فهرست مطالب

فصل ۱

انتگرال نامعیّن

۱.۱ مقدمات

سراسر ریاضیات پر است از اعمالی که ضد همدیگر عمل می کنند. مثلاً عبارت A را می توان با تقسیم بر عدد ناصفر k به فرم کسری $\frac{A}{k}$ تبدیل و بالعکس با ضرب $\frac{A}{k}$ در k مجدداً به عبارت اصلی برگرداند[۱]. به همین صورت در مبحث ماتریس ها، معکوس گیری از یک ماتریس مربعی نامنفرد همانند عکس عمل ضرب ماتریسی عمل می کند. در این فصل و به اندازه ای که احتیاج داریم، درباره عکس عمل مشتق گیری و نحوهٔ انجام آن به کفایت بحث می کنیم. لزوم پرداختن به روند عکس عمل مشتق گیری را در مثال زیر ملاحظه کنید.

مثال ۱.۱. هزینهٔ نهایی حاصل از تولید کالایی[۲] مقدار ثابت ۳۶ است. با این فرض، قواعد اقتصاد، تابع هزینهٔ کل را به شکل خطی $TC(x) = ۳۶x + c_۰$ توصیه می کند که در آن $c_۰$ هزینهٔ ثابت است.[۳] حال اگر هزینهٔ نهایی، تابعی غیر ثابت از سطح تولید تعریف شود، یافتن تابع هزینهٔ کل از روی آن قدری

[۱] بعبارت دیگر ضرب و تقسیم اینچنینی متضاد هم عمل می کنند.
[۲] به ازای هر سطحی از تولید
[۳] اگرچه در متون اقتصادی تابع مورد نظر را خطی می نامند اما در ریاضیات این نوع توابع که دارای عرض از مبدا نیز هستند را بنام **آفین** می شناسند.

مشکل تر است. در این حالت عکس عمل مشتق گیری (انتگرالگیری) را برای یافتن آن تابع توصیه می کنند. □

تعریف ۱.۱. تابع $F(x)$ را یک **تابع اولیه** (پاد مشتق) برای $f(x)$ می نامند هرگاه روی دامنهٔ تعریف $f(x)$، تساوی $F'(x) = f(x)$ برقرار شود.[۴]

مثال ۲.۱. تابع $F(x) = \frac{x^۳}{۳} + ۵x - ۷$ یک تابع اولیه برای $f(x) = x^۲ + ۵$ روی $\mathbb{R}$ [۵] است، زیرا همه جا: $\left(\frac{x^۳}{۳} + ۵x - ۷\right)' = x^۲ + ۵$. همچنین تابع $G(x) = \ln(۱ - x^۲)$ تابع اولیه ای برای $g(x) = \frac{۲x}{x^۲ - ۱}$ روی $-۱ < x < ۱$ است (چرا؟). □

نکته ۱.۱. از قواعد مقدماتی مشتق می دانیم که اگر $F'(x) = f(x)$ آنگاه به ازای هر ثابت C [a]، تساوی $(F(x) + C)' = f(x)$ مجدداً برقرار است.[b] چون مقدار C [c] دلخواه است لذا $F(x) + C$ می تواند فرم کلی **همهٔ تابع اولیه های** $f(x)$ را نشان دهد. به این شکل عمومی گاهی یک **خانواده از پاد مشتق های** $f(x)$ نیز می گویند.

[a] ثابت را نه تنها یک **عدد** می تواند گرفت بلکه بمعنی عام تر یعنی خالی از x هم قابل تفسیر است.
[b] در واقع $F(x) + C$ هم، یک تابع اولیه برای $f(x)$ می شود.
[c] اینکه این مقدار ثابت دقیقاً چه عددی است، در ادامه خواهد آمد.

مثال ۳.۱. برای $f(x) = x^۲ + ۱$، $\frac{x^۳}{۳} + x$ یک تابع اولیه است و لذا $\left(\frac{x^۳}{۳} + x\right) + C$ شکل عمومی همهٔ تابع اولیه های $f(x)$ را در خود دارد. همچنین برای تابع $g = \ln(x)$ چون $[x(\ln(x) - ۱)]' = g$، لذا فرم کلی همهٔ پاد مشتق های g در قالب $x(\ln(x) - ۱) + C$ قابل بیان است. بدیهی است در اینجا فرض $x > ۰$ لازم است. □

---

[۴] با کمک نماد معادل مشتق، این تساوی بفرم دیفرانسیلی $\frac{dF}{dx} = f(x)$ هم نوشته می شود.
[۵] این مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی را نشان می دهد.

نکته ۱.۲. اگر $F(x) \neq G(x)$ دو تابع اولیه برای $f(x)$ باشند ،آنگاه $F(x)-G(x)$ همواره مقدار ثابتی است.

مثال ۱.۴. با فرض اینکه $F=\frac{x^{۴}}{۴}+x^{۲}$ یک ضد مشتق $f=x^{۳}+۲x$ روی $\mathbb{R}$ است، از بین توابع $F_۱=\frac{x^{۴}}{۴}+x^{۲}+۱۱/۳$، $F_۲=\frac{x^{۴}}{۴}+x$ و $F_۳=\frac{x^{۴}}{۴}+x^{۲}+x-۱$ فقط $F_۱$ یک تابع اولیه دیگر برای f خواهد بود زیرا: $F-F_۱=-۱۱/۳$ ولی $F-F_۲=\underbrace{x^{۲}-x}_{\text{ثابت نیست}}$ و $F-F_۳=\underbrace{۱-x}_{\text{ثابت نیست}}$. □

تعریف ۱.۲. فرض کنیم تابع $F(x)$ یک تابع اولیهٔ $f(x)$ است. در این صورت $F(x)+C$ [۶] را **انتگرال نامعیّن** $f(x)$ نامیده و آنرا با نماد زیر هم نشان می دهند:

$$\int f(x)\,dx,$$

در تساوی بالا، نماد $\int$ علامت انتگرال نامعیّن[۷]، $f(x)$ تابع داخل انتگرال[۸] و علامت دیفرانسیلی dx نشان می دهد که روند تابع اولیه گیری نسبت به چه متغیری در حال انجام است.[۹]

مثال ۱.۵. در چند نمونه زیر شکل مشتقی و متناظر انتگرالی (نامعیّن) دو تابع آمده است:

شکل انتگرالی	شکل مشتقی
$\int(۳x^{۲}+۴)dx=\quad(x^{۳}+۴x)+C,$	$(x^{۳}+۴x)'\ =\ ۳x^{۲}+۴$
$\int(۲x)e^{x^{۲}-۲}dx=\quad e^{x^{۲}-۲}+C,$	$(e^{x^{۲}-۲})'\ =\ (۲x)e^{x^{۲}-۲}$

دربارهٔ نماد $\int f(x)\,dx$ ، موارد ذیل قابل توجه است:

[۶] که بیان کننده فرم عمومی همهٔ تابع اولیه های $f(x)$ است.
[۷] و اینکه نشان می دهد، عکس روند مشتق درحال انجام است.
[۸] تابعی که در پی یافتن پاد مشتق های آن هستید.
[۹] در این تعریف ناحیه تغییرات x را مناسب و تابع f را پیوسته بر آن در نظر می گیریم.

نکته ۳.۱. هنگام کار با توابع یک متغیره، معمولاً حرف متغیر تحت دیفرانسیل d و حرف متغیر
غیر هم نام اند
تابع داخل انتگرال همسان اند. یعنی در این درس مواردی مانند $\int f(x)\quad d\alpha$ و یا $\int f(x)\,dt$ غالباً پیش نمی آیند ولی اگر اصرار بر درستی انتگرال (مانند دو نمونه فوق) باشد آنگاه با عبارت داخل انتگرال همانند یک ثابت رفتار می کنیم به شرطی که حاوی متغیر انتگرال نباشد.

نکته ۴.۱. در این کتاب، کار جبری روی علامت دیفرانسیلی d انجام نمی شود. مثلاً شکلهای $\int \frac{f(x)}{dx}$ و یا $\int f(x)\sqrt{dx}$ درست نیستند.[a] بعلاوه بین تابع داخل انتگرال و dx علامت ضرب وجود دارد. مثلاً طرز نوشتن $\int x^3 + 2x\,dx$ نادرست و با قرار دادن دو پرانتز در اطراف عبارت به فرم درست $\int (x^3 + 2x)\,dx$ می رسیم.

نکته ۵.۱. تساوی $(\star_1)$ وقتی بدرستی برقرار است که صحت تساوی $F(x)' = f(x)$ تحقیق شود.[b]

[a] که در یکی dx در مخرج قرار گرفته و در دیگری ریشه گیری روی آن انجام شده است.
[b] اگر با مشتق گیری از $F(x)$ عبارتی غیر از $f(x)$ بدست آمد، انتگرال حل شده درست نیست!

مثال ۶.۱. با فرض $x > 0$، نشان دهید $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$.

حل: اگر قرار دهیم $F(x) = x\ln x - x + C$ آنگاه $F'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln x$ که نشان می دهد طرف راست انتگرال داده شده صحیح نوشته شده است. □

مثال ۷.۱. آیا انتگرال $\int \sqrt[3]{2x-1}\,dx = \frac{3}{8}(2x+1)^{\frac{4}{3}} + C$ بدستی حل شده است؟

حل: اگر قرار دهیم $F(x) = \frac{3}{8}(2x+1)^{\frac{4}{3}} + C$ آنگاه $F'(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ و لذا طرف راست انتگرال داده شده صحیح بدست آمده است. □

۲.۱ انتگرالگیری و فرمولهای مقدماتی آن

در اولین مرحله از انتگرالگیری باید مشخص شود از چه تابعی انتگرال می گیریم. مثلاً در $\int e^{۳x}\frac{dx}{\sqrt{۲}\ln x}$ ، تابع، با حذف ظاهری dx و علامت انتگرال بدست می آید:

$$\int e^{۳x}\frac{dx}{\sqrt{۲}\ln x} \Longrightarrow \underbrace{e^{۳x}\frac{۱}{\sqrt{۲}\ln x}}_{\text{تابع مورد نظر}},$$

و به همین صورت در نمونه های زیر:

$$\int \frac{(۳x+۱)\,dx}{e^x} \Longrightarrow f(x)=(۳x+۱)e^{-x}, \qquad \int \frac{\left(\frac{۲dx}{۳}\right)}{x\ln x} \Longrightarrow f(x)=\frac{۲}{۳x\ln x}$$

$$\int dx \Longrightarrow f(x)=۱, \qquad \int \frac{x^۳dx}{x^{۱۱}} \Longrightarrow f(x)=x^{-۸}$$

$$\int e^{۸-۴x}\,dx \Longrightarrow f(x)=\frac{e^۸}{e^{۴x}}$$

در مرحلهٔ بعد لازم است با توجه نوع تابع و فرمول انتگرالگیری شبیه به آن، انتگرال بگیریم. فرمولهای زیر برای انتگرالگیری از سه تابع متعارف و مهم بکار می آیند:

۱. $$\int k\,dx = kx + C, \qquad (k \text{ ثابت})$$

۲. $$\int x^k\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{k+۱}}{k+۱}+C, & k\neq -۱ \\ \ln|x|+C, & k=-۱ \end{cases}$$

۳. $$\int e^{kx}\,dx = \begin{cases} \frac{۱}{k}e^{kx}+C, & k\neq ۰ \\ x+C. & k=۰ \end{cases}$$

اگر شکل ظاهری تابع داخل انتگرال از لحاظ ساختار با یکی از فرمولهای انتگرال تطبیق کرد آنگاه بسادگی انتگرال را با جایگذاری عدد هایی خاص در آن فرمول می توان حل کرد.[۱۰]

[۱۰]عدد نوشته شده در بالای تساوی ها، شماره فرمولی است که از آن استفاده شده تا عبارت بعد از تساوی بدست آید.

مثال ۸.۱. :با کمک فرمولهای فوق و بترتیب آنها

$$\int \frac{۵\,dx}{۱۳\sqrt[۳]{-۲}} = \int \frac{۵}{۱۳\sqrt[۳]{-۲}}\,dx \overset{۱}{=} \left(\frac{۵}{۱۳\sqrt[۳]{-۲}}\right)x + C,$$

$$\int k^{-۰/۱}dk = \frac{k^{-۰/۱+۱}}{-۰/۱+۱} + C \overset{۲}{=} \left(\frac{k^{۰/۹}}{۰/۹}\right) + C,$$

$$\int e^{\pi y}dy \overset{۳}{=} \frac{۱}{\pi}e^{\pi y} + C. \qquad \square$$

اگر شکل ظاهری تابع داخل انتگرال از لحاظ ساختار اولیهٔ با فرمولی از فرمولهای انتگرال منطبق نشد آنگاه باید کارهای آماده سازی قبلی روی تابع انجام داده و سپس از فرمول ها کمک بگیریم. در زیر دو نمونه از کارهایی که می توانید روی تابع انجام دهید را می بینید.

مثال ۹.۱. بکمک فرمول ۲ داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[a]{x^b}} = \xrightarrow{\frac{۱}{\sqrt[a]{x^b}} = x^{-b/a}} \int x^{(-b/a)}\,dx \overset{۲}{=} \frac{x^{۱-\frac{b}{a}}}{\frac{-b}{a}+۱} + C,\ (a \neq b)$$

$$\int \overbrace{x^{۲}(x^{-۴})}^{(x^{-۲})}\,dx = \int x^{-۲}\,dx \overset{۲}{=} \frac{x^{-۱}}{-۱} + C. \qquad \square$$

نتیجه ۱.۱. بعنوان یک نتیجهٔ کاربردی از فرمول ۱ می توان نوشت $\int dx = x + C$. در این اتحاد هر چه بجای x قرار بگیرد هم مجدداً نتیجه برقرار است. مثلاً $\int d(x^{۲}+۲x-۳) = (x^{۲}+۲x-۳)+C$.

در انتگرالگیری علاوه بر فرمولهای اصلی، تعدادی قواعد عمومی نیز وجود دارد که در واقع نقش پیوند دهندهٔ انواع انتگرالها با هم را ایفا می کنند. از جمله:

۴. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$

۵. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,$

که در آن k مقدار ثابتی است.

مثال ۱.۱۰. بکمک فرمولهای ۴ و ۵ داریم:

$$\int (2x^5 + 8x^{-3} - 11)\, dx \;\overset{5}{\underset{4}{=}}\; \overbrace{\int (2x^5) dx}^{2\int (x^5) dx} + \underbrace{\int (8x^{-3}) dx}_{8\int (x^{-3}) dx} + \overbrace{\int (-11) dx}^{-11x + C_3}$$

$$\overset{2}{=}\; 2\left(\frac{x^6}{6} + C_1\right) + 8\left(\frac{x^{-2}}{-2} + C_2\right) + (-11x + C_3),$$

که در نهایت جواب به صورت زیر در می آید:

$$\int (2x^5 + 8x^{-3} - 11)\, dx = \left(\frac{x^6}{3} - 4x^{-2} - 11x\right) + \underbrace{(2C_1 + 8C_2 + C_3)}_{C}. \qquad \square$$

نتیجه ۱.۲. با توجه به حل بالا؛ انتگرالهایی با کاربرد فرمول ۴ را بدون در نظر گرفتن مقادیر ثابت برای تک تک انتگرالها حل کرده و سپس یک مقدار ثابت C در نهایت می افزاییم.[11]

مثال ۱.۱۱. در این مثال و با کمک فرمول ۵،اهمیت نکته ۱.۳ و توجه به آن روشن می شود. هدف، حل انتگرالهای بترتیب $\int (a^2 + 5a - 1)x^{-3}\, da$ و $\int \sqrt[3]{a^2 + 5a - 1}\, x^{-3}\, dx$ است. هر کدام از تابع های داخل انتگرال از عباراتی شامل دو حرف مختلف ساخته شده اند. بر اساس تعریف، عبارت دیفرانسیلی d معیّن می کند که انتگرال بر اساس کدام متغیر است و از اینرو یکی از انتگرالها برحسب a و دیگری بر حسب x مرتب شده اند. اکنون که متغیر هر انتگرال مشخص شد، بنابه نکته ۱.۳، عبارت x^{-3} در انتگرال راست ثابت و عبارت $\sqrt[3]{a^2 + 5a - 1}$ در انتگرال سمت چپی حکم ثابت را بازی کرده و از انتگرال بیرون می آیند:

$$\int \sqrt[3]{a^2 + 5a - 1}\, x^{-3}\, dx \overset{5}{=} \sqrt[3]{a^2 + 5a - 1} \int x^{-3}\, dx \;\overset{2}{=}\; \sqrt[3]{a^2 + 5a - 1}\left(\tfrac{x^{-2}}{-2}\right) + C,$$

$$\int (a^2 + 5a - 1)x^{-3}\, da \;\overset{5}{=}\; x^{-3} \int (a^2 + 5a - 1)\, da \;\overset{2}{=}\; x^{-3}\left(\tfrac{a^3}{3} + \tfrac{5a^2}{2} - a\right) + C.$$

[11] در این صورت لازم نیست برای هر انتگرال تک به تک مقدار ثابت در نظر بگیریم.

□

۳.۱ انتگرالگیری با شرایط اولیه

در تعریف انتگرال نامعیّن همواره مقدار ثابت C وجود دارد. اما آیا می توان مقدار آنرا بدست آورد؟ جواب مثبت است. در واقع با افزودن اطلاعاتی مناسب[۱۲] به انتگرال، مقدار C بطور دقیق مشخص می شود. به مثالهای متنوع زیر توجه کنید.

مثال ۱۲.۱. تولید کننده ای با تابع هزینهٔ نهایی $MC(x) = ۳x^۲ + ۵e^{x+۱} + ۱۳$ کار می کند. او میداند با تولید ۱ واحد کالا، هزینهٔ کلی برابر مبلغ $۵e^۲$ را باید بپردازد، تابع هزینهٔ کل وی چیست؟

حل: چون $TC(x) = \int MC(x)\,dx$ پس:

$$TC(x) = \int (۳x^۲ + \underbrace{۵e^{x+۱}}_{۵e(e^x)} + ۱۳)\,dx \overset{۳}{\underset{۴}{=}} (x^۳ + ۵e^{x+۱} + ۱۳x) + C.$$

فرض اضافه مسئله، معادل با $TC(۱) = ۵e^۲$ است. آنرا در تابع کلی بدست آمده بالایی اِعمال کرده و داریم: $۵e^۲ = TC(۱) = (۱^۳ + ۵e^{۱+۱} + ۱۳) + C \to C = -۱۴$. بنابر این تولید کننده با تابع هزینهٔ کل $TC(x) = (x^۳ + ۵e^{x+۱} + ۱۳x) - ۱۴$ کار می کند. □

مثال ۱۳.۱. ثبت دوره ای فروش تولید کننده ای نشان می دهد که درآمد نهایی حاصل از فروش کالایش با رابطه $MR(x) = ۳۰۰ - ۰/۲x$ داده می شود. مطلوبست تابع درآمد کل وی.

حل: $TR(x) = \int MR(x)\,dx = \int (۳۰۰ - ۰/۲x)\,dx = (۳۰۰x - ۰/۱x^۲) + C$. چون به ازای فروش $x = ۰$ کالا، $TR = ۰$ خواهد شد (یعنی $TR(۰) = ۰$) لذا با جایگذاری به مقدار $C = ۰$ می رسیم و بنابر این تولید کننده دارای تابع درآمد کل $TR(x) = ۳۰۰x - ۰/۱x^۲$ است. □

مثال ۱۴.۱. فرض کنید مقدار شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ در هر نقطه از دامنه تعریف آن، بوسیله رابطه $۳x^۲ + ۱$ داده می شود. ضابطه تابع را بدست آورید بشرطی که نقطه $(۲, ۶)$ روی نمودار تابع واقع باشد.

---
[۱۲] شرایط اولیه

حل: چون شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ با ضابطه $f'(x)$ شناخته می شود[۱۳] لذا:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (۳x^۲+۱)\,dx = (x^۳+x)+C,$$

و چون $f(۲)=۶$ پس $f(۲)=(۲^۳+۲)+C=۶$ و لذا $C=-۴$ و بنابر این $f(x)=x^۳+x-۴$ ضابطه تابع است. □

۴.۱ روشهای انتگرالگیری

در بیشتر مواقع، با انتگرالهایی کار می کنیم که شکل تابع داخل آنها واجد برقراری فرم های آمده در فرمولهای ۱ تا ۵ نیستند. در چنین مواردی می توان از ساده ترین نکات متعارف حسابان[۱۴] استفاده کرده تا شکل کلی تابع، بفرمی قابل تطبیق با فرمولهای مقدماتی تبدیل شود. در نمونه های زیر امکان استفاده تعدادی از قواعد متعارف حسابان در حل انتگرال آمده است. دقت کنید که چگونه کارهای مجاز و ساده روی شکل ظاهری تابع، انتگرال را به فرمولهای اصلی برمی گرداند.

مثال ۱.۱۵.

$$\begin{aligned}\int \overbrace{(۲x-۱)^۳}^{۸x^۳-۱۲x^۲+۶x-۱}\,dx &= ۸\int x^۳\,dx-۱۲\int x^۲\,dx+۶\int x\,dx-\int dx\\ &= ۸\left(\frac{x^۴}{۴}\right)-۱۲\left(\frac{x^۳}{۳}\right)+۶\left(\frac{x^۲}{۲}\right)-x+C,\end{aligned}$$

$$\int \underbrace{\sqrt[-۳]{\sqrt[۲]{\sqrt{x}}}}_{x^{-\frac{۱}{۱۲}}}\,dx = \int x^{-\frac{۱}{۱۲}}\,dx = \tfrac{۱۲}{۱۱}x^{\frac{۱۱}{۱۲}}+C. \qquad \square$$

در اولی از بسط اتحاد و در دیگری از ادغام توانها استفاده شده است.

[۱۳] فرض می کنیم مشتق وجود دارد.

[۱۴] به شرطی که قواعد انتگرال را نقض نکنند

مثال ۱.۱۶. گاهی از تقسیم عبارات بر هم نیز کمک می گیریم:

$$\int \frac{\overbrace{14x^3+2x^{-4}-\sqrt{3}}^{\frac{14x^3}{2x}+\frac{2x^{-4}}{2x}+\frac{-\sqrt{3}}{2x}}}{2x}\,dx = \int \left(7x^2+x^{-5}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x^{-1}\right)dx. \qquad \square$$

بر خلاف مثالهای بالا، استفاده از هر آنچه مایلیم در حل یک انتگرال مجاز نیست. مثلاً درباره انتگرال $\int x^2(x^{-2}+2)\,dx$ سوال این است که آیا می توان آنرا به شکل زیر در نظر گرفته، سپس جداسازی و حل کرد؟[15]

$$\int \underbrace{x^2}_{f(x)}\overbrace{(x^{-2}+2)}^{g(x)}\,dx = \int \underbrace{x^2}_{f(x)}\,dx \times \int \overbrace{(x^{-2}+2)}^{g(x)}\,dx = \frac{x^3}{3}\times(-x^{-1}+2x)+C.$$

بنظر می رسد این نحوه جدا سازی کار را بسیار ساده کرد اما این روش حل **غلط** است! نمیتوان انتگرال را بین عوامل ضربی داخلش بکمک ضرب تفکیک کرد. این موضوع برای تقسیم هم برقرار است. در واقع و در حالت کلی:

نکته ۱.۶. $$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}, \qquad \int f(x)g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \times \int g(x)\,dx,$$

حال که مجاز به تفکیک بالا در انتگرال نیستیم، از ضرب معمولی دو عبارت x^2 و $x^{-2}+2$ (که در اینجا بهترین راه است) کمک می گیریم:

$$\int \underbrace{x^2(x^{-2}+2)}_{x^0+2x^2}\,dx = \int (1+2x^2)\,dx \underset{4}{\overset{2}{=}} \left(x+\tfrac{2}{3}x^3\right)+C.$$

در مواقعی، استفاده از نکات معمولی در حسابان همانند موارد فوق نمی تواند و یا محلی برای اجرا در تابع داخل انتگرال ندارد. در چنین مواردی توصیه بر استفاده از یک روش معیّن

[15] بعبارت دیگر آیا می توان در ضرب بنوعی تفکیک انتگرالها انجام داد؟

بطوری است که قابل انجام روی انتگرال باشد. در ادامه به انواعی از این روشها می پردازیم. در این روشها نیز شناخت ابتدایی از نوع تابع داخل انتگرال اهمیت دارد. اما قبل از ورود به بررسی آنها لازم است یک مفهوم مهم و کاربردی را یاد آوری کنیم.

یاد آوری ۱.۱. فرض کنیم $u = f(x)$ تابعی دارای مشتق بر یک ناحیه تغییرات از x است. در این صورت **دیفرانسیل** u به شکل $du = u'(x)dx$ تعریف می شود. مثلاً اگر $t = e^{r^۳-۴}$ آنگاه $dt = \underbrace{e^{r^۳-۴}(۳r^۲)}_{t'(r)} \times dr$. از دیفرانسیل و دیفرانسیل گیری در بسیاری از زوایای انتگرالگیری استفاده می شود. اولین کاربرد آن در روش زیر دیده می شود.

۱.۴.۱ روش تغییر متغیر

فرض کنید هدف، حل $\int (x+۱۱)^{۲۰}\, dx$ است. در اینجا می توان عبارت را به توان رساند و سپس انتگرال را به تعدادی انتگرال دیگر تفکیک و حل را انجام داد. ولی استفاده از اتحاد ها وقتی توان عبارت بزرگ باشد روش زیبایی نیست. برای یک لحظه اسم قسمتی از تابع را عوض کنید، مثلاً قرار دهید $t = x+۱۱$. در این صورت انتگرال به شکل قابل تحمل تر $\int t^{۲۰}\, dx$ در می آید. اما انتگرال اصلی بر حسب متغیر x ساخته شده و برای اتمام کار باید برای dx هم جایگزینی با توجه به اسم جدید t یافت شود.[۱۶] این جایگزین را بکمک دیفرانسیل گیری از طرفین $x+۱۱ = t$ بدست می آوریم:

$$x+۱۱ = t \quad \xrightarrow{\text{دیفرانسیل گیری}} \quad \underbrace{\underset{\uparrow}{۱}}_{(x+۱۱)'} \times dx = dt \to dx = dt,$$

اکنون تغییر در شکل انتگرال داده شده با فرض $t = x+۱۱$ و $dx = dt$ انجام می شود:

$$\int (x+۱۱)^{۲۰}\, dx \Longrightarrow \int t^{۲۰}\, dt,$$

[۱۶] تا در کل تغییر را در انتگرال احساس کنیم.

انتگرال سمت راست با کمک فرمول ۲ بسادگی قابل حل است:

$$\int t^{۲۰}\,dt \overset{۲}{=} \left(\frac{t^{۲۱}}{۲۱}\right)+C. \xrightarrow[x+۱۱=t]{\text{با برگردان بر حسب فرض اولیهٔ}} = \underbrace{\frac{(x+۱۱)^{۲۱}}{۲۱}+C}_{\text{جواب مسئله}}$$

روشی را که با تغییر قسمت مناسبی از تابع داخل انتگرال، کل انتگرال نزدیکترین شباهت را به یک فرمول مقدماتی پیدا می کند، **روش تغییر متغیر** می نامند. در این روش اینکه کدام قسمت (همه یا قسمتی) از تابع را به نام جدید نام گذاری می کنید بسیار با اهمیت است.[۱۷] شاید اولین اثری که این روش بر مبحث انتگرال می گذارد این است که، فرمولهای مقدماتی انتگرال را به یک شکل کلی و زیبا و کاربردی بدل می کند. این تبدیل با هماهنگی مفهوم دیفرانسیل صورت می گیرد. دو نمونه بسیار پر کاربرد زیرکه تعمیمی مناسب از فرمول های ۲ و ۳ هستند را مکرر بکار بگیرید:

$$۲'.\quad \int [u(x)]^k\,du = \begin{cases} \dfrac{[u(x)]^{k+۱}}{k+۱}+C, & k\neq -۱ \\ \ln|u(x)|+C, & k=-۱ \end{cases},$$

$$۳'.\quad \int e^{u(x)}\,du = e^{u(x)}+C,$$

که در آن $u(x)$ تابعی بر حسب x و $du=u'(x)dx$ است.

مثال ۱.۱۷. در انتگرال $\int \sqrt[-۳]{۲x-۱}\,dx$ فرض می کنیم $t=۲x-۱$. در این صورت با دیفرانسیل گیری از طرفین تساوی داریم: $۲dx=dt$ و یا $dx=\frac{dt}{۲}$. با جایگذاری فرض و نتیجه آخر در انتگرال اصلی، به انتگرال $I=\int \sqrt[-۳]{t}\,\left(\frac{dt}{۲}\right)$ که شباهت بسیاری به یک فرمول دارد می رسیم. این انتگرال بسادگی حل می شود:

$$I=\tfrac{۱}{۲}\int t^{-\frac{۱}{۳}}\,dt=\tfrac{۱}{۲}\left(\tfrac{۳}{۲}t^{\frac{۲}{۳}}\right)+C=\tfrac{۳}{۴}(۲x-۱)^{\frac{۲}{۳}}+C. \qquad \square$$

مثال ۱.۱۸. دو نمونه دیگر:

[۱۷] مثلاً در انتگرال بالا اگر $t=(x+۱۱)^{۲۰}$ بود آنگاه $dx=dt$ $۲۰(x+۱۱)^{۱۹}$ و بوضوح انتگرال اصلی نمی توانست برای عبارت اضافه $۲۰(x+۱۱)^{۱۹}$ کاری بکند.

$$\int \frac{۳x^۵-۲x^۳}{(x^۶-x^۴+۱۳)^۵}\,dx = \xrightarrow[\to (۳x^۵-۲x^۳)dx=\frac{dt}{۲}]{x^۶-x^۴+۱۳=t \to \overbrace{(۶x^۵-۴x^۳)}^{۲(۳x^۵-۲x^۳)}dx=dt} \underbrace{\int \frac{(dt/۲)}{t^۵}}_{\frac{۱}{۲}\int t^{-۵}dt}$$

$$= \tfrac{۱}{۲}\left(\frac{t^{-۴}}{-۴}\right)+C=-\tfrac{۱}{۸}(x^۶-x^۴+۱۳)^{-۴}+C.$$

$$\int \frac{x-۳}{x^۲-۶x+۱}\,dx = \xrightarrow[\to (x-۳)dx=\frac{dt}{۲}]{x^۲-۶x+۱=t \to \overbrace{(۲x-۶)}^{۲(x-۳)}dx=dt} \underbrace{\int \frac{(dt/۲)}{t}}_{\frac{۱}{۲}\int t^{-۱}dt}$$

$$= \tfrac{۱}{۲}\ln|t|+c=\tfrac{۱}{۲}\ln|x^۲-۶x+۱|+C. \qquad \square$$

مثال ۱.۱۹. انتگرال $A=\int \frac{dx}{۱+e^{-x}}$ را حل کنید.

حل: انتگرال دارای کسر است. فرمول $'۲$ قسمت دوم، شامل یک کسر است (کسری که بفرم $\frac{du}{u}$ باشد). این موضوع را برای تابع داخل انتگرال بررسی می کنیم:

$$(\underbrace{۱+e^{-x}}_{\text{مخرج}})'=-e^{-x}\neq ۱ \ (\text{صورت}),$$

که نشان می دهد، شباهت ظاهری در این شکل وجود ندارد. تابع داخل انتگرال را به صورت دیگری بازنویسی می کنیم: $\frac{۱}{۱+e^{-x}}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{e^{+x}}}=\frac{۱}{\frac{۱+e^x}{e^x}}=\frac{e^x}{۱+e^x}$. حال چک کنید که آیا با بازنویسی تابع، مجدداً مشتق مخرج در صورت دیده می شود یا خیر؟ جواب مثبت است چون $(\underbrace{۱+e^x}_{\text{مخرج}})'=\underbrace{e^x}_{\text{صورت}}$.

بنابر این از فرمول $'۲$:

$$A=\int \frac{e^x dx}{۱+e^x} \xrightarrow[۱+e^x=t]{e^x\,dx=dt} \int \frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln(۱+e^x)+C. \qquad \square$$

گاهی اجرای روش تغییر متغیر (ضمن انتخاب قسمت مناسب از تابع داخل انتگرال) به کمی کار جبری روی همه عوامل داخل انتگرال نیاز داشته و در این مواقع بعنوان طلیعه استفاده

از یک روش دیگر عمل می کند. در مثال های زیر نمونه هایی از آن آمده است.

مثال ۱.۲۰. انتگرال $\int \frac{dx}{1+e^x}$ مفروض است.[18] انتخاب می کنیم $t = e^x + 1$ و لذا $e^x dx = dt$. بعلاوه $e^x = t-1$ و بنابر این $(t-1)dx = dt$. انتگرال به صورت $\int \frac{dt}{t(t-1)}$ درمی آید. این انتگرال با روشی که در دو قسمت بعد خواهیم دید و بوسیله کسرهای جزئی قابل حل است. □

مثال ۱.۲۱. برای انتگرال $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\, dx$ فرض کنیم $t^3 = 1 - x$. در این صورت $dx = -3t^2 dt$ و بعلاوه $x = 1 - t^3$. بنابر این انتگرال به فرم $\int (1-t^3)^2(-3t^3)dt$ در می آید. حال با به توان رساندن داخل انتگرال، حل انجام می شود:

$$\begin{aligned}\int \overbrace{(1+t^6-2t^3)(-3t^2)}^{-3t^9+6t^6-3t^3}\,dt &= \tfrac{-3}{10}t^{10} + \tfrac{6}{7}t^7 - \tfrac{3}{4}t^4 + C,\\ &= \tfrac{-3}{10}(1-x)^{\frac{10}{3}} + \tfrac{6}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}} - \tfrac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}} + C. \quad \square\end{aligned}$$

مثال ۱.۲۲. برای انتگرال $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$ فرض کنیم $x = t^3$. در این صورت $dx = 3t^2 dt$ و بنابر این انتگرال به فرم $\int \frac{3dt}{t(1+t)}dt$ در می آید. این انتگرال نیز همانند ۱-۱۸، با روشی که در دو قسمت بعد خواهیم دید و بوسیلهٔ کسرهای جزئی قابل حل است. □

مثال ۱.۲۳. انتگرال $\int 2^{x-3}\,dx$ را حل کنید.

حل: بعنوان یک نتیجه از ′۳ و اینکه $a^u = e^{u\ln a}$ ($a > 0$ و $a \neq 0$) به فرمول جدید زیر میرسیم:

$$4. \quad \int a^{u(x)}\,du = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C. \qquad , \qquad du = u'(x)dx$$

در این مثال $a = 2$ و چون $d(x-3) = dx$ لذا با انتخاب $u = x - 3$ داریم:

$$\int 2^{x-3}\,dx = \int 2^u\,du \overset{4}{=} \frac{2^u}{\ln 2} + C = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + C. \qquad \square$$

[18] این انتگرال با مثال قبل فقط در یک جمله صورت فرق دارد.

روش تغییر متغیر همواره در حل انتگرال ها موفق نیست، اگرچه این روش سهم بسیار زیادی در حل انتگرالها در کل ریاضیات دارد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱.۲۴. انتگرال $\int x^۴ e^{x^۴+۲}\, dx$ را محاسبه کنید.

حل: طبیعی ترین تغییر متغیر $t = x^۴ + ۲$ است. در این صورت $۴x^۳ dx = dt$ که مناسب نیست، زیرا انتگرال بعد از جایگذاری t به $x^۴ dx$ نیاز دارد در صورتی که ما $۴x^۳ dx$ بدست آوردیم[۱۹]. اگر بقیه فرمهای احتمالی مانند $t = x^۳$ ، $t = x^۴$ و یا حتی $t = e^{x^۴+۲}$ را هم امتحان کنید، خواهید دید به انتگرالی جمع و جور که با فرمولهای مقدماتی حل شوند نخواهیم رسید. □

۱.۴.۲ روش جزء بجزء

این روش مبتنی بر فرمول مشتق حاصلضرب دو تابع است. اگر دو تابع مختلف u و v بر حسب x مشتق پذیر باشند آنگاه با نگاه دیفرانسیلی:

$$\frac{d}{dx}(u \times v) = \frac{du}{dx} \times v + u \times \frac{dv}{dx},$$

با انتگرالگیری از طرفین تساوی فوق به اتحاد زیر می رسیم:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du, \qquad (\star۲)$$

این فرمول را بنام **انتگرالگیری جزء بجزء** می شناسیم. در این فرمول دو تابع اغلب غیر هم جنس دیده می شوند. دو تابع u و v باید بطوری از عبارت داخل انتگرال انتخاب شوند که اولاً از روی dv بتوان v را با یک انتگرالگیری ساده بدست آورد و ثانیاً انتگرال سمت راست تساوی از انتگرال اصلی در حل مشکل تر نشود ضمن اینکه عامل دیفرانسیلی همواره برای dv انتخاب می شود . مثلاً فرض کنید تابع داخل انتگرال $(x^۲ + ۱)e^{۵x-۳}$ است. امکانات زیر وجود دارد:

$$(۱):\ u = (x^۲ + ۱),\ dv = e^{۵x-۳}dx \qquad (۲):\ u = e^{۵x-۳},\ dv = (x^۲ + ۱)dx$$

---

[۱۹] یک توان x کم داریم.

$$\text{③}:\ u=(x^{۲}+۱)e^{۵x-۳},\ \ dv=dx,$$

امکان دیگری برای انتخاب u و dv نداشته و جالب اینکه از همهٔ مواردی که در بالا پیش میآید فقط یک مورد انتخاب صحیح است. با انتخاب مورد ② داریم:

$$du \;=\; \underbrace{۵e^{۵x-۳}dx}_{\text{دیفرانسیل}},\ \ v=\frac{x^{۳}}{۳}+x$$

و با جایگذاری در فرمول (۲⋆):

$$\int (x^{۲}+۱)e^{۵x-۳}\,dx = e^{۵x-۳}(\frac{x^{۳}}{۳}+x)-\int (\frac{x^{۳}}{۳}+x)\underbrace{۵e^{۵x-۳}dx}_{du},$$

مشاهده می کنید که انتگرال سمت راست تساوی بمراتب از انتگرال سمت چپ مشکل تر است. این یعنی که انتخاب دوم مناسب نیست. سومین انتخاب را امتحان می کنیم:

$$du=\left(۲xe^{۵x-۳}+۵(x^{۲}+۱)e^{۵x-۳}\right)dx,\ \ v=x,$$

در اینحالت نیز مجدداً اشکال قبل پیش می آید (چرا؟). بنابر این فقط گزینه اول جواب میدهد. لازم بذکر است که هنگام محاسبه v به یک انتگرالگیری مختصر از روی dv نیاز داریم [۲۰] و چون بدنبال یک مورد برای $v(x)$ می گردیم، لذا نیازی به در نظر گرفتن مقدار ثابت C در حاصل انتگرال اخیر نداریم.

نکته ۷.۱. برای حل انتگرالهایی بفرم های زیر از روش جزء بجزء استفاده می کنیم. در هر یک، انتخاب اصلی از u و dv مشخص شده است:

$$I:\ \int \overbrace{p(x)}^{u}\overbrace{e^{ax+b}\,dx}^{dv},\ (a\neq ۰) \qquad II:\ \int \underbrace{\ln(ax+b)}_{u}\underbrace{p(x)\,dx}_{dv},\ (a\neq ۰)$$

$\uparrow$ یک چند جمله ای غیر ثابت

---

[۲۰] یعنی $v=\int dv$.

لازم بذکر است در نمونه I، به تعداد مرتبه $p(x)$ باید با همین الگو از روش جزء بجزء استفاده کنید تا نهایتاً انتگرال به یک شکل بسیار ساده تبدیل و حل شود.[a]

[a] پس امکان دارد حین حل و وقتی از این روش برای یک انتگرال استفاده می کنید، دو بار و بیشتر این روش را بکار بگیرید.

مثال ۲۵.۱. انتگرال های زیر را با روش جزء بجزء حل کنید:

$$\bullet\ I=\int(۲x+۱)e^{۵x-۳}\,dx \xrightarrow[e^{۵x-۳}dx=dv\ \to v=\frac{۱}{۵}e^{۵x-۳}]{u=(۲x+۱)\ \to du=۲dx} \frac{(۲x+۱)}{۵}e^{۵x-۳}-\underbrace{\int\frac{۲}{۵}e^{۵x-۳}dx}_{A}$$

انتگرال A بکمک فرمول $۳'$ قابل حل است:

$$A=\frac{۲}{۵}\int e^{۵x-۳}dx \xrightarrow{۵x-۳=t\ \to\ dx=\frac{۱}{۵}dt} \frac{۲}{۵}\int e^{t}\left(\frac{dt}{۵}\right)=\frac{۲}{۲۵}e^{t}+C=\frac{۲}{۲۵}e^{۵x-۳}+C,$$

پس: $I=(۲x+۱)\times\frac{۱}{۵}e^{۵x-۳}-\frac{۲}{۲۵}e^{۵x-۳}+C$.

$$\bullet\ I=\int x\sqrt{x+۵}\,dx \xrightarrow[du=dx,\ v=\frac{۲}{۳}(x+۵)^{\frac{۳}{۲}}]{u=x\ ,\sqrt{x+۵}\ dx=dv} x\left(\frac{۲}{۳}(x+۵)^{\frac{۳}{۲}}\right)-\underbrace{\int\left(\frac{۲}{۳}(x+۵)^{\frac{۳}{۲}}\right)dx}_{A}$$

برای انتگرال A از روش تغییر متغیر می رویم:

$$A=\frac{۲}{۳}\int(x+۵)^{\frac{۳}{۲}}dx \xrightarrow[dx=\frac{۱}{۵}dt]{۵x-۳=t} \frac{۲}{۳}\int t^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۲}{۵}t^{\frac{۵}{۲}}\right)+C=\frac{۴}{۱۵}(x+۵)^{\frac{۵}{۲}}+C,$$

پس: $I=x\left(\frac{۲}{۳}(x+۵)^{\frac{۳}{۲}}\right)-\frac{۴}{۱۵}(x+۵)^{\frac{۵}{۲}}+C$. □

۳.۴.۱ روش کسرهای جزیی

در مثال ۱۶.۱ دو انتگرال از تابع های گویا حل شد. حل اینگونه توابع بطور عمومی مجالی در این کتاب ندارد ولی بطور محدود می توان تا انواعی را بیان و حل کرد. اولین نکته ای که در حل یک انتگرال گویا بطور عام وجود دارد این است که آیا فرمول $۲'$ برای آن قابل استفاده است؟ در

اولّین مرحله از حل، نگاه کنید که آیا مشتق مخرج در صورت وجود دارد یا نه؟[21] بعد از آن، عبارت مخرج هر توانی داشته باشد، نتیجه انتگرال دقیقاً بین دو حالت اول و دوم[22] در فرمول $2'$ متفاوت خواهد بود. به مثالهای زیر توجه کنید. در هر کدام فقط به تابع گویا پرداخته تا معیّن شود کدام حالت از $2'$ را برای انتگرالگیری از آن استفاده کنیم.

الف) تابع $f(x)=\frac{7x^6+22x}{(x^7+11x^2-3)^{-4}}$ است. اگر قرار دهیم $t=x^7+11x^2-3$ آنگاه $t'=7x^6+22x$ که در صورت کسر عیناً دیده می شود: $f=\dfrac{t'}{t^{-4}}=t't^{+4}$. چون عبارت نام گذاری شده توانی غیر از -1 دارد[23] لذا حالت اول فرمول $2'$ را استفاده می کنیم.

ب)، تابع $f(x)=\frac{30x^4-3x}{(4x^5-x^2)^3}$ است. اگر قرار دهیم $t=4x^5-x^2$ آنگاه

$$t'=20x^4-2x,$$

که در صورت کسر عیناً دیده **نمی شود**. ولی، با گرفتن **فاکتوری مناسب** از آن داریم:

$$30x^4-3x=\tfrac{3}{2}(20x^4-2x)=\tfrac{3}{2}t',$$

در اینجا عدد $\frac{3}{2}$ یک ضریب است و بعداً هنگام انتگرالگیری از تابع می توان آنرا بیرون انتگرال آورد. یعنی:

$$f=\frac{\frac{3}{2}t'}{t^3}=\frac{3}{2}\left(\frac{t'}{t^3}\right).$$

چون عبارت نام گذاری شده مجدداً توانی غیر از -1 دارد لذا حالت اول فرمول $2'$ را بکار میبریم.

ج) تابع $f(x)=\frac{-20x^3+45x^2-50x}{x^4-3x^3+5x^2-10}$ است. اگر قرار دهیم $t=x^4-3x^3+5x^2-10$ آنگاه صورت برابر است با $-5t'$ یعنی: $f=-5\frac{t'}{t}$ و این می گوید علیرغم وجود یک ثابت ضربی (با داستانی شبیه مورد **ب**) چون عبارت مخرج توانی برابر با ۱ دارد، از حالت دوم $2'$ کمک می گیریم.

---

[21] اینکه دقیقاً مشتق در صورت دیده شود و یا با اختلاف یک ثابت ضریب ایجاد شود مهم نیست.

[22] وقتی $k=-1$

[23] $k=-4$

به غیر از موارد بالا، تابع گویایی که مِن بعد مطرح می کنیم در ابتدا فرض بر عدم حل آن بوسیله ′۲ است. با این شرط حالات بسیار متنوعی ایجاد می شود که قصد بررسی قسمت کوچکی از آنها را داریم.

نکته ۸.۱. در انتگرال های دارای تابع گویا، اگر مرتبهٔ چندجمله ای صورت بزرگتر یا مساوی مرتبه چندجمله ای مخرج باشد، بعنوان اولین مرحله قبل از کار روی انتگرال، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم.

