t)(L+r) + (L+r)^2 / r + 1/r$$

در اینجا



قضیه (۳)

فرض کنید که دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم (۲) تولید شده است، آن گاه داریم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F_k\| = 0 .$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



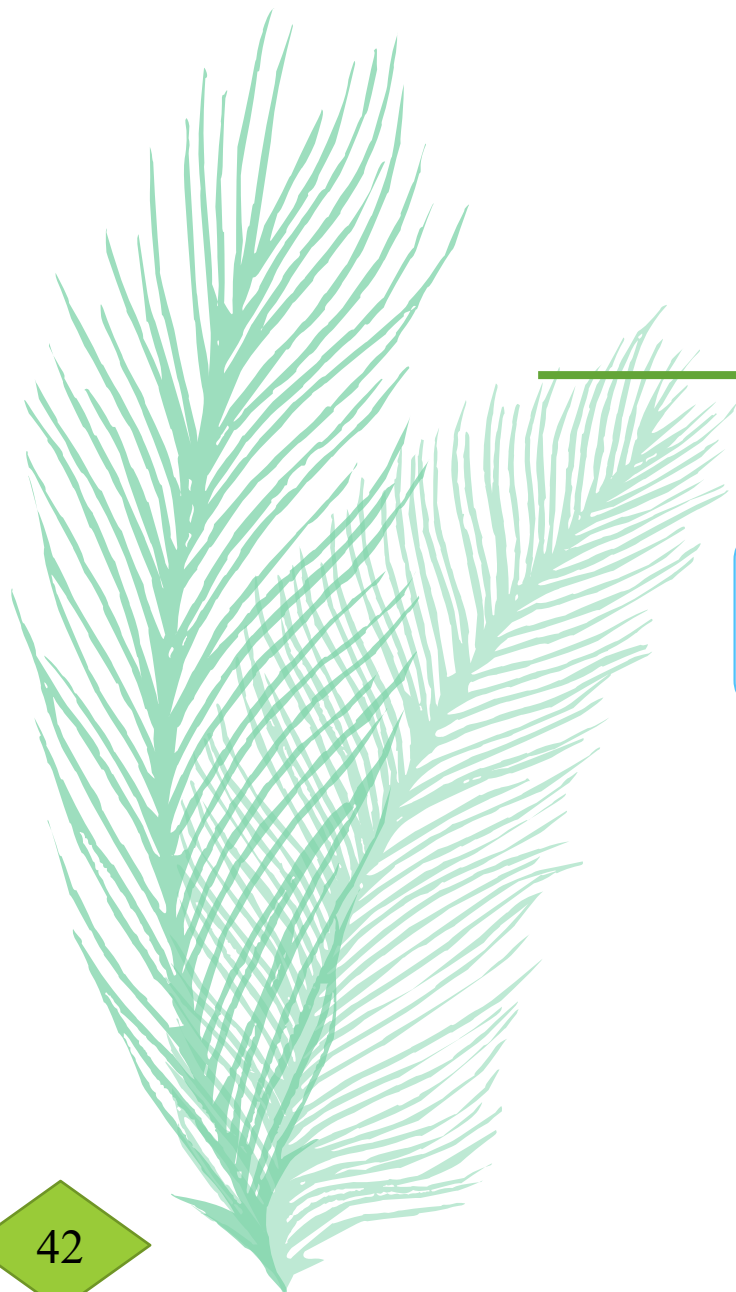
تعاريف مقدماتی

روش های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

نتایج عددی



هدف این فصل تحلیل کارایی عددی الگوریتم (TTDFP) و الگوریتم روش گرادیان مزدوج طیفی در حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی می‌باشد.



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

برنامه کامپیوتری برای پیاده‌سازی الگوریتم‌های موردنظر در محیط نرم‌افزاری *MATLAB 2020* روی یک پردازشگر *PC* با *Intel(R) Core(TM) i7 - 4702MQ CPU @ 2.20 GHz* اجرا گردیده است.



در همه الگوریتم‌ها نقطه شروع x_0 همان نقطه شروع استاندارد در منابع فوق می‌باشد و شرط توقف الگوریتم‌ها به صورت زیر است

$$\|g_k\| \leq 10^{-4}$$

مقادیر پارامترهای استفاده شده در الگوریتم به صورت زیر است

$$\epsilon = 10^{-4}, \rho = \frac{2}{5}, \sigma = 10^{-4}, r = 0.01, t = 0.5.$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی



الگوریتم‌های ارائه شده را روی پنج مسئله زیر مورد آزمون قرار می‌دهیم.

problem 1.

$$f_i(x) = \exp x_i - 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

problem 2.

$$f_i(x) = 2x_i - \sin x_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

problem 3.

$$\begin{cases} f_1(x) = 2x_1 - x_2 + \exp x_1 - 1, \\ f_i(x) = -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} + \exp x_i - 1, & i = 2, 3, \dots, n-1, \\ f_n(x) = 2x_n - x_{n-1} + \exp x_n - 1. \end{cases}$$



تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

problem 4.

$$f_i(x) = x_i - \sin x_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

problem 5.

$$\begin{cases} f_1(x) = 2x_1 + \sin x_1 - 1, \\ f_i(x) = -2x_{i-1} + 2x_i + \sin x_i - 1, & i = 2, 3, \dots, n-1, \\ f_n(x) = 2x_n + \sin x_n - 1. \end{cases}$$

جدول (۱)

Initial points	Dim	k/CPU /NF	
		الگوریتم (2-4) (TTDFP)	الگوریتم (5-1)
x_1	2000	18/0.067/73	18/0.060/90
	5000	18/0.084/73	18/0.090/90
	20/000	19/0.133/77	19/0.138/95
	30/000	19/0.151/77	19/0.163/95
x_2	2000	16/0.114/65	15/0.100/75
	5000	17/0.161/69	16/0.160/80
	20/000	17/0.191/69	16/0.182/80
	30/000	18/0.216/73	17/0.196/85
x_3	2000	25/0.076/109	31/0.076/178
	5000	25/0.102/109	31/0.121/178
	20/000	26/0.173261/183/113	32/0.208/183
	30/000	26/0.214/113	32/0.261/183



تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی بر تصویر

دو روش مبتنی بر تصویر

نتایج عددی

Initial points	Dim	k/CPU /NF	
		الگوریتم (2-4) (TTDFP)	الگوریتم (5-1)
x_4	2000	19/0.103/87	18/0.108/114
	5000	20/0.136/91	18/0.130/114
	20/000	20/0.241/91	19/0.219/119
	30/000	21/0.221/95	19/0.230/119
x_5	2000	16/0.102/65	15/0.097/75
	5000	16/0.111/65	16/0.100/80
	20/000	17/0.146/69	17/0.144/85
	30/000	17/0.177/69	17/0.176/85
x_6	2000	14/0.084/57	14/0.084/70
	5000	14/0.105/57	14/0.098/70
	20/000	15/0.142/61	15/0.196/75
	30/000	15/0.166/61	15/0.173/75



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویردو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

Initial points	Dim	k/CPU /NF	
		الگوریتم (2-4) (TTDFP)	الگوریتم (5-1)
x_1	2000	16/0.083/65	16/0.064/80
	5000	17/0.078/69	17/0.081/85
	20/000	18/0.121/73	17/0.0129/85
	30/000	18/0.128/73	18/0.135/90
x_2	2000	16/0.088/65	16/0.103/80
	5000	17/0.110/69	17/0.115/85
	20/000	18/0.164/73	17/0.152/85
	30/000	18/0.161/73	18/0.197/90
x_3	2000	18/0.065/73	16/0.062/80
	5000	19/0.090/77	16/0.096/80
	20/000	19/0.123/77	17/0.108/85
	30/000	20/0.154/81	17/0.131/85



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویردو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

Initial points	Dim	k/CPU /NF	
		الگوریتم (2-4) (TTDFP)	الگوریتم (5-1)
x_4	2000	18/0.100/73	16/0.094/80
	5000	19/0.116/77	16/0.110/80
	20/000	19/0.164/77	17/0.155/85
	30/000	20/0.182/81	17/0.163/85
x_5	2000	16/0.095/65	16/0.069/80
	5000	16/0.102/65	16/0.108/80
	20/000	17/0.128/69	17/0.111/85
	30/000	17/0.145/69	17/0.148/85
x_6	2000	14/0.087/57	14/0.080/70
	5000	14/0.107/57	14/0.104/70
	20/000	15/0.139/61	15/0.141/75
	30/000	15/0.143/61	15/0.166/75



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویردو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

Initial points	Dim	k/CPU /NF	
		الگوریتم (2-4) (TTDFP)	الگوریتم (5-1)
x_1	2000	38/0.239/174	28/0.0255/199
	5000	36/0.503/169	28/0.528/194
	20/000	40/2.088/184	35/2.067/238
	30/000	40/2.824/182	32/2.764/217
x_2	2000	35/0.259/161	37/0.317/239
	5000	48/0.689/222	42/0.753/276
	20/000	48/2.476/225	52/2.940/339
	30/000	45/3.576/221	50/4.729/335
x_3	2000	53/0.451/387	44/0.410/394
	5000	60/1.484/561	51/1.230/461
	20/000	82/11.988/1173	73/11.363/1252
	30/000	42/6.098/403	62/11.943/918



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویردو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

Initial points	Dim	k/CPU /NF	
		الگوریتم (2-4) (TTDFP)	الگوریتم (5-1)
x_4	2000	49/0.386/286	55/0.510/397
	5000	51/0.925/307	55/1.373/489
	20/000	54/3.649/353	69/6.295/704
	30/000	62/6.701/445	52/5.824/453
x_5	2000	40/0.273/183	35/0.294/226
	5000	45/0.650/208	44/0.777/291
	20/000	42/2.115/198	40/2.540/271
	30/000	46/3.261/217	43/4.063/304
x_6	2000	32/0.321/145	28/0.256/174
	5000	32/0.600/147	30/0.531/190
	20/000	32/1.565/144	34/1.934/215
	30/000	29/2.062/131	35/2.870/223