مثال ۲۶.۱. انتگرال $A=\int \frac{x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۷x-۱}{x^۲-۲x}\,dx$ داده شده است. چون مرتبه صورت (عدد ۴) از مرتبه مخرج (عدد ۲) بیشتر است ابتدا تقسیم مذکور را انجام می دهیم:

$$\begin{array}{r|l} x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۷x-۱ & x^۲-۲x \\ \cline{2-2} -\;\; x^۴-۲x^۳\qquad\qquad\quad & x^۲+۴ \\ \hline ۴x^۲-۷x-۱ & \\ -\;\; ۴x^۲-۸x\quad & \\ \hline x-۱ & \end{array}$$

بنابر این: $\frac{x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۷x-۱}{x^۲-۲x}=(x^۲+۴)+\frac{x-۱}{x^۲-۲x}$. اکنون بجای انتگرالگیری از کسر اصلی، از حاصل تقسیم بدست آمده انتگرال می گیریم. توجه کنید که انتگرال دوم سمت راست تساوی از قسمی است که در بین موارد ابتدای بخش بررسی شد:

$$A=\int\left(x^۲+۴+\frac{x-۱}{x^۲-۲x}\right)\,dx=\underbrace{\int(x^۲+۴)\,dx}_{\frac{x^۳}{۳}+۴x}+\underbrace{\int\frac{x-۱}{x^۲-۲x}\,dx}$$

$$(x^۲-۲x)=t$$
$$\downarrow$$
$$\underbrace{(۲x-۲)dx}_{۲(x-۱)dx}=dt\rightarrow$$
$$(x-۱)dx=\frac{dt}{۲}$$

$$= \left(\frac{x^{۳}}{۳} + ۴x\right) \quad + \quad \underbrace{\int \frac{dt}{۲t}}_{\frac{۱}{۲}\ln|t| = \frac{۱}{۲}\ln|x^{۲} - ۲x|}$$
$$= \frac{x^{۳}}{۳} + ۴x + \frac{۱}{۲}\ln|x^{۲} - ۲x| + C. \qquad \square$$

اکنون تابع گویای $f(x) = \dfrac{A_{۱}x + A_{۲}}{a_{۱}x^{۲} + a_{۲}x + a_{۳}}$ را در نظر بگیرید که در آن $a_{۱} \neq ۰$. در این تابع، مرتبه عبارت صورت اکیداً از مرتبه مخرج کوچکتر بوده و البته در قالب حالتهای ابتدای فصل نیست. بعلاوه فرض می کنیم چند جمله ای مخرج قابلیت تجزیه به دو عبارت مرتبه اول را دارد. نمونه های $\dfrac{۲x - ۱}{\underbrace{۳x^{۲} + ۱۱x - ۴}_{(۳x-۱)(x+۴)}}$، $\dfrac{x - ۷}{\underbrace{-x^{۲} + ۵x - ۶}_{(x-۳)(-x+۲)}}$ و $\dfrac{۱۳}{\underbrace{x^{۲} - ۲۵}_{(x-۵)(x+۵)}}$ از این جمله اند. برای حل انتگرال هایی شامل این توابع، در مرحله اول تجزیهٔ مخرج تابع $f(x)$ را همانند سه مثال اخیر می یابیم. سپس کسر تابع را به ازای ثابتهای نامعلوم A و B با مجموع زیر

$$\frac{A_{۱}x + A_{۲}}{\underbrace{a_{۱}x^{۲} + a_{۲}x + a_{۳}}_{(ax+b)(cx+d)}} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(cx+d)},$$

مساوی گذاشته و سعی می کنیم این مجهولات را بدست آوریم:

$$f_{۱} = \frac{۲x - ۱}{۳x^{۲} + ۱۱x - ۴} = \frac{۲x - ۱}{(۳x - ۱)(x + ۴)} \overset{\text{قرار می دهیم}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{A}{۳x - ۱} + \frac{B}{x + ۴},$$

و با جمع دو کسر آخر سمت راست داریم:

$$\frac{A}{۳x - ۱} + \frac{B}{x + ۴} = \frac{A(x + ۴) + B(۳x - ۱)}{(۳x - ۱)(x + ۴)} = \frac{\overbrace{x(A + ۳B) + (۴A - B)}^{\substack{\text{صورت کسر قبلی را ضرب کرده} \\ \text{و با با فاکتور مرتب می کنیم}}}}{(۳x - ۱)(x + ۴)},$$

اکنون کسر اولیه که همان ضابطه $f_{۱}$ است را با این کسر آخر مساوی قرار می دهیم:

$$\frac{۲x - ۱}{۳x^{۲} + ۱۱x - ۴} = \frac{x(A + ۳B) + (۴A - B)}{(۳x - ۱)(x + ۴)},$$

چون دو کسر مساوی هستند لذا صورتهای آنها معادلند یعنی هر ضریبی از یک طرف با ضریب هم وزن متناظرش در طرف دیگر مساوی است منجمله اعداد ثابت. پس:

$$\overbrace{۲}\, x+\underbrace{(-۱)}=\overbrace{(A+۳B)}\,x+\underbrace{(۴A-B)}$$

و این یعنی که باید دستگاه دو معادله، دو مجهولی $\{A+۳B=۲,\ ۴A-B=-۱\}$ را برحسب A و B حل کنیم. این ثابتها برابرند با $A=\frac{-۱}{۱۳}$ و $B=\frac{۹}{۱۳}$. نتیجه اینکه:

$$f_۱=\frac{-\frac{۱}{۱۳}}{۳x-۱}+\frac{\frac{۹}{۱۳}}{x+۴}.$$

اینکه تابع را به دو کسر تجزیه کردیم، اساس روشی است که برای انتگرال اینگونه توابع میبایستی در قدم اول حتماً صورت گیرد. این روش را **تجزیه به کسرهای جزئی** می نامند.

مثال ۲۷.۱. انتگرال دو تابع بعدی را با کمک روش کسرهای جزئی بدست آورید.

$$\int\frac{x-۷}{(x-۳)(-x+۲)}\,dx,$$

$$\frac{x-۷}{(x-۳)(-x+۲)}=\frac{A}{x-۳}+\frac{B}{۲-x}=\frac{\overbrace{A(۲-x)+B(x-۳)}^{x(B-A)+(۲A-۳B)}}{(x-۳)(-x+۲)}\Rightarrow\begin{cases}B-A=۱\\ ۲A-۳B=-۷\end{cases}$$

و با حل دستگاه، $A=۴$ و $B=۵$. لذا انتگرال برابر است با:

$$\int\frac{۴}{x-۳}\,dx-\int\frac{۵}{-۲+x}\,dx=۴\ln|x-۳|-۵\ln|-۲+x|+C.$$

توجه کنید که مثال قبلی، ترکیبی از دو فرمول ۵ و ۶ است که همزمان و بدون استفاده از اتحادها به نتیجه رسیده است. حال انتگرال بعدی را بکمک ۷ حل می کنیم. با بررسی آخرین نمونه معلوم است که در

فرمول بجای a باید عدد ۵ گذارده شود اما قبل از آن انتگرال به تغییر شکل بسیار جزیی نیاز دارد:

$$\int \frac{۱۳\,dx}{x^۲-۲۵} = \underset{\text{ضریب ۱۳- را فاکتور گرفتیم تا کاملاً به فرمول ۶ شبیه شود}}{-۱۳}\int \frac{dx}{۲۵-x^۲} \overset{۶}{=} -۱۳\left(\frac{۱}{\underset{۲a\,(a=۵)}{۱۰}}\ln\left|\frac{۵+x}{۵-x}\right|\right)+C. \qquad \square$$

فرمولهای انتگرالی زیر در شرایط معین و با کمک روش کسرهای جزئی نتیجه می شوند که می توانید استفاده کنید:

$$۵.\quad \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{۱}{-b+a}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+c,$$

$$۶.\quad \int \frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{۱}{-b+a}\ln\left|\frac{(x-a)^a}{(x-b)^b}\right|+c,$$

$$۷.\quad \int \frac{dx}{a^۲-x^۲} = \frac{۱}{۲a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

۵.۱ تمرینات

- از طرفین تساوی های زیر دیفرانسیل گیری کنید.

۱. $y = x^5 + 1$

۲. $y = \sqrt{s^2 - 1}$

۳. $y = (n^3 + 1)(n^3 - 1)$

۴. $\left(\frac{u^2}{-4}\right) = e^{x^4 + 2x^{-1} + 7}$

۵. $y = \sqrt{s^2 - 1}$

۶. $u^3 = e^{\sqrt{t+2}}$

۷. $\sqrt{y} = \sqrt{\ln(x^3 - 1)}$

۸. $\ln(y^2) = \ln(x + 1)$

۹. $\exp(y) = \frac{\ln(e^{x^4 + 2})}{x^4}$

- انتگرال‌های زیر را حل کنید.

۱۰. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\, dx$

۱۱. $\int \frac{7}{2x^{9/4}}\, dx$

۱۲. $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

۱۳. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\, dx$

۱۴. $\int (\sqrt{2} + e^{-3/6})\, dt$

۱۵. $\int \frac{5 + x}{3\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

۱۶. $\int u^e\, du$

۱۷. $\int 3^x e^x\, dx$

۱۸. $\int \frac{(4x^2)^{-3}}{(7x)^{+4}}\, dx$

۱۹. $\int \frac{(x^2 + 1)^3}{x^2}\, dx$

.۲۰ $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\ln(x)} + \ln(x)\right) \frac{dx}{x}$

.۲۱ $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{2x^5}{9}}\, dx$

.۲۲ $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln(x)}}{x}\, dx$

.۲۳ $\displaystyle\int (x^2+1)(x^2-1)(x^4+1)\, dx$

.۲۴ $\displaystyle\int \frac{(t+1)}{(t^2-1)^{-2}}\, dt$

.۲۵ $\displaystyle\int \left(\frac{-\sqrt[3]{x^2}}{5} + \sqrt{\frac{7}{2x^3}}\right) dx$

.۲۶ $\displaystyle\int \left(\frac{x\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{5x^2} - 8}{x^{10}}\right) dx$

.۲۷ $\displaystyle\int \sqrt[-5]{\frac{x^2 \times x^3}{3x^7}}\, dx$

.۲۸ $\displaystyle\int \sqrt{s^{1.1}} \left(\frac{1}{s} - 3\right) ds$

.۲۹ $\displaystyle\int (x^3 - 4x^7)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

.۳۰ $\displaystyle\int \frac{x^2+7x-1}{(x^4+3)^{-2}}\, dx$

.۳۱ $\displaystyle\int \frac{(e^t+1)}{(e^t-1)^{-2}}\, dt$

.۳۲ $\displaystyle\int \frac{(x-\ln(2))}{(x+\ln(2))^{-1}}\, dx$

.۳۳ $\displaystyle\int (t^{e+1} - e^{t-1})\, dt$

.۳۴ $\displaystyle\int \left(e^{3-\frac{x}{4}} + \frac{1}{e^{x-6}}\right) dx$

.۳۵ $\displaystyle\int \ln(3e^{-x^2})\, dx$

.۳۶ $\displaystyle\int \ln(e^2)[e^{\ln(x^2)} + 7x^{-1}]\, dx$

.۳۷ $\displaystyle\int \left(\frac{3e^{-x}+2e^{-3x}}{e^{5x}}\right) dx$

.۳۸ $\displaystyle\int e^{-x}(1+e^x)^2\, dx$

.۳۹ $\displaystyle\int \frac{\ln(x^3)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}\, dx$

.۴۰ $\displaystyle\int \frac{1+\ln(x)}{3+x\ln(x)}\, dx$

.۴۱ $\displaystyle\int t^{x!}\, dt$

.۴۲ $\displaystyle\int 0\, dt$

.۴۳ $\displaystyle\int \left(6e^x - x^3(\sqrt{x}+1)\right) dx$

۴۴. $\int 3^{x\ln x}(1+\ln x)\, dx$

۴۵. $\int (x^3+ex)\sqrt{x^2+e}\, dx$

۴۶. $\int x^{-2}(3x^4+4\sqrt{x}-5)\, dx$

۴۷. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\, dx$

۴۸. $\int 4^{7x}\, dx$

۴۹. $\int 6(e^{4-3x})^2\, dx$

۵۰. $\int \frac{5\exp(2x)}{7\exp(2x)+4}\, dx$

۵۱. $\int \frac{5e^{\frac{13}{x}}}{x^2}\, dx$

۵۲. $\int \frac{4dx}{x\ln(2x^2)}\, dx$

۵۳. $\int \frac{5(x^{\frac{1}{3}}+2)^4}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

۵۴. $\int \frac{r\sqrt{\ln(r^2+1)}}{r^2+1}\, dr$

۵۵. $\int \frac{12x^3\sqrt{\ln(x^4+1)^3}}{x^4+1}\, dx$

۵۶. $\int 2^{3x+2}\, dx$

۵۷. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\, dx$

۵۸. $\int \frac{x\, dx}{2^{x^2-7}}$

۵۹. $\int \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{3x}}\, dx$

۶۰. $\int 7^{2x}(2^{2x}+3^{-2x})\, dx$

۶۱. $\int \frac{8x}{3\sqrt[3]{7-2x^2}}\, dx$

۶۲. $\int \frac{c}{e^{4x}(a+e^{-4x})^3}\, dx$

۶۳. $\int 3\sqrt{10^{3x}}\, dx$

۶۴. $\int \frac{(6x^2+4)}{-3}e^{-(x^3+2x)}\, dx$

۶۵. $\int (6x^2+4x)(x^3+x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$

۶۶. $\int (x^2+2)\sqrt[3]{(x^3+6x)^2}\, dx$

۶۷. $\int \frac{x^2+x+\sqrt{x+1}}{x+1}\, dx$

۶۸. $\int \sqrt{۱+\frac{۱}{۳x}}\,\frac{dx}{x^۲}$

۶۹. $\int \frac{(۲-۳\sqrt{x})^۳}{-\sqrt{x}}\,dx$

۷۰. $\int \sqrt{۳+s}(s+۱)^۲\,ds$

۷۱. $\int \frac{x^۴+۲x^۲-۱}{\sqrt{x}}\,dx$

۷۲. $\int \frac{(r^{۱/۳}+۲)^۴}{r^{۲/۳}}\,dr$

۷۳. $\int \left(t+\frac{۱}{t}\right)^{۳/۲}\left(\frac{t^۲-۱}{t^۲}\right)dt$

۷۴. $\int \left(\frac{x^۳+۲}{x^۳}\right)\sqrt{x-\frac{۱}{x^۲}}\,dx$

۷۵. $\int (۳x+۴)^{\frac{۵}{۲}}\,dx$

۷۶. $\int ۲(x^۲+۴)^۵x\,dx$

۷۷. $\int \frac{x\,dx}{۳}(۷x^۲-۱)^۳$

۷۸. $\int (x^۲+۱)\sqrt{x^۳+۳x-۱}\,dx$

۷۹. $\int \left(\frac{t}{۴}\right)e^{۵-t^۲}\,dt$

۸۰. $\int \frac{s-۱}{(s^۲-۲s+۱۱)^{-۳}}\,ds$

۸۱. $\int \frac{\sqrt[۳]{x}}{(۱+\sqrt[۳]{x^۲})^۴}\,dx$

۸۲. $\int \frac{e^{۳-t}}{(e^{-t}+۱۱)^۲}\,dt$

۸۳. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^۲}$

۸۴. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

۸۵. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$

۸۶. $\int xe^{\frac{۳-x^۲}{۷}}\,dx$

۸۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)}$

۸۸. $\int \frac{۲\sqrt{\ln(x^۳+۱)}}{x^{-۲}(x^۳+۱)}\,dx$

۸۹. $\int \frac{۱}{x^۲}\left(\frac{۱}{x}-۱\right)^{\frac{۲}{۳}}\,dx$

۹۰. $\int \frac{xdx}{\sqrt[۳]{۴-۳x}}$

۹۱. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

۹۲. $\int \frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$

۹۳. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^{-3}}$

۹۴. $\int \frac{\ln(5x)}{xe^{-6}}\,dx$

۹۵. $\int \frac{3k-3}{(k^2-2k+6)^2}\,dk$

۹۶. $\int \frac{\ln(e^3+1)}{x\ln x}\,dx$

۹۷. $\int \frac{tdt}{(t^2-5)^{-4}}$

۹۸. $\int x^2(x^3+1)^{\frac{3}{4}}\,dx$

۹۹. $\int (8x^4+5)^3(32x^3)\,dx$

۱۰۰. $\int \frac{\exp(2-\frac{x}{4})dx}{e^{16}+e^{-1}}$

۱۰۱. $\int [(x-1)^{15}+3(x-1)^3]\,dx$

۱۰۲. $\int \frac{3x^5-2x^3}{10(x^6-x^4)^5}\,dx$

۱۰۳. $\int \frac{x^2-4x}{\sqrt{7(x^3-6x^2)}}\,dx$

۱۰۴. $\int \frac{7dx}{x(\ln x)^n}$

۱۰۵. $\int \frac{6x^2-6x}{1-3x^2+2x^3}\,dx$

۱۰۶. $\int \frac{3}{(5v-1)^4}\,dv$

۱۰۷. $\int 3x^4\exp(x^5)\,dx$

۱۰۸. $\int (2x+1)xe^{4x^3+3x^2-4}\,dx$

۱۰۹. $\int -(x^2-2x^5)(x^3-x^6)^{-10}\,dx$

۱۱۰. $\int \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x\ln x}(\ln x+1)\,dx$

۱۱۱. $\int \frac{4x+3}{2x^2+3x}\ln(2x^2+3x)\,dx$

۱۱۲. $\int (x^4-x^9)(x^5-1)^{12}\,dx$

۱۱۳. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

۱۱۴. $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx$

۱۱۵. $\int \left(\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)$

۱۱۶. $\int \sqrt[-4]{\exp(x)}\, dx$

۱۱۷. $\int \left(\frac{1}{2x-5}+\frac{-3}{-5x+4}\right) dx$

۱۱۸. $\int \left(x^{-2}+(2x+1)^{-4/3}\right) dx$

۱۱۹. $\int e^{4x}(e^{8x}+5e^{12x}-2e)\, dx$

۱۲۰. $\int \frac{f'(x)dx}{(f(x)-1398)^{2}}$

۱۲۱. $\int \frac{x^{9}-x^{4}}{(x^{5}-2)^{3/2}}\, dx$

۱۲۲. $\int (-3x+4)e^{8x-3x^{2}}\, dx$

۱۲۳. $\int \frac{e^{x}\, dx}{(e^{x}-39)^{200}}$

۱۲۴. $\int (x^{2}-2)(x^{3}-6x)^{2019}\, dx$

۱۲۵. $\int \frac{\ln^{8}(x)+1}{x}\, dx$

۱۲۶. $\int (e^{x/a}+e^{-x/a})^{2}\, dx$

۱۲۷. $\int \frac{(9+\ln(x))^{6}}{x}\, dx$

۱۲۸. $\int \frac{-4x}{(1-2x^{2})^{3}}\, dx$

۱۲۹. $\int \frac{(x-4)(x^{3}+1)}{(x+1)}\, dx$

۱۳۰. $\int \frac{7^{-x^{2}}}{x^{-1}5^{x^{2}}}\, dx$

۱۳۱. $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^{2} dx$

۱۳۲. $\int 8x^{-1}(3-4x^{2})^{3}\, dx$

۱۳۳. $\int (3x^{2}+6)(x^{3}+6x)^{2}\, dx$

۱۳۴. $\int \frac{x+1}{(x^{2}+2x-3)^{2}}\, dx$

۱۳۵. $\int \frac{(2x-1)^{5}}{\sqrt{7}}\, dx$

۱۳۶. $\int \left(1+\frac{4}{x^{2}}\right)^{2} x^{-3}\, dx$

۱۳۷. $\int (6x+e^{x})(3x^{2}+e^{x})^{0.5}\, dx$

۱۳۸. $\int 3(x-4)e^{x^{2}-8x}\, dx$

۱۳۹. $\int x^{-3}\exp\left(\frac{1}{4x^{2}}\right) dx$

۱۴۰. $\int \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}\, dx$

۱۴۱. $\int \frac{1}{x(\ln(x)+1)^{2}}\, dx$

۱۴۲. $\int e^{3x}(2-e^{3x})^{-1}\, dx$

۱۴۳. $\int \frac{x^{-1/2}}{5} e^{-\sqrt{x}}\, dx$

۱۴۴. $\int 3x\sqrt{x} e^{\sqrt{x^{5}}}\, dx$

۱۴۵. $\int e^{3x} du$

۱۴۶. $\int e^{3x^{2}+x-4} d(s^{2}-s)$

۱۴۷. $\int (x^{2}+1) d(x^{2}+3)$

۱۴۸. $\int (ut^{2}+e^{u}) d(t+u)$

۱۴۹. $\int (u^{x}x^{u}+1) d(t+u+x)$

- هریک از انتگرال‌های زیر را با انتخاب درست u و dv برطبق قاعده جزء به جزء حل کنید[۲۴].

۱۵۰. $\int 36x^{5} \ln(3x)\, dx$

۱۵۱. $\int x^{2} \ln(x)\, dx$

۱۵۲. $\int (3-x)3^{x}\, dx$

۱۵۳. $\int (1-x)e^{x}\, dx$

۱۵۴. $\int \frac{x^{3}}{\sqrt{x^{2}+1}}\, dx$

۱۵۵. $\int x e^{-\frac{x}{3}}\, dx$

۱۵۶. $\int x(\ln x)^{2}\, dx$

۱۵۷. $\int x^{3} e^{x^{2}}\, dx$

۱۵۸. $\int x\sqrt{x+5}\, dx$

۱۵۹. $\int t \ln(t^{2})\, dt$

[۲۴] توجه کنید بعضی از انتگرال‌ها ممکن است به بیشتر از یک بار جزء به جزء نیاز داشته باشند.

۱۶۰. $\int \sqrt{۲x}\ln(x^{۲})\,dx$

۱۶۱. $\int \frac{x-۱}{e^{x}}\,dx$

۱۶۲. $\int \frac{۱۲x}{\sqrt{۱+۴x}}\,dx$

۱۶۳. $\int \frac{\ln x}{x^{۲}}\,dx$

۱۶۴. $\int x^{۳}\sqrt{۳x^{۲}+۲}\,dx$

۱۶۵. $\int (x+۱)^{۲}\ln(۳x)\,dx$

۱۶۶. $\int x^{۳}\sqrt{۴-x^{۲}}\,dx$

۱۶۷. $\int \frac{x^{۹}}{\sqrt{۱-x^{۵}}}\,dx$

۱۶۸. $\int (x-e^{-x})^{۲}\,dx$

۱۶۹. $\int (۱-x)^{۳}e^{-x}\,dx$

۱۷۰. $\int (۱+x)^{۲}e^{-۲x}\,dx$

۱۷۱. $\int (e^{x}+x)^{۲}(x-۱)\,dx$

۱۷۲. $\int x^{n}\ln(x+۱)\,dx$

۱۷۳. $\int \ln(x+\sqrt{x^{۲}+۱})\,dx$

۱۷۴. $\int \frac{(۲x-۲)}{۳}\ln(x-۲)\,dx$

۱۷۵. $\int x^{۳}\ln(x^{۲})\,dx$

۱۷۶. $\int \left(\frac{x^{۳}-x}{۴}\right)\ln(۲x)\,dx$

۱۷۷. $\int \frac{\ln(x^{۳})\,dx}{\sqrt[-۲]{x+۱}}$

۱۷۸. $\int \ln\left(\frac{x^{۳}}{x+۱}\right)\,dx$

- انتگرال‌های زیر را با استفاده از روش کسرهای جزئی حل کنید.

۱۸۲. $\int \frac{(x^{۲}+۱)^{۳}}{۲x}\,dx$

۱۸۳. $\int \frac{x}{۲x-۱}\,dx$

۱۸۴. $\int \frac{2x+1}{5x-1}\,dx$

۱۸۵. $\int \frac{3x-11}{2-8x}\,dx$

۱۸۶. $\int \frac{2-x}{2+x}\,dx$

۱۸۷. $\int \frac{x^2+x-1}{x-3}\,dx$

۱۸۸. $\int \frac{x^2+5}{2x-3}\,dx$

۱۸۹. $\int \frac{3x^2-1}{x+7}\,dx$

۱۹۰. $\int \frac{(3x+2)(x-4)}{x-3}\,dx$

۱۹۱. $\int \frac{(3x^2+2)\,dx}{(x^3+2x-4)^5}$

۱۹۲. $\int \frac{4x^2+2}{2x+1}\,dx$

۱۹۳. $\int \frac{x^3+4x^2}{x+3}\,dx$

۱۹۴. $\int \frac{6x^2-12}{x^3-6x+1}\,dx$

۱۹۵. $\int \frac{5x^3+2x^2-3}{x^2+8x+7}\,dx$

۱۹۶. $\int \frac{t+1}{(t^2+2t+1)^3}\,dt$

۱۹۷. $\int \frac{13}{(2x-5)^4}\,dx$

۱۹۸. $\int \frac{3x^4+12x^3+6}{x^5+5x^4+10x-12}\,dx$

۱۹۹. $\int \frac{3x-5}{2x^2-3x-2}\,dx$

۲۰۰. $\int \frac{3x-2}{4x^2-1}\,dx$

۲۰۱. $\int \frac{-2}{2x^2+9x-5}\,dx$

۲۰۲. انتگرالهای زیر را با توجه به تغییر متغیر داده شده بازنویسی کرده و سپس حل کنید.

الف) $\int \sqrt{x+1}\,dx,\ \ x=2t-1,$

ب) $\int \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx,\ \ \sqrt{5-4x}=t,$

ج) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}\,dx,\ \ \sqrt[30]{x}=t,$

د) $\int \frac{۱+x}{۱+\sqrt{x}}\,dx,\ \ ۱+\sqrt{x}=t,$

ه) $\int \frac{\sqrt{۲x-۳}}{\sqrt[۳]{۲x-۳}}\,dx,\ \ \sqrt[۶]{۲x-۳}=t,$

و) $\int \sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}\,dx,\ \ \frac{x+۱}{x-۱}=t^{۲},$

ز) $\int \frac{\sqrt[۳]{۱+\sqrt[۴]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,\ \ ۱+\sqrt[۴]{x}=t^{۳},$

ح) $\int \frac{dx}{x^{۱۱}\sqrt{۱+x^{۴}}},\ \ ۱+x^{۴}=x^{۴}t^{۲},$

ط) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}+x+۱}},\ \ \sqrt{x^{۲}+x+۱}=۱+xt,$

ی) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^{۲}+۷x+۱۰}},\ \ \sqrt{-x^{۲}+۷x+۱۰}=(x-۲)t,$

ک) $\int x^{۲}e^{\sqrt[۳]{x}}\,dx,\ \ \sqrt[۳]{x}=t$

۱.۵.۱ جواب و راهنمایی ها

با توجه به تعریف دیفرانسیل،

جواب **۱.** عبارت است از $dy = \overbrace{(x^{۵}+۱)'}^{۵x^{۴}} dx$. و برای **۲.** داریم: $dy = (\sqrt{s^{۲}+۱})' ds$ و $(\sqrt{s^{۲}+۱})' = \frac{۲s}{۲\sqrt{s^{۲}-۱}}$. **۴.** توجه کنید $d(\frac{u^{۲}}{-۴}) = \frac{۲u}{-۴}du$. و از طرفی $d(e^{x^{۳}+۲x^{-۱}+۷})$ برابر است با

$$(e^{x^{۳}+۲x^{-۱}+۷})'dx = (e^{x^{۳}+۲x^{-۱}+۷})(۴x^{۲} - ۲x^{-۲})dx.$$

۹. از $\frac{x^{۴}+۲}{x^{۴}} = \frac{\ln(e^{x^{۴}+۲})}{x^{۴}}$ داریم $e^{y}dy = \left(\frac{x^{۴}+۲}{x^{۴}}\right)' dx$ و لذا $e^{y}dy = (-۸x^{-۵})dx$. **۱۰.** انتگرال $\int (nx)^{\frac{۱-n}{n}} dx$ برابر است با $\int n^{\frac{۱-n}{n}} x^{\frac{۱-n}{n}} dx$ و یا $n^{\frac{۱-n}{n}} \int x^{\frac{۱-n}{n}} dx$. تابع اولیهٔ $n^{\frac{۱-n}{n}} \left(\frac{x^{\frac{۱-n}{n}+۱}}{\frac{۱-n}{n}+۱}\right)$ است. **۱۱.** $\int \frac{۷}{۲x^{۹/۴}}dx = \frac{۷}{۲}\int x^{-۹/۴}dx = \frac{۷}{۲}(\frac{x^{-۹/۴+۱}}{-۸/۴}) + C$ **.۱۲.** انتگرال $\int \frac{(x^{m}-x^{n})^{۲}}{\sqrt{x}}dx$ به صورت $\int \frac{(x^{۲m}-۲x^{m+n}+x^{۲n})}{\sqrt{x}}dx$ در می آید. با جدا سازی کسر به $\int \underbrace{\frac{x^{۲n}}{x^{\frac{۱}{۲}}}}_{x^{۲n-\frac{۱}{۲}}} dx + \int \underbrace{\frac{x^{m+n}}{x^{\frac{۱}{۲}}}}_{x^{m+n-\frac{۱}{۲}}} dx - ۲\int \underbrace{\frac{x^{۲m}}{x^{\frac{۱}{۲}}}}_{x^{۲m-\frac{۱}{۲}}} dx$ می رسیم. تابع اولیهٔ برابر است با

$$\left(\frac{x^{۲m+\frac{۱}{۲}}}{۲m+\frac{۱}{۲}} + \frac{x^{m+n+\frac{۱}{۲}}}{m+n+\frac{۱}{۲}} + \frac{x^{۲n+\frac{۱}{۲}}}{۲n+\frac{۱}{۲}}\right).$$

۱۳. مانند **.۱۲** حل شود. **۱۷.** تابع اولیهٔ $۳^{x}e^{x}$ برابر است با $\frac{(۳e)^{x}}{\ln(۳e)}$. **۱۸.** $\frac{(۴x^{۲})^{-۳}}{(۷x)^{۴}}$ را به صورت $\frac{۴^{-۳}x^{-۶}}{۷^{۴}x^{۴}}$ نوشته و در نهایت $\frac{۱}{۷^{۴}\times ۴^{۳}}\int x^{-۱۰}dx = \frac{۱}{۷^{۴}\times ۴^{۳}}(\frac{x^{-۹}}{-۹} + C)$. **۲۰.** اگر $\ln(x) = t$ آن گاه $\frac{۱}{x}dx = dt$ و با فرض $x > ۱$ داریم:

$$\int \left(\frac{۱}{\ln(x)} + \ln x\right)\frac{dx}{x} = \int \left(\frac{۱}{t} + t\right)dt = \int \frac{dt}{t} + \int t dt = \ln|t| + \frac{t^{۲}}{۲} + C,$$

$$= \ln|\ln(x)| + \frac{\ln(x)^{۲}}{۲} + C.$$

۲۱. تابع انتگرال به صورت $\sqrt[۳]{\frac{۲}{۹}}x^{\frac{۵}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۲x^{۵}}{۹}}$ نوشته می شود. **۲۲.** اگر $t = \ln(x) + ۱$

آن گاه $dx = xdt$ و اکنون از $t^{\frac{۱}{۳}}$ انتگرال گرفته و بعد جواب را بر حسب x برگردانید. **۲۳.** با کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\underbrace{\underbrace{(x^۲+۱)(x^۲-۱)}_{(x^۴-۱)}(x^۴+۱)}_{x^۸-۱}.$$

۲۴. تابع انتگرال را به صورت زیر درآورید:

$$\frac{t+۱}{(t^۲-۱)^{-۲}} = \underbrace{(t+۱)(t^۲-۱)^۲}_{t^۵+t^۴-۲t^۳-۲t^۲+t+۱}.$$

۲۵. تابع انتگرال را به صورت $\frac{-\sqrt[۳]{x^۲}}{۵} + \sqrt{\frac{۷}{۲x^۳}} = -\frac{۱}{۵}x^{\frac{۲}{۳}} + \sqrt{\frac{۷}{۲}}x^{-\frac{۳}{۲}}$ بازنویسی کنید.

۲۶. کسر را به طور مناسب تفکیک کنید. **۲۷.** $\sqrt[-۵]{\frac{x^۲\times x^۳}{۳x^۷}} = \sqrt[-۵]{\frac{x^۵}{۳x^۷}} = \sqrt[-۵]{\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۵}}}$.

۲۹. تابع داخل انتگرال را ابتدا ضرب و سپس با فرض $x \neq ۰$، دو انتگرال تشکیل دهید:

$$(x^۳-۴x^۲)\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}\right) = \frac{x^۳-۴x^۲}{x} + \frac{x^۳-۴x^۲}{x^۲} = (x^۲-۴x^۲)+(x-۴x^۵).$$

۳۰. بنویسید $\frac{x^۲+۷x-۱}{(x^۴+۳)^{-۲}} = (x^۲+۷x-۱)(x^۴+۳)^۲$ و سپس توان را اعمال و در نهایت ضرب کنید. **۳۱.** بنویسید $\frac{(e^t+۱)}{(e^t-۱)^{-۲}} = \underbrace{(e^t+۱)(e^t-۱)}_{\text{اتحاد مزدوج}(e^{۲t}-۱)}(e^t-۱)$ و بعد ضرب کرده تا به $e^{۳t}-e^{۲t}-e^t+۱$ برسید. سپس از فرمول ۳ کمک بگیرید. **۳۲.** بکمک اتحاد مزدوج از $\frac{x-\ln(۲)}{(x+\ln(۲))^{-۱}}$ به $x^۲-\ln^۲(۲)$ برسید و سپس انتگرال بگیرید. **۳۴.** اولاً

$$e^{۳-\frac{x}{۴}} + \frac{۱}{e^{x-۶}} = e^{\frac{۱۲-x}{۴}} + e^{-(x-۶)}.$$

حال از فرمول $۳'$ کمک بگیرید. در اینجا یکبار $u = ۳ - \frac{x}{۴}$ و لذا $du = -\frac{۱}{۴}dx$ و یکبار $u = ۶ - x$ و لذا $du = -dx$ پیش می آید. **۳۵.** توجه داریم:

$$\ln(۳e^{-x^۲}) = \ln(۳) + \underbrace{\ln(e^{-x^۲})}_{-x^۲} = \ln(۳) - x^۲.$$

۳۶. چون $e^{\ln(u)} = u$ برای $u > ۰$ همواره برقرار است پس

$$\underbrace{\ln(e^{۲})}_{۲} \times \left[e^{\ln(x^{۲})} + ۷x^{-۱}\right] = ۲\left(x^{۲} + ۷x^{-۱}\right).$$

۳۹. اگر $t = ۱ + \ln(x)$ آنگاه $dt = \frac{۱}{x}\,dx$ و

$$\int \frac{\overbrace{\ln(x^{۳})}^{۳\ln(x)}}{x\sqrt{۱+\ln x}}dx = \int \frac{۳t}{\sqrt{t}}dt = ۳\int t^{\frac{۱}{۲}}dt,$$

در اینجا حتماً $t > ۱$ برقرار است. **۴۰.** از $t = ۳ + x\ln x$ استفاده کنید. **۴۱.** توجه کنید چون انتگرال بر حسب t است لذا x! یک ثابت و عدد است. **۴۴.** توجه کنید اگر $t = x\ln x$ آنگاه $dt = (۱+\ln x)dx$. **۴۵.** چون

$$(x^{۳} + ex)\sqrt{x^{۲}+e} = x(x^{۲}+e)\sqrt{x^{۲}+e} = x(x^{۲}+e)^{\frac{۳}{۲}}.$$

لذا با انتخاب $t = x^{۲} + e$ انتگرال بروش تغییر متغیر قابل حل است. **۴۶.** جمله $x^{-۲}$ را ضرب و سپس انتگرال بگیرید. **۴۹.** توجه کنید $۶(e^{۴-۳x})^{۲} = ۶(e^{۴} \times e^{-۳x})^{۲} = ۶e^{۸}(e^{-۶x})$ حال از $۳'$ استفاده کنید. **۵۰.** مشتق مخرج در صورت نشسته است. **۵۲.** اگر $t = \ln(۲x^{۲})$ آن گاه $dt = \frac{۴xdx}{۲x^{۲}} = \frac{۲dx}{x}$ که در آن $x \neq ۰$. **۵۴.** با انتخاب $t = \ln(r^{۲} + ۱)$ مسئله را حل کنید. **۵۵.** با انتخاب $t = \ln(x^{۴} + ۱)$ مسئله را حل کنید. **۵۹.** اگر $t = \sqrt{۵x}$ آن گاه $\frac{۲dt}{\sqrt{۱۵}} = \frac{dx}{\sqrt{۳x}}$. **۶۰.** با توجه به $۷^{۲x}(۲^{۲x} + ۳^{-۲x}) = ۱۴^{۲x} + (\frac{۷}{۳})^{۲x} = ۱۹۶^{x} + (\frac{۴۹}{۹})^{x}$ مسئله قابل حل است. **۶۲.** اگر $t = a + e^{-۴x}$ آن گاه $e^{-۴x}dx = \dfrac{dt}{-۴}$ و

$$\int \frac{c}{e^{۴x}(a+e^{-۴x})}dx = \int \frac{ce^{-۴x}}{a+e^{-۴x}}dx = \int \frac{(c/-۴)}{t}dt.$$

۶۴. از اینکه $(x^{۳} + ۲x)' = ۳x^{۲} + ۲$ و لذا $(x^{۳} + ۲x)' = -\frac{۳}{۲}(\frac{۶x^{۲}+۴}{-۳})$ کمک بگیرید.

۶۵. مانند ۶۴ فکر کنید. **۶۷.** با تقسیم عبارتها برهم وقتی $x > -۱$ داریم:

$$\frac{x^{۲}+x+\sqrt{x+۱}}{x+۱} = \frac{x(x+۱)}{x+۱} + \frac{\sqrt{x+۱}}{x+۱} = x + \frac{۱}{\sqrt{x+۱}}.$$

۶۸. مشتق زیر رادیکال در بیرون رادیکال هست. **۷۲.** مشتق عبارت داخل توان در صورت در کنارش دیده می شود. **۷۳.** مانند ۷۲ مسئله را نگاه کنید. **۷۴.** اگر $t = x - \dfrac{۱}{x^{۲}}$ آنگاه

$t' = \frac{۲}{x^۳} + ۱ = \frac{x^۴+۲}{x^۳}$ و مسئله با فرمول $۲'$ قابل بررسی است. **۷۸.** مشتق عبارت زیر رادیکال در بیرون رادیکال هست. **۸۰.** عبارت مخرج را در صورت آورده، به توان ۳ رسانده و در $s - ۱$ ضرب کنید. **۸۱.** اگر $t = \sqrt[۳]{x^۲} + ۱$ آنگاه $\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}dx = dt$ در صورت ایجاد می شود. **۸۲.** اگر $e^{۳-t}$ را به صورت $e^۳ \times e^{-t}$ ببینید آنگاه مشتق عبارت مخرج داخل توان، در صورت دیده می شود. **۸۸.** با انتخاب $t = \ln(x^۳ + ۱)$ انتگرال به سادگی حل می شود. **۸۹.** با انتخاب $t = ۱ - \frac{۱}{x}$ داریم: $\int \frac{۱}{x^۲}(\frac{۱}{x} - ۱)^{\frac{۲}{۳}}dx = -\int t^{\frac{۲}{۳}}dt$. **۹۱.** مشتق عبارت $e^x - e^{-x}$ در صورت کسر است. **۹۴.** اولاً $\frac{۱}{e^{-۶}}$ را بیرون آورده و $t = ۵x$ را اعمال کنید. **۹۶.** توجه کنید $\ln(e^۳ + ۱)$ یک عدد ثابت است و از انتگرال بیرون می آید. **۱۰۰.** اگر $t = -\frac{x}{۴}$ آن گاه $-۴dt = dx$ و $\int \frac{e^{۲-\frac{x}{۴}}dx}{e^{۱۶}+e^{-۱}} = \frac{e^۲}{e^{۱۶}+e^{-۱}}\int e^t(-۴dt)$. **۱۰۱.** لازم نیست عبات ها را به توان برسانیم. اگر $t = x - ۱$ آن گاه $dx = dt$ و انتگرال $\int (t^{۱۵} + ۳t^۲)dt$ به دست می آید. **۱۰۲.** روی تغییر متغیر $t = x^۶ - x^۴$ کار کنید. **۱۰۳.** روی تغییر متغیر $t = x^۳ - ۶x^۲$ کار کنید. **۱۰۵.** مشتق مخرج در صورت دیده می شود. **۱۰۸.** بگیرید $t = ۴x^۳ + ۳x^۲ - ۴$ و ادامه دهید. **۱۰۹.** تغییر متغیر $t = x^۳ - x^۶$ را امتحان کنید. **۱۱۰.** اگر قرار دهیم $t = x\ln x$ آنگاه $dt = (۱ + \ln x)dx$ و لذا انتگرال زیر حاصل می شود.

$$\int (\tfrac{۱}{۲})^{-۲t}dt = \int ۴^t dt.$$

۱۱۲. روی $t = x^۵ - ۱$ کار کنید، توجه داریم:

$$(x^۴ - x^۹)(x^۵ - ۱)^{۱۲} = x^۴ \underbrace{(۱ - x^۵)(x^۵ - ۱)^{۱۲}}_{-(x^۵ - ۱)^{۱۳}}.$$

۱۱۳. بگیرید $t = ۱ + \sqrt{x}$. **۱۱۵.** اولاً انتگرال را به دو انتگرال تفکیک کرده یکی را با انتخاب $t = x - ۱$ و دیگری را با تغییر متغیر $t = x + ۱$ حل کنید. **۱۱۶.** از تابع $e^{-\frac{۱}{۴}x}$ انتگرال میگیرید. **۱۱۷.** روند مسئله ۱۱۵ را بکار بگیرید(با انتخاب تغییر متغیرهای مناسب). **۱۱۸.** روند مسئله ۱۱۵ را بکار بگیرید(با انتخاب تغییر متغیرهای مناسب). **۱۲۰.** انتخاب کنید $t = f(x) - ۱۳۹۸$ و تغییر متغیر دهید. **۱۲۱.** مانند مسئله ۱۱۲ حل کنید. **۱۲۳.** مسلماً $t = e^x - ۳۹$ خوب عمل می کند. **۱۲۴.** انتگرال را بر حسب $t = x^۳ - ۶x$ تغییر

شکل داده و حل کنید. **۱۲۵.** اولاً انتگرال را به دو انتگرال تفکیک کرده و سپس برای یکی از آنها $t = \ln x$ جواب می دهد. **۱۲۶.** توان ۲ را انجام دهید. **۱۲۷.** بر خلاف مسئله ۱۲۵، بگیرید $t = ۹ + \ln(x)$. **۱۲۹.** اگر $x \neq -۱$ آنگاه تابع را با کمک اتحاد ساده کنید. **۱۳۰.** اگر تابع به صورت زیر دیده شود $t = x^۲$ تغییر متغیر مناسب است:

$$\frac{۷^{-x^۲}}{x^{-۱}۵^{x^۲}} = \frac{x}{۳۵^{x^۲}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{t'}{۳۵^t}\right).$$

۱۳۱. توان ۲ را اعمال کنید. **۱۳۲.** اولاً $x^{-۱}$ را در مخرج برده و توان ۳ را اعمال کرده، تفکیک کسرها را انجام دهید. **۱۳۷.** روی $t = ۳x^۲ + e^x$ کار کنید. **۱۳۸.** روی $t = x^۲ - ۸x$ کار کنید. **۱۴۰.** روی $t = x + e^{-x}$ کار کنید. **۱۴۲.** روی $t = ۲ - e^{-۳x}$ کار کنید. **۱۴۳.** تغییر متغیر $t = -\sqrt{x}$ انتگرال را به شکل مناسب در می آورد. **۱۴۴.** $t = \sqrt{x^۵}$ را امتحان کنید. **۱۴۵.** $e^{۳x}$ ثابت است. **۱۴۶.** چون $d(s^۲ - s) = d(s^۲) - d(s) = ۲sds - ds$ لذا انتگرال تفکیک می شود. بعلاوه عامل نمایی ثابت است. **۱۴۷.** از اینکه $d(x^۲ + ۳) = d(x^۲) = ۲xdx$ استفاده و انتگرال را حل کنید. **۱۴۹.** بنویسید

$$\int (u^x x^u + ۱) d(t + u + x) = \int (u^x x^u + ۱)(dt + du + dx)$$

که برابر است با

$$\int (u^x x^u + ۱)dt + \int (u^x x^u + ۱)du + \int (u^x x^u + ۱)dx,$$

و نهایتاً مساوی است با $(u^x x^u + ۱)t + x^u \int u^x du + \int du + u^x \int x^u dx + \int dx$. حال ادامه دهید. **۱۵۰.** اگر $dv = ۳۶x^۵ dx, u = \ln(۳x)$ آنگاه $du = \frac{۱}{x}dx$ و $v = ۶x^۶$. در این صورت داریم:

$$\int ۳۶x^۵ \ln(۳x)dx = \underbrace{\ln(۳x)(۶x^۶)}_{uv} - \underbrace{\int (۶x^۶) \times \frac{۱}{x}dx}_{\int ۶x^۵ dx = x^۶ + C},$$
$$= (۶x^۶ \ln(۳x) - x^۶) + C.$$

۱۵۳. اگر $u = ۱ - x$ و $e^x dx = dv$ آنگاه $du = -dv$ و $v = e^x$ در این صورت:

$$\int (۱-x)e^x dx = (۱-x)e^x - \int e^x(-dx) = (۱-x)e^x + e^x + C.$$

۱۵۴. اگر $\frac{xdx}{\sqrt{۱+x^۲}} = dv$,$x^۲ = u$ آنگاه $du = ۲xdx$ و $v = \sqrt{۱+x^۲}$[۲۵]. در این صورت

$$\int \frac{x^۳}{\sqrt{۱+x^۲}}dx = \int x^۲\left(\frac{xdx}{\sqrt{۱+x^۲}}\right) = \underbrace{x^۲\sqrt{۱+x^۲}}_{uv} - \underbrace{\int \sqrt{۱+x^۲}(۲xdx)}_{\int ۲x\sqrt{۱+x^۲}dx = A},$$

انتگرال A را می توان با انتخاب $t = ۱ + x^۲$ به صورت زیر حل کرد.

$$A = \int \sqrt{t}dt = \tfrac{۲}{۳}t^{\frac{۳}{۲}} + C = \tfrac{۲}{۳}(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}} + C,$$

لذا $\int \frac{x^۳}{\sqrt{۱+x^۲}}dx = x^۲\sqrt{۱+x^۲} - \tfrac{۲}{۳}(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}} + C$. **۱۵۶.** در این انتگرال ۲ بار جزء بجزء بکار می رود.در مرحله اول اگر $u = (\ln x)^۲$ و $dv = xdx$ آنگاه $du = \frac{۲}{x}\ln x\, dx$ و $v = \frac{x^۲}{۲}$ و بنابراین حاصل انتگرال با $(\ln x)^۲ \times \left(\frac{x^۲}{۲}\right) - \underbrace{\int \left(\frac{x^۲}{۲}\right)\left(\frac{۲}{x}\right)\ln x\, dx}_{\int x\ln x\, dx = A}$ یکی است.
برای حل A مجددا $u = \ln x$ و $dv = xdx$ را به کار ببرید. **۱۵۷.** انتگرال را به شکل $\int \overbrace{x^۲}^{u} \underbrace{(xe^{x^۲}dx)}_{dv}$ می بینیم. در این صورت $v = \frac{۱}{۲}e^{x^۲}$ و $du = ۲xdx$ و لذا

$$\int x^۳ e^{x^۲}dx = \frac{x^۲}{۲}e^{x^۲} - \underbrace{\int \tfrac{۱}{۲}e^{x^۲}(۲xdx)}_{\int xe^{x^۲}dx = A}.$$

توجه کنید در محاسبه A از تغییر متغیر $t = x^۲$ کمک بگیرید. **۱۵۸.** در این انتگرال از $u = x$ و $dv = \sqrt{x+۵}\, dx$ استفاده کنید. با این فرض $du = dx$ و $v = \frac{۲}{۳}(x+۵)^{\frac{۳}{۲}}$ خواهد شد. **۱۵۹.** از $\ln(x^۲) = ۲\ln(x)$ استفاده کنید. **۱۶۰.** از نکته مسئله **۱۵۹** کمک بگیرید. **۱۶۱.** انتگرال را به صورت $\int (x-۱)e^{-x}dx$ دیده و روش مسئله**۱۵۲** را بکار برید. **۱۶۲.** انتخاب کنید $u = ۱۲x$ و $dv = \frac{dx}{\sqrt{۱+۴x}}$. **۱۶۷.** انتگرال را به صورت $\int \left(\frac{x^۵}{-۵}\right)\left(\frac{-۵x^۴}{\sqrt{۱-x^۵}}\right)dx$ در

---

[۲۵] در انتگرال گیری از $\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ کافی است $t = ۱ + x^۲$ انتخاب کرده تا مشتق t در صورت ظاهر شود.

آورده و حل کنید. انتگرال دوم سمت راست قاعده جزء به جزء؛ از روش تغیر متغیر $t = 1 - x^5$ حل خواهد شد. **۱۶۸.** توان دوم را باز کنید. تنها یکی از انتگرال ها نیاز به جزء به جزء دارد. **۱۷۱.** از **۱۶۸** الگو بگیرید. **۱۷۲.** اگر $u = \ln(x+1)$ و $dv = x^n dx$ آنگاه یکبار انتگرال گیری جزء به جزء مسئله را حل می کند. **۱۷۳.** کافی است $u = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ و $dv = dx$ انتخاب شوند. **۱۷۵.** به نکته مسئله **۱۵۹** توجه کنید. **۱۷۷.** تابع انتگرال را به صورت $3\ln(x)\sqrt{x+1}$ نوشته و سپس با انتخاب $u = \ln(x)$ و $dv = \sqrt{x+1}\,dx$ مسئله را جلو ببرید.(شاید به استفاده از فرمولی احتیاج باشد). **۱۸۲.** صورت را بر مخرج تقسیم کنید:

$$\frac{(x^2+1)^3}{2x} = \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x}.$$

۱۸۳. در اینجا نیز می توان از تقسیم استفاده کرد اما راه دیگری هم وجود دارد. توجه کنید چگونه تفکیک و بازی با ضرایب به تجزیه شدن کسر کمک می کند.

$$\begin{aligned}\frac{x}{2x-1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{2x-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1+1}{2x-1}\right),\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(2x-1)+1}{2x-1}\right),\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{2x-1} + \frac{1}{2x-1}\right), \quad (\text{تفکیک کسر})\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2x-1}\right). \quad , \ (x \neq \frac{1}{2})\end{aligned}$$

۱۸۵. با تقسیم داریم: $\frac{3x-11}{2-8x} = \frac{-3}{8} + \frac{(41/8)}{4x-1}$. **۱۸۸.** با تقسیم داریم:

$$\frac{x^2+5}{2x-3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{(29/2)}{2x-3}.$$

۱۹۱. به نظر می رسد مشتق عبارت مخرج (بدون توان) در صورت دیده می شود. **۱۹۴.** بمانند **۱۹۱** عمل کنید. **۱۹۵.** با تقسیم صورت بر مخرج به عبارت

$$5x - 38 + \frac{270}{x+7} - \frac{1}{x+1}.$$

می رسید. **۱۹۷.** برای این مسئله از راه دیگری حل را انجام می دهیم. با کمک تعریف دیفرانسیل: $d(2x-5) = 2dx$ و لذا $dx = \frac{1}{2}d(2x-5)$. حال این تغییرات را اِعمال

میکنیم:

$$\int \frac{۱۳dx}{(۲x-۵)^۴} = ۱۳\int \frac{d(۲x-۵)/۲}{(۲x-۵)^۴} = \frac{۱۳}{۲}\int \frac{dt}{t^۴},$$

که در آن $t = ۲x - ۵$ گرفته شده است. انتگرال آخر براحتی حل شده و بعد بر حسب x جایگزین می کنیم. **۱۹۹.** از کسرهای جزیی داریم: $\frac{(۱۳/۱۵)}{۲x+۱} + \frac{(۱/۵)}{x-۲} = \frac{۳x-۵}{\underbrace{۲x^۳-۳x-۲}_{(x-۲)(۲x+۱)}}$.

۲۰۰. به کمک کسرهای جزئی داریم: $\frac{(۷/۴)}{۲x+۱} + \frac{(-۱/۴)}{۲x-۱} = \frac{۳x-۲}{\underbrace{۴x^۲-۱}_{(۲x-۱)(۲x+۱)}}$. **۲۰۱.** کسر، به سادگی $\frac{(۲/۱۱)}{x+۵} + \frac{(-۴/۱۱)}{۲x-۱} = \frac{-۲}{۲x^۲+۹x-۵}$ تجزیه می شود. **۲۰۲.** برای **الف** چون

$$\sqrt{x+۱} = \sqrt{۲t},$$

لذا $x = ۲t-۱$ و بنابر این انتگرال داده شده به انتگرال $\int_۱^۲ \sqrt{۲t}(۲dt)$ تبدیل می‌گردد. درباره **ج**، اگر $t = \sqrt[۳۰]{x}$ پس $x = t^{۳۰}$ و لذا $dx = ۳۰t^{۲۹}dt$. از طرفی $x = t^{۳۰}$، باعث می‌شود تا $\sqrt[۳]{x} = t^{۱۰}$ و $\sqrt[۵]{x} = t^۶$ و $\sqrt{x} = t^{۱۵}$ حاصل شوند. در نهایت با فرض $t \neq ۰$:

$$\int \frac{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۵]{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \underbrace{\frac{t^{۱۰}+t^۶}{t^{۱۵}}}_{t^{-۵}+t^{-۹}} \times ۳۰t^{۲۹}dt = \int (۳۰t^{۲۴}+۳۰t^{۲۰})dt.$$

که بسیار ساده و قابل حل است. برای **د** همانطور که داده شده است، $t = \sqrt{x}+۱$. لذا $\sqrt{x} = t-۱ > ۰$ و بنابراین $x = (t-۱)^۲$. از اینرو $dx = ۲(t-۱)dt$ و بعلاوه وقتی $t \neq ۰$:

$$\int \frac{۱+x}{۱+\sqrt{x}}dx = \int \frac{۱+(t-۱)^۲}{t} \times ۲(t-۱)dt = ۲\int \frac{(۲-۲t+t^۲)(t-۱)}{t}dt,$$

که برابر است با

$$۲\int \frac{t^۳-۳t^۲+۴t-۲}{t}dt = ۲\int (t^۲-۳t+۴-\frac{۲}{t})dt.$$

که با فرمول‌های ابتدایی انتگرال قابل محاسبه است. در مورد **و** به این صورت عمل می‌کنیم که: $t^۲ = \frac{x+۱}{x-۱}$ نتیجه می‌دهد $x = \frac{t^۲+۱}{t^۲-۱}$ (از طرفین وسطین کردن و فاکتورگیری کمک بگیرید). به

این ترتیب $dx = \frac{-۴t}{(t-۱)^۲(t+۱)^۲}dt$ و بنابراین

$$\int \sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}dx = \int \frac{-۴t^۲}{(t-۱)^۲(t+۱)^۲}dt.$$

که از روش تجزیه کسر به کسرهای جزیی قابل حل است. برای مورد **ک**، اگر $\sqrt[۳]{x} = t$ آنگاه $x = t^۳$ و بنابراین $dx = ۳t^۲dt$. با مرتب کردن انتگرال داریم:

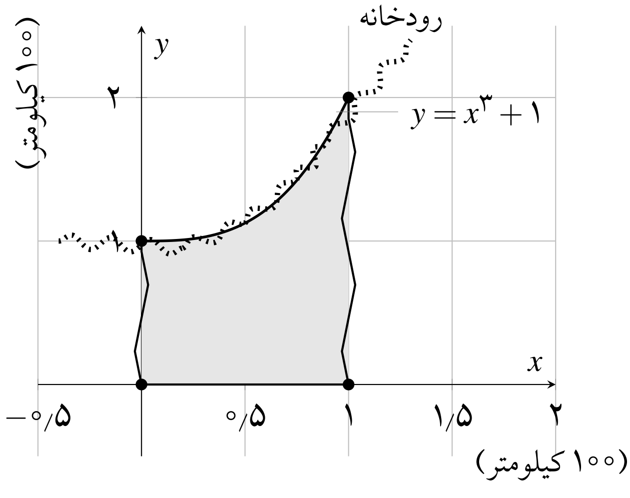
$$\int x^۲ e^{\sqrt[۳]{x}}dx = \int (t^۳)^۲ e^t(۳t^۲dt) = \int ۳t^۸e^t dt.$$

که بسادگی با کمک روش جزء بجزء قابل حل است.

فصل ۲

انتگرال معیّن

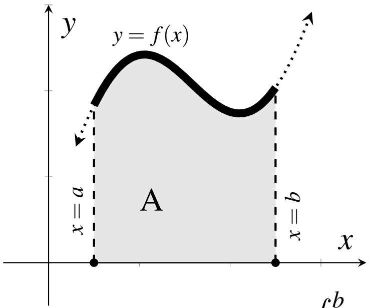
بحث را با بیان دو مثال یکی مرتبط با هندسه و دیگری از انواع کاربردی آغاز می کنیم. فرض کنید یک موسسهٔ معاملات املاک، زمینی به شکل زیر را در معرض فروش گذاشته است:



این ناحیه، شکلی قناس و ذوذنقه وار دارد. ذوذنقه ای که یکی از مرزهای آن مارپیچ رودخانه و سه مرز دیگر تقریباً پاره خط هایی مستقیم هستند. اگر مطلوب ما مساحت دقیق این ناحیه باشد آنگاه با کمی اغماض می توان آنرا مساحت زیر منحنی تابع $y = x^۳ + ۱$ از بالا، محور طول از پایین و بین دو خط $x = ۰$ و $x = ۱$ تصور کرد. بعبارت دیگر در صورتی که این سطح (مساحت) زیر نمودار پیدا شود آنگاه مساحت زمین بطور تقریبی و قابل قبولی پیدا می شود. مقدار این

مساحت با انتگرالگیری از تابع اخیر در رابطه است. مثالی دیگر؛ تولید کننده ای را تصور کنید که حاضر است کالای خود را زیر قیمت تعادلی بازار بفروشد.[۱] مقدار سودی که بدین صورت حاصل می آید، با انتگرال مشخصاً ارتباط دارد. در این فصل قصد داریم بعد از تعاریف مقدماتی به کاربردهای انتگرال معیّن در ریاضی و دیگر موضوعات بپردازیم.

۱.۲ تعریف و مساحت زیر نمودار منحنی



در شکل زیر، تابع پیوسته[a] $f(x)$ روی ناحیه $[a,\ b]$ تعریف شده و بطوری است که نمودارش کاملاً بالای محور طولها رسم می شود. در این صورت مقدار مساحت A قابل محاسبه بوده و مقدار آن را با شکل انتگرالی زیر بنام **انتگرال معیّن** تابع $f(x)$ بر ناحیه $a \leqslant x \leqslant b$ نشان می دهند:

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (\star ۳)$$

به مقادیر a و b بترتیب کران بالا و کران پایین انتگرالگیری می گویند.

[a] در این مبحث شرطهای دیگری نیز می تواند بجای پیوستگی مانند کرانداری قرار گیرد.

نکته ۱.۲. تحت شرایط بیان شده در تعریف، ثابت می شود که اگر تابع $f(x)$ بر ناحیه $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته و برای همه مقادیر در این ناحیه تابعی نامنفی باشد، در این صورت مقدار $(\star ۳)$ موجود بوده و برابر است با عدد $F(b) - F(a)$. تابع $F(x)$ یک **تابع اولیه**[a] برای $f(x)$ است. از نظر نماد نویسی تفاضل اخیر را به شکل $F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$ هم می توان نوشت. این نتیجه را بنام **قضیّهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال** می شناسند.

[۱] علت این رفتار ناشی از سودی است که برای او وجود دارد.

نکته ۲.۲. با در نظر گرفتن شرایطی که برای وجود انتگرال معیّن در نکته بالا آمد، بجهت محاسبه (⋆۳)، لازم نیست مقدار ثابت انتگرال را در نظر گرفته و در واقع مهم استفاده از یک تابع اولیه برای y است. بعلاوه برای یافتن این تابع، ممکن است از هر روش انتگرالگیری که لازم است کمک بگیریم.

[a] $F'(x) = f(x)$.

مثال ۱.۲. برای محاسبه انتگرال $\int_{۲}^{۴}(x^{۳}+۴)dx$ ابتدا یک تابع اولیه برای $x^{۳}+۴$ پیدا می کنیم:[۲] $\int (x^{۳}+۴)dx = \underbrace{\left(\frac{x^{۴}}{۴}+۴x\right)}_{F(x)}+C$ و بنابر این $\int_{۲}^{۴}(x^{۳}+۴)dx = \left(\frac{x^{۴}}{۴}+۴x\right)\Big|_{۲}^{۴}$ که برابر است با $F(۴)-F(۲)=۸۰-۱۲=۶۸$. □

مثال ۲.۲. با توجه به تعریف، مساحت سطح زیر تابع خطی $y=۲x+۱$ را بر ناحیه $۱\leqslant x\leqslant ۳$ بدست می آوریم. اولاً نمودار تابع روی این ناحیه کاملاً بالای محور x است[۳] و A برابر است با:

$$\int_{۱}^{۳}(۲x+۱)dx = \overbrace{(x^{۲}+x)}^{F(x)}\Big|_{۱}^{۳} = \overbrace{F(۳)}^{۱۲}-\overbrace{F(۱)}^{۲} = ۱۰. \qquad \square$$

نکته ۳.۲. اگر $f(t)$ بر ناحیهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ پیوسته باشد در این صورت تابع $\int_a^x f(t)\,dt$ یک تابع اولیهٔ برای $f(x)$ بوده[a] و لذا در این ناحیه تساویهای زیر همواره برقرار است:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x), \qquad \int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+C.$$

نکته ۴.۲. برای تابع های $f(x)$ و $g(x)$، پیوسته بر ناحیه $a\leqslant x\leqslant b$، قوانین زیر برقرارند:

۱. اگر $f\big|_{a\leqslant x\leqslant b}\geq ۰ \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx\geqslant ۰,$

[۲] توجه داریم تابع داخل انتگرال یک چندجمله ای بوده و لذا روی هر ناحیه ای پیوسته است.
[۳] چرا؟

۲. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,$ (k یک عدد و یا عبارتی خالی از x است)

۳. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$

۴. $\int_a^a f(x)\,dx = ۰,$

۵. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$

۶. $a \leqslant c \leqslant b \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

[a] این تابع بر حسب x است.

مثال ۲.۳. $\frac{d}{dx}\left(\int_۰^x t^۳\,dt\right) = x^۳$. □

مثال ۲.۴. مقدار حد $L = \lim_{x\to ۰} \frac{\int_۰^x e^{t^۲}\,dt}{\int_۰^x e^{۲t^۲}\,dt}$ را بدست آورید.

حل: با کمی دقت، این حد در حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ قرار دارد. از قاعده هوپیتال استفاده می کنیم که در آن مشتق گیری ها بر حسب x است:

$$L = \lim_{x\to ۰} \frac{\left(\int_۰^x e^{t^۲}\,dt\right)'}{\left(\int_۰^x e^{۲t^۲}\,dt\right)'} \overset{۴.}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{e^{x^۲}}{e^{۲x^۲}} = ۱ \qquad \square$$

مثال ۲.۵. اگر $\int_{-۲}^{۵} f(x)dx = ۳$ ، $\int_{-۲}^{۵} g(x)dx = -۴$ و $\int_{۳}^{۵} f(x)dx = ۷$ آنگاه:

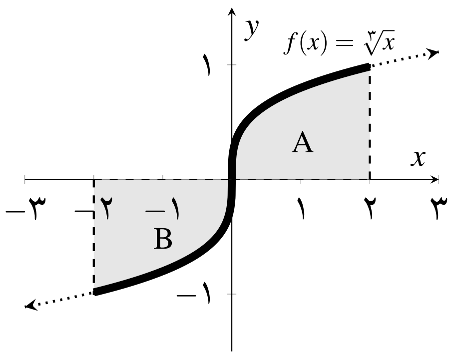
$$\int_{-۲}^{۵}[۲f(x) - ۳g(x)]dx = ۲\underbrace{\int_{-۲}^{۵} f(x)dx}_{۳} - ۳\underbrace{\int_{-۲}^{۵} g(x)dx}_{-۴} = ۱۸.$$

از طرفی $\int_{-۲}^{۵} f(x)dx = \int_{-۲}^{۳} f(x)dx + \int_{۳}^{۵} f(x)dx$ و لذا $\int_{-۲}^{۳} f(x)dx = ۳ - ۷ = -۴$.

۱.۱.۲ مساحت کل و مساحت خالص

برای تابع $f(x)$ که بر بازه $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته و **مثبت** است مقدار مساحت با مقدار **مثبت** (⋆۳) بیان شد. اما چه اتفاقی می افتد اگر تابع ناگهان منفی شود؟[۴] در این قسمت با مثال، به حالت اخیر و تفاوت آن با مفهوم مساحت از نوع قبلی می پردازیم.

در نمودار زیر، مساحت ناحیه هاشور خورده (متقارن) چیست؟



با توجه به شکل و روی ناحیهٔ $-۲ \leqslant x \leqslant ۰$ ، مقادیر تابع منفی است. با دو دیدگاه میتوان مساحت را بدست آورد. یکی اینکه چون یک تقارن بین دو ناحیه وجود دارد لذا مساحت کل $I_۱$ برابر است با $۲A$ که در آن:

$$A = \int_۰^۲ \sqrt[۳]{x}\, dx = \tfrac{۳}{۴} \sqrt[۳]{x^۴}\Big|_۰^۲ = \tfrac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۲}.$$

دیگر اینکه آیا نمی توان با محاسبه $\int_{-۲}^{۲} \sqrt[۳]{x}\, dx$ ، مساحت را بدست آورد؟ با محاسبه انتگرال به نتیجه صفر می رسیم!

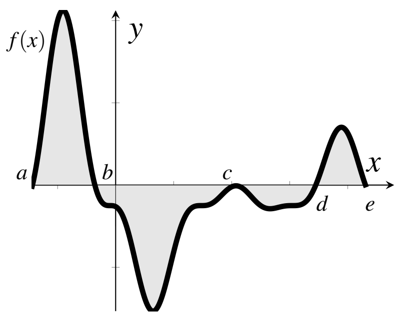
$$I_۲ = \int_{-۲}^{۲} \sqrt[۳]{x}\, dx = \frac{۳}{۴}\sqrt[۳]{x^۴}\Big|_{-۲}^{۲} = \frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۲} - \frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۲} = ۰.$$

بوضوح نمی توان پذیرفت که مساحتی که دیده می شود مقدارش صفر باشد. تفاوت اینجاست که: در مبحث انتگرال معیّن و با رعایت شرایط تعریف آن، $I_۱$ را **مساحت کل** و

---

[۴] بعبارت دیگر نمودارش در زیر محور طولها قرار گیرد.

$I_۲$ را **مساحت خالص** می نامند. نتایج حاصل درباره مساحت بدین شرح اند: اولاً ، انتگرال معیّن یک تابع واجد شرایط می تواند منفی شود مانند $\int_{-۲}^{\circ} \sqrt[۳]{x}\, dx$ در مثال قبل و ثانیاً، آنچه بعنوان مساحت همواره مورد نظر خواهد بود مقادیر مثبت است.[۵] برای توضیح نتیجه دوم، ناحیه رنگی زیر را در نظر بگیرید. اگر قرار دهیم $A_۱ = \int_a^b f(x)\, dx$، $A_۲ = \int_b^c f(x)\, dx$، $A_۳ = \int_c^d f(x)\, dx$ و $A_۴ = \int_d^e f(x)\, dx.$ در این صورت



$$I_۱ = \underbrace{A_۱ + |A_۲| + |A_۳| + A_۴}_{\text{مساحت}}$$

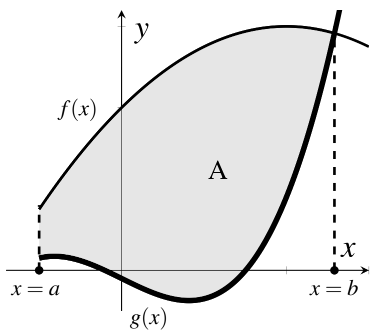
و

$$I_۲ = \sum_{i=۱}^{۴} A_i = \int_a^e f(x)\, dx.$$

۲.۱.۲ مساحت ناحیه محصور شدهٔ بین دو تابع

با استفاده از انتگرال معیّن، مساحت محصور بین دو تابع قابل محاسبه است:

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع پیوسته بر ناحیه $a \leqslant x \leqslant b$ بقسمی اند که

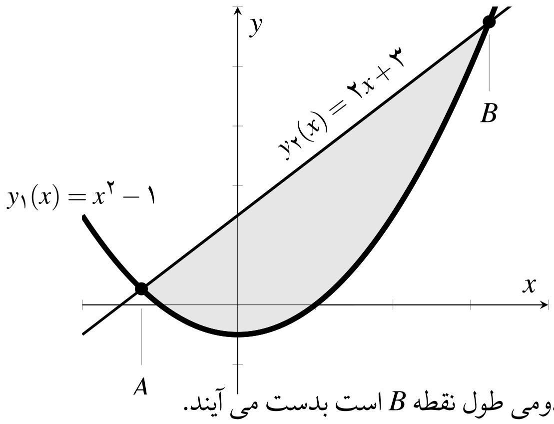


[۵] یعنی یافتن مساحت کل و نه مساحت خالص.

روی این ناحیه، نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع g رسم شود.[۶] در این صورت مقدار مساحت A برابر است با:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

مثال ۶.۲. مساحت ناحیه محصور شده بین دو تابع $y_۱ = x^۲ - ۱$ و $y_۲ = ۲x + ۳$ را بدست آورید.



حل: ناحیه ای در مسئله برای تغییرات x مشخص نیست و لذا بهترین کار یافتن نقاط تقاطع این دو تابع است: اگر

$$x^۲ - ۱ = ۲x + ۳,$$

آنگاه

$$x_۱ = \underbrace{۱ - \sqrt{۵}}_{\approx -۱/۲۴}$$

و $x_۲ = \underbrace{۱ + \sqrt{۵}}_{\approx ۳/۲۴}$ دو ریشه که اولی طول نقطه A و دومی طول نقطه B است بدست می آیند.

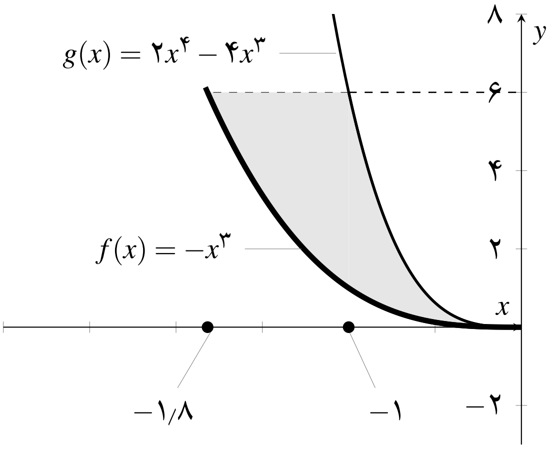
پس در تعریف بالا می توان قرار داد $a = x_۱$ و $b = x_۲$. برای اینکه بدانیم کدام تابع بالاتر است یک عدد بین $x_۱$ و $x_۲$ انتخاب کرده و در دو تابع قرار می دهیم. چون دو تابع چندجمله ای و پیوسته هستند لذا هر مقداری که بزرگتر حاصل شود آن تابع را بین این دو نقطه تقاطع بالاتر قرار می دهد. مثلاً عدد $x = ۰$ را در دو تابع می گذاریم: $y_۱(۰) = ۰^۲ - ۱ = -۱$ و $y_۲(۰) = ۰ + ۳ = +۳$ و لذا $y_۲$ از $y_۱$ بالاتر است. مساحت با حل انتگرال معیّن زیر بدست می آید:

$$A = \int_{x_۱}^{x_۲} \left((۲x+۳) - (x^۲ - ۱)\right)\, dx = -\frac{x^۳}{۳} + x^۲ + ۴x \Big|_{-۱/۲۴}^{۳/۲۴} \simeq ۱۴/۹.$$

مثال ۷.۲. انتگرالی معیّنی متناظر به مقدار مساحت ناحیه رنگی تشکیل دهید.

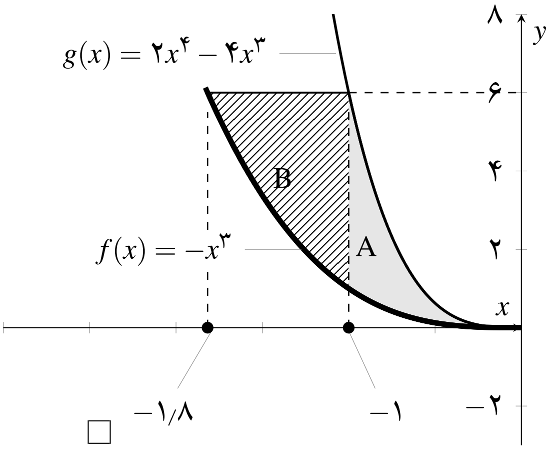
---

[۶] بعبارت دیگر روی این ناحیه $f(x) \geqslant g(x)$.



حل: برخلاف فرمول مساحت محصور بین دو تابع، در این ناحیه هیچکدام از دو تابع بالاتر از دیگری نبوده و لذا مانند قبل مساحت محاسبه نمی شود. قبل از اینکه یک راه جدید برای چنین حالاتی بیان شود، با روند تعریف ۲.۲ یک راه حل می سازیم.[a] کل ناحیه را به دو ناحیه یکی مابین $I_{۱} = -۱ \leqslant x \leqslant ۰$ و دیگری بین $I_{۲} = -۱/۸ \leqslant x \leqslant -۱$ تقسیم می کنیم. علت این کار ساده است. روی هر کدام از این دو ناحیه یک تابع در بالاتر از یکی دیگر قرار دارد: روی $I_{۱}$ تابع $g(x)$ بالا و $f(x)$ پایین و روی $I_{۲}$ تابع ثابت $y = ۶$ در بالا و تابع $f(x)$ در پایین دیده می شود. این دو ناحیه را در زیر می بینید:

[a] علت بررسی مسئله با روش قبلی، نشان دادن مزیت استفاده از راه جدیدی است که ارائه خواهیم داد.



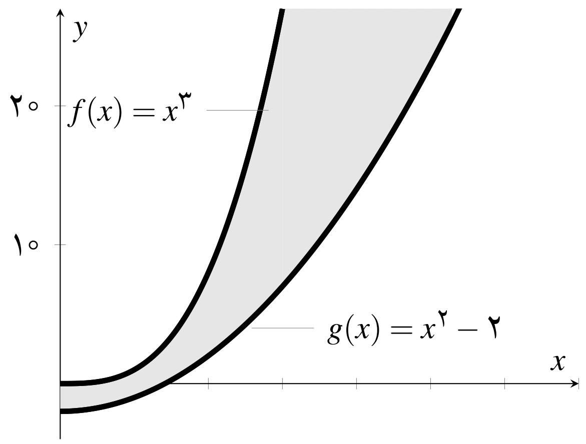
انتگرال مجزایی برای این مساحتها تشکیل میدهیم: $A = \int_{-۱}^{۰} (g(x) - f(x))\, dx$ و

$$B = \int_{-۱/۸}^{-۱} (۶ - f(x))\, dx.$$

بوضوح مساحت کل مجموع مساحتهای A و B است. توجه کنید امکان توصیف مساحت کل با فقط یک انتگرال معیّن بکمک فرمول ۲.۲ وجود ندارد! □

مثال ۸.۲. انتگرالی معیّنی متناظر به مقدار مساحت ناحیه رنگی تشکیل دهید. ناحیه رنگی نهایتاً در

$y = ۶$ محدود می شود.



حل: روش مثال قبل را می توان برای این نمونه هم بکار برد ولی کمی طولانی است و لزوم تفکیک مساحت به نواحی مشخص در آن وجود دارد. در این مثال یک راه جدید که در واقع استفاده از ۲.۲ به شکلی دیگر است دیده می شود. تعریف ۲.۲ را به صورت زیر تغییر می دهیم:

تعریف ۲.۲. فرض کنیم $f(y)$ و $g(y)$ دو تابع پیوسته بر ناحیه $c \leqslant y \leqslant d$ بقسمی هستند که روی این ناحیه، نمودار تابع f تماماً سمت راست نمودار تابع g رسم شود: [۷] در این صورت مقدار مساحت A برابر است با:

$$A = \int_c^d (f(y) - g(y))\, dy.$$

در این مثال، تابع g سمت راست تابع f قرار دارد و لذا با بدست آوردن x از هر کدام، x متناظر g را جمله اول تفاضل و x متناظر f را بعنوان دومین جمله می گیریم. برای بدست آوردن x هر تابع را با y مساوی گذاشته و حل انجام می دهیم:

$$y = x^۳ \to x = \sqrt[۳]{y}, \qquad y = x^۲ - ۲ \to x = \sqrt{y + ۲}$$

[۷] بعبارت دیگر روی این ناحیه $f(y) \geqslant g(y)$.

و بنابر این مساحت ناحیه بطور یکپارچه بتوسط یک انتگرال معیّن داده می شود:

$$\int_{۰}^{۲۷} (\underbrace{\sqrt{y+۲}}_{x\ \text{راست}} - \overbrace{\sqrt[۳]{y}}^{x\ \text{چپ}})\, dy. \qquad \square$$

۲.۲ انتگرال معیّن و روشهای انتگرالگیری

گاهی بجهت یافتن یک تابع اولیه (هنگام حل یک انتگرال معیّن)، یکی از دو روش تغییر متغیر یا جزء بجزء بکار گیری می شوند. در مرحلهٔ پایانی هر یک از این دو روش، جواب به صورت مجموع تابعی بر حسب متغیر (معمولاً) x و مقدار ثابت C در می آید. بعد از آن، حد های بالا و پایین را بترتیبی که نکته ۱.۲ مشخص کرد، در تابع اولیه قرار داده و تفاضل می گیریم. در دو مثال زیر یکی از انتگرالها را با روش تغییر متغیر و دیگری را بکمک روش جزء بجزء حل می کنیم. سپس با بیان راهی دیگر، رویّه ای معادل در حل دو انتگرال، با توجه به هر انتگرال، می آوریم تا رابطه بین آنچه در حل یک انتگرال معیّن وقتی از یک روش انتگرالگیری استفاده می شود را حس کنید.

مثال ۹.۲. الف) برای محاسبه $A = \int_{۱/۴}^{۲} \frac{\ln x}{x}\, dx$ ابتدا تابع اولیه تابع داخل انتگرال را از روش تغییر متغیر و با فرض $u = \ln x$ و با دیفرانسیل گیری: $du = \frac{dx}{x}$ بدست می آوریم:

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \ln x \left(\frac{dx}{x}\right) = \int u\, du = \tfrac{۱}{۲}u^{۲} + C = \tfrac{۱}{۲}(\ln x)^{۲} + C.$$

اکنون که $F(x) = \frac{۱}{۲}(\ln x)^{۲}$، با توجه به تعریف:

$$A = F(۲) - F\left(\frac{۱}{۴}\right) = \tfrac{۱}{۲}(\ln ۲)^{۲} - \tfrac{۱}{۲}[\ln(۰/۲۵)]^{۲} \simeq -۰/۷۲۱.$$

در انتگرال فوق، منظور از محاسبه A لزوماً سطح زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ممکن است نباشد. در واقع با توجه به شکل تابع $f(x)$ و بر ناحیه $\frac{۱}{۴} \leqslant x \leqslant ۲$، نمودار زیر محور طولها قرار دارد. و لذا عدد

A مقدار مساحت خالص را نشان می دهد و نه مقدار مساحت کل ناحیه هاشور خورده را (شکل های زیر).

ب) برای محاسبه $B=\int_{1}^{e}\ln x\,dx$ ابتدا تابع اولیه تابع داخل انتگرال را می یابیم. بکمک روش جزء بجزء و انتخاب $u=\ln x,\ dv=dx$ داریم $du=\frac{dx}{x},\ v=x$ و بنابر این با تطبیق بر فرمول اصلی این روش:

$$\int_{1}^{e}\ln x\,dx=(\ln x)x-\int\underbrace{\underbrace{\left(\tfrac{dx}{x}\right)x}_{dx}}_{x}=(\ln x)x-x+C.$$

اکنون که $F(x)=(\ln x)x-x$ با توجه به تعریف:

$$B=F(e)-F(1)=[(\ln e)e-e]-[(\ln 1)1-1]=1.$$

نمودار زیر مساحت کل B که زیر منحنی تابع $f(x)=\ln x$ قرار دارد را بر بازه داده شده نشان می دهد. توجه کنید بر این ناحیه تابع نامنفی است (شکل زیر). □

راه حل بالا، روند متعارف و قانونی محاسبه برای هر دو انتگرال بود اما می شود تا به طریقی دیگر، انتگرالگیری را جلو برد. مثلاً برای حل یک انتگرال معیّن هنگام استفاده از تغییر متغیر و البته تحت شرایط مناسب،[8] حدهای بالا و پایین انتگرال معیّن را تغییر داده و سپس حل صورت می گیرد. این تغییر در حدود، با توجه به تغییر متغیر مفروض انجام شده و انتگرال معیّن تحویل یافته، معادل انتگرال داده شده است. در مثال زیر انتگرالهایی با حدهای بالا و پایین مختلف به طور معادل و بر حسب تغییر متغیرهای (لازم برای حل هر کدام) به نوع دیگری تبدیل میشوند.

مثال ۲.۱۰. انتگرال معیّن $\int_{1}^{3}\sqrt{x+1}\,dx$ و تغییر متغیر $x=2t-1$ مورد نظر است. انتگرال معادلی را با توجه به تغییر متغیر داده شده تشکیل داده و حل کنید.

حل: ناحیه انتگرال $1\leqslant x\leqslant 3$ است. اگر اعداد ابتدایی و انتهایی بازه را در رابطه تغییر متغیر قرار

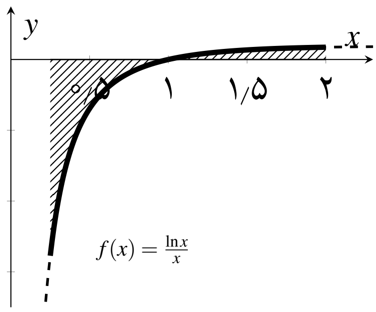
[8] این شرایط در همه کتابهای حسابان اصلی تحت عنوان تغییر متغیر در انتگرالهای معیّن آمده است.

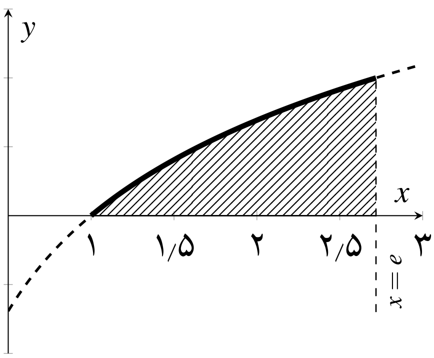
دهیم داریم:

$$x = ۱ \to ۲t - ۱ = ۱ \to t = ۱, \qquad x = ۳ \to ۲t - ۱ = ۳ \to t = ۲$$

و لذا ناحیهٔ اصلی به ناحیهٔ $۱ \leqslant x \leqslant ۳$ تبدیل می شود.[۹] از طرفی $\sqrt{x+۱}\,dx \Rightarrow ۲\sqrt{۲}\sqrt{t}\,dt$ و بنابر این:

$$\int_{۱}^{۳} \sqrt{x+۱}\,dx = \int_{۱}^{۲} ۲\sqrt{۲}\sqrt{t}\,dt = ۲\sqrt{۲}\int_{۱}^{۲} t^{\frac{۱}{۲}}\,dt = ۲\sqrt{۲} \times \left(\tfrac{۲}{۳}t^{\frac{۳}{۲}}\right)\Big|_{۱}^{۲} = \tfrac{-۴}{۳}\sqrt{۲} + \tfrac{۱۶}{۳} \qquad \square$$





۳.۲ انتگرالهای مجازی (غیر عادی)

در بخشهای گذشته، انتگرال معین تابع پیوسته f بر بازهٔ عددی $a \leqslant x \leqslant b$ به صورت

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

[۹] این تبدیل را تغییر متغیر داده شده ایجاد می کند.

تعریف شد که در آن $F(x)$ تابع اولیهٔ $f(x)$ روی بازهٔ بالاست. در این فصل با کمی تغییر در شکل فرضیات، یکی از حدود a یا b (و یا هر دو) را از انواع $\pm\infty$ انتخاب کرده و یا انتگرال معیّن را با فرض بی کران شدن تابع $f(x)$ در فاصله عددی $a \leqslant x \leqslant b$ در نظر می گیریم.[۱۰]

انتگرال‌هایی از انواع فوق را **مجازی (غیرعادی)** می‌نامند. از قبیل انتگرالهای

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-x}dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{۲}+۱}, \quad \int_{-۲}^{۲} \frac{dx}{(x+۱)^{۲}}.$$

در این کتاب قصدی بر بررسی انواع دوم نداریم.

تعریف ۳.۲. برای حل نوع اول، از قاعدهٔ زیر استفاده می شود:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f(x)dx,$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx.$$

و اگر $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده و پیوسته باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

که در آن $c \in D_f$ یک مقدار دلخواه است.

در هر کدام از قواعد فوق فرض بی‌کران شدن تابع $f(x)$ روی $[a,+\infty)$ و یا $(-\infty,b]$ منتفی است.

تعریف ۴.۲. اگر مقادیر حدهای فوق موجود و متناهی باشد آنگاه انتگرال مجازی متناظر آن را **همگرا** و در غیر این صورت **واگرا** می‌نامند.

مثال ۱۱.۲.

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x^{۲}}dx = \lim_{t\to\infty} \int_{۱}^{t} \frac{۱}{x^{۲}}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{۱}{x}\Big|_{۱}^{t}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{۱}{t}+۱\right) = +۱$$

و لذا $\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x^{۲}}dx$ همگراست. □

---

[۱۰] یادآوری: تابع $f(x)$ در $x=a$ بی‌کران می‌شود هرگاه: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

مثال ۲.۱۲.

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{۱}^{t} \frac{۱}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\ln x\Big|_{۱}^{t}\right) = \lim_{t\to\infty}(\ln t) = \infty$$

و بنابر این انتگرال غیرعادی واگراست. □

مثال ۲.۱۳.

$$\begin{aligned}\int_{\circ}^{\infty} ۲xe^{-x^۲}dx &= \int_{\circ}^{\infty} e^{-x^۲}d(x^۲) = -\int_{\circ}^{\infty} e^{-x^۲}d(-x^۲)\\ &\overset{-x^۲=t}{=\!=\!=} -\int_{\circ}^{-\infty} e^t dt = \int_{-\infty}^{\circ} e^t dt = \lim_{a\to-\infty}\left(\int_a^{\circ} e^t dt\right)\\ &= \lim_{a\to-\infty}\left(e^t\Big|_a^{\circ}\right) = \lim_{a\to-\infty}(۱-e^t) = ۱-e^{-\infty} = ۱-\circ = ۱\end{aligned}$$

و لذا $\int_{\circ}^{\infty} ۲xe^{-x^۲}dx$ همگراست[11]. □

[11] نوشتن $e^{-\infty}$ در بغیر از مفهوم حدی در ریاضیات مرسوم نیست! ما از این طرز نوشتن در مفهوم حدی استفاده کردیم که ایرادی ندارد.

۴.۲ تمرینات

- انتگرال‌های معیّن زیر را حل کنید.

۱. $\int_{-3}^{3} xe^{-x^2}\,dx$

۲. $\int_{1}^{3} \frac{2x-1}{x+1}\,dx$

۳. $\int_{1}^{2} (t-1)e^{1-t}\,dt$

۴. $\int_{0}^{1} (x+a)^n\,dx,\ a>2$

۵. $\int_{1}^{2} e^x(1+e^x)^{-1}\,dx$

۶. $\int_{2}^{5} \frac{x+1}{x+2}\,dx$

۷. $\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx$

۸. $\int_{1}^{e^2} x\ln(\sqrt[3]{x})\,dx$

۹. $\int_{-2}^{1} 8|x|\,dx$

۱۰. $\int_{1}^{2} \ln x\,dx$

۱۱. $\int_{1}^{3} (x+1)e^{x^2+2x}\,dx$

۱۲. $\int_{1}^{95} \frac{x}{\ln e^x}\,dx$

۱۳. $\int_{0}^{1} \frac{x+2}{e^{3x}}\,dx$

۱۴. $\int_{-9}^{-1} \frac{y\,dy}{\sqrt{4-5y}}$

۱۵. $\int_{2}^{4} \frac{x\,dx}{x^2+3}$

۱۶. $\int_{0}^{3} x(x^2+1)^4\,dx$

۱۷. $\int_{1}^{e} x^e \ln x\,dx$

۱۸. $\int_{0}^{1} x^7\sqrt{x^2+1}\,dx$

۱۹. $\int_{0}^{2} \left(\frac{x}{4}\right) 3^{2x^2-1}\,dx$

۲۰. $\int_{3}^{9} (y-6)^{301}\,dy$

۲۱. $\int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-x}}}\,dx$

۲۲. $\int_{0}^{\frac{1}{12}} xe^{12x}\,dx$

۲۳. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{2+x}$

۲۴. $\int_{1}^{2} 3x\ln(x^2)dx$

۲۵. $\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{x+5}}dx$

۲۶. $\int_{0}^{1} \frac{x}{e^{2x}}dx$

۲۷. $\int_{0}^{1} t^3 e^{2t}dt$

۲۸. $\int_{1}^{e^2} (x-1)\ln(x-1)dx$

۲۹. $\int_{e^a}^{e^b} \frac{1}{x\ln(x)}dx$

۳۰. $\int_{0}^{1} x(e^{-2x}+e^{-x})dx$

۳۱. $\int_{0}^{\sqrt{2}} \left(2x-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}\right)dx$

۳۲. $\int_{0}^{1} (2x+1)(x^2+x)^6\,dx$

۳۳. $\int_{-2}^{2} \frac{x^5\,dx}{(x^2+1)^3(x^6+4)^3}$

۳۴. $\int_{13}^{151} x^{p+1}(x^q+x)dt$

۳۵. توابع $f(x)$ و $g(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و در شرایط زیر صادقند:

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx=5,\ \int_{-3}^{2} g(x)dx=-2,\ \int_{-3}^{1} f(x)dx=0$$
$$\int_{-3}^{1} g(x)dx=4.$$

مطلوب است $\int_{1}^{2}[3f(x)-2g(x)]dx$ و $\int_{-3}^{2}[-2f(x)+5g(x)]dx$.

۳۶. حاصل $\int_{0}^{3} h(x)dx$، $\int_{0}^{3} f(x)dx$ و $\int_{0}^{2} g(x)dx$ را بیابید در صورتی که:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & 0\le x\le 1 \\ 4-2x & 1\le x\le 2 \\ 5x-10 & 2\le x\le 3 \end{cases},\quad h(x)=\begin{cases} 2 & 0\le x\le 1 \\ 4-2x & 1\le x\le 2 \\ 5x-10 & 2\le x\le 3 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 4x^2 & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 2x & \frac{1}{2}\le x\le 2 \end{cases}$$

۳۷. از روی مقدار انتگرال حل شده؛ مقدار انتگرال کناری را بدست آورید.

الف) $\int_{\circ}^{۲} ۶x^{۵} = ۶۴$, $\int_{-۲}^{۲} ۶x^{۵}\,dx$.

ب) $\int_{\circ}^{۳}(x^{۴}+x^{۲})\,dx = ۵۷/۶$, $\int_{-۳}^{۳}(x^{۴}+x^{۲})\,dx$.