تعاريف مقدماتی

روش های مبتنی
بر تصویردو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

Initial points	Dim	k/CPU /NF	
		الگوریتم (2-4) (TTDFP)	الگوریتم (5-1)
x_1	2000	64/0.095/193	65/0.097/260
	5000	83/0.148/250	84/0.208/336
	20/000	125/0.397/376	126/0.337/504
	30/000	142/0.465/427	143/0.512/572
x_2	2000	64/0.108/193	65/0.141/260
	5000	83/0.188/250	84/0.173/336
	20/000	125/0.375/376	126/0.442/504
	30/000	142/0.508/427	143/0.538/572
x_3	2000	65/0.086/198	65/0.081/262
	5000	85/0.164/250	84/0.144/338
	20/000	127/0.240/384	127/0.347/510
	30/000	144/0.494/435	143/0.490/574



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویردو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

Initial points	Dim	k/CPU /NF	
		الگوریتم (2-4) (TTDFP)	الگوریتم (5-1)
x_4	2000	65/0.105/198	65/0.102/262
	5000	85/0.189/258	84/0.216/338
	20/000	127/0.413/384	127/0.409/510
	30/000	144/0.516/435	143/0.541/574
x_5	2000	72/0.108/217	140/0.150/560
	5000	95/0.208/286	328/0.403/1312
	20/000	138/0.387/412	772/1.600/3088
	30/000	152/0.534/457	1122/2.690/4488
x_6	2000	55/0.109/166	55/0.095/220
	5000	74/0.162/223	74/0.141/296
	20/000	116/0.344/349	117/0.365/468
	30/000	133/0.480/400	134/0.493/536



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویردو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

Initial points	Dim	k/CPU /NF	
		الگوریتم (2-4) (TTDFP)	الگوریتم (5-1)
x_1	500	1248/1.646/4999	1065/1.628/6235
	1000	2855/6.058/13003	2560/5.673/14929
	1500	5041/12.178/23764	4444/11.908/26126
	2000	5267/14.261/24765	5920/12.232/34798
x_2	500	1634/2.489/7327	1421/2.137/8450
	1000	2836/4.922/12780	1748/3.933/10098
	1500	4184/12.239/19488	3823/11.318/22469
	2000	6246/14.534/29680	5139/12.853/30257
x_3	500	1101/1.587/4594	1088/1.616/6310
	1000	2921/5.979/13176	2642/6.687/15450
	1500	4109/11.952/19013	4797/10.527/28145
	2000	5609/19.554/26470	5523/19.143/32676



تعاریف مقدماتی

روش های مبتنی
بر تصویردو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

Initial points	Dim	k/CPU /NF	
		الگوریتم (2-4) (TTDFP)	الگوریتم (5-1)
x_4	500	fail	fail
	1000	fail	fail
	1500	fail	fail
	2000	fail	fail
x_5	500	1039/1.286/4310	964/1.452/5583
	1000	2890/6.745/13175	2679/6.522/15720
	1500	4063/9.448/18752	3893/9.586/22771
	2000	5424/18.602/25471	5695/18.568/33724
x_6	500	1136/1.470/4867	1434/1.994/5883
	1000	3009/6.314/13902	2620/5.059/15267
	1500	4757/14.192/22329	3761/9.301/22091
	2000	5413/14.806/25464	5880/17.884/34815



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویردو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی



تعاريف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویر

دو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

با یک بررسی و کاوش ساده در نتایج عددی در جداول بالا بسادگی می‌توان ملاحظه کرد که در فرآیند حل مسائل آزمون مشخص شده الگوریتم‌ها نسبتاً مشابه رفتار می‌کنند.



تعاریف مقدماتی

روش‌های مبتنی
بر تصویردو روش مبتنی
بر تصویر

نتایج عددی

- [1] Y.H. Dai and L.Z. Liao, New conjugacy conditions and related nonlinear conjugate gradient methods, *Applied Mathematics and Optimization* 43. 87-101(2001).
- [2] J.K. Liu, Two efficient Nonlinear conjugate gradient methods, *Mathematics Numerical Sin.* **35**, 286–296 (2013).
- [3] J.K. Liu, S.J. Li, A three-term derivative-free projection method for nonlinear monotone system of equations, *Calcolo* 53:427–450 (2016).
- [4] G. Peiting, H. Chuanjing, A derivative-free three-term projection algorithm involving spectral quotient for solving nonlinear monotone equations, *Optimization* 67(10) 1631-1648 (2018) .

با سپاس فراوان از تمامی عزیزان
حاضر در جلسه