ج) $\int_{۱}^{۲} ۴/x\,dx = ۲$, $\int_{-۲}^{-۱} ۴/x\,dx$.

د) $\int_{\circ}^{۱}(x^{۳}-x)\,dx = -\circ/۲۵$, $\int_{-۱}^{۱}(x^{۳}-x)\,dx$.

ه) $\int_{\circ}^{۱}(f(x)-g(x))dx$, $\begin{cases}\int_{\circ}^{۱}(f(x)-۲g(x))dx = ۶\\ \int_{\circ}^{۱}(۲f(x)+۲g(x))dx = ۹\end{cases}$

و) $\int_{۱}^{۲}(۲x-x^{۲})dx = \frac{۲}{۳}$, $\int_{۱}^{۲}(۱۲x-۶x^{۲})\,dx$.

۳۸. حاصل $A = \left(\int_{۱}^{۳} xdx\right)^{۳} - \int_{۱}^{۳} x^{۳}dx$ چیست؟

۳۹. اگر بدانیم $f(x) = \int_{۱}^{x} \frac{۳}{t^{۲}}\,dt$ مطلوب است $\int_{e}^{۱} f(x)dx$.

۴۰. مشتقات زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{d}{dt}\int_{\circ}^{t^{۲}} x^{۲}dx$, ب) $\frac{d}{dt}\int_{۱}^{۳t}\exp(x^{۲})dx$.

ج) $\frac{d}{dt}\int_{-t}^{t}\frac{dx}{\sqrt{x^{۴}+۱}}$, د) $\frac{d}{d\lambda}\int_{-\lambda}^{۲}[f(t)-g(t)]dt$.

۴۱. معادله $\int_{۳}^{x}\frac{۲t-۲}{t^{۲}-۲}dt = \ln\left(\frac{۲x}{۳}-۱\right)dx$ را بازای $x > ۲$ حل کنید.[۱۲]

۴۲. در هریک از مسائل زیر، مساحت ناحیه (محصور) مورد نظر را بیابید.[۱۳]

الف) $f(x) = x^{۲}+۱$, $y = \circ, x = \circ, x = ۱$.

---

[۱۲] راهنمایی: از دو طرف بر حسب x مشتق بگیرید.

[۱۳] در صورت امکان ناحیه را رسم کنید.

ب) $f(x) = ۹ - x^{۲}$, $y = ۰, x = ۰$.

ج) $f(x) = x^{۳}$, $-۲ \leqslant x \leqslant ۴$.

د) $f(x) = |x|$, $|x| \leqslant ۲$ ه) $f(x) = \frac{۶x^{۲}+۶}{(x^{۲}+۲)^{۲}}$, $x \in [۰, ۱]$.

و) $f(x) = x^{۲} - ۴x$, $g(x) = ۳x - ۶$.

۴۳. برای هریک از فواصل و توابع داده شده مقداری برای a چنان پیدا کنید که $x = a$ مساحت موردنظر را به دو بخش با مساحت‌های برابر تقسیم کند.

الف) $f(x) = x^{۲}$, $x \in [۰, ۴]$ ب) $f(x) = \frac{۱}{۳(x+۱)^{۲}}$, $۵ \leqslant x \leqslant ۱۰$.

۴۴. مقادیر a، b، c و d را درباره تابع و در فاصله داده شده زیر طوری به‌دست آورید که سه خط $x = a$، $x = b$ و $x = c$ سطح زیر منحنی تابع $f(x) = \frac{۱}{(x+۱)^{۲}}$ وقتی $x \geqslant ۱$ را به چهار بخش با مساحت‌های برابر تقسیم کند.

۴۵. برای هریک از نمودارهای داده شده (بعد از تمرین ۷۹) یک انتگرال معیّن مناسب تشکیل دهید.

۴۶. برای کدامیک از تابع‌های زیر $\int_{۰}^{۲} f(x)dx$ مساحت بین نمودار $f(x)$، محور x از $x = ۰$ تا $x = ۲$ را نتیجه می‌دهد؟

الف) $f(x) = x^{۲} + ۱$, ب) $g(x) = -x^{۲}$, ج) $h(x) = x - ۱$

۴۷. الف) مساحت بین منحنی $y = -x^{۲} + ۳x - ۲$، محور xها از $x = ۱$ تا $x = ۲$ چقدر است؟

ب) مساحت بین منحنی $y = xe^{x^{۲}}$ محور xها از $x = ۱$ تا $x = ۳$ را به‌دست آورید.

ج) مساحت بین منحنی $y = e^{-x}$ محور xها را روی $[-۱, ۱]$ بیابید.

۴۸. برای هریک از ناحیه‌های محصور شده زیر عدد مساحت را به‌دست آورید.

الف) $y = x^{۲}, \quad y = x + ۲ \quad x \in [۱, ۲]$

ب) $y = ۲x^{۲} - ۹x, \quad y = ۱۰x - x$

ج) $y = \frac{x^{۲}}{۲}, \quad y = x^{۲} - ۲x$

د) $y = \frac{۶}{x}, \quad y = -x - ۵$

ه) $y = x^{۳} - x, \quad y = ۳x \quad x \in [۰, ۲]$

و) $y = x^{۳} - ۱, \quad y = x - ۱$

ز) $y = x^{۲} - x - ۶, \quad x \in [۴, ۳]$

ح) $y = \ln x, \quad x = ۰, y = ۰, y = ۱$

۴۹. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} ۳x^{۲} & ۰ \leqslant x < ۲ \\ ۱۶ - ۲x & x \geqslant ۲ \end{cases}$ ناحیه محصور بین f، محور xها و خط $x = ۳$ را رسم کرده و مساحت آن را بیابید.

۵۰. مساحت محصور بین توابع داده شده را به‌دست آورید.

الف) $x = ۸ + ۲y, \ x = ۰, \ y = -۱, \ y = ۳$

ب) $y = \sqrt{x}, \ x^{۲} = y$

ج) $y^{۲} = -x - ۲, \ x - y = ۵, \ y = \pm ۱$

د) $y = x - ۱, \ y = ۵ - ۲x, \ x \in [۰, ۴]$

ه) $y = x^{۳} + x, \ y = ۰, \ x = -۱, \ x = ۲$

و) $f(x) = \frac{۶x^{۲} + ۶}{(x^{۲} + ۲)^{۲}}, \qquad x \in [۰, ۱]$

ز) $f(x) = x^{۳} - ۴x, \qquad g(x) = ۳x + ۶$

ح) $x = y^{۲} + ۱, \quad x = ۴ - ۲y$

ط) $x = \sqrt{y}, \quad y = ۹, \ x = ۰$

ی) $y = e^{x/۲}, \quad y = -۱/x, \ x = ۱, x = ۲$

ک) $y = (x-۳)^{۲}, \quad y = ۸ - (x-۳)^{۲}$

ل) $y = ۴ - x, \quad y = x^{۲} - ۵x + ۸, \qquad x \in [۰, ۲]$

۵۱. کدام یک از انتگرال‌های زیر مجازی است؟

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۳x-۲}, \qquad \int_{-۱}^{۳} \frac{dx}{x^{۲}}, \qquad \int_{۱}^{\infty} x^{۲} dx$$

• انتگرال‌های مجازی زیر را محاسبه کنید.

۵۲. $\int_{۰}^{\infty} e^{-x}\, dx$

۵۳. $\int_{\frac{۱}{۲}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{۲x-۱}}$

۵۴. $\int_{-\infty}^{۰} e^{۲x}\, dx$

۵۵. $\int_{۱}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

۵۶. $\int_{۵}^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^{۲}-۱۶}}$

۵۷. $\int_{-\infty}^{\infty} x^{۲} e^{-x^{۳}}\, dx$

• کدام یک از انتگرال‌های غیرعادی زیر همگرا و کدام یک واگرایند؟

۵۸. $\int_{۰}^{\infty} x^{۲} e^{-x}\, dx$

۵۹. $\int_{۱}^{\infty} \frac{dx}{x^{۳}}$

۶۰. $\int_{۰}^{\infty} (x-۱) e^{-x}\, dx$

۶۱. $\int_{۳}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[۳]{۲x-۱}}$

۶۲. $\int_{۰}^{\infty} ۴x e^{-۲x^{۲}}\, dx$

۶۳. $\int_{۳}^{\infty} \frac{۱}{(۲x-۱)^{۲}}\, dx$

۶۴. $\int_{۱}^{\infty} \frac{x^{۲}}{\sqrt{x^{۳}+۲}}\,dx$

۶۵. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$

۶۶. $\int_{\circ}^{\infty} xe^{۱-x}\,dx$

۶۷. $\int_{\circ}^{\infty} e^{x}\sqrt{e^{x}}\,dx$

۶۸. $\int_{۱}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

۶۹. $\int_{\circ}^{\infty} (x^{۳}+۲x)e^{-x}\,dx$

۷۰. $\int_{۲}^{\infty} \frac{۱}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

۷۱. $\int_{۱}^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

۷۲. $\int_{\circ}^{\infty} \frac{x-۱}{x+۲}\,dx$

۷۳. $\int_{\circ}^{\infty} (۵+e^{-x})\,dx$

۷۴ $\int_{۱}^{\infty} x^{۲}e^{\frac{۱}{x}}\,dx$

۷۵. $\int_{۲}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^{۲}+۹)^{۳}}}$

۷۶. $\int_{\circ}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{x}}}$

۷۷. نشان دهید اگر $a > \circ$ آنگاه $\int_{\circ}^{\infty} e^{-ax}dx = \frac{۱}{a}$.

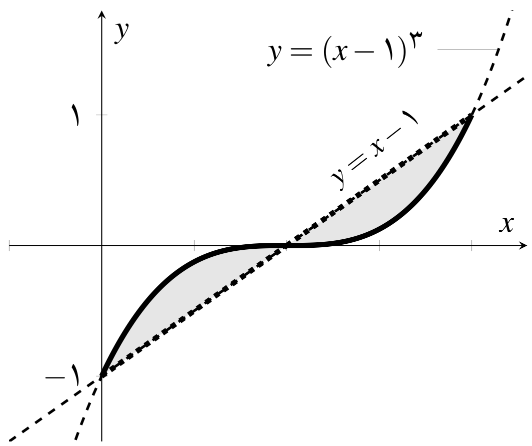
۷۸. نشان دهید اگر $a > \circ$ و $\lim_{b\to\infty} be^{-ab} = \circ$ آنگاه $\int_{\circ}^{\infty} xe^{-ax}dx = \frac{۱}{a^{۲}}$.

۷۹. آیا مقادیری برای α در $\int_{\circ}^{۱} x^{\alpha}dx$ می‌شناسید که نوع انتگرال را از به انواع مجازی تبدیل کند؟

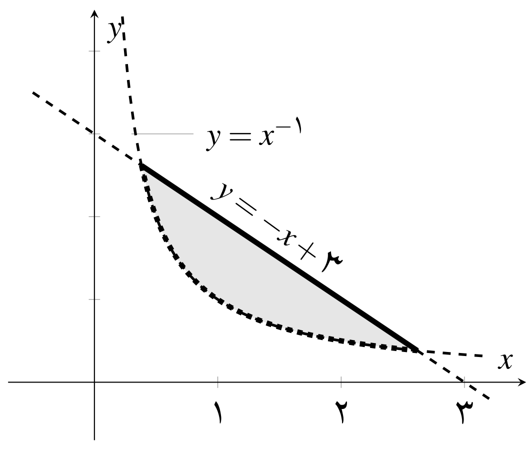
۸۰. در بحث راه اندازی یک تجارت، گفته می‌شود که از معادله زیر استفاده کنند:

$$V = \pi_{\circ}\int_{\circ}^{\infty} e^{\theta t}e^{-\rho t}dt$$

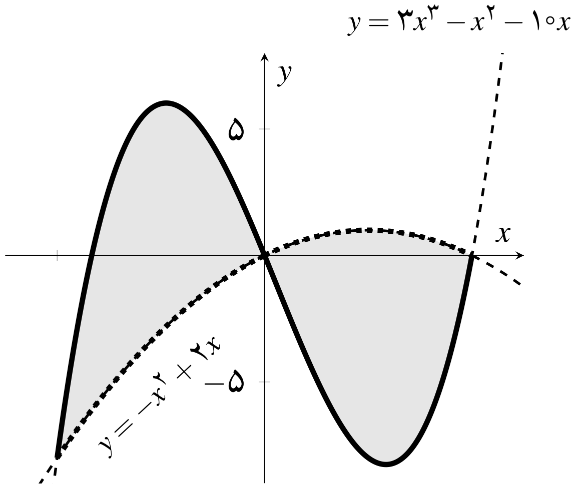
که در آن $\pi_{\circ}$، θ و ρ ثابت هستند. نشان دهید اگر $\theta < \rho$ آنگاه $V = \frac{\pi_{\circ}}{\rho-\theta}$.



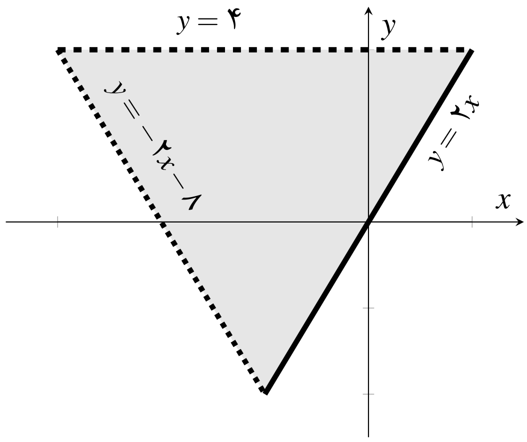
شکل ۲.۲



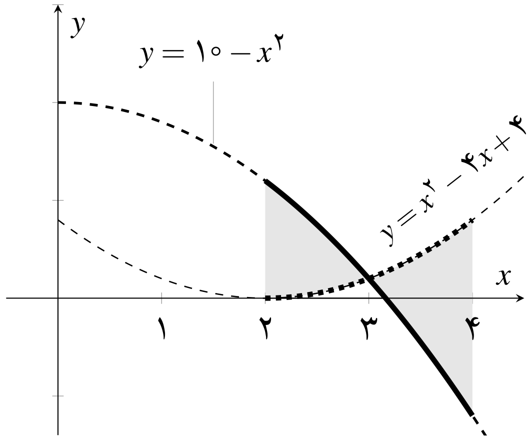
شکل ۳.۲



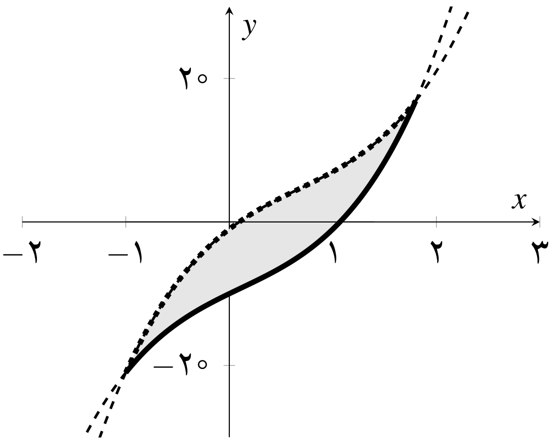
شکل ۴.۲



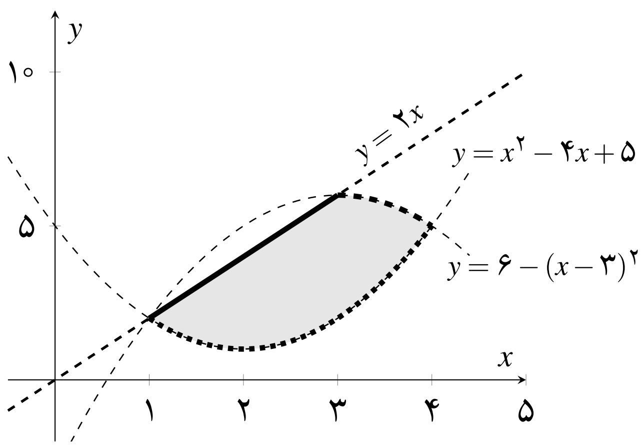
شکل ۵.۲



شکل ۶.۲

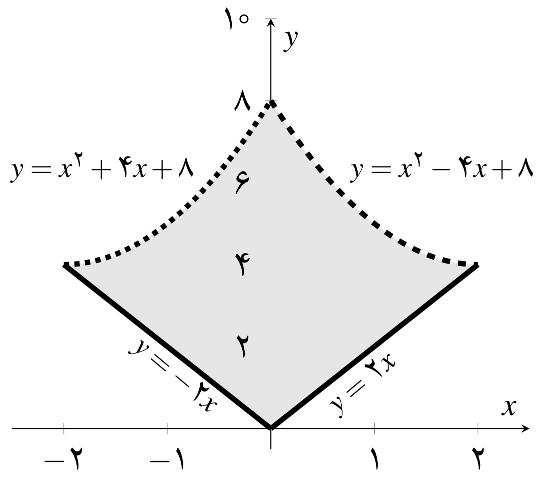


شکل ۷.۲: $y_۱ = ۳x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۱x - ۱$ ، $y_۲ = ۳x^{۳} - x^{۲} + ۷x - ۱۰$



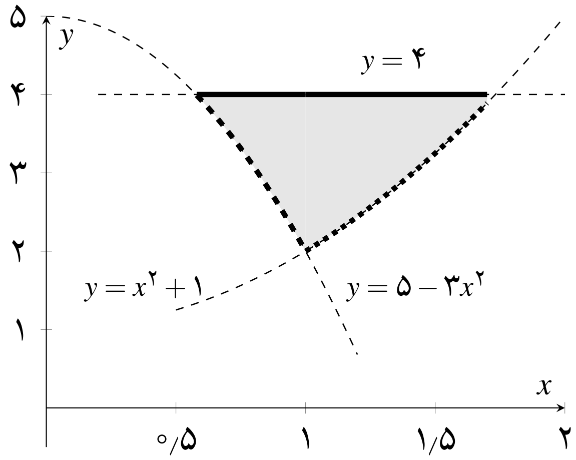
y
۱۰
۵
$y = ۲x$
$y = x^۲ - ۴x + ۵$
$y = ۶ - (x - ۳)^۲$
x
۱
۲
۳
۴
۵

شکل ۸.۲

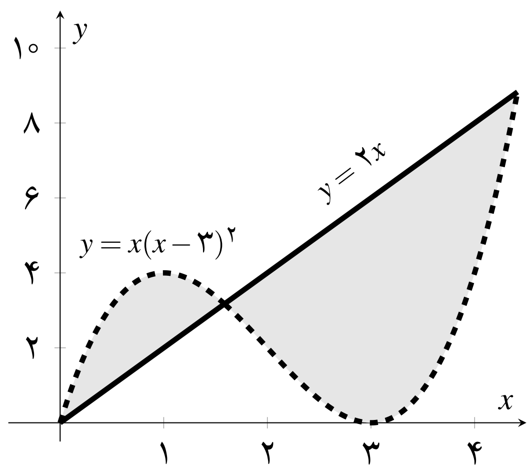


۱۰
y
۸
$y = x^۲ + ۴x + ۸$
$y = x^۲ - ۴x + ۸$
۶
۴
۲
$y = -۲x$
$y = ۲x$
x
-۲
-۱
۱
۲

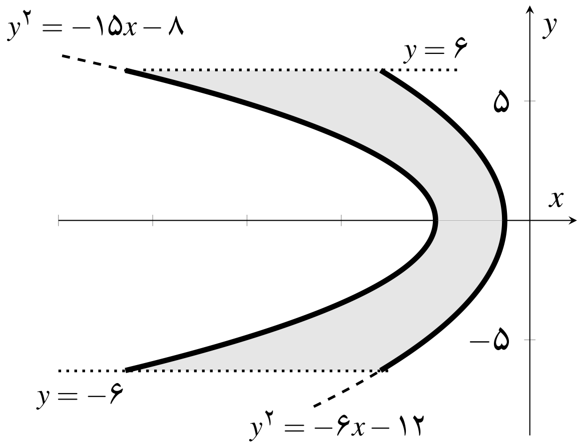
شکل ۹.۲



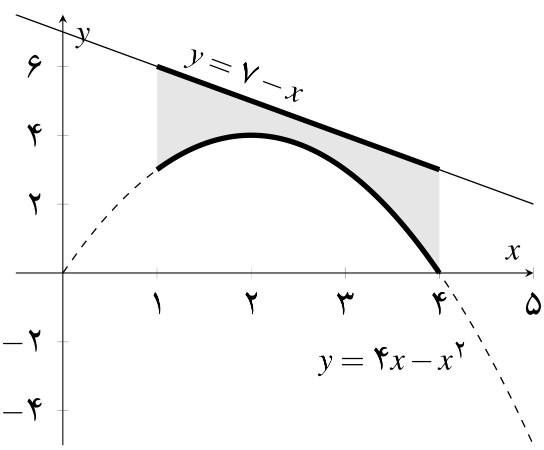
شکل ۲.۱۰



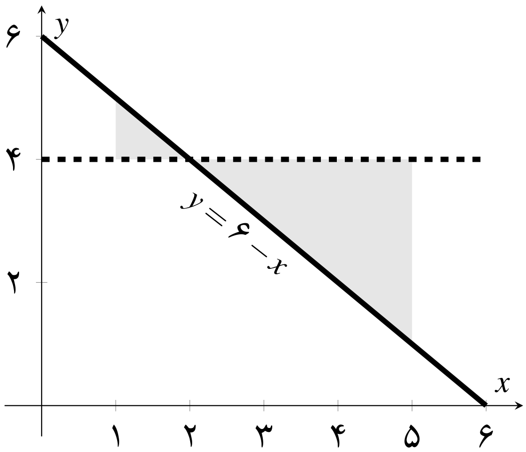
شکل ۲.۱۱



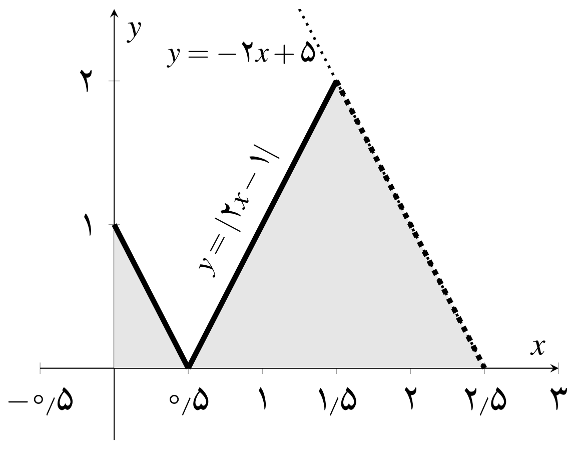
شکل ۱۲.۲



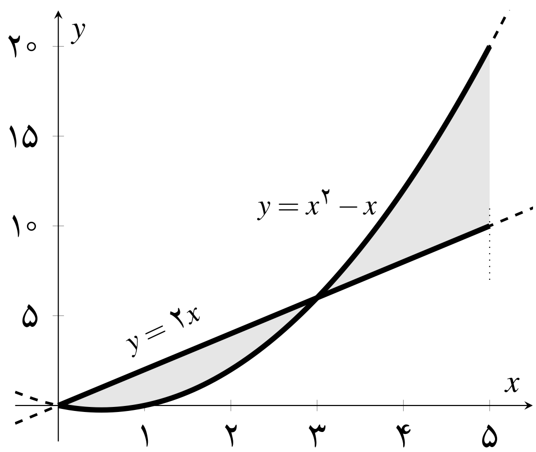
شکل ۱۳.۲



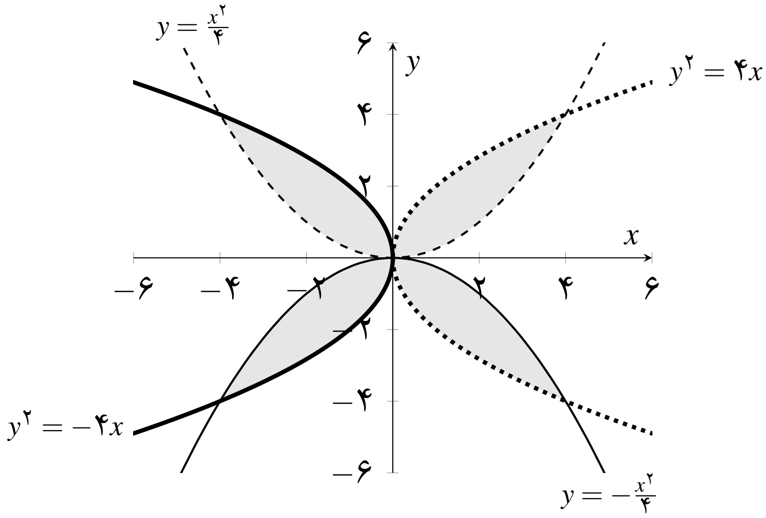
شکل ۱۴.۲



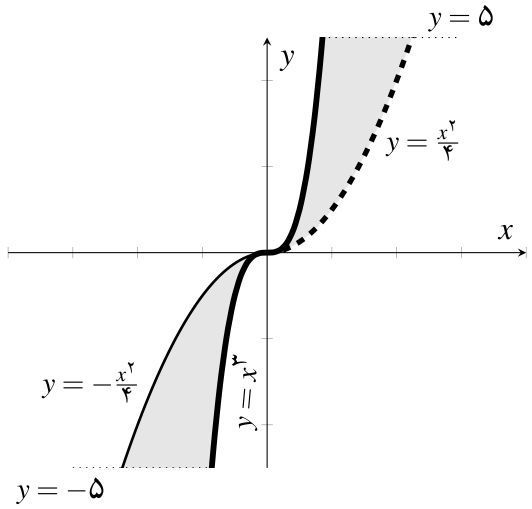
شکل ۱۵.۲



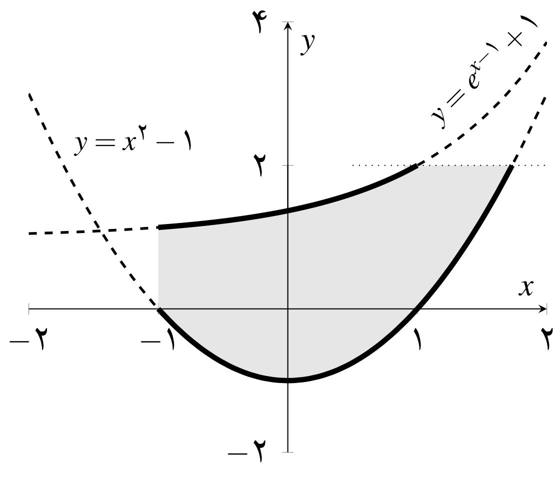
شکل ۱۶.۲



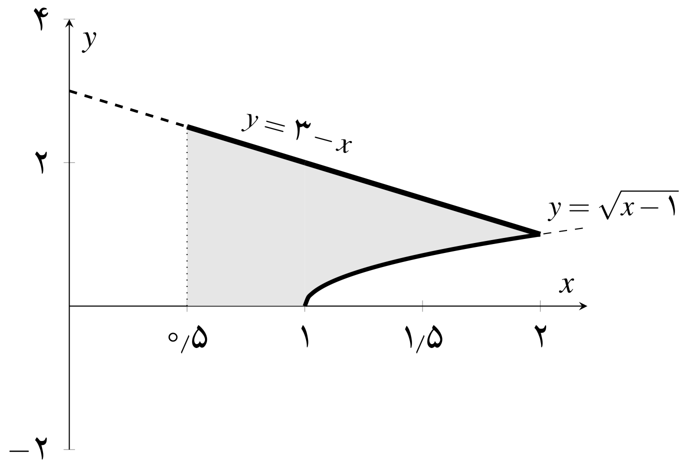
شکل ۱۷.۲



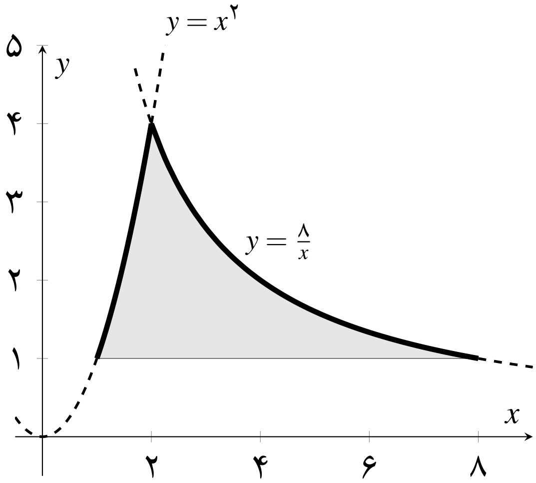
شکل ۱۸.۲



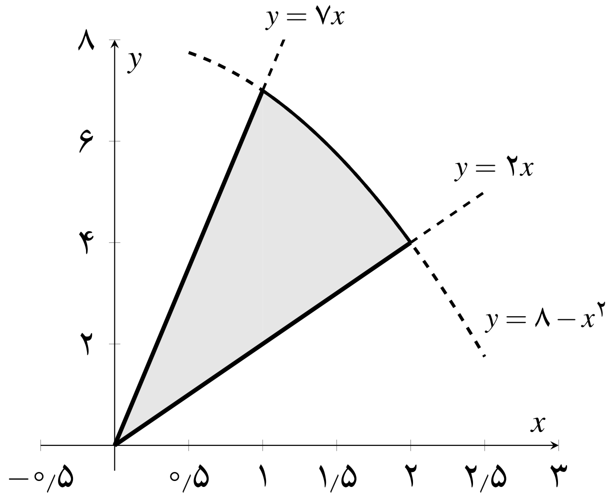
شکل ۱۹.۲



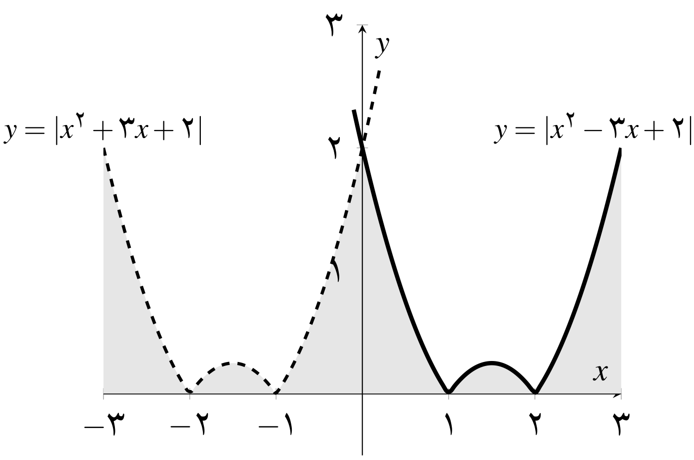
شکل ۲.۲۰



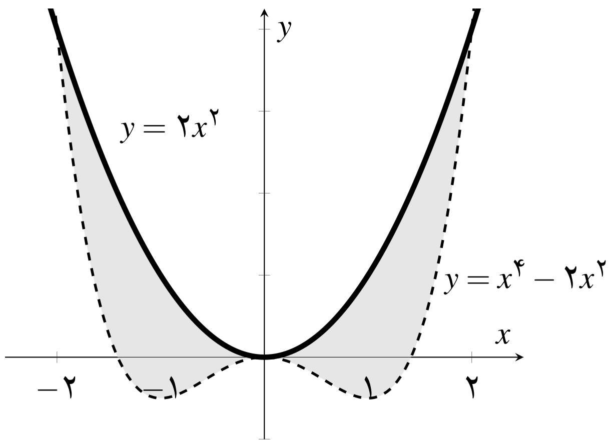
شکل ۲.۲۱



شکل ۲.۲۲



شکل ۲.۲۳



شکل ۲.۲۴

۱.۴.۲ جواب و راهنمایی ها

در هر کدام از تمرینات ۱ تا ۳۴ انتگرال داده شده را با A نام گذاری می کنیم. **۱.** با فرض $u=-x^{۲}$ انتگرال نامعیّن متناظر به صورت زیر درآمده و حل می شود:

$$\int -\frac{e^u}{۲}du = -\frac{۱}{۲}e^u + C = -\frac{۱}{۲}e^{-x^{۲}} + C.$$

بنابر این A با مقداردهی $-\frac{۱}{۲}e^{-x^{۲}}\Big|_{-۳}^{۳} = -\frac{۱}{۲}(e^{-۹}-e^{-۹}) = ۰$ بدست می آید. **۲.** انتگرال نامعیّن متناظر با A را از روش تفکیک در کسر حل می کنیم. با فرض $x \neq -۱$:

$$\int \frac{۲x-۱}{x+۱}\,dx = \int \frac{۲x+۲-۳}{x+۱}\,dx = \int \frac{(۲x+۲)-۳}{x+۱}\,dx = \int \frac{۲(x+۱)-۳}{x+۱}\,dx,$$

$$= \int \frac{۲(x+۱)}{x+۱}\,dx + \int \frac{-۳}{x+۱}\,dx = \int ۲dx - ۳\int \frac{dx}{x+۱},$$

$$= ۲x - ۳\ln|x+۱| + C.$$

و لذا $A = (۲x - ۳\ln|x+۱|)\Big|_{۱}^{۳} = ۴ - ۳\ln(۴) + \ln(۲)$. **۳.** انتگرال نامعیّن متناظر با A بکمک روش جزء به جزء حل می شود که در آن $u = t-۱$ و $dv = e^{۱-t}dt$. با انجام فرمول در روش، حاصل $-te^{۱-t}+C$ بدست آمده و مقدار A برابر است با

$$-te^{۱-t}\Big|_{۱}^{۲} = -۲e^{-۱} + e^{۰} = ۱ - ۲e^{-۱}.$$

۴. با انتخاب $x+a=t$ و در حالت $n \neq -۱$:

$$\int (x+a)^n dx = \int t^n dt = \frac{۱}{n+۱}t^{n+۱} + C = \frac{(x+a)^{n+۱}}{n+۱} + C.$$

اگر $n=-۱$ آنگاه $\int (x+a)^{-۱}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+a| + C$. لذا مقدار A در حالتی که $n \neq -۱$ برابر با $\frac{(۱+a)^{n+۱}}{n+۱} - \frac{a^{n+۱}}{n+۱}$, و وقتی $n=-۱$ برابر با

$$A = \ln|۱+a| - \ln|a|.$$

خواهد شد. **۶.** از روند آمده در مسئله ۲ استفاده کرده تا تابع اولیه $x - \ln(x+۲)$ بدست آید. **۷.** در این مسئله تابع $|x-۲|$ را با توجه به تعریف به صورت یک تابع دو ضابطه ای مینویسیم. تابع $|x-۲|$ با $x-۲$ یکسان است وقتی $x \geqslant ۲$ و با $-(x-۲)$ مساوی است،

هرگاه $x < ۲$. از طرفی بازهٔ $[-۱,۳]$ به صورت اجتماعی از دو ناحیهٔ $[-۱,۲]$ و $[۲,۳]$ نوشته می شود. بر ناحیهٔ اول، $x < ۲$ و لذا $|x-۲| = -(x-۲)$ و بر ناحیهٔ دوم $x \geqslant ۲$ و بنابر این $|x-۲| = (x-۲)$. از اینرو جداسازی زیر روی انتگرال اصلی صورت می گیرد:

$$A = \int_{-۱}^{۲} -(x-۲)dx + \int_{۲}^{۳} (x-۲)dx.$$

اکنون هر انتگرال به سادگی قابل حل است. **۸.** توجه کنید $\ln(\sqrt[۳]{x}) = \ln(x^{۱/۳}) = \frac{۱}{۳}\ln(x)$. حال انتگرال $\frac{۱}{۳}\int x\ln(x)dx$ را به روش جزء به جزء حل کنید. **۹.** با توجه به تعریف و همانند مسئله ۷ جدا سازی $\int_{-۲}^{۰} ۸(-x)dx + \int_{۰}^{۱} ۸xdx$ را انجام داده و مسئله را حل کنید. مقدار $A = ۲۰$ جواب است. **۱۰.** انتگرال نامعیّن متناظر را به کمک جزء به جزء حل کنید. **۱۱.** با انتخاب $u = x^۲ + ۲x$ تابع اولیهٔ حاصل برابر است با $\frac{۱}{۲}e^{x^۲+۲x}$ و بنابر این $A = \frac{۱}{۲}[e^{۱۵} - e^{۳}]$. **۱۲.** چون $\ln(e^x) = x$ پس $A = \int_{۱}^{۹۵} \frac{x}{x}dx = \int_{۱}^{۹۵} dx = ۹۴$. **۱۳.** انتگرال نامعیّن متناظر را به صورت مجموعی از دو انتگرال $\int \frac{x}{e^{۳x}}dx$ و $\int \frac{۲}{e^{۳x}}$ بازنویسی کنید. انتگرال اول به روش جزء به جزء و با انتخاب $u = x, dv = e^{-۳x}dx$ به حاصل $\frac{-۱}{۹}(۳x+۱)e^{-۳x} + C$ و انتگرال دوم با فرمول به شکل $-\frac{۲}{۳}e^{-۳x} + C$ حل می شود. جواب برابر است با:

$$A = \left(\frac{-۱}{۹} - \frac{۴}{۹}e^{-۳}\right) - \left(\frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳}e^{-۳}\right).$$

۱۴. انتخاب کنید $u = ۴ - ۵y$ و لذا $y = \frac{۴-u}{۵}$ و $du = -۵dy$ پس داریم:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{۴-۵y}} = \int \frac{(\frac{۴-u}{۵})(\frac{du}{-۵})}{\sqrt{u}} = \frac{-۱}{۲۵}\int \frac{۴-u}{\sqrt{u}}du$$

با تفکیک، به انتگرال $\frac{-۱}{۲۵}\left[\underbrace{\int \frac{۴}{\sqrt{u}}du}_{۴u^{-۱/۲}} - \underbrace{\frac{u}{\sqrt{u}}du}_{\sqrt{u}(u\neq ۰)}\right]$ رسیده و ادامه حل به صورت زیر است:

$$= \frac{-۱}{۲۵}\left(۸\sqrt{u} - \frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\right) + C = \frac{-۱}{۲۵}\left(۸\sqrt{۴-۵y} - \frac{۲}{۳}(۴-۵y)^{\frac{۳}{۲}}\right) + C.$$

حال از اینجا ادامه دهید. **۱۵.** اگر $u = x^۳ + ۳$ آنگاه بازای $x = ۴$، مقدار $u = ۱۹$ و به ازای $x = ۲$ مقدار $u = ۷$ بدست می آید. از اینرو

$$\int \frac{xdx}{x^۲+۳} = \frac{۱}{۲}\int \frac{du}{u} \to A = \frac{۱}{۲}\int_۷^{۱۹} \frac{du}{u} = \frac{۱}{۲}\ln|u|\Big|_۷^{۱۹} = \frac{۱}{۲}\ln(۱۹/۷).$$

۱۶. مانند مسئله قبلی حل کنید($u = x^۲ + ۱$). **۱۷.** انتگرال نامعیّن A را از روش جزء به جزء می رویم.

$$\int x^e \ln(x)dx \xrightarrow[x^e dx=dv]{u=\ln(x)}= \frac{xe^{\ln(x^e)}}{e+۱}\left(\ln(x) - \frac{۱}{e+۱}\right) + C.$$

۱۸. اگر $t = x^۲ + ۱$. آنگاه $x^۲ = t - ۱$ و چون $x^۶ = (x^۲)^۳$، لذا $x^۶ = (t-۱)^۳$. از طرفی $۲xdx = dt$ و با جایگذاری همه عبارات جدید بر حسب t به انتگرال $\int \left((t-۱)^۳\sqrt{t}\right)\frac{dt}{۲}$ می رسیم. داریم: اگر $x = ۰$ آنگاه $t = ۱$ و اگر $x = ۱$ آنگاه $t = ۲$ و بنابراین

$$A = \frac{۱}{۲}\int_۱^۲ \sqrt{t}(t-۱)^۳ dt,$$

که به سادگی با بسط توان سوم و ضرب $\sqrt{t}$ در تک تک جملات قابل حل است. مقدار A برابر است با $\frac{۱}{۳/۵}(۱۶ + ۲۶\sqrt{۲})$. **۱۹.** با کمک تغییر متغیر $t = ۲x^۲ - ۱$ داریم:

$$A = \frac{۱}{۱۶}\int_{-۱}^{۷} ۳^t dt = \frac{۱}{۱۶}\left(\frac{۱}{\ln ۳}۳^t\Big|_{-۱}^{۷}\right).$$

۲۰. بهترین راه، انتخاب $u = y - ۶$ و این نکته است که $dy = du$ و بنابر این:

$$A = \int_{-۳}^{۳} u^{۳۰۱}du = \frac{۱}{۳۰۲}u^{۳۰۲}\Big|_{-۳}^{۳} = ۰.$$

۲۱. با فرض $k = ۱ + e^{-x}$ ، $\int_۲^{۱+e^{-۱}} (dk/\sqrt{k})$ را حل کنید. **۲۲.** از روش جز به جزء حل می‌کنیم که در آن $u = x$ و $dv = e^{۱۲x}dx$. از جدول زیرهم می‌توان انتگرال نامعیّن را حل کرد:

مشتق مشتق

x	۱	۰
$e^{۱۲x}$	$\frac{e^{۱۲x}}{۱۲}$	$\frac{e^{۱۲x}}{(۱۲)^۲}$

انتگرال انتگرال

در سطر اول؛ تا به صفر برسیم مشتق گرفته و در سطر دوم، تا به زیر صفر سطر بالا برسیم انتگرال گرفته شده است (هر یک از جمله ماقبل خودش در همان سطر). اکنون به‌صورت زیر جملات را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|c|c} \boxed{x} & 1 & 0 \\ \hline e^{12x} & \boxed{e^{12x}/12} & e^{12x}/(12)^2 \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \dfrac{xe^{12x}}{12} & \dfrac{e^{12x}}{(12)^2} \end{array}$$

تابع اولیهٔ مورد نظر برابر است با مجموع جملهٔ اول (سمت چپ) یک در میان مثبت و منفی با جملات بعدی یعنی $+\left(x\times\frac{1}{12}e^{12x}\right)-\left(1\times\frac{1}{(12)^2}e^{12x}\right)$ ادامه حل را خودتان انجام دهید. **۲۷.** از روش مسئله قبل استفاده می‌کنیم. با توجه به جدول زیر

t^3	$3t^2$	$6t$	6	0
e^{2t}	$e^{2t}/2$	$e^{2t}/4$	$e^{2t}/8$	$e^{2t}/16$

تابع اولیهٔ مورد نظر برابر است با

$$\underbrace{+\left(t^3\times\frac{e^{2t}}{2}\right)-\left(3t^2\times\frac{e^{2t}}{4}\right)+\left(6t\times\frac{e^{2t}}{8}\right)-\left(6\times\frac{e^{2t}}{16}\right)}_{f(t)}.$$

اکنون مقادیر $t=0$ و $t=1$ را به نحوی که تعریف می‌گوید در $f(t)$ قرار داده و $f(1)-f(0)$ را بدست آورید. **۳۰.** با روش مسئله قبل مقدار A را بدست می آوریم. از جدول زیر:

x	1	0
$e^{-2x}+e^{-x}$	$\frac{-e^{-2x}}{2}-e^{-x}$	$(-0/5)^2e^{-2x}+e^{-x}$

حاصل انتگرال $\int x(e^{-2x}+e^{-x})dx$ برابر است با:

$$+\left(x(-\tfrac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x})\right)-\left(1\times(\tfrac{1}{4}e^{-2x}+e^{-x})\right)+C,$$

و بنابر این: $A = \frac{۱}{۴}(۵ - ۳e^{-۲} - ۸e^{-۱})$. **۳۳.** در این مسئله نکته‌ای وجود دارد.

> هرگاه تابع فرد[a] $f(x)$ بر ناحیه[b] $-a \leqslant x \leqslant a$ پیوسته باشد، آنگاه انتگرال معیّن آن بر این ناحیه صفر خواهد بود: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۰$.
>
> [a] تابع $f(x)$ یک تابع **فرد** است هرگاه اولاً $x \in D_f(x)$ آنگاه $-x \in D_f(x)$ و ثانیاً $f(-x) = -f(x)$.
>
> [b] که ناحیه‌ای متقارن است.

اگر قرار دهیم $f(x) = \frac{x^۵}{(x^۲+۱)^۳(x^۶+۴)^۳}$ ملاحظه می‌شود $D_f = \mathbb{R}$ و

$$f(-x) = \frac{-x^۵}{(x^۲+۱)^۳(x^۶+۴)^۳} = -f(x)$$

و لذا تابع در این مسئله فرد بوده و از اینرو حاصل انتگرال معیّن صفر است. **۳۴.** در این مسئله با توجه به عامل dt، متغیر انتگرال t است و بنابر این جملهٔ $x^{p+۱}(x^q + x)$ ثابت است:

$$\int_{۱۳}^{۱۵۱} x^{p+۱}(x^q + x)dt = x^{p+۱}(x^q + x) \times \underbrace{\int_{۱۳}^{۱۵۱} dt}_{۱۵۱-۱۳=۱۳۸} = ۱۳۸x^{p+۱}(x^q + x).$$

۳۵. یکی از انتگرال‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \int_{۱}^{۲} [۳f(x) - ۲g(x)]dx = ۳\int_{۱}^{۲} f(x)dx - ۲\int_{۱}^{۲} g(x)dx,$$

اما می‌دانیم $\int_{-۳}^{۲} f(x)dx = ۵$ و $\int_{-۳}^{۱} f(x)dx = ۰$ و چون

$$\underbrace{\int_{-۳}^{۲} f(x)dx}_{۵} = \underbrace{\int_{-۳}^{۱} f(x)dx}_{۰} + \int_{۱}^{۲} f(x)dx.$$

بنابراین $\int_{۱}^{۲} f(x)dx = ۰$. به همین صورت:

$$\underbrace{\int_{-۳}^{۲} g(x)dx}_{-۲} = \underbrace{\int_{-۳}^{۱} g(x)dx}_{۴} + \int_{۱}^{۲} g(x)dx.$$

و لذا $\int_{۱}^{۲} g(x)dx = -۶$. از این رو $A = ۳ \times ۰ - ۲(-۶) = +۱۲$. **۳۶.** یکی از انتگرال‌ها را حل می‌کنیم. توجه داریم یک بازه را می‌توانیم به اجتماعی از زیربازه‌ها تقسیم

کنیم:

$$\begin{array}{c} [\circ,\text{۱}] \quad \cup \quad [\text{۱},\text{۲}] \quad \cup \quad [\text{۲},\text{۳}] \end{array}$$

$$\int_{\circ}^{\text{۳}} f(x)dx = \int_{\circ}^{\text{۱}} f(x)dx \overset{\uparrow}{+} \int_{\text{۱}}^{\text{۲}} f(x)dx \overset{\uparrow}{+} \int_{\text{۲}}^{\text{۳}} f(x)dx,$$
$$= \int_{\circ}^{\text{۱}} \text{۲}dx + \int_{\text{۱}}^{\text{۲}} (\text{۴}-\text{۲}x)dx + \int_{\text{۲}}^{\text{۲}} (\text{۵}x-\text{۱۰})dx,$$

علت انتخاب ضابطه‌های مختلف واضح است.[۱۴] اکنون

$$\int_{\circ}^{\text{۳}} f(x)dx = \text{۲}x\Big|_{\circ}^{\text{۱}} + (\text{۴}x-x^{\text{۲}})\Big|_{\text{۱}}^{\text{۲}} + (\tfrac{\text{۵}}{\text{۲}}x^{\text{۲}}-\text{۱۰}x)\Big|_{\text{۲}}^{\text{۳}},$$
$$= \text{۲}(\text{۱}-\circ) + [(\text{۸}-\text{۴})-\text{۳}] + [(\tfrac{\text{۴۵}}{\text{۲}}-\text{۹۰})-(\text{۱۰}-\text{۲۰})] = \tfrac{\text{۶۳}}{\text{۲۶}}$$

برای $\int_{\circ}^{\text{۲}} g(x)dx$ آنرا در $x=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ به انتگرال‌های زیر بشکنید:

$$\int_{\circ}^{\text{۲}} g(x)dx = \int_{\circ}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \underbrace{g(x)}_{\text{۴}x^{\text{۲}}} dx + \int_{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}^{\circ} \underbrace{g(x)}_{\text{۲}x} dx = \tfrac{\text{۴۷}}{\text{۱۲}}.$$

۳۷. در **الف** تابع $f(x)=\text{۶}x^{\text{۵}}$ با دامنه تعریف $\mathbb{R}$، تابعی فرد است پس $\int_{-\text{۲}}^{\text{۲}} \text{۶}x^{\text{۵}}dx=\circ$ معادلاً، اگر بگیریم $x=-t$ آنگاه $x=\circ$ مقدار $t=\circ$ و $x=\text{۲}$ مقدار $t=-\text{۲}$ را نتیجه میدهد. ضمن اینکه $dx=-dt$ و $\text{۶}x^{\text{۵}}=-\text{۶}t^{\text{۵}}$ بدست می آیند. و لذا

$$\int_{\circ}^{\text{۲}} \text{۶}x^{\text{۵}}dx = \int_{\circ}^{-\text{۲}} (-\text{۶}t^{\text{۵}})(-dt) = \int_{\circ}^{-\text{۲}} \text{۶}t^{\text{۵}}dt = -\int_{-\text{۲}}^{\circ} \text{۶}t^{\text{۵}}dt$$

در تساوی آخر از این نکته کمک گرفتیم که $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ لذا داریم:

$$\int_{\circ}^{\text{۲}} \text{۶}x^{\text{۵}}dx = -\int_{-\text{۲}}^{\circ} \text{۶}x^{\text{۵}}dx \to \overbrace{\left(\int_{\circ}^{\text{۲}} + \int_{-\text{۲}}^{\circ}\right)}^{\int_{-\text{۲}}^{\text{۲}}} (\text{۶}x^{\text{۵}})dx = \circ.$$

که همان جواب قبلی تایید می‌گردد. برای **ب**: بعنوان یک نکته در بحث انتگرال معیّن ،اگر $f(x)$

[۱۴] روی ناحیه $\circ \leqslant x \leqslant \text{۱}$، $f(x)=\text{۲}$ و بنابراین در انتگرال $\int_{\circ}^{\text{۱}} f(x)dx$، ضابطه $f(x)$ را ۲ می‌گذاریم و الی آخر.

تابعی زوج بر ناحیه متقارن $-a \leqslant x \leqslant a$ باشد[۱۵] در این‌صورت مقدار $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ با دو برابر مقدار $\int_{\circ}^{a} f(x)dx$ یکسان است. چون $f(x) = x^{۴} + x^{۲}$ با دامنه تعریف $\mathbb{R}$ تابعی زوج است لذا $\int_{-۳}^{۳}(x^{۴}+x^{۲})dx = ۲\underbrace{\int_{\circ}^{۳}(x^{۴}+x^{۲})dx}_{۵۷/۶} = ۱۱۵/۲$. برای **ج**: در این انتگرال از تغییر متغیر $x = -t$ استفاده می‌کنیم:

$$x = ۱ \to t = -۱, x = ۲ \to t = -۲, dx = -dt, \tfrac{۴}{x} = \tfrac{۴}{-t}$$

و بنابراین $\int_{۱}^{۲} \tfrac{۴}{x}dx = \int_{-۱}^{-۲} \tfrac{-۴}{t}(-dt) = \int_{-۱}^{-۲} \tfrac{۴}{t}dt = -\int_{-۲}^{-۱} \tfrac{۴}{t}dt$, $= ۲$ و لذا

$$\int_{-۲}^{-۱} \tfrac{۴}{t}dt = -۲.$$

برای **د**، تابع داخل انتگرال فرد است و لذا $\int_{-۱}^{۱}(x^{۳}-x)dx = \circ$. **۳۸.**

$$A = \left(\tfrac{x^{۲}}{۲}\Big|_{۱}^{۳}\right)^{۳} - \tfrac{x^{۴}}{۴}\Big|_{۱}^{۳} = \left(\tfrac{۹}{۲} - \tfrac{۱}{۲}\right)^{۳} - \left[\tfrac{۸۱}{۴} - \tfrac{۱}{۴}\right] = ۴۴.$$

۳۹. با استفاده از تعریف: $f(x) = \tfrac{-۳}{t}\Big|_{۱}^{x} = \tfrac{-۳}{x} + ۳$ و لذا انتگرال خواسته شده برابر است با:

$$\int_{e}^{۱}(\tfrac{-۳}{x} + ۳)dx = (-۳\ln x + ۳x)\big|_{e}^{۱} = (\circ + ۳) - (-۳ + ۳e) = ۶ - ۳e.$$

۴۰. برای **الف**، نکته ۳۰۲ را به صورت زیر هم می‌توان تعمیم داد: اگر $u(x)$ و $v(x)$ دو تابع با شرایط مناسب باشند، در این‌صورت:

$$\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right]' = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

اکنون $v = t^{۲}$ و $u = \circ$ و لذا $\left[\int_{\circ}^{t^{۲}} x^{۲}dx\right]' = (t^{۲})^{۲} \times (t^{۲})' = t^{۴} \times ۲t = ۲t^{۵}$. برای

---

[۱۵] تابعی $f(x)$ روی یک بازه متقارن زوج است اگر تساوی $f(-x) = f(x)$ در آن بازه برقرار باشد.

ج با کمک رابطه فوق داریم:

$$\left[\int_{-t}^{t}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}\right]' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\right)(t)' - \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+(-t)^4}}_{\sqrt{1+t^4}}}\underbrace{(-t)'}_{-1} = \frac{2}{\sqrt{1+t^4}}.$$

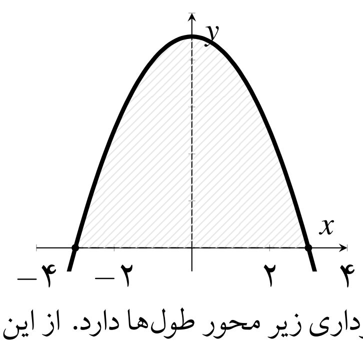
۴۱. از راهنمایی استفاده کرده و با مشتق گیری از طرفین داریم:

$$\underbrace{\left(\int_{3}^{x}\frac{2t-2}{t^2-1}dt\right)'}_{\frac{2x-2}{x^2-1}} = \underbrace{\left(\ln\left(\frac{2x}{3}-1\right)\right)'}_{\frac{2}{2x-3}}.$$

با طرفین و وسطین کردن عوامل دو طرف تساوی:

$$(2x-2)(2x-3)=2(x^2-1)\to \underbrace{2x^2-10x+8=0}_{x=4,\ x=1}.$$

۴۲. در **الف** تابع $f(x)=x^2+1$ روی ناحیه $0\leqslant x\leqslant 1$ کاملاً مثبت است و لذا مساحت A برابر است با $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{0}^{1}=\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$. برای **ب**، با توجه به محدوده داده شده، ناحیه مورد نظر به شکل زیر است:



نقاط تقاطع تابع را با محور طول‌ها بدست می‌آوریم: $9-x^2=y=0$ و لذا $x=\pm 3$. از این رو

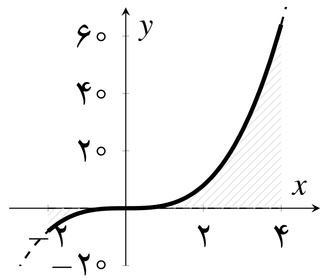
$$\text{مساحت } A=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx = 9x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{3}=36.$$

دربارهٔ **ج**، تابع $f(x)=x^3$ موقعی که $-2\leqslant x\leqslant 0$ نموداری زیر محور طول‌ها دارد. از این رو برای محاسبه مساحت مورد نظر مجبوریم ناحیه $-2\leqslant x\leqslant 4$ را به دو ناحیه $0\leqslant x\leqslant 4$ و $-2\leqslant x\leqslant 0$ جدا کرده و انتگرال‌گیری‌های زیر را جداگانه انجام داده و سپس جمع کنیم:

$$-2\leqslant x\leqslant 0 \text{ مساحت کل روی } = \left|\int_{-2}^{0}x^3dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}\right| = |-4| = 4.$$

$$\text{مساحت کل روی } ۰ \leqslant x \leqslant ۴ = \int_{۰}^{۴} x^{۳} dx = \frac{x^{۴}}{۴}\Big|_{۰}^{۴} = ۶۴ - ۰ = ۶۴.$$

و بنابراین مساحت مورد نظر برابر است با $۶۸ = ۴ + ۶۴$. نمودار زیر مساحت را نشان می‌دهد: دربارهٔ **و**: در مواردی که دو تابع f و g داده شده و اطلاعات دیگری نداریم تا محدوده



انتگرال‌گیری را بدست آوریم، روی نقاط تقاطع f و g فکر می‌کنیم:

$$f(x) = g(x) \rightarrow ۳x - ۶ = x^{۲} - ۴x \rightarrow \underbrace{x^{۲} - ۷x + ۶ = ۰}_{x=۱,\ x=۶}.$$

لذا محدوده انتگرال‌گیری $۶ \leqslant x \leqslant ۱$ است. چون دو تابع f و g هر دو پیوسته هستند (چند جمله‌ای‌ها در همه ناحیه‌ها پیوسته‌اند)، یک نقطه دلخواه در بازه بالا انتخاب کرده و در دو تابع جایگزین می‌کنیم. مثلاً $۶ \leqslant ۲ = x \leqslant ۱$:

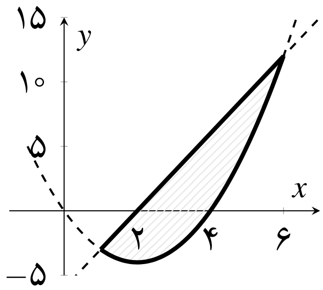
$$f(۲) = ۴ - ۸ = -۴ \mid g(۲) = ۳(۲) - ۶ = ۰.$$

چون $f(۲) = -۴ < ۰ = g(۲)$. پس نتیجه می‌گیریم نمودار g بالاتر از نمودار f روی ناحیه $۶ \leqslant x \leqslant ۱$ رسم می‌شود. بنابراین در انتگرال معیّن، اولین جمله $g(x)$ (تابع بالایی)و بعدی ضابطه تابع $f(x)$ (تابع پایینی)است:

$$A = \int_{۱}^{۶} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{۱}^{۶} \underbrace{\Big[(۳x - ۶) - (x^{۲} - ۴x)\Big]}_{-x^{۲}+۷x-۶} dx$$

$$= \left(\frac{-x^{۳}}{۳} + \frac{۷x^{۲}}{۲} - ۶x\right)\Big|_{۱}^{۶} = \frac{۱۲۵}{۶}.$$

شکل زیر مساحت را نشان می‌دهد. برای **ز** به این نکته توجه کنید که $x^{۳} - ۷x - ۶ = ۰$ بر



($x+۱$) قابل تقسیم است. راهنمایی دیگر: سه نقطه تقاطع وجود دارد که طول آن‌ها عبارتند از $x=-۱$ و $x=-۲$ و $x=۳$. مقدار مساحت کلی در این مسئله برابر است با $\frac{۱۳۱}{۴}$. **۴۳.** برای **الف**، مقدار $۰ \leqslant x = a \leqslant ۴$ در نظر گرفته و دو انتگرال زیر را بدست می‌آوریم:

$$A = \int_۰^۴ x^۲ dx, \qquad B = \int_۰^a x^۲ dx.$$

A مساحت کلی و B مساحتی را نشان می‌دهد که دقیقاً روی $۰ \leqslant x \leqslant a$ به مقدار نصف A مساحت بدست آمده است. لذا باید $A = ۲B$ را در نظر بگیریم:

$$۲B = A \to ۲\int_۰^a x^۲dx = \int_۰^۴ x^۲dx \to \frac{۲}{۳}a^۳ = \frac{۶۴}{۳} \to a^۳ = ۳۲.$$

و بنابر این $a = \sqrt[۳]{۳۲}$ عدد مورد نظر بین ۰ و ۴ است. برای قسمت بعدی اولاً دقت داشته باشید که انتگرال‌های A و B را بدرستی تشکیل داده و هر کدام را با روش تغییر متغیر حل کنید[۱۶] ($a = \frac{۱۱۵}{۱۷}$). **۴۵.** برای شکل ۲۰۲، چون با توجه به فرمول، ضابطه دو تابع روی دو ناحیه $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ و $۱ \leqslant x \leqslant ۲$ عوض می‌شوند لذا

$$\text{مساحت کل} = \int_۰^۱ [(x-۱)^۳ - (x-۱)]dx + \int_۱^۲ [(x-۱) - (x-۱)^۳]dx$$

در شکل ۳۰۲ ابتدا محل برخورد دو تابع را بدست می‌آوریم:

$$-x+۳ = \frac{۱}{x} \xrightarrow{x\neq ۰} -x^۲+۳x-۱ = ۰ \to x_۱ = \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲},\ x_۲ = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}.$$

چون $x_۲ > x_۱$ پس مساحت کل با حل انتگرال معین $\int_{x_۱}^{x_۲}[(-x+۳) - x^{-۱}]dx$ محاسبه

[۱۶] به عنوان یک نکته: $(n \neq ۱)$ $\quad \int \frac{dx}{(x+a)^n} = \frac{(x+a)^{-n+۱}}{-n+۱} + C.$

می شود. در شکل ۲ ۰ ۴، همانند حالت ۲ ۰ ۲، ناحیه دو قسمت می‌شود:

$$\text{مساحت کل} = \int_{-۲}^{۰}[(۳x^۳ - x^۲ - ۱۰x) - (۲x - x^۲)]dx + \int_{۰}^{۲}[(۲x - x^۲) - (۳x^۳ - x^۲ - ۱۰x)]dx.$$

برای شکل ۲ ۰ ۵، سه خط داریم که تلاقی دارند. ابتدا محل تلاقی را بدست می‌آوریم:

$$-۲x - ۸ = ۴ \to x = -۶, ۲x = ۴ \to x = ۲, -۲x - ۸ = ۲x \to x = -۲$$

با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم وقتی $-۶ \leqslant x \leqslant -۲$ ضابطه تابع $y = ۴$ در بالا و $y = -۲x - ۸$ در پایین است. به همین صورت روی $-۲ \leqslant x \leqslant ۲$ ضابطه $y = ۴$ مجدداً در بالا و $y = ۲x$ در پایین قرار دارد. لذا ناحیه را به دو قسمت جدا کرده و مانند ۲ ۰ ۲ انتگرال‌ها را می‌سازیم:

$$\text{مساحت کل} = \int_{-۶}^{-۲}[۴ - (-۲x - ۸)]dx + \int_{-۲}^{۲}[۴ - (۲x)]dx.$$

در شکل ۲ ۰ ۶، واضح است که روی $۲ \leqslant x \leqslant ۳$، تابع $y = ۱۰ - x^۲$ در بالا و $y = x^۲ - ۴x + ۴$ در پایین و روی $۳ \leqslant x \leqslant ۴$ این ترتیب برعکس است و لذا

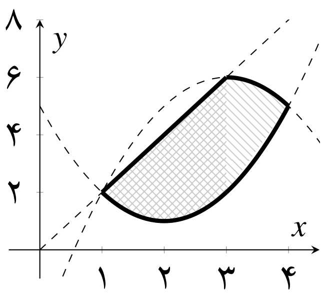
$$\text{مساحت کل} = \int_{۲}^{۳}[(۱۰ - x^۲) - (x^۲ - ۴x + ۴)]dx + \int_{۲}^{۴}[(x^۲ - ۴x + ۴) - (۱۰ - x^۲)]dx.$$

در شکل ۲ ۰ ۷، بسادگی می‌توان تشخیص داد ضابطه کدام بالاتر است، چون دو تابع چندجمله‌ای و لذا پیوسته‌اند یک مقدار بین دو نقطه تقاطع (که می‌تواند $x = ۰$ باشد) در دو تابع جایگذاری می‌کنیم: $y_۱(۰) = -۱ > -۱۰ = y_۲(۰)$ و بنابراین تابع $y_۱$ نموداری بالاتر از $y_۲$ دارد. برای یافتن ناحیه انتگرال‌گیری $y_۱ = y_۲$ را حل می‌کنیم:

$$y_۱ = y_۲ \to ۵x^۲ - ۴x - ۹ = ۰ \to x = \frac{۹}{۵}, \ -۱$$

و لذا مساحت کل با حل $\int_{-۱}^{\frac{۹}{۵}}[y_۱ - y_۲]dx$ بدست می آید. در شکل ۲ ۰ ۸ مطابق زیر جداسازی ناحیه انجام می‌دهیم. توجه کنید طول نقاط برخورد را براحتی می‌توان از روی شکل

خواند: لذا مساحت برابر است با:



$$\int_{۱}^{۴}[\underbrace{۲x}_{\text{بالا}}-\underbrace{(۶-(x-۳)^{۲})}_{\text{پایین}}]dx+\int_{۳}^{۴}[\underbrace{(x^{۲}-۴x+۵)}_{\text{بالا}}-\underbrace{(۶-(x-۳)^{۲})}_{\text{پایین}}]dx.$$

برای شکل ۲ ۱۰ ۰ از فرمول دیگری که برای مساحت محصور آمده استفاده می‌کنیم. ملاحظه می‌شود اگر ناحیه ساخته شده را روی محور y در نظر بگیریم آنگاه $۲ \leqslant y \leqslant ۴$ و منحنی $y=x^{۲}+۱$ سمت راست و منحنی $y=۵-۳x$ در سمت چپ واقع است. چون ناحیه روی محور y است در این حالت

$$y=x^{۲}+۱\rightarrow x^{۲}=y-۱\rightarrow x=\pm\sqrt{y-۱}\xrightarrow{x>۰}x=\sqrt{y-۱}$$
$$y=۵-۳x^{۲}\rightarrow x^{۲}=\frac{۵-y}{۳}\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۵-y}{۳}}\xrightarrow{x>۰}x=\sqrt{\frac{۵-y}{۳}}$$

x سمت چپ $x=\sqrt{\frac{۵-y}{۳}}$ و x سمت راست $x=\sqrt{y-۱}$ است و بنابراین

$$\text{مساحت کل}=\int_{۲}^{۴}\left(\sqrt{y-۱}-\sqrt{\frac{۵-y}{۳}}\right)dy=\frac{۲۰}{۹}\sqrt{۳}-\frac{۸}{۳}.$$

(انتگرال نامعیّن را با روش تغییر متغیر قابل حل کنید).

در شکل ۲ ۱۱ ۰ واضح است که باید طول نقاط تقاطع دو منحنی را بدست آوریم:

$$x(x-۳)^{۲}=۲x\rightarrow x_{۱}=۰ \text{ یا } x_{۲}=۳-\sqrt{۲},\ x_{۳}=۳+\sqrt{۲}$$

و بنابراین

$$\text{مساحت کل}=\int_{۰}^{x_{۲}}[x(x-۳)^{۲}-۲x]dx+\int_{x_{۲}}^{x_{۳}}[۲x-x(x-۳)^{۲}]dx.$$

در شکل ۲۰۱۲ از تقارن استفاده کنید. بعلاوه ناحیه را ساخته شده روی محور y ببینید تا ناحیه تغییرات $۰ \leqslant y \leqslant ۶$ بدست آید. برای شکل ۲۰۱۵ چون مساحت در بالای محور xها ساخته شده است پس مساحت خالص همان مساحت کل بوده و داریم:

$$A = \int_{۰}^{۰/۵} [-(۲x-۱)]dx + \int_{۰/۵}^{۱/۵} [+(۲x-۱)]dx + \int_{۱/۵}^{۲/۵} (۵-۲x)dx.$$

دقت کنید با توجه به تعریف قدر مطلق، تابع $y = |۲x-۱|$ در اطراف $x = \frac{۱}{۲}$ ضابطه عوض می‌کند. در واقع وقتی $۰ \leqslant x \leqslant \frac{۱}{۲}$ آنگاه $y = |۲x-۱| = -(۲x-۱)$ و اگر $\frac{۱}{۲} < x < \frac{۳}{۲}$ آنگاه $y = |۲x-۱| = +(۲x-۱)$. و به همین دلیل دو انتگرال اول با توجه به اطراف $x = \frac{۱}{۲}$ تفکیک شده‌اند. برای شکل ۲۰۱۷ از تقارن موجود در شکل استفاده و لذا کافی است تنها مساحت واقع در ربع اول را بدست آورید. از اینرو مساحت کل مورد نظر برابر است با $۴\int_{۰}^{۴}(\sqrt{۴x}-\frac{x^{۲}}{۴})dx = \frac{۶۴}{۳}$. درباره شکل ۲۰۱۸ هم از تقارن کمک گرفته و مساحت واقع در ربع اول را محاسبه و دو برابر کنید: $۲\int_{y=۰}^{y=۵}(\underbrace{۲\sqrt{y}}_{\text{سمت راست}} - \underbrace{\sqrt[۳]{y}}_{\text{سمت چپ}})dy$.

برای شکل ۲۰۲۰ ناحیه کلی را به دو ناحیه در اطراف $x = ۱$ تقسیم می‌کنیم. روی

$$۰/۵ \leqslant x \leqslant ۱$$

تابع $y = ۳-x$ در بالا $y = ۰$ در پایین (که در واقع همان مساحت زیر منحنی $y = ۳-x$ روی $۰/۵ \leqslant x \leqslant ۱$ است) و روی $۱ \leqslant x \leqslant ۲$ تابع $y = ۳-x$ در بالا و $y = \sqrt{x-۱}$ محدوده پایینی مساحت دیگری بدست می‌آید:

$$\text{مساحت کل} = \underbrace{\int_{۰/۵}^{x=۱}(۳-x)dx}_{۹/۸} + \underbrace{\int_{x=۱}^{x=۲}[(۳-x)-\sqrt{x-۱}]dx}_{۵/۶}.$$

برای شکل ۲۰۲۳ از تقارن موجود دو شکل استفاده کنید. این نکته مهم است که روی

$$۱ \leqslant x \leqslant ۲$$

داریم: $y = |x^{۲}-۳x+۲| = -(x^{۲}-۳x+۲)$. **۴۶.** جواب به این بستگی دارد که روی $I = ۰ \leqslant x \leqslant ۲$ کدام تابع همواره مثبت است. هر سه تابع از انواع چندجمله‌ای و لذا

روی I همگی پیوسته‌اند. اگر $۱ = x \leqslant ۲$ مقدار $g(x) = -۱$ بدست می‌آید. این نشان می‌دهد g تابعی همیشه مثبت روی $۰ \leqslant x \leqslant ۲$ نیست. شبیه این حالت برای $h(x)$ وجود دارد $h(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$ که عدد منفی است. از طرفی روی I، $x^۲ \geqslant ۰$ و لذا $x^۲ + ۱ \geqslant ۱ > ۰$ و بنابر این $f(x) > ۰$. و بنابراین جواب مسئله فقط تابع $f(x)$ است. **۴۷.** برای **الف**، ملاحظه می‌کنیم $x = ۱$ و $x = ۲$ جواب $y = -x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$ است. چون $y = ۰$ ریشه‌ای بغیر از $x = ۱$ و $x = ۲$ ندارد (از راه $\Delta = b^۲ - ۴ac$ معادله را حل کنید) پس یا نمودار f در بالای محور x قرار می‌گیرد یا تماماً در زیر محور xها. در غیر این‌صورت نمودار f باید مجدداً محور xها را قطع کند که امکان ندارد. اگر $۱ \leqslant x = \frac{۳}{۲} \leqslant ۲$. را در تابع جایگزین کنیم داریم:

$$y(\tfrac{۳}{۲}) = -(\tfrac{۳}{۲})^۲ + ۳(\tfrac{۳}{۲}) - ۲ = \tfrac{۱}{۴} > ۰$$

از این رو تابع در بالای محور xها قرار گرفته و

$$\text{مساحت کل} = \int_۱^۲ ydx = \left(\frac{-x^۳}{۳} + \frac{۳x^۲}{۲} - ۲x\right)\Big|_۱^۲ = \frac{۱}{۶}.$$

برای **ب**، چون $۱ \leqslant x \leqslant ۳$, $۰ < ۱$ و $e^{x^۲}$ تابعی همواره مثبت است پس روی

$$۱ \leqslant x \leqslant ۳$$

$f(x) = xe^{x^۲} > ۰$ و از این رو کافی است انتگرال زیر را حل کنیم:

$$\int_۱^۳ xe^{x^۲}dx = ۰/۵e^{x^۲}\Big|_۱^۳ = ۰/۵(e^۹ - e^۱).$$

۴۸. برای **الف**، نقاط تقاطع $y = x^۲$ و $y = x + ۲$ در دو نقطه با طولهای $x = -۱$ و $x = ۲$ اتفاق می‌افتد. چون یکی از نقاط در بازه $۱ \leqslant x \leqslant ۲$ قرار دارد، برای اینکه بفهمیم روی این ناحیه کدام تابع بالاتر و کدام پایین‌تر است، یک مقدار به دو تابع می‌دهیم:

$$۱ \leqslant x = \tfrac{۳}{۲} \leqslant ۲ \rightarrow \underbrace{\left(\tfrac{۳}{۲}\right)^۲}_{\text{جایگذاری در تابع } y=x^۲} = \tfrac{۹}{۴} < \tfrac{۳۵}{۱۰} = \underbrace{\tfrac{۳}{۲} + ۲}_{\text{جایگذاری در تابع } y=x+۲}$$

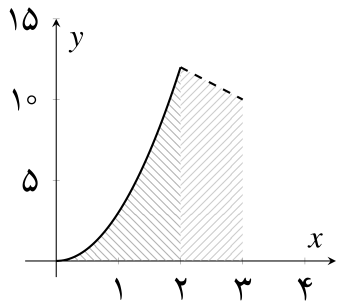
بنابراین روی $۱ \leqslant x \leqslant ۲$، تابع $x^۲$ از تابع $x + ۲$ نموداری پایین‌تری دارد و لذا:

$$\text{مساحت محصور} = \int_۱^۲ (x + ۲ - x^۲)dx = \frac{۷}{۶}.$$

برای موارد **ب**، **ج**، **د** و **و** ابتدا نقاط تقاطع را یافته و با روشی که در چند مسئله قبل آوردیم، تابع بالاتر و پایین‌تر را شناخته و مساحت محصور را بدست آورید، مثلاً در مورد و: $x^{۳}-۱ = x-۱ \to x^{۳} = x \to x = ۰, x = ۱, x = -۱$ اگر $۰ \leqslant x = \frac{۱}{۲} \leqslant ۱$ آنگاه $(\frac{۱}{۲})^{۳}-۱ = \frac{-۷}{۸} < \frac{-۱}{۲} = \frac{۱}{۲}-۱$ و لذا یک قسمت مساحت از انتگرال زیر بدست می‌آید:

$$\int_{۰}^{۱}[(x-۱)-(x^{۳}-۱)]dx.$$

برای حالت بعدی همین کار را به ازای $-۱ \leqslant x = \frac{-۱}{۲} \leqslant ۰$ تکرار کنید. **۴۹.** نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم: ملاحظه می‌شود تابع کاملاً بالای محور xها رسم شده و دو ناحیه متصل



بهم کل مساحت مورد نظر را ساخته اند:

$$\text{مساحت کل} = \underbrace{\int_{۰}^{۲}(۳x^{۲})dx}_{\underbrace{x^{۳}\big|_{۰}^{۲}}_{۸}} + \underbrace{\int_{۲}^{x=۳}(۱۶-۲x)dx}_{\underbrace{(۱۶x-x^{۲})\big|_{۲}^{۳}}_{۱۱}} = ۱۹.$$

۵۰. برای **الف**، مساحت برابر است با $\int_{y=-۱}^{y=۳}(۸+۲y)dy$ برای **ب** دو منحنی را قطع داده و همانند مثال‌های اخیر قبلی حل کنید. برای **ج** دو منحنی $x = ۵+y$ و $x = -۲-y^{۲}$ روی ناحیه $-۱ \leqslant y \leqslant ۰$ داده شده‌اند. اگر $y = ۰$ را در دو رابطه قرار دهیم

$$۵+۰ = ۵ > -۲ = -۲-۰^{۲}$$

و لذا مساحت برابر است با $\int_{-۱}^{۱}[(۵+y)-(-۲-y^{۲})]dy = (\frac{y^{۳}}{۳}+\frac{y^{۲}}{۲}+۷y)\big|_{-۱}^{۱} = \frac{۴۴}{۳}$.

برای **و** کافی است انتگرال $\int_{\circ}^{۱} f(x)dx$ را بدست آوریم. برای **ط** مساحت با $\int_{\circ}^{۹}\sqrt{y}dy$ بدست می‌آید. برای **ل**، طول نقطهٔ تقاطع با حل $۴ - x = x^{۲} - ۵x + ۸$ بدست می آید که عبارت است از $x = ۲$. چون به ازای $x = ۱$، نمودار سهمی بالاتر از نمودار خط رسم می‌شود لذا مساحت کل برابر است با

$$\int_{\circ}^{۲} \underbrace{[(x^{۲} - ۵x + ۸) - (۴ - x)]}_{x^{۲}-۴x+۳} dx = (\tfrac{x^{۳}}{۳} - ۲x^{۲} + ۴x)\Big|_{\circ}^{۲} = \frac{۸}{۳} - ۸ + ۸ = \frac{۸}{۳}.$$

۵۱. چون یکی از حدود $\int_{۱}^{\infty} x^{۲}dx$ از نوع ∞ بوده و تابع یک تابع چند جمله ای است لذا این انتگرال غیر عادی نوع اول است. توجه داریم در این انتگرال و روی ناحیه $۱ \leqslant x < \infty$ برای تابع $f(x) = x^{۲}$ هیچ حالت بی‌کرانه گی اتفاق نمی‌افتد. انتگرال دوم، $\int_{-۱}^{۳} \frac{dx}{x^{۲}}$، غیرعادی و از نوع دوم است چون $\lim_{x\to \circ} \frac{۱}{x^{۲}} = \infty$ و $-۱ \leqslant x = \circ \leqslant ۳$. انتگرال دیگر غیرعادی نیست. **۵۲.**

۵۳. $\int_{\circ}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_{\circ}^{t} = \lim_{t\to\infty}(-e^{-t} + e^{\circ}) = ۱$.

$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{۲x-۱}} = \frac{۱}{۲}\int_{\frac{۱}{۲}}^{\infty} \frac{d(۲x)}{\sqrt{۲x-۱}} = \frac{۱}{۲}\int_{\frac{۱}{۲}}^{\infty} \frac{d(۲x-۱)}{\sqrt{۲x-۱}}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\sqrt{۲x-۱}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{t}\right] = \lim_{t\to\infty}(\sqrt{۲t-۱} - \circ) = \infty.$$

۵۵.

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = ۲\int_{۱}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}}dx = ۲\int_{۱}^{\infty} e^{\sqrt{x}}d(\sqrt{x})$$
$$= ۲\lim_{t\to\infty}\left[e^{\sqrt{x}}\Big|_{۱}^{t}\right] = ۲\lim_{t\to\infty}\left[e^{\sqrt{t}} - e^{۱}\right] = \infty.$$

۵۷. در این انتگرال، یک جداسازی مناسب مثلاً در نقطه $x = \circ$ انجام می دهیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{۲}e^{-x^{۳}}dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\circ} x^{۲}e^{-x^{۳}}dx}_{I} + \underbrace{\int_{\circ}^{\infty} x^{۲}e^{-x^{۳}}dx}_{II},$$

اکنون هر کدام از انتگرالها را محاسبه و نهایتاً روی مجموع آنها تصمیم می گیریم.

$$I: \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^3} dx = \frac{-1}{3}\int_{-\infty}^{0} -3x^2 e^{-x^3} dx = \frac{-1}{3}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^3} d(-x^3)$$
$$= -\frac{1}{3}\lim_{t\to-\infty}\left[e^{-x^3}\Big|_t^0\right] = -\frac{1}{3}\lim_{t\to-\infty}\left[e^0 - e^{-t}\right] = \infty.$$
$$II: \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\left[e^{-x^3}\Big|_0^t\right] = -\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\left[e^{-t} - 1\right] = 0,$$
$$\int_0^{\infty}(5 + e^{-x})dx = \lim_{t\to\infty}\left[(5x - e^{-x})\Big|_0^t\right] = \lim_{t\to\infty}(5t - e^{-t} + 1) = \infty.$$

و بنابراین در کل، انتگرال غیرعادی واگراست. **۶۰.** انتگرال را به کمک جزء به جزء (حتماً به بخش مورد نظر رجوع کنید) حل می‌کنیم. تابع اولیهٔ $(1 - x)e^{-x} - e^{-x}$ بدست می آید. بنابراین:

$$\int_0^{\infty}(x-1)e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-xe^{-x}\Big|_0^t\right] = \lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0.$$

و لذا این انتگرال همگراست. **۶۱.** برای حل انتگرال نامعین متناظر، انتخاب کنید $t = 2x - 1$. **۶۳.** با انتخاب $t = 2x - 1$، این انتگرال به $\frac{1}{10}$ همگراست. **۶۴.** برای حل انتگرال نامعین متناظر، انتخاب کنید $t = x^3 + 2$ این انتگرال واگراست. **۶۵.** برای این انتگرال مثل مسئله ۵۷ عمل کنید. این انتگرال همگرا به ۰ است. توجه کنید، تابع داخل انتگرال فرد است. **۶۷.** برای حل انتگرال نامعین متناظر، انتخاب کنید $t = e^x$ این انتگرال واگراست. **۶۸.** از این نکته استفاده کنید که مشتق $\ln x$ در تابع داخل انتگرال وجود دارد. این انتگرال واگراست. **۷۱.** برای حل انتگرال نامعین متناظر، از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$u = \ln x, dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \longrightarrow du = \frac{1}{x}dx, v = 2\sqrt{x},$$

و لذا با توجه به فرمول

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

از این رو $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right]_1^t = \infty$ و این یعنی انتگرال واگراست.

۷۵. چون
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^۲+۹)^۳}} = \frac{۱}{۲}\int \frac{۲xdx}{\sqrt{(x^۲+۹)^۳}} = \frac{۱}{۲}\int \frac{d(x^۲+۹)}{\sqrt{(x^۲+۹)^۳}},$$
پس با انتخاب $t = x^۲ + ۹$ داریم:
$$\int_۲^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(x^۲+۹)^۳}} = \int_{۱۳}^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^۳}} = \lim_{k\to\infty}\left[-۲t^{-\frac{۱}{۲}}\right]_{۱۳}^k = ۰ + \frac{۱}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۳}}.$$
و لذا این انتگرال همگراست. **۷۲.** با کمک روش کسرهای جزئی (و یا فرمول مربوطه)، تابع اولیهٔ حاصل انتگرال نامعیّن برابر $x - ۳\ln(x+۲)$ بدست می آید. این انتگرال واگراست.
۷۸. برای حل انتگرال از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:
$$\int xe^{-ax}dx = \left(\frac{-x}{a}e^{-ax} - \frac{۱}{a^۲}e^{-ax}\right) + C,$$
و لذا جواب برابر است با
$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{-x}{a}e^{-ax} - \frac{۱}{a^۲}e^{-ax}\right]_۰^t = \lim_{t\to\infty}\left[\left(\frac{-t}{a}e^{-at} - \frac{۱}{a^۲}e^{-at}\right) + \frac{۱}{a^۲}\right] = \frac{۱}{a^۲}.$$
توجه داریم که با کمک فرض مسئله، حد جمله اول برابر با صفر است. حد جمله دوم نیز وقتی $t \to +\infty$، به صفر میل می‌کند. **۷۹.** مسلماً تابع $f(x) = x^\alpha$ که در آن $\alpha \geqslant ۰$ وقتی $x \to ۰$ و یا $x \to ۱$ بی‌کران نمی‌شود[۱۷] و بنابراین برای این مقادیر $\int_۰^۱ x^\alpha dx$ انتگرال مجازی نیست. آیا مقادیر دیگری وجود دارد؟

[۱۷] به عبارت دیگر $x = ۰$ و $x = ۱$ وقتی $\alpha \geqslant ۰$ مجانب‌های قائم $f(x)$ نیستند (چرا)؟

فصل ۳

کاربردهای ریاضی

در این بخش به کاربردهایی از انتگرالهای معیّن و انتگرالهای مجازی می پردازیم. تعدادی از کاربردها بین مباحث ریاضی و گونه های اقتصادی و تعدادی به مباحث مرتبط با آمار و احتمال اختصاص دارد.

۱.۳ مقدار متوسط

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $f(x)$ بر ناحیه $a \leqslant x \leqslant b$ تابعی پیوسته است. در این صورت **مقدار متوسط** این تابع بر ناحیه با

$$AV(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

داده می شود.

مثال ۱.۳. فرض کنید تابع هزینه کل کالایی به شکل $TC(x) = 400 + x + 0/3x^2$ است. اولاً مقدار متوسط هزینه را برای فروش تعداد $x = 10$ تا $x = 20$ واحد از کالا یافته و سپس هزینه متوسط در واحد را اگر ۴۰ عدد کالا بفروش برسد بیابید[1].

[1] توجه کنید، موارد خواسته شده ظاهراً یکی اند ولی در واقع متفاوتند.

حل: مقدار متوسط برابر است با $AV(TC) = \frac{۱}{۲۰-۱۰}\int_{۱۰}^{۲۰}(۴۰۰+x+۰/۳x^{۲})\, dx$ که با جایگذاری $۴۵۸ = \frac{۱}{۱۰}(۴۰۰x - ۰/۵x^{۲} + ۰/۱x^{۳})\Big|_{۱۰}^{۲۰}$ بدست می آید. از مباحث اقتصادی، هزینه متوسط بفرم $\overline{TC}(x) = \frac{TC(x)}{x}$ تعریف می شود. از اینرو: $\overline{TC}(۴۰) = \frac{TC(۴۰)}{۴۰} = ۲۳$. □

۲.۳ تابع چگالی(مبحث احتمال)

در احتمال، مفهومی را بنام تابع چگالی معرفی می کنند، به این صورت که اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و نامنفی بر ناحیهٔ I[۲] باشد که در آن X یک متغیر تصادفی پیوسته است، آنگاه $f(x)$ را یک **تابع چگالی** (احتمال) می نامند هرگاه $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = ۱$.

تعریف ۲.۳. احتمال اینکه رویداد X مقادیر بین c و d که $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ را انتخاب کند با مساحت سطح زیر نمودار تابع چگالی $f(x)$، محور طولها، $x=c$ و $x=d$ برابر است:

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_{c}^{d} f(x)\, dx.$$

مثال ۲.۳. برای تابع چگالی $f(x) = ۶(x - x^{۲})$ متناظر رویداد $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ احتمال های زیر را بدست آورده ایم:

$$P(۰ \leqslant X \leqslant ۰/۲۵) = \int_{۰}^{۰/۲۵} ۶(x-x^{۲})\, dx = ۶\left(۰/۵x^{۲} - \tfrac{x^{۳}}{۳}\right)\Big|_{۰}^{۰/۲۵} = \frac{۵}{۳۲},$$

$$P(X \geqslant ۰/۵) = \int_{۰/۵}^{۱} ۶(x-x^{۲})\, dx = ۶\left(۰/۵x^{۲} - \tfrac{x^{۳}}{۳}\right)\Big|_{۰/۵}^{۱} = ۰/۵. \qquad □$$

مثال ۳.۳. برای متغیر تصادفی X روی $[a,b]$ ، تابع چگالی یکنواخت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \{\tfrac{۱}{b-a},\ a \leqslant x \leqslant b\ ;\ ۰, x < a \cup x > b\}.$$

---

[۲] $a \leqslant x \leqslant b$.

شرایط تابع چگالی برای $f \geqslant ۰$ برقرار است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tfrac{۱}{b-a}dx = \tfrac{۱}{b-a}x\Big|_a^b = ۱.$$

و اگر $[c,d]$ بازه‌ای درونی برای $[a,b]$ باشد آنگاه احتمال $P(c \leqslant X \leqslant d)$ برابراست با:

$$\int_c^d f(x)dx = \frac{۱}{b-a}\int_c^d dx = \frac{d-c}{b-a}. \qquad \square$$

مثال ۳.۴. فرض کنید تابع چگالی متغیر تصادفی X به صورت

$$f(x) = \{kx,\ ۰ \leqslant x \leqslant ۲\ ;\ ۰, x < ۰ \cup x > ۲\}.$$

داده شده است. در صورت مثبت بودن k و بنابه تعریف تابع چگالی باید $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = ۱$ و بنابر این $\int_۰^۲ kxdx = k\left(\frac{x^۲}{۲}\right)\Big|_۰^۲ = ۲k$ و لذا $k = \frac{۱}{۲}$. حال $P(\frac{۱}{۲} < X < ۱) = \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \frac{۱}{۲}x\,dx = \frac{۳}{۱۶}$ و همچنین $\frac{۱}{۴} = \frac{x^۲}{۴}\Big|_۰^۱ = \int_۰^۱ \frac{۱}{۲}xdx = P(X < ۱) = P(۰ < X < ۱)$. $\square$

مثال ۳.۵. فرض کنیم رویدادهای تجربهٔ معیّنی، متناظر با اعداد حقیقی مثبت است. اگر تابع چگالی آن $f(x) = \frac{۱}{(x+۱)^۲}$ تعریف شود، احتمال اینکه رویداد تجربی X مساوی ۳ یا بزرگتر باشد چیست؟

حل: اولاً بررسی می‌کنیم که $\int_۰^{\infty} f(x)dx = ۱$:

$$\int_۰^{\infty} f(x)dx = \int_۰^{\infty} \frac{۱}{(x+۱)^۲}dx = \int_۰^{\infty} \frac{d(x+۱)}{(x+۱)^۲} \xrightarrow{x+۱=t}= \int_{t=۱}^{\infty} \frac{۱}{t^۲}dt = -\frac{۱}{t}\Big|_۱^{+\infty} = ۱.$$

و بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(x \leqslant ۳) = \int_۳^{\infty} \frac{۱}{(x+۱)^۲}dx = \int_{t=۴}^{\infty} \frac{dt}{t^۲} = -\frac{۱}{t}\Big|_۴^{\infty} = \frac{۱}{۴}. \qquad \square$$

تعریف ۳.۳. فرض کنید $f(x)$ یک تابع چگالی احتمال تعریف شده روی $a \leqslant x \leqslant b$ است.

گشتاور اول توزیع μ[۳] به صورت $\mu = \int_a^b xf(x)dx$ تعریف می‌شود[۴]:

مثال ۶.۳. گشتاور اول تابع چگالی احتمال $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ را روی $\mathbb{R}$ بدست آورید.

حل: با کمک تعریف فوق داریم:

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(x^2)}{x^2+1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2\pi}\ln(x^2+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

چون $\ln(x^2+1)$ تابعی زوج است پس مقدار فوق در معنی حدّی آن صفر است. یعنی $\mu = 0$. $\square$

تعریف ۴.۳. اگر $f(x)$ تابع چگالی احتمال رویدادی، تعریف شده روی $a \leqslant x \leqslant b$ باشد، آنگاه **گشتاور دوم آن حول میانگین** σ^2 به صورت زیر تعریف می‌گردد[۵]:

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx.$$

که در آن μ میانگین تابع چگالی، σ^2 واریانس توزیع و σ $(\sigma > 0)$ انحراف معیار نامیده می‌شوند.

مثال ۷.۳. گشتاورهای اول و دوم تابع چگالی احتمال $f(x) = \frac{3}{8}x^2$ را روی فاصله $0 \leqslant x \leqslant 2$ بدست آورید.

حل: با توجه به تعاریف:

$$\mu = \int_0^2 \frac{3}{8}x^2 \cdot x\,dx = \frac{3}{8}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{3}{2}.$$

$$\sigma^2 = \int_0^2 \frac{3}{8}x^2(x-\tfrac{3}{2})^2\,dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^3}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{20}. \qquad \square$$

یکی از مباحثی که در درس آمار و احتمال مطرح است موضوع توزیع نرمال است. **توزیع**

[۳] مقدار μ را امید توزیع یا میانگین هم می‌نامند.
[۴] بشرطی که این انتگرال دارای جواب باشد.
[۵] به شرطی که انتگرال دارای جواب باشد.

نرمال بنابه تعریف یک تابع چگالی احتمال خاص است:

$$f(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{۲}}, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

نکته ۱.۳. در درس حسابان، انتگرال معیّن زیر را نمی‌توان به وسیله هیچ یک از روش‌های مقدماتی بیان شده محاسبه کرد:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{\circ}^{b} e^{-\frac{x^{۲}}{۲}} dx$$

بجای محاسبه این انتگرال با روش عادی و متعارف، مقدار آن را به ازای b های خاصی می‌توان از روی جدول آخر کتاب خواند.

مثال ۸.۳. مقدار $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{\circ}^{۲/۶۸} e^{-\frac{x^{۲}}{۲}} dx$ را بدست آورید.

حل: به جدول آخر کتاب مراجعه کنید. مقدار ۲/۶۸ را به صورت $۲/۶۸ = ۲/۶ + ۰/۰۸$ بنویسید. عدد ۲/۶ ردیف ۲۷ام جدول است. اعداد این ردیف را تا جایی دنبال می‌کنیم تا به عدد ۰/۰۸ با توجه به سرستون‌های جدول برسیم. عدد مورد نظر ۰/۴۹۶۳ است. □

مثال ۹.۳. فرض کنید نتایج یک تجربه به طور نرمال با $\mu = ۳$ و $\sigma = ۲$ توزیع شده‌اند. احتمال اینکه نتیجه‌ای بین ۱ و ۴ واقع شود چقدر است؟

حل:

$$P(۱ < x < ۴) = \int_{۱}^{۴} \frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x-۳}{۲}\right)^{۲}} dx \overset{z=\frac{x-۳}{۲}}{=\!=\!=} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{z=-۱}^{\frac{۱}{۲}} e^{-\frac{۱}{۲}z^{۲}} dz$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \left(\int_{-۱}^{\circ} e^{-\frac{۱}{۲}z^{۲}} dz + \int_{\circ}^{\frac{۱}{۲}} e^{-\frac{۱}{۲}z^{۲}} dz \right)$$

با توجه به قواعد انتگرال‌گیری داریم:

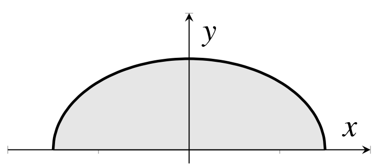
$$P(۱ < x < ۴) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \left(\int_{\circ}^{۱} e^{-\frac{z^۲}{۲}} dz + \int_{\circ}^{\frac{۱}{۲}} e^{-\frac{z^۲}{۲}} dz \right)$$

و با کمک جدول: $P(۱ < x < ۴) = ۰/۳۴۱۳ + ۰/۱۹۱۵ = ۰/۵۳۲۸$.

عدد فوق در معنی تئوری احتمالات بدین معناست که به میزان ۵۳/۲۸ درصد، شانس اینکه نتیجه‌ای بین ۱ و ۴ واقع شود وجود دارد. □

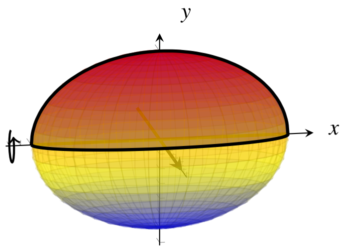
۳.۳ حجم

همانطور که از انتگرالگیری (و نوع معیّن آن) در محاسبه مساحت‌ها استفاده می‌شود، به همین صورت می توان در بدست آوردن حجم نیز از آن استفاده کرد. در این مبحث بنا نیست موضوع محاسبه حجم در قالب ریاضی محض آن بررسی شود، بلکه می‌خواهیم تا ضمن معرفی مفهومی جدید، مجدداً ارتباط آن را با انتگرال معیّن بیان کرده و تمرینات بیشتری را حل کنیم. در شکل زیر ناحیه ای به توسط یک تابع نامنفی و بین دو مقدار معین از طرفین و محور x از پایین محصور شده است:



این ناحیه را بدور محور طولها دوران می دهیم تا حجمی به مانند زیر تولید کند (صفحهٔ بعد). در این بخش قصد داریم تا چنین حجم هایی را با فرض تابع هایی مناسب، بر روی نواحی معین ساخته و بکمک انتگرالگیری مقدار یابی کنیم.

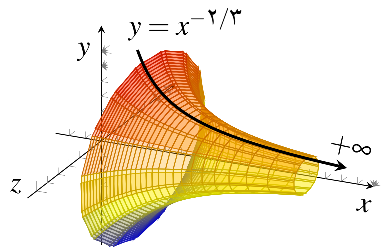
تعریف ۵.۳. ناحیه ای را در نظر بگیرید که توسط تابع $f(x)$ از بالا، دو خط $x = a$ و $x = b$



از طرفین و محور x از پایین محصور شده است. در اینجا تابع $f(x)$ روی $a \leqslant x \leqslant b$ تابعی پیوسته و نامنفی است. این ناحیه را حول محور x دوران داده تا یک حجم تولید کند. حجم سه بعدی حاصل را **جسم دوّار** می‌نامند که مقدار آن از قاعده زیر بدست می‌آید:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^۲ dx$$

مثال ۳.۱۰. مساحت محصور بین $y = x^{-\frac{۲}{۳}}$ و $x = ۱$ و محور x که تا بی‌نهایت گسترش یافته است، حول محور x دوران می‌دهیم:



شکل ۳.۱: حجم حاصل از دوران تابع حول محور طول

حجم بالا با حل انتگرال معین $V = \int_۱^\infty \pi \left(x^{-\frac{۲}{۳}}\right)^۲ dx$ بدست می‌آید. مقدار آن برابر است با $۴\pi = \left(x^{-\frac{۱}{۳}}\right)_۱^\infty ۳\pi -$. □

نکته ۳.۲. اگر مساحت محصور در تعریف فوق، به منحنی $x = f(y)$، دو خط $y = c$ و $y = d$ و محور yها محدود باشد، آنگاه حجم دوّاری که از دوران مساحت حول محور y ایجاد می‌شود

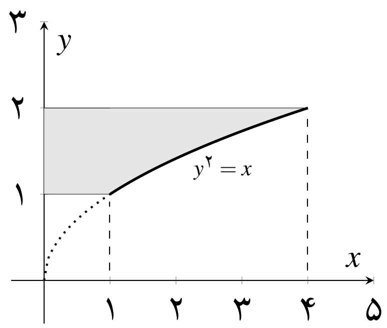
برابر است با مقدار عددی $V=\int_c^d \pi[f(y)]^2 dy$.[a]

[a] به شرطی که مقدار عددی برایش پیدا شود.

مثال ۳.۱۱. مساحت زیر حول محور yها دوران می‌کند. حجم حاصل را بدست آورید.

حل: بنا به فرمول داده شده داریم:

$$V=\int_{y=1}^{2}\pi(f(y))^2 dy=\int_1^2 \pi x^2 dy=\int_1^2 \pi y^4 dy=\pi\frac{y^5}{5}\Big|_1^2=\pi\left(\frac{21}{10}\right).$$



۳.۴ معادلات دیفرانسیل

گاهی فرمول بندی یک مسأله بر اساس ریاضیات، معادلاتی را ایجاد می‌کند که در آن نرخ تغییر یک پارامتر و خود پارامتر بهم وابسته‌اند. به عبارت دیگر در این معادلات یک تابع و مشتق‌هایی از آن تابع دیده می شود. این چنین معادلاتی را **معادله دیفرانسیل** می‌نامند. مثلاً $y''=2x$ و $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-4\left(\frac{dy}{dx}\right)+y^2=1$ نمونه‌هایی از معادلات دیفرانسیل از تابع y بر حسب متغیر x هستند.

تذکر ۳.۱. در فرم ظاهری یک معادله دیفرانسیل، تقریباً هر شکل متفاوتی که شما تا به حال شناخته‌اید از جمله توان‌های مختلف x و انواع توابع بر حسب x مانند نمایی یا لگاریتمی و کسری می‌تواند دیده

شود:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad y' + y^{۲} = \frac{\sqrt{x}}{e^x}, \quad y'' + y = \ln(x+۳).$$

تذکر ۲.۳. برای هر معادله دیفرانسیل، یک ناحیه تغییرات[۶] برای متغیر x وجود دارد. این ناحیه تغییرات طوری در نظر گرفته می‌شود که برای x و y و هر مشتقی که از y در معادله دیده می‌شود، معناداری تعریفی حفظ شود. مثلاً در معادله دیفرانسیل $y = \frac{y}{x-۱}$ واضح است $x \neq ۱$ و یا در معادله $y' = \sqrt{x+۱}$ حتماً $x > -۱$ مورد نظر است. بعلاوه همانطور که در نمونه های ابتدای بحث می بینید:

نکته ۳.۳. امکان دارد تا بجای y'، از شکل متعارف و معادل دیگر آن، $\frac{dy}{dx}$ استفاده شود.

تعریف ۶.۳. در یک معادله دیفرانسیل، بالاترین مرتبه مشتق‌گیری ظاهر شده را **مرتبه معادله دیفرانسیل** می نامند.

مثال ۱۲.۳. مرتبه معادله دیفرانسیل $y'' + y' = e^x$، عدد ۲ و مرتبه $y^{(۴)} + y'' = \frac{۱}{x}\ (x \neq ۰)$ عدد ۴ است. □

تعریف ۷.۳. فرض کنیم تابع $y = f(x)$[۷] با جایگزینی در یک معادله دیفرانسیل، آن را به یک اتحاد درست تبدیل کند. در این‌صورت آنرا یک **جواب** برای آن معادله دیفرانسیل می‌نامند.

مثال ۱۳.۳. $y = ۲x^{۲}$ در معادله $xy' - ۲y = ۰$ بازای کل اعداد حقیقی صدق می‌کند زیرا با مشتق گیری از آن : $y' = ۴x$ و با جایگزینی آن در معادله: $xy' = x(۴x) = ۴x^{۲} = ۲(۲x^{۲}) = ۲y$ که درست است. □

مثال ۱۴.۳. کدامیک از دو تابع $y_۱ = C_۱e^x$ و $y_۲ = C_۲e^{-x}$ (که C_i ها ثابتند) جوابی برای معادله مرتبه دوم $y'' - y = ۰$ است؟

---

[۶] هر چند نوشته نشود.

[۷] که در آن x ناحیه مناسبی برای تغییر دارد

حل: اگر $y_1 = C_1e^x$ و یا $y_2 = -C_2e^{-x}$ آنگاه بترتیب $y_1'' = C_1e^x = y_1$ و $y_2'' = C_2e^{-x} = y_2$ که نشان می دهد دو تساوی $y_1'' - y_1 = 0$ و $y_2'' - y_2 = 0$ برقرارند. لذا هر دو جوابهایی از معادله دیفرانسیل هستند. □

در مورد مثال اخیر، اگر به جای C_i ها اعدادی دلخواه قرار دهید، بوضوح y_1 (یا y_2) حاصل، مجدداً یک جواب از معادله $y'' - y = 0$ خواهد شد. جواب‌هایی که دارای مقادیر پارامتری ثابت C هستند[۸]، بعنوان **جواب عمومی** معادله دیفرانسیل شناخته می‌شود. بسادگی می‌توانید بررسی کنید که $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$ جوابی عمومی برای معادلهٔ $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x$ است.

تعریف ۸.۳. اگر شرط اضافه ای را بتوان طوری به معادله دیفرانسیل افزود تا در نهایت، پارامتر C موجود در جواب عمومی آن، مقدار واقعی خود را نشان دهد[۹]، آن شرط را **شرط اولیه** و جوابی که بواسطه آن از جواب عمومی استخراج می‌شود را **جواب خصوصی** می‌نامند.

مثال ۱۵.۳. تابع $y = Cx^3$ یک جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل $xy' - 3y = 0$ است. اگر بدانیم $y = 2$ وقتی $x = -3$ شود، مطلوبست جواب خصوصی معادله دیفرانسیل.

حل: عبارت $y = 2$ وقتی $x = -3$، یک شرط اولیه است[۱۰]. چون جواب عمومی را میشناسیم، لذا در آن بجای x و y همزمان دو مقدار به ترتیب -3 و 2 را جایگزین می‌کنیم:

$$y = Cx^3 \xrightarrow[y=2]{x=-3} 2 = C(-3)^2 \longrightarrow C = \frac{2}{-27}.$$

و در نتیجه $y = \frac{2}{-27}x^3$ جواب خصوصی معادله است. □

مثال ۱۶.۳. چاه نفتی را با زمان انتظار نهایتاً ۳ ساله وقتی در هر ماه ۳۰۰ بشکه نفت از آن مورد استخراج قرار گیرد، بازگشایی می کنند. قیمت هر بشکه نفت خام با تابع $p(t) = 28 + 0/3\sqrt{t}$ که t نشان دهنده t ماه از هم اکنون است، تخمین زده می‌شود. اگر فرض کنیم از زمانی که نفت از زمین استخراج شود، آن را بفروشیم مطلوب است درآمد کل حاصل از کل نفت خامی که می‌توان از چاه برداشت کرد.

---

[۸] و در واقع فرم کلی همه جواب‌های دیگر را در خود دارند.

[۹] مقدارش پیدا شود.

[۱۰] که آن را می‌توان بصورت $y(-3) = 2$ هم نوشت.

حل: تابع $TR(t)$ را درآمد کلی می‌گیریم که از t ماه اول بعد از بازگشایی چاه نفت حاصل می‌شود. واضح است اگر $t = ۰$ آنگاه درآمد کل متناظر صفر خواهد بود[11]. با توجه به مفروضات مسأله، نرخ تغییرات در درآمد کل نسبت به t با عبارت $۳۰۰(۲۸ + ۰/۳\sqrt{t})$ یکی است که در آن ۳۰۰ تعداد بشکه های نفت در ماه و $۲۸ + ۰/۳\sqrt{t}$ میزان درآمد حاصل از فروش بشکهٔ نفت خواهد بود. در واقع $TR'(t) = (۲۸ + ۰/۳\sqrt{t})(۳۰۰)$. این یک معادله دیفرانسیل بر حسب تابع درآمد کل $TR(t)$ است. با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی فوق داریم:

$$TR(t) = \int TR'(t)dt = \int (۲۸ + ۰/۳\sqrt{t})۳۰۰dt = ۸۴۰۰t + ۶۰t^{\frac{۳}{۲}} + C.$$

وجود پارامتر ثابت C که حاصل از حل انتگرال نامعین است، همان ثابتی است که در جواب عمومی وجود دارد. حال شرط اولیه $TR(۰) = ۰$ را بر جواب عمومی نهایی اعمال می‌کنیم:

$$۰ = TR(۰) = ۸۴۰۰ \times ۰ + ۶۰(۰)^{\frac{۳}{۲}} + C \to C = ۰.$$

و لذا جواب خصوصی $TR(t) = ۸۴۰۰ + ۶۰t^{\frac{۳}{۲}}$ بدست می‌آید. چون از هم اکنون، ۳ سال معادل ۳۶ ماه فرصت استخراج داریم لذا $TR(۳۶) = ۸۴۰۰ + ۶۰(۳۶)^{\frac{۳}{۲}} = ۲۱۳۶۰$ جواب مسأله است.
□

یک معادله دیفرانسیل **مرتبه اول** معادله‌ای است که در آن از مشتق y فقط y' دیده شود. در ادامه قرار داد می‌کنیم معادلات دیفرانسیل مورد بررسی، قابل تبدیل به انواعی از $y' = f(x,y)$ و یا به فرم $y' = f(x)$ هستند. در نوع اول f تابعی دو متغیره و در دومی f تابعی بر حسب فقط x است. اگر چه این قرار داد دست ما را در بررسی انواع مختلفی از معادلات دیفرانسیل می‌بندد ولی با این حال در این دو دسته نیز می توان مسائل متفاوتی را مطرح کرد.

---

[11] $TR(۰) = ۰$

۱.۴.۳ روش‌های حل

۱. اگر معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت $y' = f(x)$ باشد، برای حل آن[۱۲]، کافی است به‌صورت $y = \int f(x)dx$ عمل کنیم.

مثال ۱۷.۳. دو معادلات دیفرانسیل $y' = \frac{x+۱}{x}$ و $y' = (\sqrt{x}+۱)^۲$ را حل کنید.

حل: بکمک روش بیان شده بالا داریم:

$$y = \int \frac{x+۱}{x}\,dx = \int \left(۱+\frac{۱}{x}\right)dx = \int ۱\,dx + \int \frac{۱}{x}\,dx = x + \ln|x| + C.$$

برای معادله بعدی: $y = \int (\sqrt{x}+۱)^۲ dx$ که با توان رساندن عبارت به انتگرال زیر می رسیم:

$$\int (x+۲\sqrt{x}+۱)dx = \int x\,dx + ۲\int \sqrt{x}\,dx + \int ۱\,dx = \frac{x^۲}{۲} + ۲\left(\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\right) + x + C. \quad \square$$

مثال ۱۸.۳. معادله دیفرانسیل $y' = \frac{۱}{x} + ۱$ را با شرط اولیه $y(۱) = ۱$ حل کرده و یک جواب خصوصی آنرا بدست آورید.

حل: کافی است از دو طرف انتگرال بگیریم تا به حاصل $y = \ln|x| + x + C$ برسیم. چون به ازای $x = ۱$، $y = ۱$ است، پس $۱ = \overbrace{\ln|۱|}^{۰} + ۱ + C \to C = ۰$ و لذا جواب خصوصی عبارت است از $y = \ln|x| + x$. $\square$

تعریف ۹.۳. اگر $f(x,y)$ را بتوان به صورت مجزای $g(x)h(y)$[۱۳] نوشت، آنگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x,y)$ را **جدایی پذیر** می‌گویند.

---

[۱۲] یافتن تابع yای که در معادله صدق می‌کند.

[۱۳] یعنی طوری جدا سازی در f انجام شود که کاملاً متغیرهای x و y جدا شوند.

مثال ۱۹.۳. در نمونه های زیر، جدایی سازی به فرم بالا انجام شده است:

$$y' = \frac{\overbrace{-xe^{x^{۲}}}^{f(x,y)}}{y} = \underbrace{\left(\tfrac{۱}{y}\right)}_{h(y)}\underbrace{\left(-xe^{x^{۲}}\right)}_{g(y)}, \qquad y' = \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \underbrace{y^{-\frac{۱}{۲}}}_{h(y)}\underbrace{x^{\frac{۱}{۲}}}_{g(x)}$$

$$y' = x\left(\frac{۱}{y} - \frac{۱}{۱+y}\right) = x\left(\frac{(۱+y)-y}{y(۱+y)}\right) = \frac{x}{y(۱+y)} = \underbrace{x}_{g(x)} \times \underbrace{\left(\frac{۱}{y(۱+y)}\right)}_{h(y)}$$

۲. اگر معادله $y' = f(x,y)$ جدایی‌پذیر باشد آنگاه برای حل آن مراحل زیر انجام می شود: اولاً تفکیک $f(x,y) = g(x)h(y)$ را انجام داده و سپس به جای y' عبارت معادل $\frac{dy}{dx}$ را نوشته و طوری عبارت‌ها را جابجا می‌کنیم که هر عبارت در کنار d متغیر همان عبارت قرار گیرد. یعنی:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Longrightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx,$$

توجه داریم در مبحث انتگرال، عامل دیفرانسیلی d هیچگاه در مخرج یک کسر واقع نمی‌شود. حال از دو طرف تساوی آخر (بر حسب متغیر همان سمت) انتگرال می‌گیریم. لازم به ذکر است چون از انتگرال‌گیری نامعیّن استفاده می شود، لذا هر طرف یک مقدار ثابت C دارد. برای نهایی کردن حل، کافی است در یکی از طرفین فقط یک C قرار دهید:

$$\int \frac{dy}{h(y)} - \int g(x)dx = C$$

مثال ۲۰.۳. جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

الف) $y' = \frac{۳y}{۲x}$ ب) $(۱+y)y' - ۴x = ۰$ ج) $e^{x}(y'+۱) = ۱$ د) $y' = \frac{x^{۲}+۲}{۳y^{۲}}$

حل: برای **الف** و با فرض $x \neq ۰, y \neq ۰$ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = y' = ۳y \times \frac{۱}{۲x} \longrightarrow \frac{dy}{۳y} = \frac{dx}{۲x} \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{با انتگرالگیری}} \frac{۱}{۳}\ln|y| = \frac{۱}{۲}\ln|x| + C$$

برای **ب**: $(۱+y)\frac{dy}{dx} = ۴x \longrightarrow dy(۱+y) = ۴xdx \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{با انتگرالگیری}} \left(\frac{y^۲}{۲}+y\right)+C = ۲x^۲$

برای **ج** : اولاً $۱+y' = e^{-x} \to \frac{dy}{dx} = e^{-x}+۱ \to dy = (۱+e^{-x})dx$. حال با انتگرالگیری از طرفین تساوی داریم $y = (x-e^{-x})+C$.

و برای **د** با مرتب کردن: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^۲+۲}{۳y^۲} \longrightarrow (۳y^۲)dy = (x^۲+۲)dx$ و با انتگرالگیری از طرفین تساوی به جواب عمومی $y^۳ = \frac{x^۳}{۳}+۲x+C$ می رسیم. □

مثال ۲۱.۳. یک متحرک در امتداد محور x چنان حرکت می‌کند که در زمان t، سرعتش با معادله دیفرانسیل $v = \frac{dx}{dx} = x^۲\ln t$ بدست می‌آید. اگر در زمان $t=۱$، متحرک در مکان $x=-۳$ باشد، آیا می‌توانید بگویید در زمان $t=۳$ در کجاست؟

حل: اگر $x \neq ۰$، آنگاه $\frac{dx}{x^۲} = \ln t dt$ و با انتگرالگیری از طرفین تساوی داریم:

$$-\frac{۱}{x} = (t\ln t - t)+C.$$

حال با اِعمال شرط اولیه $x(۱) = -۳$: $\frac{-۱}{-۳} = (۱\underbrace{\ln ۱}_{۰} - ۱)+C \longrightarrow C = \frac{۳}{۴}$. و لذا جواب خصوصی عبارت است از $\frac{-۱}{x} = t\ln t - t + \frac{۳}{۲}$. اکنون قرار دهید $t=۳$:

$$-\frac{۱}{x} = ۳\ln ۳ - ۳ + \frac{۳}{۲} \longrightarrow x = \frac{-۱}{۱۰۸} \simeq -۰/۵۶. \qquad \square$$

مثال ۲۲.۳. فرض کنید قیمت یک کالا، $p(t)$، نسبت به گذشت زمان t طوری تغییر می‌کند که نرخ تغییرات آن با تفاضل $D-S$ متناسب است. در اینجا D تابع تقاضا (از نوع خطی): $D = ۸-۲p$، S تابع عرضه (از نوع خطی): $S = ۲+p$ هستند. اگر در زمان $t=۰$ قیمت به ۵ و در زمان $t=۲$ قیمت به ۳ برسد، مطلوبست تابع $p(t)$. بعلاوه معین کنید چه اتفاقی بر سر $p(t)$ می‌افتد وقتی زمان t طولانی شود؟[۱۴] حل: با توجه به اینکه نرخ تغییر یعنی مشتق با تفاضل مورد نظر متناسب است پس:

[۱۴] یعنی $t \to \infty$.

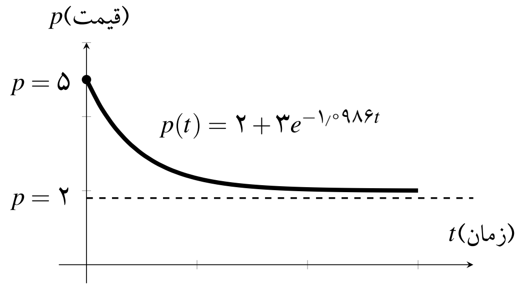
$\frac{dp}{dt} = \overbrace{k(D-S)}^{\text{متناسب بودن یعنی این}}$ که در آن k مقداری ثابت است. با توجه به فرمول‌های D و S:

$$\frac{dp}{dt} = k(\text{۸} - \text{۲}p - (\text{۲} + p)) = k(\text{۶} - \text{۳}p)$$

و بنابراین $\frac{dp}{\text{۶} - \text{۳}p} = kdt$ و با انتگرالگیری از طرفین $-\frac{\text{۱}}{\text{۳}} \ln |\text{۶} - \text{۳}p| = kt + C$. نهایتاً

$$p = \tfrac{\text{۶}}{\text{۳}} - \tfrac{C}{\text{۳}} e^{-\text{۳}kt}$$

چون $p(\text{۰}) = \text{۵}$ پس $\text{۵} = \text{۲} - \frac{C}{\text{۳}} e^{-\text{۳}k \times \text{۰}} \rightarrow C = -\text{۹}$ و بنابر این $p(t) = \text{۲} + e^{-\text{۳}kt}$. اکنون با کمک شرط اولیه بعدی: $p(\text{۲}) = \text{۳}$ داریم: $\text{۳} = \text{۲} + \text{۳}e^{-\text{۳}k \times \text{۲}} \Rightarrow k = \text{۰/۱۸۳۱}$ و بنابر این با تقریب خوبی $p(t) = \text{۲} + \text{۳}e^{-\text{۱/۰۹۸۶}t}$ تابع $p(t)$ را بر حسب t توصیف می‌کند. بدیهی است اگر $t \longrightarrow \infty$ آنگاه $p(t)$ لزوماً به مقدار عدد ۲ نزدیک می‌شود (چرا؟). شکل زیر توصیفی از مبحث بالاست:



شکل ۲.۳: مقدار قیمت، همزمان با مرور زمان به بینهایت، به عدد تعادلی ۲ میل می کند.

□

تعریف ۱۰.۳. اگر معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ طوری از نظر ظاهر مرتب شود که به صورت $y' + P(x)y = Q(x)$ باز نویسی شود آن معادله را **خطی از مرتبه یک** می‌نامند.

مثال ۲۳.۳. معادلات دیفرانسیل $e^x y' - \text{۲}xy = \text{۳}x^{\text{۲}}$ و $(x-\text{۱})y' + \text{۵}y = e^{\text{۵}x}$ خطی هستند. □

مثال ۳.۲۴. معادلات دیفرانسیل $y' - ۲xy^۲ = ۳x^۲y$ و $(y')^۲ + ۵y = e^{۵x}$ خطی نیستند. □

نکته ۳.۴. وجود توانی غیر از یک(یا ۰)، برای y و غیر از یک برای یا y' در یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، اجازه خطی شدن آن را **نمی‌دهد**. همینطور است اگر معادله دارای توابعی باشد که روی y یا y' عمل می‌کنند. مثلاً معادله دیفرانسیل $y' = x + e^y$ خطی نیست زیرا y در فرم تابعی نمایی e^y ظاهر شده است.

نکته ۳.۵. اگر در یک معادله دیفرانسیل، ضریب y' غیر از یک (عبارت دیگری) باشد، ابتدا می‌توان با غیرصفر فرض کردن آن ضریب، طرفین معادله دیفرانسیل را تقسیم کرده و سپس برای نوع خطی و یا غیرخطی آن تصمیم گرفت. مثلاً در معادله $x^۳y' + ۲y = e^{۱/x^۲}$، اگر $x \neq ۰$ آنگاه با تقسیم طرفین بر $x^۳$ داریم: $y' + \underbrace{\frac{۲}{x^۳}}_{P(x)}y = \underbrace{\frac{e^{\frac{۱}{x^۲}}}{x^۳}}_{Q(x)}$ که نشان می‌دهد معادله دیفرانسیل خطی است.

نکته ۳.۶. اینکه در تعریف فوق، ضریب y' را **یک** گرفتیم به این علت است که شکل

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (\#)$$

شکل استاندارد معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است.

---

۳. برای حل معادلهٔ استاندارد و خطی (#) قرار دهید $u = \exp(\int P(x)dx)$ و آنگاه جواب عمومی معادله را از حل انتگرال زیر بدست آورید:

$$y = \frac{۱}{u}\left[\int u \times Q(x)dx + C\right]$$

مثال ۳.۲۵. معادله $xy' + y = x^۲ \ln x$ را با فرض $x > ۰$ حل کنید.

حل: معادلهٔ نظیر استاندارد: $y' + \left(\frac{۱}{x}\right)y = x\ln x$ است که در آن $P(x) = \frac{۱}{x}$ و $Q(x) = x\ln x$ دیده می شود. از این رو بکمک فرمول، جواب عمومی برابر است با

$$y = e^{\int -\frac{۱}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{۱}{x}dx} \times (x\ln x)\,dx + C\right]$$

چون از قسمت انتگرال می‌دانیم $e^{\int \frac{a}{x}dx} = x^a$ پس

$$y = x^{-۱}\left[\underbrace{\int x^{۲}\ln x\,dx}_{\frac{x^{۳}}{۳}(\ln x-\frac{۱}{۳})}+C\right] = \frac{x^{۲}}{۳}\left(\ln x-\frac{۱}{۳}\right)+Cx^{-۱},(x\neq ۰) \qquad \square$$

۵.۳ تمرینات

۱. مقدار متوسط توابع زیر را روی بازه داده شده بدست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{x},\ [۰,۱]$ ب) $f(x) = x^{۲},\ [-۱,۳]$

ج) $f(x) = x\sqrt{x^{۲}-۱},\ [۱,۴]$ د) $f(x) = ۲-۳x^{۲},\ [-۱,۲]$

۲. ضمن یافتن مقدار متوسط هر تابع روی ناحیه داده شده، مقداری از x را پیدا کنید که به ازای آن، تابع و مقدار متوسط متناظرش یکی شوند.

الف) $f(x) = ۴-x^{۲}$, $[-۲,۲]$ ب) $f(x) = ۲e^{x}$, $[-۱,۱]$

ج) $f(x) = \exp(x/۴)$, $[۰,۴]$ د) $f(x) = \dfrac{۴x}{x^{۲}+۱}$, $[۰,۱]$

ه) $f(x) = \dfrac{۲۰\ln(x)}{x}$, $[۲,۱۰]$

۳. با توجه به تابع چگالی احتمال داده شده، احتمال رویداد در بین مقادیر داده شده را به‌دست آورید.

الف) $P(x) = \frac{۱}{۲}(x^{۲}+x+۱),\ (۰ \leqslant x \leqslant ۵):\ P(۲ \leqslant X \leqslant ۴)$

ب) $P(x) = \dfrac{۱}{(x+۱)^{۲}},\ (x \geqslant ۰):\ P(X \geqslant ۴)$

ج) $P(x) = \frac{۱}{۴۰},\ (۰ \leqslant x \leqslant ۴۰):\ P(۱۵ \leqslant X \leqslant ۴۰)$

د) $P(x) = ۰/۵e^{-۰/۵x},\ (x \geqslant ۰):\ P(۲ \leqslant X \leqslant ۳),\ P(X \geqslant ۲)$

ه) $P(x) = \dfrac{۱۲x-۳x^{۲}}{۳۲},\ (۰ \leqslant x \leqslant ۴):\ P(۰ \leqslant X \leqslant ۴),\ P(X \leqslant ۱)$

ی) $P(x)=\frac{1}{4}xe^{\frac{-x}{2}},\ (x\geqslant 0):\ P(0\leqslant X),\ P(X\geqslant 6)$

و) $P(x)=\frac{3}{x^4},\ (x\geqslant 1):\ P(X\geqslant 1),\ P(1\leqslant X\leqslant 2),\ P(X\geqslant 2)$

ز) $\begin{cases} P(x)=\dfrac{1}{4(x+1)^2}, & (x\geqslant 0) \\ P(-2\leqslant X-3\leqslant 2), & P(X\leqslant 1),\ P(-3\leqslant X\leqslant 1),\ P(|X|\leqslant 2) \end{cases}$

۴. تابع چگالی احتمال $P(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2},\ (x\geqslant 0)$ مفروض است. مقدار a را طوری به‌دست آورید که $P(0\leqslant X\leqslant a)=0/8$ شود؟

۵. نشان دهید تابع‌های داده شده زیر یک تابع چگالی رو کل خط اعداد حقیقی تعریف می‌کنند.

الف) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{10}{(x+10)^2} & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{200}{x^3} & x\geqslant 10 \\ 0 & x<10 \end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{3x}{5} & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$

د) $f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x} & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

ه) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{0/5}}{9} & 0\leqslant x\leqslant 9 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$

و) $f(x)=\begin{cases} xe^{-x} & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

ز) $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}x^2+2x & |x|\leqslant 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$

۶. مقدار k را در تابع‌های زیر طوری بیابید که به ازای آن $f(x)$ یک تابع چگالی شود (α یک مقدار ثابت مثبت است).

الف) $f(x)=\begin{cases} ke^{-x} & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x^3} & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

ج) $f(x) = \begin{cases} ke^{-\alpha x} & x \geqslant ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$ د) $f(x) = \begin{cases} kx^{-۲} & x \geqslant ۸۰۰ \\ ۰ & x < ۸۰۰ \end{cases}$

۷. کدامیک از دو تابع زیر می توانند تابع چگالی باشند؟

$$g(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \dfrac{e^{-۲x}}{۲} & x \geqslant ۰ \end{cases}, \qquad f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ & ۰ \leqslant x < ۲ \\ ۱۶ - ۲x & x \geqslant ۲ \end{cases}$$

۸. فرض کنید x متغیر دلخواه پیوسته‌ای باشد که تابع چگالی به‌صورت زیر دارد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳} + kx^۲ & ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۰ & x < ۰ \text{ یا } x > ۱ \end{cases}$$

اولاً مقدار k را یافته و ثانیاً احتمالات $P(\frac{۱}{۲} < X < \frac{۳}{۴})$ و $P(X \geqslant \frac{۱}{۲})$ را محاسبه کنید.

- اگر $\int_a^b f(x)dx = A$ مقداری مثبت و تابع $f(x)$ هم روی فاصلهٔ $[a,b]$ نامنفی باشد آنگاه: $\frac{۱}{A}\int_a^b f(x)dx = ۱$ و از اینرو تابع $p(x) = \frac{۱}{A}f(x)$ را می‌توان تابعی با انتگرال معیّن واحد روی $a \leqslant x \leqslant b$ یکی گرفت. در مسائل ۸ تا ۱۱، اولاً $p(x)$ مناسب را یافته و سپس این احتمال که رویدادی، $p(x)$ را در دومین حوزه از مقادیرش قبول کند، بدست آورید.

۹. $f(x) = x^۲$ که $x \in [۰, ۲]$، رویدادی به‌طوری‌که $۱ \leqslant x \leqslant ۲$.

۱۰. $f(x) = x(x^۲ + ۱)^۲$ که $x \in [۱, ۲]$، رویدادی که $|x - \frac{۱}{۲}| \leqslant \frac{۱}{۴}$.

۱۱. $f(x) = xe^{-x^۲}$ که $x \geqslant ۰$، رویدادی که $x \leqslant ۱$.

۱۲. $f(x) = \dfrac{۱}{e^x + e^{-x}}$ که $x \in \mathbb{R}$، رویدادی که $\ln(۲) \leqslant x \leqslant \ln(۱۰)$.

۱۳. گشتاورهای اول و دوم تابع چگالی احتمال‌های زیر را در هر فاصله به‌دست آورید.

الف) $p(x) = \frac{۳}{۸}x^{۲}, \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۲$

ب) $p(x) = \frac{۶}{۲۷}(۳x - x^{۲}), \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۳$

ج) $p(x) = \frac{۱}{۱۸}(x-۵)^{۲}, \quad ۲ \leqslant x \leqslant ۸$

۱۴. در مسائل زیر μ را برای هریک از توابع چگالی احتمال داده شده به‌دست آورید.

الف) $p(x) = \frac{۳x^{۲}}{۵۶}, \quad x \in [۲,۴]$

ب) $p(x) = \frac{۶x - ۳x^{۳}}{۴}, \quad |x| \leq ۱$

ج) $P(x) = ae^{\frac{-x}{۲}}, \quad -۲ \leqslant x \leqslant ۳,$ (a عددی مناسب است)

د) $p(x) = \ln(x), \quad ۱ \leqslant x \leqslant e$

ه) $p(x) = |x|, \quad -۱ \leqslant x \leqslant ۱$

۱۵. با کمک گرفتن از جدول مساحت منحنی نرمال، مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

الف) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}} \int_{۳}^{۷} e^{\frac{-۱}{۲}\left(\frac{x-۳}{۲}\right)^{۲}} dx$

ب) $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-۱}^{۳/۲} e^{-\left(\frac{x+۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}} dx$

ج) $\frac{۱}{۴\sqrt{۲\pi}} \int_{۲}^{۵/۱} e^{\frac{-x^{۲}}{۱۶}}\left(\frac{۱}{۲}\right) dx$

د) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}} \int_{۱}^{۴} e^{\frac{-۱}{۲}\left(۱-\frac{x}{۲}\right)^{۲}} dx$

۱۶. با استفاده از مقادیر منحنی نرمال، در صورت امکان مقداری برای α چنان معیّن کنید که مقدار انتگرال داده شده با عدد متناظر مساوی باشد.

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\alpha} e^{-\frac{۱}{۲}x^{۲}}dx = ۰/۳۷$ ب) $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{۱}{۲}x^{۲}}dx = ۰/۶۰$

ج) $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{۱}{۲}x^{۲}}dx = ۰/۵۰$ د) $\frac{۱}{۳\sqrt{۲\pi}}\int_{-۱}^{\alpha} e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x+۱}{۳}\right)^{۲}}dx = ۰/۴۰$

۱۷. در هر یک از تمرینات زیر حجم حاصل از دوران ناحیه داده شده را حول محور xها بدست آورید.

الف) $y = ۴ - x^{۲}$, $y = ۰$ ب) $y = x$, $y = ۰$ $y = ۴$

ج) $y = e^{x-۱}$, $y = x$, $x = ۰$ د) $y = ۴x - x^{۲}$, $y = x^{۲}$

۱۸. پاره‌خط‌های زیر حول محور x و محور y به ترتیب دوران می‌کند. حجم دوّار چیست؟
الف) پاره‌خط واصل بین مبدأ تا $(۶,۳)$.
ب) پاره‌خط واصل بین مبدأ تا $(۴,۸)$.

۱۹. یک تخم مرغ را می‌توان از دوران ناحیه تولید شده توسط تابع $y = \frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^{۲}}$ که در آن $-۳ \leqslant x \leqslant ۳$ حول محور xها در نظر گرفت. حجم این تخم مرغ چقدر است؟

• در تمرینات ۱۹ تا ۲۷ معین کنید آیا تابع داده شده، جوابی برای معادله دیفرانسیل است یا خیر.

۲۰. $y' = ۳x^{۲}$، $y = x^{۳} + ۵$.

۲۱. $y' = ۶x^{۲} - ۱$، $y = ۲x^{۳} - x + ۱$.

۲۲. $y' - \frac{۳}{x}y = ۰$، $y = ۲x^{۳}$.

۲۳. $x^{۲}y'' - ۲y = ۰$، $y = x^{۲}$.

۲۴. $y'' - ۳x^۲y' - ۶xy = ۰$، $y = e^{x^۳}$.

۲۵. $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{۴ - x^۲}}$، $y = \sqrt{۴ - x^۲} + C$.

۲۶. $۳y' + y - ۷ = ۰$، $y = Ce^{-\frac{t}{۳}} + ۷$.

۲۷. $y'' - ۳y' - ۴y = ۰$، $y = C_۱e^{۴x} + C_۲e^{-x}$.

۲۸. $x(y' - ۱) - (y - ۴) = ۰$، $y = x\ln x + Cx + ۴$.

- معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را حل کنید.

۲۹. $\frac{dP}{dt} = \sqrt{t} + e^{-t}$

۳۰. $y' = \sqrt{\frac{x}{y}}$

۳۱. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

۳۲. $y' = (۲x - ۱)(y + ۳)$

۳۳. $y' = ۳e^y\sqrt{x + ۱}$

۳۴. $y' - y(x + ۱) = ۰$

۳۵. $y' = (e^y + ۱)^{-۱}(x - ۲)^{۱۰}$

۳۶. $(y + ۱)y' = ۲x$

۳۷. $y' = xe^{x-y}$

۳۸. $y' = \frac{x}{y} - \frac{x}{۱ + y}$

۳۹. $x' = \frac{\ln t}{\ln x}$

۴۰. $y' = \frac{x^۲ + ۲}{۳y^۲}$

۴۱. $y' = \frac{x + ۳}{x}$

۴۲. $yy' = ۲xe^x$

۴۳. $y' = \frac{x}{۱ + x^۲}$

۴۴. $e^x(y' + ۱) = ۱$

۴۵. کدام یک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم $y^{(۴)} - ۱۶y = ۰$ است؟

$$y_۱ = e^{-۲x}, y_۲ = ۵\ln x, y_۳ = \frac{۴}{x}, y_۴ = ۴e^{۲x}$$

۴۶. کدامیک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل مرتبه سوم $y''' - 3y' + 2y = 0$ است؟

$$y_1 = \frac{2}{9}xe^{-2x}, y_2 = 4e^x + \frac{2}{9}xe^{-2x}, y_3 = x\ln x$$

۴۷. کدام تابع جواب معادله $\frac{dQ}{dt} = k(B-Q)$ که در آن k و B مقدار ثابت است؟

$$Q_1 = B^2 - Ce^{-kt}, Q_2 = B - Ce^{-kt}$$

- برای هر یک از معادلات زیر یک جواب عمومی و یک شرط اولیه داده شده است. اولاً جواب عمومی بودن تابع‌ها را بررسی و ثانیاً با توجه به شرط اولیه، یک جواب خصوصی از آن استخراج کنید.

۴۸. $y' + 2y = 0$، $y = Ce^{-2x}$، $y(0) = 3$.

۴۹. $y'' - y' - 12y = 0$، $y = C_2e^{4x} + C_2e^{-3x}$، $y(0) = 5$، $y'(0) = 6$.

۵۰. $y' + (2x-1)y = 0$، $y = Ce^{x-x^2}$، $y(1) = 2$.

- معادلات دیفرانسیل با شرط اولیه زیر داده شده‌اند، یک جواب خصوصی بدست آورید.

۵۱. $yy' - e^x = 0$، $y(0) = 4$.

۵۲. $y' = x^2(1+y)$، $y(0) = 3$.

۵۳. $\sqrt{x} + \sqrt{y}y' = 0$، $y(1) = 4$.

۵۴. $y' = \frac{x^2}{y^3}$، $y(1) = 1$.

۵۵. $x^2e^{2y}dy = (x^3+1)dx$، $y(1) = 0$.

۵۶. $xe^y dx = (x+1)dy$، $y(0) = 0$.

۵۷. $y' = 5x^4 - 3x^2 - 2y$، $y(1) = 4$.

۵۸. $(3x^2+2)^3y' - xy^2 = 0$، $y(0) = 2$.

۵۹. $y' = \frac{۳x\sqrt{۱+y^۲}}{y}$، $y > ۰$، $y(۱) = \sqrt{۸}$.

۶۰. $y' = y^۲\sqrt{۴-x}$، $y(۴) = ۲$.

۶۱. $x' = xt\sqrt{t+۱}$، $x(۰) = ۱$.

۶۲. $y' = xe^{y-x^۲}$، $y(۱) = ۰$.

۶۳. $y' = \frac{y+۱}{x(y-۱)}$، $y(۱) = ۲$.

۶۴. $۲y' = \frac{xe^{-y}}{\sqrt{x^۲+۳}}$، $y(۱) = ۰$

- در معادلات زیر y' فرمولی است که محاسبه شیب خط مماس بر نمودار y با آن داده می‌شود. به کمک نقطه داده شده، ضابطه y را دقیقاً بدست آورید.

۶۵. $y' = x^{-\frac{۱}{۲}} + x$، $A(۱,۲)$.

۶۶. $y' + ۲y = e^{-۲x}$، $A(۱,۴)$.

۶۷. $y' = ۴x + ۱$، $A(۱,۲)$.

۶۸. $x^۲y' - ۴xy = ۱۰$، $A(۱,۱۰)$.

۶۹. $y' = e^{-x} + x^۲$، $A(۰,۴)$.

۷۰. $y' = \frac{۶x}{۵y}$، $A(-۱,۱)$.

۷۱. $y' = -x(x+۱)$، $A(-۱,۵)$.

۷۲. $y' + ۲y - ۱ = ۰$، $A(۰,۱)$.

۷۳. $y' = (x+۱)e^{-x}$، $A(۱,۵)$.

- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر به حالت استاندارد در آورید.

۷۴. $x^۳ - ۲x^۲y' + ۳y = ۰$

۷۵. $y + ۱ = (x-۱)y'$

۷۶. $y' - ۵(۲x - y) = ۰$

۷۷. $x = x^۲(y' + y)$

- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر را حل کنید.

۷۸. $y' + ۳y = ۶$

۷۹. $y' + ۵y = ۱۵$

۸۰. $\frac{x^{۲}+۳}{x}=y'$

۸۱. $x^{۳}y'+xy=\frac{۱}{x}e^{\frac{۱}{x^{۲}}}$

۸۲. $xy'+y=x^{۲}\ln x$

۸۳. $y'=\frac{e^{-۲x}}{۱+e^{-۲x}}$

۸۴. $y'+x^{۲}y-x^{۲}=\circ$، $y(\circ)=\circ$

۸۵. از روابط زیر تابع y را بدست آورید (دو بار انتگرال‌گیری کنید).

الف) $y''=-۳x^{۲}+۴x$ ب) $y''=۲e^{-x}+۳$ ج) $y''=x+۱$.

۸۶. از روی اطلاعاتی که در هر یک از موارد ذیل داده شده است، ضابطه‌ای برای $f(x)$ حدس بزنید.

الف) $f(۲)=۱\circ$، $f'(۲)=۵$، $f''(x)=۲$،

ب) $f(\circ)=۳$، $f'(\circ)=۶$، $f''(x)=x$،

ج) $f(\circ)=\circ$، $f'(۸)=۶$، $f''=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}$

۸۷. رابطه بین هزینه انبارداری و تعداد شبکه‌های روغن انبارداری به‌صورت $y'=kx+a$ داده شده است که در آن k و a مقدار ثابت و x تعداد شبکه‌ها و y هزینه ماهانه انبارداری می‌باشد. اگر مقدار هزینه ثابت ۱۰ دلار باشد مطلوبست تابع هزینه کل.

۸۸. فرض کنید یک کالای خاص دارای توابع تقاضا و عرضه خطی به‌صورت زیر است:

$$d(p)=a-bp,\quad s(p)=۶+sp$$

که در آن p قیمت و بقیه پارامترها ثابت هستند. اگر قیمت p تابعی از زمان t در نظر گرفته شود و نرخ تغییر p، با تفاضل $d-s$ متناسب باشد: $p'=k(d-s)$ اولاً $A(t)$ را بدست آورده و رسم کنید و ثانیاً چه وضعی پیش می‌آید وقتی زمان در حالت طولانی در نظر بگیریم $(t\to\infty)$ ؟

۸۹. برای کالایی خاص، توابع تقاضا و عرضه به ترتیب به وسیله

$$d(t) = ۶۰ - p - ۳p', \quad s(t) = ۱۰۰ + p - ۴p'$$

داده شده است که در آن $p(t)$ تابع قیمت برحسب t می‌باشد. اگر به ازای $t = ۰$، قیمت $p = ۸$ مفروض باشد مطلوبست تابع قیمت $p(t)$. چه اتفاقی برای قیمت می‌افتاد اگر $t \to \infty$؟

۹۰. تابع هزینه نهایی کالایی در بازار به وسیله $MR = \frac{۸۰۰}{x+۱}$ داده می‌شود. مطلوبست درآمد کل.

۱.۵.۳ جواب و راهنمایی ها

۱. برای **الف** مقدار $AV(f)$ برابر است با $\int_۰^۱ x^{\frac{۱}{۲}}dx = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^۱ = \frac{۲}{۳}$. برای **ج** داریم:

$$AV(f) = \frac{۱}{۴-۱}\int_۱^۴ x\sqrt{x^۲-۱}\,dx = \frac{۱}{۳}\int_۱^۴ \sqrt{x^۲-۱}\underbrace{d\left(\frac{x^۲}{۲}\right)}_{d(x^۲)/۲},$$

$$= \frac{۱}{۲\times ۳}\int_۱^۴ \sqrt{x^۲-۱}\,d(x^۲) = \frac{۱}{۶}\int_۱^۴ \sqrt{x^۲-۱}\,d(\underbrace{x^۲-۱}_{t}),$$

$$= \frac{۱}{۶}\int_{t=۰}^{t=۱۵} \sqrt{t}\,dt = \frac{۱}{۸}\left(\frac{۲}{۳}t^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^{۱۵}\right) = \frac{۱}{۶}\times(۱۰\sqrt{۱۵}).$$

۲. برای **ب**، مقدار متوسط روی بازه برابر است با $AV(f) = \int_{-۱}^{۱} e^x dx = e - e^{-۱}$. حال اگر x مقداری باشد که $f(x) = e - e^{-۱}$ آنگاه $۲e^x = e - e^{-۱}$ و از آنجا $e^x = \frac{e-e^{-۱}}{۲}$ و یا $x = \ln\left|\frac{e-e^{-۱}}{۲}\right|$. برای **د**، انتگرال اصلی را به شکل $\int_۰^۱ ۲\left(\frac{d(x^۲+۱)}{x^۲+۱}\right)$ درآورده و با انتخاب $t = x^۲+۱$، انتگرال معادل $۲\int_{+۱}^{t=۲}\frac{dt}{t}$ را حل کنید. جواب برابر است با $۲\ln ۲$.
اکنون مقداری از x که برای آن $f(x) = ۲\ln ۲$ به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\frac{۴x}{x^۲+۱} = ۲\ln ۲ \longrightarrow (x^۲+۱)\ln ۲ = ۲x \longrightarrow x^۲ - \frac{۲}{\ln ۲}x + ۱ = ۰,$$

که بسادگی قابل حل است:

$$x_۱ = \frac{۱+\sqrt{۱+(\ln ۲)^۲}}{\ln(۲)}, \quad x_۲ = \frac{۱-\sqrt{۱+(\ln ۲)^۲}}{\ln(۲)},$$

۳. برای **الف:**

$$P(۲\leqslant X\leqslant ۴) = \int_۲^۴ \frac{۱}{۲}(x^۲+x+۱)dx = \frac{۱}{۲}\times\left(\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۲}{۲}+x\right)\Big|_۲^۴ = \frac{۴۰}{۳}.$$

برای **ب** اگر $t = x+۱$:

$$P(X\geqslant ۴) = \int_۴^{+\infty}\frac{dx}{(x+۱)^۲} = \int_۴^{+\infty}\frac{d(x+۱)}{(x+۱)^۲} = \int_{t=۵}^{t=\infty}\frac{dt}{t^۲} = -\frac{۱}{t}\Big|_۵^{\infty} = \frac{۱}{۵}.$$

در **د** و برای محاسبهٔ $P(۲\leqslant X\leqslant ۳)$ انتگرال $\int_۲^۳ \frac{e^{-\frac{x}{۲}}}{۲}dx$ را بدست می آوریم. ابتدا آنرا به

شکل $-\int_{۲}^{۳} e^{-\frac{x}{۲}} d\left(-\frac{x}{۲}\right)$ درآورده و با انتخاب $t=-\frac{x}{۲}$ به حاصل

$$-e^t\Big|_{-۱}^{-\frac{۳}{۲}} = e^{-۱} - e^{-\frac{۳}{۲}} \simeq ۰/۱۴.$$

می رسیم. همینطور برای $P(X \geqslant ۲) = \int_{۲}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{۲}}}{۲} dx$ داریم:

$$-e^t\Big|_{-۱}^{-\infty} = e^t\Big|_{-\infty}^{-۱} = e^{-۱} - ۰ = e^{-۱}.$$

که در آن t را $-\frac{x}{۲}$ گرفتیم. برای **ی**،

$$P(X \geqslant ۰) = \int_{۰}^{+\infty} \frac{x}{۴} e^{-\frac{x}{۲}} dx = \frac{۱}{۴}\int_{۰}^{+\infty} x e^{-\frac{x}{۲}} dx,$$

اولاً انتگرال فوق را باید به روش جزء بجزء حل و سپس استفاده کرد. اگر $t=-\frac{x}{۲}$ آنگاه مقدار $x=۰$، $t=۰$ و مقدار $x=\infty$، $t=-\infty$ را نتیجه می‌دهند و بنابراین:

$$P(X \geqslant ۰) = -\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty} -\frac{x}{۲} e^{-\frac{x}{۲}} dx = \int_{۰}^{\infty} -\frac{x}{۲} e^{-\frac{x}{۲}} d(-\frac{x}{۲}) = \int_{۰}^{-\infty} t e^t dt,$$

با حل انتگرال نامعین متناظر آخری از روش جزء بجزء به تابع اولیهٔ $(te^t - e^t)$ رسیده و لذا

$$P(X \geqslant ۰) = (te^t - e^t)\Big|_{۰}^{-\infty} = ۱.$$

برای **ز**، اگر $-۲ \leqslant X-۳ \leqslant ۲$ پس $۱ \leqslant X \leqslant ۵$ و لذا

$$\begin{aligned} P(-۲ \leqslant X-۳ \leqslant ۲) &= P(۱ \leqslant X \leqslant ۵) \\ &= \int_{۱}^{۵} \frac{۱}{۴(x+۱)^{۲}} dx = \frac{۱}{۴}\int_{۱}^{۵} \frac{d(x+۱)}{(x+۱)^{۲}}. \end{aligned}$$

اگر $t=x+۱$ آنگاه

$$P(۱ \leqslant X \leqslant ۵) = \frac{۱}{۴}\int_{۲}^{۶} \frac{dt}{t^{۲}} = -\frac{۱}{۴t}\Big|_{۲}^{۶} = \frac{۱}{۱۲}.$$

به فرم مشابه:

$$P(|X| \leqslant ۲) = P(۰ \leqslant X \leqslant ۲) = \int_{۰}^{۲} \frac{۱}{۴(x+۱)^{۲}} dx = \frac{-۱}{۴(x+۱)}\Big|_{۰}^{۲} = \frac{۱}{۶}.$$

۴. باید مقدار a را طوری بدست آوریم که $P(۰ \leqslant X \leqslant a) = \frac{۸}{۱۰}$ ولی این احتمال با $\int_{۰}^{a} \frac{dx}{(x+۱)^{۲}} = \frac{a}{a+۱}$ برابر بوده و لذا تساوی $\frac{a}{a+۱} = \frac{۸}{۱۰}$ زیر را حل می کنیم $(a=۴)$. **۵.**

ب: اولاً چون $x \geqslant ۱۰$ لذا $x^{۳} \geqslant ۱۰۰۰$ و بنابراین $f(x) \geqslant ۰$. از طرفی

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۲۰۰}{x^{۳}} dx = \int_{-\infty}^{۱۰} (۰ \times dx) + \int_{۱۰}^{+\infty} \frac{۲۰۰}{x^{۳}} dx = ۰ + ۲۰۰ \times -\frac{x^{-۲}}{۲}\Big|_{۱۰}^{+\infty} = ۱$$

د: تابع نمایی همواره مثبت است و لذا $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ همواره نامنفی است. بعلاوه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \left[\int_{-\infty}^{۰} + \int_{۰}^{+\infty}\right] f(x) dx = ۰ + \int_{۰}^{+\infty} ۳e^{-۳x} dx = -e^{-۳x}\Big|_{۰}^{+\infty} = ۱$$

برای **ز** توجه کنید که برای حل انتگرال از روش جزء بجزء استفاده می‌شود. درباره **ز**، انتگرال کلی را به مجموعی از انتگرالها به شکل $\left[\int_{-\infty}^{-۱} + \int_{-۱}^{۱} + \int_{۱}^{\infty}\right] f(x)dx$ می نویسیم. دو انتگرال اولی و سومی بنابه فرض صفرند(چرا؟) پس مجموع فقط به انتگرال $\int_{-۱}^{۱} f(x)dx$ تبدیل میشود: $\int_{-۱}^{۱} f(x)dx = \int_{-۱}^{۱} (\frac{۳}{۴}x^{۲} + ۲x)dx = \left(\frac{x^{۳}}{۲} + x^{۲}\right)\Big|_{-۱}^{۱} = ۱$. **۶.** کافی است شرایط تابع چگالی بودن را روی کل خط اعداد بررسی و تحقیق کنیم. درباره **ج** باید داشته باشیم: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = ۱$. با جدا سازی مناسب داریم:

$$\left[\int_{-\infty}^{۰} + \int_{۰}^{+\infty}\right] f(x)\, dx = ۰ + \int_{۰}^{\infty} ke^{-\alpha x}\, dx = -\frac{k}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_{۰}^{\infty} = +\frac{k}{\alpha}.$$

پس $\frac{k}{\alpha} = ۱$ و لذا $k = \alpha$. درباره **د** همانند قسمت قبلی باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} ۱ = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \left[\int_{-\infty}^{۸۰۰} + \int_{۸۰۰}^{+\infty}\right] f(x) dx \\ &= \int_{۸۰۰}^{\infty} kx^{-۲} dx = -kx^{-۱}\Big|_{۸۰۰}^{\infty} = \frac{k}{۸۰۰}, \end{aligned}$$

و بنابراین $\frac{k}{۸۰۰} = ۱$ و لذا $k = ۸۰۰$. **۷.** اگر تابع g یک تابع چگالی روی $\mathbb{R}$ باشد، اولاً باید نامنفی و ثانیاً $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = ۱$. تابع همواره نامنفی است و برای قسمت دوم داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx &= \left[\int_{-\infty}^{۸۰۰} + \int_{۸۰۰}^{+\infty}\right] g(x) dx = ۰ + \int_{۰}^{\infty} g(x) dx \\ &= \int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-۲x}}{۲} dx = -\frac{۱}{۴} e^{-۲x}\Big|_{۰}^{\infty} = +\frac{۱}{۴} \neq ۱. \end{aligned}$$

و بنابراین g یک تابع چگالی سراسری نیست. **۸.** با روشی که در ۶ انجام شد، مقدار $k = ۲$

بدست می‌آید. حال:

$$P(X \geqslant \tfrac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\tfrac{1}{3} + 2x^2)dx = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{3}{4} < 1.$$

۹. بنابه تعریف $p(x) = \frac{1}{\int_0^2 x^2dx} \times x^2 = \frac{x^2}{\frac{x^3}{3}\big|_0^2} = \frac{3}{8}x^2$ و بنابراین

$$P(1 \leqslant x \leqslant 2) = \int_1^2 p(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{8}x^2dx = \frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = \frac{7}{8}.$$

۱۰. اولاً هرگاه $|x - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{4}$ آنگاه $-\frac{1}{4} \leqslant x - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}$ و لذا $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$ به کمک تغییر متغیر $t = x^2 + 1$،

$$p(x) = \frac{1}{\int_1^2 x(x^2+1)^2dx} \times x(x^2+1)^2 = \frac{2}{39}x(x^2+1)^2,$$

و بنابراین

$$P\left(\tfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \tfrac{3}{4}\right) = \int_{1/4}^{3/4} \tfrac{2}{39}x(x^2+1)^2dx = \frac{1}{39}\frac{(x^2+1)^3}{3}\Big|_{1/4}^{3/4} \simeq 0/01.$$

۱۲. با استفاده از جدول انتگرال‌ها، $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2}$ و بنابراین $P(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{e^x+e^{-x}}\right)$.
از اینرو $P(\ln(2) \leqslant x \leqslant \ln(10))$ برابر است با:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 10} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{e^x+e^{-x}}\right) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}(e^x)\Big|_{\ln 2}^{\ln 10} \simeq 0/14.$$

۱۳. برای **الف** داریم:

$$\mu = \int_0^2 \tfrac{3}{8}x^3dx = \tfrac{3x^4}{32}\Big|_0^2 = \tfrac{3}{2}.$$

$$\sigma^2 = \int_0^2 \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 \left(\tfrac{3}{8}x^2\right)dx = \tfrac{3}{8}\int_0^2 (x^4 - 3x^3 + \tfrac{9x^2}{4})dx,$$

$$= \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{x^5}{5} - \tfrac{3}{4}x^4 - \tfrac{3x^3}{4}\right)\Big|_0^2 = \tfrac{3}{20}.$$

برای **ج** داریم:

$$\mu=\int_{۲}^{۸}\tfrac{۱}{۱۸}(x-۵)^{۲}x\,dx=\left(\tfrac{۱}{۷۲}x^{۴}-\tfrac{۵}{۲۷}x^{۴}+\tfrac{۲۵}{۳۶}x^{۲}\right)\Big|_{۲}^{۸}=۵.$$

$$\sigma^{۲}=\int_{۲}^{۸}(x-۵)^{۲}\left(\frac{۱}{۱۸}(x-۵)^{۲}\right)dx=\frac{۱}{۱۸}\int_{۲}^{۸}(x-۵)^{۴}dx$$
$$=\frac{۱}{۱۸\times ۵}(x-۵)^{۵}\Big|_{۲}^{۸}=\frac{۲۷}{۵}.$$

۱۴. در مورد **ب**، $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ و

$$\mu=\int_{-۱}^{۱}p(x)\cdot x\,dx=\int_{-۱}^{۱}\frac{۶x^{۲}-۳x^{۴}}{۴}\,dx=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۶}{۳}x^{۳}-\frac{۳}{۵}x^{۵}\right)\Big|_{-۱}^{۱}=\frac{۷}{۱۰}.$$

برای **ج** داریم:

$$\mu=\int_{-۲}^{۳}ax\cdot e^{-\frac{x}{۲}}dx=a\left[-۲(x+۲)e^{-\frac{x}{۲}}\right]_{-۲}^{۳}=-۱۰ae^{-\frac{۳}{۲}}.$$

توجه کنید انتگرال نامعین متناظر را به روش جزء به جزء حل کردیم. برای مورد **ه**:

$$\mu=\int_{-۱}^{۱}x\cdot|x|\,dx=\int_{-۱}^{۰}x(-x)dx+\int_{۰}^{۱}x(x)dx=-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}=۰.$$

۱۵. برای **الف** قرار می‌دهیم $t=\frac{x-۳}{۲}$ و لذا انتگرال به فرم معادل زیر در می‌آید:

$$A=\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{۲}e^{\frac{۱}{۲}t^{۲}}dt.$$

در جدول بطور عمودی حرکت می‌کنیم تا به عدد ۲ برسیم. چون کران بالای انتگرال اعشار ندارد پس $۲A=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲}e^{-\frac{۱}{۲}t^{۲}}dt=۰/۴۷۷۲$ و از آنجا $A=۰/۹۵۴۴$ بدست می‌آید. برای **ب**، انتخاب می‌کنیم $z=\frac{x+۱}{\sqrt{۲}}$. لذا وقتی $x=-۱$؛ $z=۰$ و هنگامی که $x=۳/۲$، داریم $z=\frac{۳/۳}{\sqrt{۲}}\simeq ۲/۳۳$ و لذا $A=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\displaystyle\int_{۰}^{۲/۳۳}e^{-\frac{۱}{۲}z^{۲}}dz$. در جدول بطور عمودی عدد ۲/۳ را پیدا کرده و بطور افقی چنان حرکت می‌کنیم تا به عدد ۰/۴۹۰۱ برسیم. از اینرو $A=۰/۴۹۰۱$.

برای **د** قرار می‌دهیم $t=۱-\frac{x}{۲}$ و لذا $x=۲-۲t$ و بنابراین

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}}\int_{۱}^{۴}e^{-\frac{۱}{۲}(۱-\frac{x}{۲})^{۲}}dx\Rightarrow\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}}\int_{\frac{۱}{۲}}^{-۱}e^{-\frac{۱}{۲}t^{۲}}(-۲dt),$$

که با تعویض حدود انتگرال سمت راست به انتگرال $A=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-۱}^{\frac{۱}{۲}}e^{-\frac{۱}{۲}t^{۲}}dt$ می‌رسیم. چون

حد پایین، عدد صفر نیست لذا با جداسازی انتگرال به انتگرال‌های زیر مسئله را جلو می‌بریم، یعنی: $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$. در انتگرال اولی، انتخاب می‌کنیم $z = -t$ و لذا

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1}^{0} e^{-\frac{1}{2}z^2}(-dz) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt,$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} e^{\frac{1}{2}z^2}dz}_{0/3413} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt}_{0/1915} = 0/5328.$$

۱۶. در مورد **الف** چون $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 0/37$ و در جدول، این عدد مربوط به ۱/۳ است، لذا $\alpha = 1/3$. درباره **ج** توجه کنید که که از جداسازی زیر به نحو مناسب استفاده کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx, = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2}d(-x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx.$$

در واقع $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ روی هر بازه متقارن تابعی زوج است. درباره **د** قرار می‌دهیم $z = \frac{x+1}{3}$. لذا

$$0/40 = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha+1}{3}} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz.$$

از روی جدول $\frac{\alpha+1}{3}$ لزوماً همان ۱/۲۹ است و این یعنی $\alpha = 0/204$. **۱۷.** در مورد **الف** توجه داریم که تابع، محور را در دو نقطهٔ $x = \pm 2$ قطع می کند و لذا بکمک فرمول باید انتگرال $\int_{-2}^{2}\pi(4-x^2)^2dx$ را حل کنید. مقدار آن $\frac{512\pi}{15}$ است. برای **ج**، با کمی دقت نقطهٔ تقاطع دو تابع $x = 1$ است.[15] چون یکی از دو حد انتگرال حجم معلوم است یعنی $a = 0$، لذا حجم دوّار حول محور طول برابر است با $\int_{0}^{1}\pi(e^{2(x-1)} - x^2)dx = -0/5e^{-2} + \frac{1}{6}$. **۲۰.** از روی $y = x^3 + 5$ داریم $y' = 3x^2$ و لذا با یک مشتق‌گیری از y معادله دیفرانسیل ظاهر شد و

---

[15] مقدار دو تابع به ازای این عدد یکی است.

بنابراین y جواب معادله است. **۲۱.** چون $y = ۲x^۳ - x + ۱ \longrightarrow y' = ۶x^۲ - ۱$، پس مجدداً y یک جواب معادله دیفرانسیل است. **۲۳.** داریم: $y = x^۲ \longrightarrow y' = ۲x \longrightarrow y'' = ۲$.
حال در معادله $x^۲y'' - ۲y = ۰$ به جای y'' و y مفروضات را جایگزین می‌کنیم:

$$۰ = x^۲(۲) - ۲(x^۲) = ۰$$

که یک معادله کاملاً درست است. بنابراین y یک جواب معادله دیفرانسیل است. **۲۷.**

$$y = C_۱e^{۴x} + C_۲e^{-x} \longrightarrow y' = ۴C_۱e^{۴x} - C_۲e^{-x} \longrightarrow y'' = ۱۶C_۱e^{۴x} + C_۲e^{-x}$$

لذا

$$\begin{aligned} ۰ = y'' - ۳y' - ۴y &= \left(۱۶C_۱e^{۴x} + C_۲e^{-x}\right) - ۳\left(۴C_۱e^{۴x} - C_۲e^{-x}\right) \\ &= -۴\left(C_۱e^{۴x} + C_۲e^{-x}\right) = ۰ \end{aligned}$$

پس y یک جواب معادله دیفرانسیل است. **۲۹.** با طرفین وسطین کردن داریم:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = \sqrt{t} + e^{-t} &\longrightarrow dP = (\sqrt{t} + e^{-t})dt \\ &\xrightarrow{\int} P = \int \left(\sqrt{t} + e^{-t}\right) dt = \left(\frac{۲}{۳}t^{\frac{۳}{۲}} - e^{-t}\right) + C. \end{aligned}$$

۳۲.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = (۲x - ۱)(y + ۳) &\longrightarrow \frac{dy}{y + ۳} = (۲x - ۱)dx, \\ &\xrightarrow{\int} \ln|y + ۳| = (x^۲ - x) + C. \end{aligned}$$

۳۳. y' را به‌صورت $\frac{dy}{dt}$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = ۳e^y\sqrt{x + ۱} &\longrightarrow \frac{dy}{۳e^y} = \sqrt{x + ۱}dx, \\ &\xrightarrow{\int} \int \frac{e^{-y}}{۳}dy = \int \sqrt{x + ۱}dx, \\ &\longrightarrow -\frac{۱}{۳}e^{-y} = \frac{۲}{۳}(x + ۱)^{\frac{۳}{۲}} + C. \end{aligned}$$

۳۴. $\frac{dy}{dx} = y(x + ۱) \longrightarrow \frac{dy}{y} = (x + ۱)dx \xrightarrow{\int} \ln|y| = \left(\frac{x^۲}{۲} + x\right) + C.$ **۳۵.** y' را به

صورت $\frac{dy}{dx}$ نوشته، جملات مناسب را جابجا کرده $\frac{dy}{(e^y+1)^{-1}} = (x-2)^9 dx$ و با انتگرالگیری از طرفین به $e^y + y = \frac{(x-2)^{10}}{10} + C$ می رسیم. **۳۷.** داریم، $e^y dy = xe^x dx$ و با انتگرالگیری، جواب عمومی $e^y = (xe^x - x) + C$ حاصل می شود. **۴۰.** با جابجایی مناسب عوامل هم شکل $3y^2 dy = (x^2+2)dx$ بدست آمده و نهایتاً جواب عمومی $y^3 = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right) + C$ بدست می آید. **۴۳.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2} \longrightarrow dy = \frac{x}{1+x^2}dx \xrightarrow{\int} y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
۴۵. توجه کنید کافی است تساوی $y^{(4)} = 16y$ را برای توابع داده شده بررسی کنید. مسلماً y_2 و y_3 جواب نیستند. **۴۶.** مطلب را برای y_3 بررسی می‌کنیم. برای دو تابع بعدی خودتان بررسی کنید.

$$y_3 = x\ln x \longrightarrow y_3' = (\ln x + 1) \longrightarrow y_3'' = \frac{1}{x} + 0 \longrightarrow y_3''' = \frac{-1}{x^2}.$$

اکنون موارد خواسته شده را در $y''' - 3y' + 2y = 0$ قرار می‌دهیم:

$$-\frac{1}{x^2} - 3(\ln x + 1) + 2(x\ln x) \neq 0.$$

و لذا y_3 جواب معادله دیفرانسیل نیست. **۴۸.** به سادگی جواب بودن y بدست می‌آید. در $y = Ce^{-2x}$ به جای x مقدار صفر و به جای y مقدار ۳ قرار می‌دهیم: $Ce^{0} = 3 \to C = 3$ و لذا $y = 3e^{-2x}$ جواب خصوصی مورد نظر است. **۵۰.** بررسی جواب بودن y را به دانشجو واگذار می‌کنیم. اکنون $x = 1$ و $y = 2$ را در جواب قرار می‌دهیم:

$$2 = Ce^{1-1^2} = Ce^{0} \longrightarrow C = 2.$$

و لذا جواب خصوصی عبارت است از $y = 2e^{x-x^2}$. **۵۱.** اولاً معادله دیفرانسیل را حل می‌کنیم. اول به $y\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^x$ بعد به $ydy = e^x dx$ و در نهایت با انتگرالگیری به $\frac{y^2}{2} = e^x + C$ می رسیم. حال قرار می‌هیم $x = 0$ و $y = 4$:

$$\frac{16}{2} = e^{0} + C \longrightarrow C = 8 - 1 = 7$$

و لذا جواب خصوصی عبارت است از: $\frac{y^{۲}}{۲} = e^x + ۷$. **۵۳.** معادله دیفرانسیل را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = ۰ \longrightarrow \sqrt{y}dy = -\sqrt{x}dx$$

$$\xrightarrow{\int} \frac{۲}{۳}y^{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + C \xrightarrow[y=۴]{x=۱} C = ۶$$

پس جولب خصوصی به شکل $\frac{۲}{۳}y^{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + ۶$ در می‌آید. **۵۵.** معادله دیفرانسیل را حل می‌کنیم:

$$x^{۲}e^{۲y}dy = (x^{۳} + ۱)dx \longrightarrow e^{۲y}dy = \left(\frac{x^{۳} + ۱}{x^{۲}}\right)dx$$

$$\xrightarrow{\int} \frac{۱}{x}e^{۲y} = \left(\frac{x^{۲}}{۲} - \frac{۱}{x}\right) + C$$

$$\xrightarrow[y=۰]{x=۱} \frac{۱}{۲}e^{۰} = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۱}\right) + C \longrightarrow C = \frac{۳}{۲}$$

پس جواب خصوصی به فرم $\frac{۱}{۲}e^{۲y}\left(\frac{x^{۲}}{۲} - \frac{۱}{x}\right) + \frac{۳}{۲}$ در می‌آید. **۵۶.** معادله دیفرانسیل به صورت $e^{-y}dy = \left(\frac{x}{x+۱}\right)dx$ درآمده و با انتگرالگیری به $-e^{-y} = \left(x + \frac{x^{۲}}{۲}\right) + C$ میرسیم. مقدار گذاری $x = ۰$ و $y = ۰$ مقدار $C = ۱$ را نتیجه داده و جواب خصوصی عبارت است از $-e^{-y} = \left(x + \frac{x^{۲}}{۲}\right) - ۱$. **۵۷.** معادله دیفرانسیل خطی است. **۵۹.** جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از $\sqrt{y^{۲} + ۱} = \frac{۳}{۲}x^{۲} + C$. حال مقدار C را بدست آورید. **۶۰.** با مرتب سازی مناسب $\frac{dy}{y^{۲}} = \sqrt{۴ - x}dx$ و سپس با انتگرالگیری به

$$\frac{۱}{-y} = -\frac{۲}{۳}(۴ - x)^{\frac{۳}{۲}} + C.$$

می رسیم. با توجه به شرط اولیه، جواب خصوصی عبارت است از

$$-\frac{۱}{y} = -\frac{۲}{۳}(۴ - x)^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۲}.$$

۶۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل به‌صورت $y - ۲\ln(y + ۱) = \ln x + C$. اکنون مقدار C را بدست آورید. برای حل مسائل از **۶۶** تا **۷۳** کافی است مانند مسائل **۵۱** تا **۶۴** عمل

کنید. **۶۵.** در ابتدا معادله را حل می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{\sqrt{x}}+x\longrightarrow dy=\left(x+\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)dx,$$
$$\xrightarrow{\int} y=\left(\frac{x^{۲}}{۲}-۲\sqrt{x}\right)+C.$$
$$\xrightarrow[y=۲]{x=۱} ۲=\left(\frac{۱}{۲}-۲\sqrt{۱}\right)+C\longrightarrow C=\frac{۷}{۲},$$
$$\longrightarrow y=\left(\frac{x^{۲}}{۲}-۲\sqrt{x}\right)+\frac{۷}{۲}.$$

تابع مورد نظر است. **۶۶.** معادلهٔ دیفرانسیل خطی است که $P(x)=۲$ و $Q(x)=e^{-۲x}$. داریم:

$$y=e^{\int -۲dx}\left[\underbrace{e^{\int ۲dx}\cdot e^{-۲x}}_{۱}dx+C\right]=e^{-۲x}\left[\int dx+C\right]$$
$$=e^{-۲x}(x+C)\xrightarrow[y=۴]{x=۱} ۴=e^{-۲}(۱+C)\rightarrow C=۴e^{۲}-۱.$$

و لذا تابع مورد نظر عبارت است از $y=e^{-۲x}\left(x+۴e^{۲}-۱\right)$. **۶۸.** در ابتدا معادله دیفرانسیل را با فرض $x\neq ۰$ به حالت استاندارد در آورده و سپس حل کنید. داریم، $y=\left(-\frac{۲}{x}+Cx^{۴}\right)$. اکنون مقدار C را بدست آورید. **۶۹.**

$$dy=(e^{-x}+x^{۲})dx\xrightarrow{\int} y=(-e^{-x}+\frac{x^{۳}}{۳})+C,$$
$$\xrightarrow[y=۴]{x=۰} ۴=(-e^{۰}+۰)+C\longrightarrow C=۵.$$
$$\xrightarrow{\text{تابع}} y=\left(-e^{-x}+\frac{x^{۳}}{۳}\right)+۵.$$

۷۴. اگر $x\neq ۰$ آنگاه

$$x^{۳}-۲x^{۲}y'+۳y=۰\xrightarrow{\div x^{۲}}\frac{x}{۲}-y'+۳(\frac{۱}{۲x^{۲}})y=۰,$$
$$\longrightarrow y'-\frac{۳}{۲x^{۲}}y=\frac{x}{۲}\left(P(x)=\frac{-۳}{۲x^{۲}},Q(x)=\frac{x}{۲}\right).$$

۷۵. اگر $x \neq ۱$، با تقسیم طرفین بر $x - ۱$:

$$\frac{y+۱}{y-۱} = y' \longrightarrow y' - \left(\frac{۱}{x-۱}\right) y = \frac{۱}{x-۱}.$$

۷۷. اگر $x \neq ۰$ آنگاه:

$$x = x^{۲}(y' + y) \xrightarrow{\div x^{۲}} \frac{۱}{x} = y' + y \left(P(x) = ۱, Q(x) = \frac{۱}{x}\right).$$

۷۸. در این معادله $P(x) = ۳$ و $Q(x) = ۶$ لذا تابع y برابر است با

$$e^{\int -۳dx}\left[\int e^{\int ۳dx} \cdot ۶dx + C\right] = e^{-۳x}\left[\int ۶e^{۳x}dx + C\right] = e^{-۳x}\left[۲e^{۳x} + C.\right]$$

۸۰. با توجه به معادلهٔ $y' = \frac{x^{۲}+۳}{x}$ داریم: $P(x) = ۰$ و $Q(x) = \frac{x^{۲}+۳}{x}$ و لذا با فرض ناصفر بودن x، تابع y برابر است با:

$$e^{\int ۰dx}\left[\int e^{\int ۰dx}\left(\frac{x^{۲}+۳}{x}\right)dx + C\right] = \int \left(\frac{x^{۲}+۳}{x}\right)dx + C = \frac{x^{۲}}{۲} - ۳\ln|x| + C.$$

۸۱. با تقسیم طرفین بر $x \neq ۰$ معادله به $y' + \underbrace{\frac{۱}{x^{۲}}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{۱}{x^{۴}}e^{\frac{۱}{x^{۲}}}}_{Q(x)}$ تبدیل و با استفاده از فرمول اصلی به تابع زیر می رسیم:

$$y = x^{-۱}\left[\int x \times \frac{۱}{x^{۴}}e^{\frac{۱}{x^{۲}}}dx + C\right].$$

حال انتگرال داخلی را با انتخاب $t = ۱/x^{۲}$ حل کنید.

۸۴. در ابتدا معادله اصلی را حل می‌کنیم. در اینجا $P(x) = x^{۲}$ و $Q(x) = x^{۲}$ و لذا جواب عمومی معادله برابر است با:

$$e^{\int -x^{۲}dx}\left[\int e^{\int x^{۲}dx} \cdot x^{۲}dx + C\right] = e^{-\frac{x^{۳}}{۳}}\left[\int e^{\frac{x^{۳}}{۳}} \cdot x^{۲}dx\right] = ۱ + Ce^{-\frac{x^{۳}}{۳}}.$$

اکنون قرار دهید $x = ۰$ و $y = ۰$:

$$۰ = ۱ + Ce^{۰} \rightarrow C = -۱$$

و لذا جواب مساله به‌صورت $y = ۱ - e^{-\frac{x^{۳}}{۳}}$. **۸۵.** **الف**. با دو بار انتگرالگیری از معادله به $y = \frac{-x^{۴}}{۴} + \frac{۲}{۳}x^{۳} + C_{۱}x + C_{۲}$ می رسیم. **ب**. با دو بار انتگرالگیری از معادلهٔ داده شده

به $y = ۲e^{-x} + ۳x + C_۱x + C_۲$ می رسیم. **۸۶. الف.** اگر $f''(x) = ۲$ آنگاه با دوبار انتگرال‌گیری نسبت به x داریم:

$$f''(x) = ۲ \xrightarrow{\int} f'(x) = ۲x + C_۱ \xrightarrow{\int} f(x) = x^۲ + C_۱x + C_۲.$$

حال شرایط اولیه $f(۲) = ۱۰$ و $f'(۲) = ۵$ را روی جواب‌های بدست آمده اثر می‌دهیم:

$$f'(x) = ۲x + C_۱ \xrightarrow[y'=۵]{x=۲} ۵ = f'(x) = ۴ + C_۱ \longrightarrow C_۱ = ۱.$$

$$f(x) = x^۲ + C_۱x + C_۲ \xrightarrow{C_۱=۱} f(x) = x^۲ + x + C_۲ \xrightarrow[y=۱۰]{x=۲} \underbrace{۱۰ = f(۲) = ۴ + ۲ + C_۲}_{C_۲=۴}$$

پس ضابطه $f(x)$ برابر است با $f(x) = x^۲ + x + ۴$.

فصل ۴

کاربردهای اقتصادی

هر چه در بخش قبل بیان شد؛ تعاریف و موضوعات محض مرتبط با انتگرال معیّن بود. در این بخش به بیان تعدادی از کاربردهای اقتصادی انتگرال معیّن می پردازیم. در همه موارد بر برقراری شرایط تعریف انتگرال معیّن تاکید داریم.

۱.۴ تغییر خالص

بنابه تعریف، تفاوت بین آخرین قیمت مورد معامله قرار گرفته یک برگ بهادار در یک روز از معاملات با آخرین قیمت مورد معامله در روز بعدی از معاملاتغییر خالص نامیده میشود. این نحوه بیان در صورتهای دیگری از مسائل نیز بروز می کند و به ارزیابی مقدار ازدیاد و یا کاهش نرخ یک پارامتر می انجامد. به صورت ریاضی:

تعریف ۱.۴. اگر $Q'(x)$ بر ناحیه $a \leqslant x \leqslant b$ تابعی پیوسته باشد آنگاه **تغییر خالص** تابع $Q(x)$ از مقدار a تا مقدار b با انتگرال معیّن زیر بدست می آید:

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b Q'(x)\, dx$$

مثال ۱.۴. در یک کارخانه، هزینه نهایی با تابع $MC(q) = ۳(q-۴)^۲$ سنجیده می شود که در آن q سطح تولید است. مشخص کنید با چه نرخی، هزینه نهایی تولید افزایش را تجربه می کند اگر سطح تولید از $q=۶$ مقدار به $q=۱۰$ مقدارافزایش یابد؟

حل: با توجه به فرض، $\overbrace{MC(q)}^{TC'(q)} = ۳(q-۴)^۲$ و لذا نرخ افزایش از مقدار ۶ تا ۱۰ بوسیله تغییر خالص زیر پیدا می شود:

$$TC(۱۰)-TC(۶) = \int_۶^{۱۰} ۳(q-۴)^۲\,dq = \int_۶^{۱۰} ۳(q-۴)^۲\,d(q-۴) = (q-۴)^۳\Big|_۶^{۱۰} = ۲۰۸.$$

□

۲.۴ سود مازاد خالص

تعریف ۲.۴. فرض کنید دو پروژهٔ سرمایه گذاری در طی t سال از هم اکنون، متناظر با تابع های سود $P_۱(t)$ و $P_۲(t)$ طوری کار می کنند که با توجه به بازه زمانی $۰ \leqslant t \leqslant N$ نرخ سود مورد انتظارشان در رابطه $P_۲'(t) \geqslant P_۱'(t)$ صدق کند. در این صورت به $E(t) = P_۲(t) - P_۱(t)$ تابع **سود مازاد** پروژهٔ اول نسبت به پروژهٔ دیگر در زمان t و به $NE = E(N) - E(۰)$ مقدار **سود مازاد خالص** بر بازهٔ فوق می گویند. این سود از $NE = \int_۰^N \left(P_۲'(t) - P_۱'(t)\right)\,dt$ قابل محاسبه است.

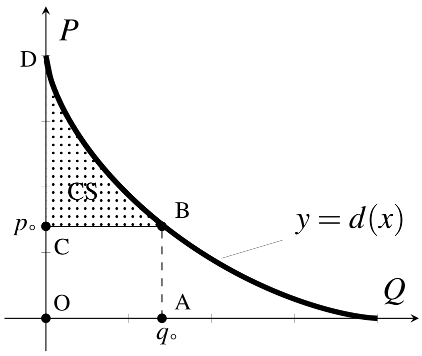
مثال ۲.۴. دو سرمایه گذار در طی t سال از الان، سود را با دو نرخ $P_۱'(t) = ۵۰ + t^۲$ و $P_۲'(t) = ۲۰۰ + ۵t$ در سال دریافت می کنند. اولاً نشان دهید در طی چند سال، نرخ سود دوم نسبت به سود اول پیشی می گیرد و ثانیاً سود مازاد خالص را بازای زمان بدست آمده قسمت اول یافته و شکلی برای آن رسم کنید.

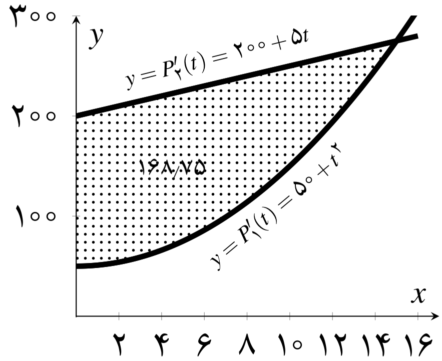
حل: نرخ سود مازاد دوم نسبت به سود مازاد اول تا موقعی جلو می افتد که $P_۲'(t)$ و $P_۱'(t)$مساوی باشند: $۵۰ + t^۲ = ۲۰۰ + ۵t$ و لذا $t = ۱۵, \ -۱۰$ و چون زمان منفی نداریم پس $N = ۱۵$. برای

قسمت دوم و با کمک فرمول فوق:

$$NE = \int_{۰}^{۱۵} (۵۰ + ۵t - t^{۲})\, dt = \left(۱۵۰t + ۲/۵t^{۲} - \frac{t^{۳}}{۳}\right)_{۰}^{۱۵} \simeq ۱۶۸/۷۵.$$

شکل بالا توصیفی است از مقدار بدست آمده تا زمان $N = ۱۵$ سال که تا این زمان نرخ سود دوم از نرخ سود اول پیش است.





۳.۴ مازاد مصرف کننده و مازاد تولید کننده

بنابه علم اقتصاد، تابع تقاضای $y = d(x)$ قیمتهای مختلفی که خریداران حاضرند بابت مقادیر متفاوتی از یک کالا بپردازند را نتیجه می دهد.[1] مثلاً بازای تعداد $x = q_۰$، قیمت واحد $y = p_۰ = d(q_۰)$ متناظر است. بوضوح مقدار وجه پرداخت شده بابت $q_۰$ برابر با $p_۰q_۰$ یا همان مساحت مستطیل $\overset{\square}{\mathrm{OABC}}$ خواهد بود(شکل بالا). اکنون فرض کنیم $p_۰$ قیمتی است که مصرف کننده ها حاضرند بابت آخرین واحد کالایی که می خرند بپردازند (یعنی $q_۰$). برای مقادیر کمتر از $q_۰$ [2]، خریدارانی هستند که مایلند قیمتی بالاتر از $p_۰$ پرداخت کنند. در واقع

[1]در اینجا x تعداد کالاست.

[2]همانطور که از شکل می فهمیم.

مساحت ناحیهٔ هاشور خورده BCD مقدار سودی را نشان می دهد که این افراد بابت پرداخت $p_\circ$ می برند. به این سود **مازاد مصرف کننده** (CS) می گویند. مازاد مصرف کننده بکمک انتگرال معیّن و ارتباط آن با مساحت محصور بدست می آید:

$$\mathrm{CS} = \int_\circ^{q_\circ} d(x)\, dx - p_\circ q_\circ.$$

به همین صورت، تابع عرضه $y = s(x)$ قیمتهای مختلفی را که تولید کننده ها بازای مقادیر متفاوتی از یک کالا حاضرند در بازار عرضه کنند ارائه می کند (برای نمونه مقدار کالای $x = q_\circ$ با قیمت $p_\circ$ عرضه می شود). با فرض فروش همه مقادیر کالا، درآمد تولید کننده برابر است با $p_\circ q_\circ$ که همان مساحت مستطیل $\overset{\square}{\mathrm{OABC}}$ است (شکل زیر). قیمت $p_\circ$ عددی است که تولید کننده آماده است تا آخرین واحد کالای خود را بازایش بفروشد. با توجه به شکل ملاحظه می کنید، تولیدکننده های هستند که حاضرند همین کالا را با قیمتی پایینتر از $p_\circ$ عرضه کنند. مساحت ناحیهٔ هاشور خورده مقدار سودی را نشان می دهد که این افراد می برند. به این سود **مازاد تولید کننده** (PS)می گویند. مازاد تولید کننده را بکمک انتگرال معیّن به شکل زیر بدست می آوریم:

$$\mathrm{PS} = p_\circ q_\circ - \int_\circ^{q_\circ} s(x)\, dx.$$

مثال ۳.۴. مازاد مصرف کننده را بازای تابع تقاضای $d(x) = ۳۰ - ۴x$ و برای $q_\circ = ۵$ بدست آورید.

حل: اولاً $p_\circ = d(q_\circ) = ۳۰ - ۴(۵) = ۱۰$ و ثانیاً:

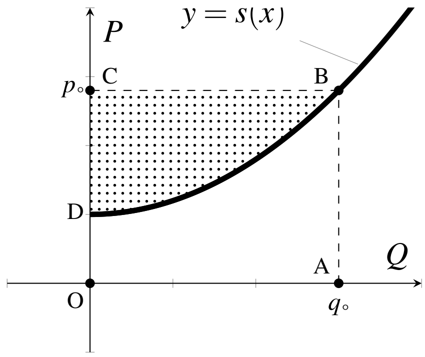
$$\mathrm{CS} = \int_\circ^{۵} (۳۰ - ۴x)\, dx - (۵ \times ۱۰) = \underbrace{(۳۰x - ۲x^۲)\Big|_\circ^{۵}}_{۱۰۰} - ۵۰ = ۵۰. \qquad \square$$

مثال ۴.۴. توابع $d(x) = ۳۵ - x^۲$ و $s(x) = ۳ + x^۲$ بترتیب تقاضا و عرضه کالایی در بازار را میسنجند. با فرض رقابت کامل بودن بازار، مازاد تولید کننده را بدست آورید.

حل: چون بازار رقابت کامل است لذا قیمت توسط بازار تعیین می شود. از اینرو قبل از محاسبه مازاد تولید کننده، به نقطه تعادل بازار نیاز داریم. برای یافتن نقطه تعادل، عرضه و تقاضا را مساوی قرار داده و داریم: $d(x) = ۳۵ - x^۲ = ۳ + x^۲ = s(x)$ که نتیجه می دهد $x^۲ = ۱۶$. چون مقدار کالای

منفی تفسیری در اقتصاد ندارد بنابر این $q_\circ = x = ۴$ و $p_\circ = d(q_\circ) = s(q_\circ) = ۱۹$. اکنون داریم:

$$\text{PS} = (۱۹ \times ۴) - \int_\circ^۴ (۳ + x^۲)\, dx \simeq ۷۶ - ۳۳/۳۳ = ۴۲/۶۶. \quad \square$$



۴.۴ سود کل

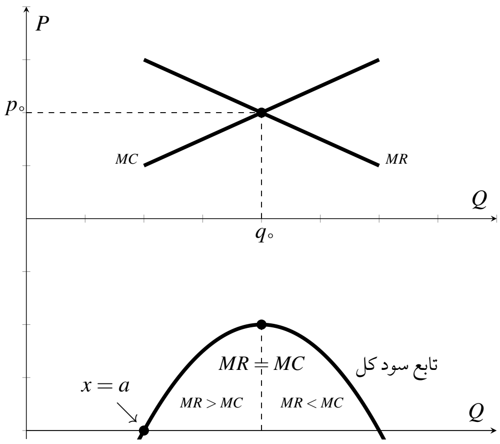
بنابه تعریف $P(x) = TR(x) - TC(x)$ که در آن $P(x)$ سود کل حاصل از فروش x عدد از کالایی مشخص است. اگر دو تابع درآمد کل و هزینه کل توابعی مشتق پذیر باشند آنگاه مقدار $x = q_\circ$، سود کل را ماکزیمم می کند بشرطی که اولاً

$$P'(a) = MR(q_\circ) - MC(q_\circ) = \circ$$

و ثانیاً $P'(x)$ در اطراف $x = q_\circ$ از مثبت به منفی تغییر علامت دهد.[۳] برای توجیه این مطلب به شکل زیر توجه کنید. در این شکل دو تابع فرضی هزینهٔ نهایی MC و درآمد نهایی MR نشان داده شده اند. بنابه قاعده ماکزیمم سازی سود و نکته ای که بیان شد، سود P هنگامی ماکزیمم است که $MR = MC$ و این همان نقطه تقاطع با طول $q_\circ$ است. بعلاوه گودی بسمت پایین تابع P در اطراف نقطه ماکزیمم $(q_\circ, p_\circ)$ تایید می کند که $P''(q_\circ) < \circ$. همچنین از نمودار پایینی معلوم است تا قبل از رسیدن به نقطه ماکزیمم، تولید کننده ای که این

[۳] این تغییر علامت را می توان برای یک دسته خاص از توابع با این بیان جابجا کرد: اگر علاوه بر وجود $P''(q_\circ)$، $P''(q_\circ) < \circ$ آنگاه $x = q_\circ$ ماکزیمم تابع سود را نتیجه می دهد.

تابع نمودار سود کل وی است، درآمد نهایی بیشتری را به نسبت هزینهٔ نهایی تجربه می کند.



بعبارت دیگر سود کل در حال افزایش است تا به $x = q_∘$ برسیم. در بعد از این نقطه سود در حال کاهش است. اکنون تعریف زیر را برای دسته ای محدود برای توابع ارائه می دهیم.[a]

تعریف ۳.۴. اگر $x = a$ کوچکترین ریشه نامنفی $P(x) = ∘$ باشد در این صورت مقدار **سود کل** برابر است با:

$$\mathrm{P}_{\max} = \int_a^{q_∘} [MR(x) - MC(x)]\, dx$$

که در آن $P(q_∘)$ ماکزیمم نسبی تابع سود است.

[a] در واقع فرض می کنیم دو تابع $MR(x)$ و $MC(x)$ بر $[∘, ∞)$ پیوسته و مشتق دارند.

مثال ۵.۴. توابع درآمد نهایی و هزینه نهایی کارخانه ای که یک نوع کالای انحصاری تولید می کند بر حسب سطح تولید x به صورت $MR = ۱∘∘∘ - ۴x$ و $MC = ۳x^۲ - ۱۱۸x + ۱۳۱۵$ داده می شود. اولاً دو تابع درآمد کل و هزینه کل را با فرض هزینه ثابت ۵۹۵ یافته و اگر $a = ۸$ کمترین مقداری باشد که سود صفر است مطلوبست مقدار سود کل کارخانه.

حل: با توجه به شرایط اولیه $TR(∘) = ∘$، $TC(∘) = ۵۹۵$ و بکمک انتگرال داریم:[۴]

$$TR(x) = ۱∘∘∘x - ۲x^۲,\ \ TC(x) = x^۳ - ۵۹x^۲ + ۱۳۱۵x + ۵۹۵.$$

با مساوی قرار دادن دو تابع درآمد نهایی و هزینه نهایی:

$$MR = MC \to ۱∘∘∘ - ۴x = ۳x^۲ - ۱۱x + ۱۳۱۵ \to x_۱ = ۳,\ x_۲ = ۳۵.$$

[۴] $TR(x) = \int MR\, dx, TC(x) = \int MC\, dx$.

از آنجایی که $\overbrace{(MR-MC)'}^{-۶x+۱۱۴}(۳۵) < ۰$ پس بنابر این $q_۰ = ۳۵$ و لذا کافیست انتگرال زیر را حل کنیم:

$$\mathrm{P_{max}} = \int_{۸}^{۳۲} (-۳x^۲ + ۱۱۴x - ۳۱۵)\, dx \simeq ۱۵۳۳۰.$$

مثال ۴.۶. یک تولید کننده، بعد از برآوردهایی که انجام می دهد، می فهمد با تولید x واحد از کالا در روز با تابع هزینهٔ نهایی $MC = ۰/۶x - ۲۲$ کار می کند. اگر قیمت ثابت فروش بازای هر واحد ۳۸ و هزینه ثابت ۲۰۰ گرفته شود مطلوبست سود کل روزانه تولید کننده.

حل: همانند مثال قبل از اینکه $TR(۰) = ۰$ و $MC(۰) = ۲۰۰$ ، $TR(x) = ۳۸x$ و بعلاوه $TC(x) = ۰/۳x^۲ - ۲۲x + ۲۰۰$. حال با مساوی قرار دادن دو تابع اخیر، کوچکترین مقدار x را میآبیم: $TR = TC \rightarrow ۰/۳x^۲ - ۶۰x + ۲۰۰ = ۰ \rightarrow x_۱ \simeq ۳/۳۹,\ x_۲ \simeq ۱۹۶/۶$. چون $۰ < x_۱ < x_۲$ و لذا $a = x_۱$. اکنون با حل تساوی $MR = MC$ و بررسی علامت $[MR - MC]'$ در ریشه های آن داریم: $۰/۶x - ۲۲ = MC = MR = ۳۸ \rightarrow x = ۱۰۰$ و $(MR - MC)'(۱۰۰) = -۰/۶ < ۰$ و لذا $q_۰ = ۱۰۰$ و سود بدست می آید:

$$\mathrm{P_{max}} = \int_{۳/۳۹}^{۱۰۰} [۳۸ - (۰/۶x - ۲۲)]\, dx \simeq ۲۸۰۰.$$

۵.۴ تمرینات

۱. نرخ تغییرات در تعداد مزارع یک نوع صیفی در کشور بین سالهای ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۵ از مدل $\frac{dF}{dt} = ۱/۰۸\, t - ۱۵/۴$ تبعیت می‌کند که در آن t نشان دهنده سال است[۵]. مطلوب است تغییر خالص در تعداد مزارع این نوع صیفی بین سال‌های یاد شده فوق.

۲. نرخ تغییرات تعداد V فرد متقاضی یک کار مشخص بین سالهای ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۶ از قادعده زیر پیروی می‌کند.

$$\frac{dV}{dt} = ۱۱۹/۸۵t^{۲} - ۳۰/۰e^{t} + ۳۷/۲۶e^{-t}$$

که در آن t نشان دهنده سال ($t = ۰$ یعنی سال ۲۰۰۰) است. مطلوب است تغییر خالص در تعداد افراد متقاضی بین سال‌های بالا.

۳. فرض کنید در طی t سال از هم اکنون، طرح سرمایه‌گذاری اول (I) مولد سودی با نرخ تغییرات $P'_{۱}(t) = ۱۰۰ + t^{۲}$ هزار تومان در سال و طرح سرمایه‌گذاری دوم (II) سودی با نرخ تغییرات $P'_{۲}(t) = ۲۲۰ + ۲t$ هزار تومان در سال تولید خواهد کرد. معین کنید در طی چند سال سودهی طرح سرمایه‌گذاری دوم از اول پیشی می‌گیرد؟ بعلاوه با فرض پذیرش طرح دوم و با فرض تعداد سال‌هایی که در قسمت قبل بدست آورده‌اید، سود مازاد خالص را بدست آورید.

۴. مسئله قبل را به ازای $P'_{۱}(t) = ۱۳۰ + t^{۲}$، $P'_{۲}(t) = ۳۰۶ + ۵t$ هزار تومان در سال تکرار کنید.

۵. مسئله قبل را به ازای $P'_{۱}(t) = ۹۰e^{۰/۱t}$، $P_{۲}(t) = ۱۴۰e^{۰/۰۷t}$ هزار تومان در سال تکرار کنید.

---

[۵] $t = ۰$ یعنی سال ۲۰۰۰.

۶. یک تولید کننده تایر حدس می‌زند که مقدار q واحد تایر رادیال (به هزار) با توجه به تابع تقاضای $d(q) = -۰/۱q^۲ + ۹۰$ فروخته خواهد شد. اگر تابع عرضه متناظر با $s(q) = ۰/۲q^۲ + q + ۵۰$ داده شود، مطلوب است اولاً نقطه تعادل بازار و ثانیاً مازاد مصرف کننده را در نقطه تعادل بدست آورید.

۷. مسئله ۶ را به ازای توابع زیر تکرار کنید.

الف) $s(q) = ۵۰ + \frac{۲}{۳}q^۲, \qquad d(q) = ۱۳۱ - \frac{۱}{۳}q^۲$.

ب) $s(q) = \frac{۱}{۳}q^۲ + ۲q + ۵, \qquad d(q) = ۶۵ - q^۲$.

ج) $s(q) = \frac{۱}{۳}(q+۱), \qquad d(q) = \frac{۱۶}{q+۲} - ۳$

د) $s(q) = q^۲ + ۳۳q + ۴۸, \qquad d(q) = ۱۴۴ - ۲q^۲$

۸. با فرض توابع تقاضاهای زیر مقدار تولید $q_۰$ مطلوب است محاسبه مازاد مصرف کننده به ازای $q_۰$ داده شده.

الف) $q_۰ = ۳, \qquad d(q) = ۲(۶۴ - q^۲)$

ب) $q_۰ = ۵, \qquad d(q) = ۴۰e^{-۰/۰۵q}$

ج) $q_۰ = ۳, \qquad d(q) = ۷۵e^{-۰/۰۴q}$

د) $q_۰ = ۱۲, \qquad d(q) = \frac{۱۰۰}{۱+۲q}$

هـ) $q_۰ = ۸, \qquad d(q) = \frac{۲۰۰}{q+۲}$

۹. با فرض توابع عرضه داده شده زیر و مقدار تولید $q_۰$ متناظر، مطلوب است محاسبه مازاد تولید کننده به ازای $q_۰$.

الف) $q_۰ = ۴, \qquad s(q) = ۰/۳q^۲ + ۳۰$

ب) $q_\circ = ۳ \qquad s(q) = ۱۰ + ۱۵e^{۰/۰۳q},$

ج) $q_\circ = ۵ \qquad s(q) = ۰/۵q + ۱۵,$

د) $q_\circ = ۲۰ \qquad s(q) = ۴۰ + ۱۰۰\ln^{۲}(q+۱),$

۱۰. یک تولید کننده قطعات ماشین می‌داند فروش q واحد از یک قطعه به ازای تابع قیمت $P = ۱۱۰ - q$ (تومان در واحد) صورت می‌گیرد. اگر تابع هزینه کل وی با

$$TC(q) = q^{۳} - ۲۵q^{۲} + ۲q + ۳۰۰۰$$

تعریف شود. معین کنید اولاً سود حاصل از فروش q واحد با توجه به تابع تقاضای P. ثانیاً به ازای چه مقدار q این سود به حداکثر می‌رسد؟ ثالثاً مازاد مصرف کننده را برای سطح تولید q در حالت قبل بدست آورید.

۱۱. مسئله قبل را برای $P = ۱۲۴ - ۲q$ و $TC(q) = ۲q^{۳} - ۵۹q^{۲} + ۴q + ۷۶۰۰$ تکرار کنید.

۱۲. مسئله قبل را برای $P = ۳۶۰ - ۳x - ۲x^{۲}$ و $TC(q) = ۶q^{۲} + ۱۲۰q + ۱۰۰۰$ تکرار کنید.

۱۳. فرض کنید توابع هزینه نهایی کالایی در بازار به صورت زیر داده شده‌اند. مطلوب است سود صاحب کالا در فاصله $۰ \leqslant q \leqslant q_\circ$ که در آن $q_\circ$ سطحی از تولید است که سود را ماکزیمم می‌کند.

الف) $MR = ۵۰۰۰ - ۲۰t^{۲}, MC = ۲۰۰۰ + ۱۰t^{۲}$.

ب) $MR = ۷۲۵۰ - ۱۸t^{۲}, MC = ۳۶۲۰ + ۱۲t^{۲}$.

ج) $MR = ۶۰۲۵ - ۸t^{۲}, MC = ۴/۶۸۱ + ۱۳t^{۲}$.

۱.۵.۴ جواب و راهنمایی ها

۱. مقدار $t=\circ$ به ازای ۲۰۰۰ و مقدار $t=۵$ به ازای ۲۰۰۵ خواهد بود و لذا تغییر خالص در بازه $\circ \leqslant t \leqslant ۵$ برابر است با $\int_{\circ}^{۵} \frac{dF}{dt}dt = \int_{\circ}^{۵}(۱/\circ۸t-۱۵/۴)dt \simeq -۶۳/۵$. **۳.** بنابه تعریف در مرحله اول با حل معادله $P_۱'(t)=P_۲'(t)$:[۶]

$$P_۱'(t)=P_۲'(t)\to ۱\circ\circ+t^۲=۲۲\circ+۲t\to t=۱۲,\ t=-۱۵$$

و در مرحله دوم $NE=\int_{\circ}^{۱۲}\left(P_۲'(t)-P_۱'(t)\right)dt$ را محاسبه می کنیم:

$$\int_{\circ}^{۱۲}(۲۲\circ+۲t-۱\circ\circ-t^۲)dt=\left(-\tfrac{۱}{۳}t^۳+t^۲+۱۲\circ t\right)\Big|_{\circ}^{۱۲}=۱\circ\circ۸.$$

۵. با حل $P_۱'(t)=P_۲'(t)$ داریم $۹\circ e^{\circ/۱t}=۱۴\circ e^{\circ/\circ۷t}$، $\circ/\circ۳t=\ln(\frac{۱۴}{۹})$ و لذا

$$\circ/\circ۳t\simeq\circ/۴۴,\ \ t\simeq ۱۴/۲۷.$$

حال ادامه حل را انجام دهید. **۶.** نقطه تعادل بازار با حل $d(q)=s(q)$ بدست می‌آید:

$$-\circ/۱q^۲+۹\circ=\circ/۲q^۲+q+۵\circ\to q=-۱۳/۳,\ q=۱\circ.$$

چون مقدار کالا منفی نمی‌شود لذا $q_\circ=۱\circ$ طول نقطه تعادل بازار است. عرض آن برابر است با $d(q_\circ)=۸\circ$ اکنون:

$$\mathrm{CS}=\int_{\circ}^{۱\circ}(-\circ/۱q^۲+۹\circ)dq-۸\circ\circ=(-\circ/۱\tfrac{q^۳}{۳}+۹\circ q)\big|_{\circ}^{۱\circ}-۸\circ\circ\simeq ۳۶۱۶/۶.$$

۷. برای **الف** و با یکی قرار دادن توابع عرضه و تقاضا داریم، $q_\circ=۹,\ s(q_\circ)=۱\circ۴$ و لذا

$$\mathrm{CS}=\int_{\circ}^{۹}(۱۳۱-\tfrac{۱}{۳}q^۲)dq-۹۳۶=(۱۳۱-\tfrac{۱}{۹}q^۳)\big|_{\circ}^{۹}-۹۳۶=۱۶۲.$$

$$\mathrm{PS}=۹۳۶-\int_{\circ}^{۹}(۵\circ+\tfrac{۲}{۳}q^۲)dq=۹۳۶-\left(۵\circ q-\tfrac{۲}{۹}q^۳\right)\big|_{\circ}^{\circ}=۳۲۴.$$

۸. برای **الف** در $q_\circ=۳$، $d(q_\circ)=۱۱\circ$ و لذا

$$\mathrm{CS}=\int_{\circ}^{۳}۲(۶۴-q^۲)dq-۳۳\circ=۲(۶۴q-\frac{q^۳}{۳})\big|_{\circ}^{۳}-۳۳\circ=۳۶.$$

---

[۶] توجه داریم چون متغیر t نشان دهنده زمان است لذا مقادیر منفی t را حدف می‌کنیم.

برای **ج** در $q_\circ = ۳$، $d(q_\circ) = ۷۵e^{-۰/۰۴\times ۳} \simeq ۶۶/۵۱$ و لذا

$$\mathrm{CS} = \int_\circ^۳ ۷۵e^{-۰/۰۴t}dt - ۱۹۹/۵۳۶ \simeq ۱۲/۵۲.$$

۹. برای **الف**، در $q_\circ = ۴$، $s(q_\circ) = ۳۴/۸$ و لذا

$$\mathrm{PS} = ۱۳۹/۲ - \int_\circ^۴ (۰/۳q^۲ + ۳۰)dq = ۱۳۹/۲ - \left[۰/۳\frac{q^۳}{۳} + ۳۰q\right]_\circ^۴ = ۱۲/۸.$$

برای **د**، در $q_\circ = ۲۰$، $s(q_\circ) = ۴۰ + ۱۰۰\ln^۲(۲۱) \simeq ۹۶۶/۹$ و لذا

$$\mathrm{PS} = ۱۹۳۳۸/۲ - \int_\circ^{۲۰} \left(۴۰ + ۱۰۰\ln^۲(q+۱)\right) dq \simeq ۷۸۶۰.$$

۱۰. چون سود کل تفاضل درآمد کل و هزینه کل است لذا

$$\begin{aligned} P(q) &= TR - TC = pq - (q^۳ - ۲۵q^۲ + ۲q + ۳۰۰۰), \\ &= (۱۱۰ - q)q - (q^۳ - ۲۵q^۲ + ۲q + ۳۰۰۰), \\ &= -q^۳ + ۲۴q^۲ + ۹۸q - ۳۰۰۰. \end{aligned}$$

اکنون به دنبال نقاط ماکزیمم کننده $P(q)$ می‌گردیم:

$$P'(t) = -۳q^۲ + ۴۸q + ۹۸, \quad P'(q) = ۰ \rightarrow q = -۲,\ q = ۱۸,$$

چون $P(q)$ یک چندجمله‌ای است از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم:

$$P''(-۲) = -۶(-۲) + ۴۸ > ۰, P''(۱۸) = -۶(۱۸) + ۴۸ < ۰,$$

که نشان می‌دهد $q = ۱۸$ طول نقطه max تابع سود است. اکنون مقدار $q = ۱۸$ نتیجه میدهد $p(۱۸) = ۱۱۰ - ۱۸ = ۹۲$ و بنابر این:

$$\mathrm{CS} = \int_\circ^{۱۸} (۱۱۰ - q)dq - ۹۲ = ۱۷۲۶.$$

۱۳. برای **الف** داریم:

$$\begin{aligned} &MR = MC \rightarrow ۲۰۰۰ + ۱۰t^۲ = ۵۰۰۰ - ۲۰t^۲ \rightarrow t = ۱۰, -۱۰ \\ &(MR - MC)' = -۶۰t\big|_{t=۱۰} = -۶۰۰ < ۰ \xrightarrow{\text{پس}} t_\circ = ۱۰. \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\mathrm{P_{max}} = \int_{۰}^{۱۰} (MR - MC)dt = \int_{۰}^{۱۰} (-۳۰t^{۲} + ۳۰۰۰)dt = ۲۰۰۰۰.$$

و برای **ب**:

$$MR = MC \rightarrow ۳۶۲۰ + ۱۲t^{۲} = ۷۲۵۰ - ۱۸t^{۲} \rightarrow t = ۱۱, -۱۱$$

$$(MR - MC)' = -۶۰t\big|_{t=۱۱} = ۶۶۰ < ۰ \xrightarrow{\text{پس}} t_{۰} = ۱۱.$$

و بنابراین $\mathrm{P_{max}} = \int_{۰}^{۱۱} (-۳۰t^{۲} + ۳۶۳۰)dt = ۲۶۶۲۰$.

فصل ۵

انتگرالهای دوگانه

۱.۵ مقدمات

در فصل قبل به کفایت درباره $\int f(x)dx$ که در آن $f(x)$ شرایط مورد نظر تعریف انتگرال را برقرار می‌کرد صحبت شد. اکنون می‌خواهیم تا به انتگرال‌گیری از یک تابع دو متغیره $f(x,y)$ بپردازیم. در تعریف ۲.۱، وجود dx در انتگرال به این موضوع ربط داده شد که آن انتگرال برحسب x شکل یافته است. در واقع، با تغییر dx مثلاً به dt، متغیر و نحوه دید ما از آن انتگرال به متغیر t تغییر می‌کند.[۱] برای توضیح بیشتر، سه انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{۱}^{۲} xy^{۲}dy, \quad \int_{۱}^{۲} xy^{۲}dx, \quad \int_{۱}^{۲} xy^{۲}dt.$$

در انتگرال $\int_{۱}^{۲} xy^{۲}dt$، متغیر انتگرال t و لذا $xy^{۲}$ بیرون می آید. یعنی:

$$xy^{۲}\int_{۱}^{۲} dt = xy^{۲} \times t\Big|_{۱}^{۲} = xy^{۲}(۲-۱) = xy^{۲}.$$

[۱] این موضوع اصل انجام انتگرال‌گیری از تابع دو متغیره $f(x,y)$ است.

در انتگرال $\int_{۱}^{۲} xy^{۲}dx$، متغیر انتگرال x و لذا $y^{۲}$ بیرون می آید. یعنی:

$$y^{۲}\int_{۱}^{۲} xdx = y^{۲}\times \frac{x^{۲}}{۲}\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۳}{۲}y^{۲}.$$

و در انتگرال $\int_{۱}^{۲} xy^{۲}dy$، متغیر انتگرال y و لذا x بیرون می آید. یعنی:

$$x\int_{۱}^{۲} y^{۲}dy = x\times \frac{y^{۳}}{۳}\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۷}{۳}x.$$

توجه کنید که با تغییر متغیرها در انتگرال، جواب‌ها چقدر متفاوت شده‌اند.

نتیجه ۱.۵. هنگام انتگرال‌گیری معیّن از تابع $f(x,y)$ برحسب x، عبارتی بر حسب y بدست میآید و بالعکس اگر بر حسب y انتگرال‌گیری معیّن انجام شود، حاصل، عبارتی بر حسب x خواهد شد.

اکنون فرض کنید از $f(x,y)$ بر حسب x انتگرال معیّن گرفته و سپس از حاصل که (بنابه نتیجه بالا) تابعی بر حسب y است، بر حسب y انتگرال معیّن بگیریم. برای نمونه، از حاصل انتگرال $\int_{۱}^{۲} xy^{۲}dx$ که $\frac{۳}{۲}y^{۲}$ است، بر حسب y انتگرال معیّن دیگری می گیریم:

$$\int_{۰}^{۱} \frac{۳}{۲}y^{۲}dy = \frac{۱}{۲}.$$

ایده ای که از راه حل بالا بما می دهد، یک شکل کلی و با فرم ظاهری زیر است:

$$\int_{c}^{d}\left[\int_{a}^{b} f(x,y)dx\right]dy.$$

آن را به صورت ادغام شده و **دوگانه** $\int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x,y)dxdy$ می‌نویسیم. به هر یک از انتگرال‌ها در یک انتگرال دوگانه، **انتگرال جزئی** می‌گوییم. در توضیح شکل نوشتاری مکرر انتگرالها در بالا، چند نکته قابل ذکر است.

الف) همواره ناحیه تغییراتی وجود دارد که در آن حدود متغیرها کاملاً معین می شود و لذا مشخص است کدام متغیر، مالک کدام ناحیه است. مثلاً در انتگرال دوگانه اخیر داریم: $a \leqslant x \leqslant b$ و $c \leqslant y \leqslant d$.

ب) اگر ندانیم کدام ناحیه مربوط به کدام متغیر است، کمی باید محتاط بوده و با توجه کامل به شکل به توصیف کل ناحیهٔ تغییرات اقدام می کنیم. مثلاً برای ناحیه بالا، متغیری که d دیفرانسیل آن داخلی‌تر نوشته شده است مربوط به داخلی‌ترین انتگرال و محدوده است. و یا در انتگرال $\int_c^d \int_a^b f dydx$ ناحیه $a \leqslant y \leqslant b$ و $c \leqslant x \leqslant d$ خواهد شد.

ج) در بعضی از نواحی، هر کدام از حدود انتگرال می‌توانند از عدد به یک عبارت دیگر و یا حتی انواع $\pm\infty$ تغییر یابند. مثلاً داشته باشیم:

$$\int_{\circ}^{\infty} \int_{-۱}^{۱} f dxdy, \qquad (\text{انتگرال مجازی دوگانه } -۱ \leqslant x \leqslant ۱,\ y \geqslant \circ)$$

$$\int_{۳}^{۵} \int_{x^۲}^{x^۳} f dydx. \qquad (\text{انتگرال دوگانه } ۳ \leqslant x \leqslant ۵,\ x^۲ \leqslant y \leqslant x^۳)$$

د) وقتی هر دو ناحیه تغییرات x و y عدد باشند (ناحیهٔ مستطیلی) می‌توان نوشت:

$$\int_a^b \int_c^d f dydx = \int_c^d \int_a^b f dxdy.$$

یعنی انتگرال‌ها، حدود آن‌ها و d های مربوطه، جابجا شوند.

هـ) اگر $f(x,y)$ را روی ناحیهٔ مستطیلی بتوان به حاصلضرب دو قسمت یکی کاملاً برحسب x و دیگری کاملاً بر حسب y تفکیک کرد آنگاه می‌توان نوشت:

$$\int_a^b \int_c^d f dydx = \int_a^b \int_c^d h(x)g(y)dydx = \left(\int_a^b h(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right).$$

ز) در حل یک انتگرال دوگانه، ممکن است هر روشی را که در بخش ۳.۱.۲ بیان شد، استفاده کنید. بعلاوه اگر در بیان ناحیه یک متغیر، مشاهده شد اسمی یا عبارتی برحسب متغیر دیگر در آن استفاده شده است، این محدوده وابسته داخلی ترین انتگرال را به خود می‌گیرد. (به مثال ۵.۳ قسمت ب نگاه کنید).

ح) و مهمتر از همه، شرط کافی برای آنکه یک انتگرال دوگانه روی ناحیه ای محدود حاصل عددی دهد این است که روی آن ناحیه پیوسته باشد. اگر چه بررسی این شرط برای داشتن تفسیری قابل لمس برای بعضی کاربردهای انتگرال دوگانه لازم است ولی در

ادامه، اغلب با توابعی کار می کنیم که این شرط را دارند و لذا مطمئن به حصول نتیجه ای عددی هستیم.

مثال ۱.۵. انتگرال‌های دوگانهٔ زیر را حل کنید.

الف. $\int_1^2 \int_0^x (5x^2y-2)dydx$ ب. $\int_0^1 \int_0^2 xe^{xy}dydx$.

حل: تفاوتی که در این انتگرال‌های دوگانه دیده می‌شود، همان چیزی است که در مورد **ج** بالا بیان شد. برای **الف** ابتدا داخلی‌ترین انتگرال را حل می‌کنیم:

$$\int_0^2 xe^{xy}dy = x\int_0^2 e^{xy}dy = e^{xy}\Big|_{y=0}^{2} = e^{2x}-e^0 = e^{2x}-1,$$
$$\int_0^1 (e^{2x}-1)dx = (\tfrac{1}{2}e^{2x}-x)\Big|_{x=0}^{1} = (\tfrac{1}{2}e^2-1)-(\tfrac{1}{2}e^0-0) = \tfrac{1}{2}e^2-\tfrac{3}{2}.$$

و برای **ب**: $\overbrace{\int_0^x (5x^2y-2)dy}^{\int_0^x 5x^2ydy-\int_0^x 2dy} = \overbrace{5x^2\int_0^x ydy}^{5x^2\times\frac{y^2}{2}\big|_{y=0}^{x}} - \overbrace{\int_0^{2x} 2dy}^{-2y\big|_{y=0}^{x}} = \frac{5}{2}x^4-2x.$ حال از حاصل روی [۱, ۲] بر حسب x انتگرال می گیریم: $\int_1^2 (\frac{5}{2}x^4-2x)dx = \left(\frac{1}{2}x^5-x^2\right)\Big|_1^2 = \frac{25}{2}$. □

مثال ۲.۵. انتگرال‌های دوگانه زیر را حل کنید.

الف. $\iint_R xe^{-y}dA$ که در آن R ناحیه $-2\leqslant x\leqslant 1$ و $0\leqslant y\leqslant 5$ است.

ب. $\iint_R y^2e^{xy}dA$ که در آن R ناحیه $0\leqslant x\leqslant y$ و $0\leqslant y\leqslant 1$ است.

حل: در ابتدا توجه کنید که منظور از dA عبارت $dxdy$ و یا $dydx$ است. هردو مساویند ولی اینکه کدام را استفاده می‌کنیم و اینکه کدام یک از انتگرال‌های جزئی را به کدام متغیر می‌دهیم به نحوه بیان R مرتبط است. مثلاً برای **الف**، هر دو ناحیه عدد است و f را می‌توانیم بنابه نکته هـ جداسازی کنیم:

$$\iint_R xe^{-y}dA = \iint_R xe^{-y}dxdy = \int_{-2}^{1}\int_0^5 xe^{-y}dydx,$$
$$= \int_{-2}^{1} xdx \times \int_0^5 e^{-y}dy = \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} x(-e^{-y})\Big|_0^5 = \frac{-3}{2}\times(-1+e^{-y}).$$

برای **ب**، به صورت بالا ابتدا dA را $dxdy$ نوشته، حدود را جدای ساز کرده و آنگاه $dxdy$ را اگر لازم است به صورت $dydx$ نوشته و سپس انتگرال‌ها را محاسبه می‌کنیم. یادمان باشد هنگامی که یکی از حدود متغیرها، به متغیر دیگر وابسته است (مثل مورد **ب**)، استفاده از نکته هـ بسیار محدود و با احتیاط فراوان همراه است:

$$\iint_R y^۲ e^{xy} dA = \iint_R y^۲ e^{xy} dxdy = \int_{y=۰}^{y=۱} \int_{x=۰}^{x=y} y^۲ e^{xy} dxdy,$$
$$= \int_{y=۰}^{y=۱} y^۲ \left(ye^{xy}\Big|_{x=۰}^{y} \right) dy = \int_۰^۱ (ye^{y^۲} - y)dy = \frac{۱}{۲}e - ۱.$$

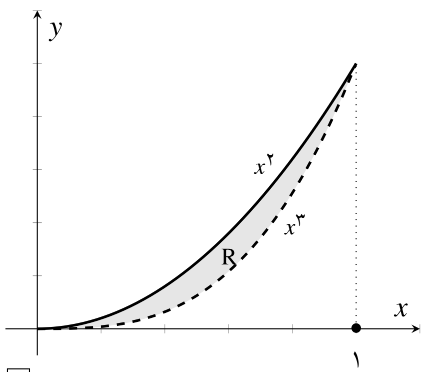
برای اینکه توضیحات طولانی مثال قبل ساده‌تر و کاربردی تر شود، هرگاه R توصیف شد در ابتدا R را با یکی از شکل‌ها (بعد از مثال **۴.۵**) مقایسه کرده و سپس انتگرال دوگانه مناسب را می‌نویسیم.

نکته ۱.۵. با توجه به شکل تعریف انتگرال دوگانه از یک تابع روی یک ناحیه، اگر تابع f را عدد ۱ بگیریم آنگاه مقدار انتگرال دوگانه‌ای همان مساحت R است.

مثال ۳.۵. مساحت ناحیه محصور بین دو تابع $y = x^۲$ و $y = x^۳$ را بدست آورید.

حل: شکل زیر ناحیه R را مشخص می‌کند:

از روی شکل روشن است در حالت شکل **۲.۵** واقع شده‌ایم. در واقع



$$R : ۰ \leqslant x \leqslant ۱, x^۳ \leqslant y \leqslant x^۲, f(x,y) = ۱$$

پس مساحت R برابر است با

$$\int_۰^۱ \int_{x^۳}^{x^۲} dydx = \int_۰^۱ (x^۲ - x^۳)dx = \frac{۱}{۱۲}$$

□

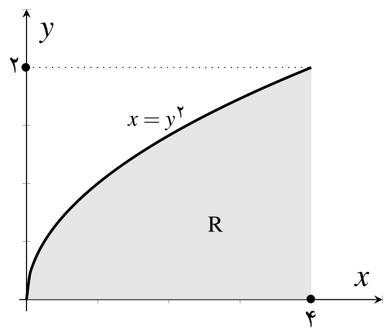
نکته ۲.۵. گاهی می‌توان با توجه به ناحیه R حدود انتگرال‌های جزئی را در یک انتگرال دوگانه جابجا کرد. این مطلب به معنای این است که نه فقط ظاهر فیزیکی علامت‌ها و حدودشان را جابجا کنیم بلکه خود حدود عوض می‌شوند.

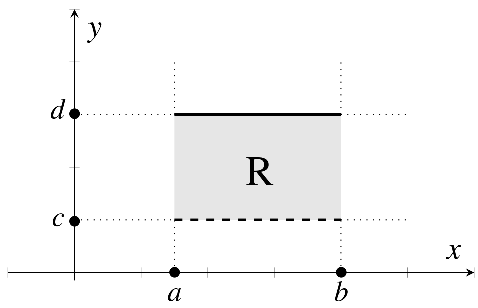
مثال ۴.۵. در ناحیه R، $y^۲ \leqslant x \leqslant ۴$، $\circ \leqslant y \leqslant ۲$ داده شده است. حدود انتگرال‌گیری را طوری تغییر دهید تا dy برخلاف توصیف بالا از R، در داخلی‌ترین انتگرال واقع شود.

حل: اگر چه ترسیم R معمولاً توصیه نمی‌شود ولی برای این مسئله R را رسم می‌کنیم (شکل زیر). از روی شکل R می‌توان طور دیگری نیز R را توصیف کرد:

$$\circ \leqslant x \leqslant ۴, \circ \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$$

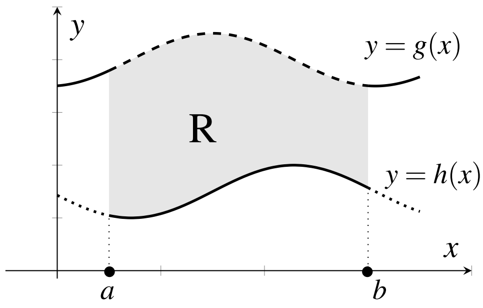
در این‌صورت $\int_{\circ}^{۲}\int_{y^۲}^{\circ} f(x,y)dxdy$ به $\int_{\circ}^{۴}\int_{\circ}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$ تبدیل شده و جواب هر دو انتگرال دوگانه یکی است.





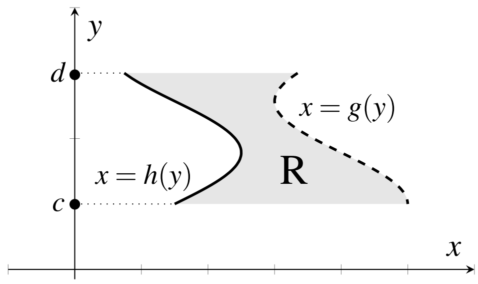
شکل ۱.۵

$$R: \quad a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$$
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$
$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$



شکل ۲.۵

$$R: \quad a \leqslant x \leqslant b,\ h(x) \leqslant y \leqslant g(x)$$
$$\int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dydx$$



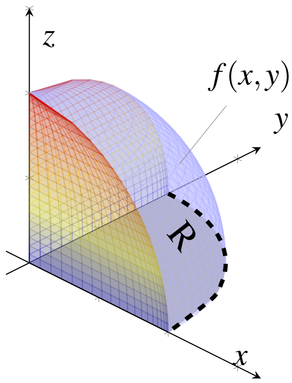
شکل ۳.۵

$$R: \quad a \leqslant x \leqslant b,\ h(y) \leqslant x \leqslant g(y)$$
$$\int_c^d \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dxdy$$

۲.۵ کاربردهای انتگرال‌گیری دوگانه

۱.۲.۵ حجم

حاصل یک انتگرال دو گانه را می توان بعنوان حجم زیر رویه ای ۳- بُعدی که روی یک ناحیه واقع در صفحهٔ xy سایه انداخته است در نظر گرفت. در شکل زیر رویه در بالا و ناحیه R روی زمین و حجم ما بین این دو دیده می شود:



تعریف ۱.۵. فرض کنیم تابع $f(x,y)$ بازای هر نقطه (x,y) از ناحیه R تعریف شده و دارای مقداری نامنفی است. بعلاوه فرض کنیم نمودار این تابع، مادام که روی ناحیه قرار دارد، هیچ انفصالی ندارد. در این صورت حجمی که دقیقاً بالای R و محدود به آن و زیر نمودار تابع ساخته می شود را با انتگرال دوگانه زیر بدست می آوریم:

$$V=\iint_R f(x,y)dA.$$

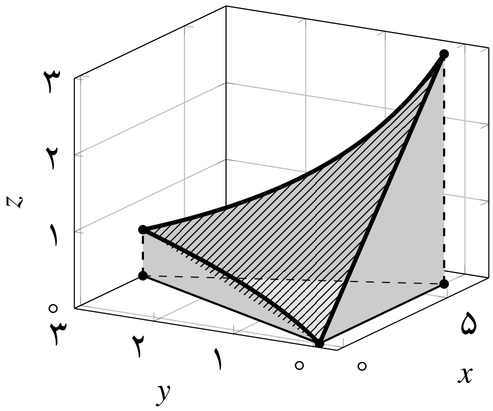
مثال ۵.۵. ناحیه R مثلثی است با رئوس $(۳,۳,۰)$، $(۶,۰,۰)$ و $(۰,۰,۰)$ واقع در صفحه xy. حجمی که این ناحیه از پایین و نمودار تابع $z=\frac{x}{y+۲}$ از بالا ایجاد می کنند را بیابید.

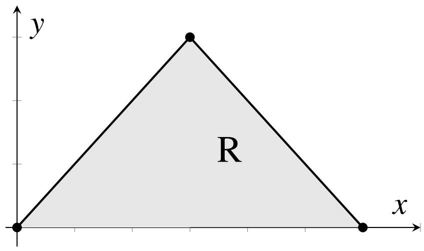
حل: شکل ناحیه R به صورت زیر است و توصیف ساده ای دارد. با تکنیک بخش قبلی داریم: $R:\ y\leqslant x\leqslant ۶-y,\ ۰\leqslant y\leqslant ۳$ و چون در ربع اول کار می کنیم، لذا تابع همواره نامنفی است و

بنابر این:

$$V=\int_{0}^{3}\left(\int_{y}^{6-y}\frac{x\,dx}{y+2}\right)dy=\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{y+2}\times\frac{x^{2}}{2}\Big|_{y}^{6-y}\right)dy\simeq 9/48.$$

حجم پیدا شدهٔ بالا را در زیر می بینید. مثلث روی زمین همان R است.





مثال ۶.۵. ناحیه R به صورت: $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$ داده شده است. اگر $f(x,y)=xe^{-y}$ مطلوبست مقدار حجمی که تابع دقیقاً روی ناحیه می سازد. حل:

$$V=\int_{x=0}^{1}\int_{0}^{2}x\exp(-y)dydx=\int_{0}^{1}x\,dx\times\int_{0}^{2}e^{-y}\,dy=\frac{x^{2}}{2}\Big|_{0}^{1}\times(-e^{-y}\Big|_{0}^{2}=-0/5e^{-2}.$$

۲.۲.۵ مقدار متوسط

مفهوم مقدار متوسط نه تنها برای تابع یک متغیره $f(x)$ روی فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ تعریف می شود بلکه آنرا برای تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ که روی ناحیهٔ دو بُعدی R معین است نیز بیان کرد.

تعریف ۲.۵. مقدار متوسط تابع $f(x,y)$ روی ناحیهٔ R با مقدار انتگرال دوگانهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$AV=\frac{1}{R\ \text{مساحت}}\iint_{R}f(x,y)dA$$

مثال ۷.۵. خروجی یک کارخانه، از تابع تولید کاب داگلاس زیر تبعیّت می کند

$$Q(K,L) = ۵۰K^{\frac{۳}{۵}}L^{\frac{۲}{۵}}$$

که در آن K سرمایه ملی و L اندازهٔ نیروی کار است. فرض کنید مقدار K بطور ماهانه از ۱۰ (هزار) تا ۱۲(هزار) و نیروی کار از مقدار ۲۸۰۰ تا ۳۲۰۰ کارگر-ساعت متغیر است. مطلوبست خروجی ماهیانهٔ متوسط این کارخانه با فرض داده شده.

حل: با توجه به فرض: $۱۰ \leqslant K \leqslant ۱۲,\ ۲۸۰۰ \leqslant L \leqslant ۳۲۰۰$. این را همان ناحیهٔ R می گیریم. این ناحیه مستطیلی بوده و دارای مساحت $(۱۲-۱۰)(۳۲۰۰-۲۴۰۰) = ۸۰۰$. است. اکنون داریم:

$$AV = \frac{۱}{۸۰۰}\int_{۲۸۰۰}^{۳۲۰۰}\left(\int_{۱۰}^{۱۲} ۵۰K^{\frac{۳}{۵}}L^{\frac{۲}{۵}}dK\right)dL$$

$$= \frac{۵۰}{۸۰۰}\left(\frac{۵}{۷}L^{\frac{۷}{۵}}\Big|_{۲۸۰۰}^{۳۲۰۰}\right)\left(\frac{۵}{۸}L^{\frac{۸}{۵}}\Big|_{K=۱۰}^{۱۲}\right) \simeq ۵۱۸۱/۲۳.$$

□

۳.۵ تمرینات

- در تمرینات زیر انتگرال‌های جزئی را محاسبه کنید.

۱. $\int_{\circ}^{x} (۲x-y)dy$

۲. $\int_{x^۲}^{\sqrt{x}} (x^۲+y^۲)dy$

۳. $\int_{x}^{x^۲} \frac{y}{x}dy$

۴. $\int_{۱}^{e^y} \ln x \left(\frac{y}{x}\right) dx$

۵. $\int_{۱}^{۲x} \frac{y}{x}dy$

۶. $\int_{y}^{۳} \frac{xy}{\sqrt{۱+x^۲}}dx$

۷. $\int_{\circ}^{e^y} ydx$

۸. $\int_{\circ}^{x} e^{xy}ydy$

- در تمرینات زیر ناحیه R توصیف شده را رسم کرده و سپس توصیف دیگری از آن بدهید.

۹. $۲ \geqslant x \geqslant \circ ,۱ \geqslant y \geqslant \circ$.

۱۰. $۲ \leqslant y \leqslant ۳,\ ۱ \leqslant x \leqslant ۳$

۱۱. $۳ \geqslant x \geqslant \circ/۵ ,۱ - ۲x \geqslant y \geqslant \circ$

۱۲. $\circ \leqslant y \leqslant x^۲,\ \circ \leqslant x \leqslant ۲$

- در تمرینات زیر، ناحیه R را بدقت توصیف کنید.

۱۳. R مثلثی است با رأس‌های $(\circ,۱)$، $(۱,۱)$ و $(۲,\circ)$.

۱۴. R ناحیه‌ای است که بین دو تابع $y = \ln x$ و $y = \circ$ و خط $x = e$ محصور است.

۱۵. R ناحیه‌ای است مستطیلی شکل با رأس‌های $(-۱,۱)$ و $(۲,۱)$ و $(۲,۲)$ و $(-۱,۲)$.

- انتگرال‌های دوگانه زیر را محاسبه کنید.

۱۶. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{2}(x+y)dydx$

۱۷. $\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}(x^{2}-y^{2})dydx$

۱۸. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{2}(6-x^{2})dydx$

۱۹. $\int_{0}^{1}\int_{1}^{5}y\sqrt{1-y^{2}}dxdy$

۲۰. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{y}(x+y)dxdy$

۲۱. $\int_{1}^{2}\int_{2}^{3}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)dydx$

۲۲. $\int_{0}^{2}\int_{3y^{2}-6y}^{2y-y^{2}}3ydxdy$

۲۳. $\int_{0}^{1}\int_{x}^{2x}e^{y-x}dydx$

۲۴. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-y^{2}}}-5xydxdy$

۲۵. $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x}xydydx$

۲۶. حاصل انتگرال‌های دوگانه زیر را با توجه به ناحیه R داده شده بیابید.

الف) $\iint_{R}5xy^{2}dA$ که در آن R مستطیل ایجاد شده بوسیله $x=-1$ و $x=2$ و $y=-1$، $y=0$ است.

ب) $\iint_{R}xe^{y}dA$ که در آن R مثلثی با سه رأس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,1)$ است.

ج) $\iint_{R}\frac{dA}{y^{2}+1}$ که در آن R مثلثی است که بواسطه خط‌های $y=\frac{x}{2}$، $y=-x$ و $y=2$ پدید آمده است.

د) $\iint_{R}12x^{2}e^{y^{2}}dA$ که در آن R یک چهارم اول محصور بین خط $y=x$ و تابع $y=x^{3}$ است.

۲۷. انتگرال‌های دوگانه زیر را حل کنید.

الف) $\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{\frac{-(x+y)}{2}}dydx$

ب) $\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}xye^{-(x^{2}+y^{2})}dxdy$

- در مسائل زیر سعی کنید R را در ابتدا رسم کرده و سپس با تغییر حدود انتگرال‌گیری، حاصل هر یک را بدست آورید.

۲۸. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{2} dydx$

۲۹. $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2} dydx$

۳۰. $\int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{x}} dydx$

۳۱. $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2} dxdy$

- در مسائل زیر، حکم تمرین ۲۸ تا ۳۱ را روی R انجام دهید(محاسبه انتگرال نیازی نیست).

۳۲. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-x^2} f(x,y)dydx$

۳۳. $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$

۳۴. $\int_{1}^{e^2}\int_{\ln x}^{2} f(x,y)dydx$

۳۵. $\int_{-1}^{1}\int_{x^2+1}^{2} f(x,y)dydx$

۳۶. در نمونه‌های زیر مساحت R را بیابید.

الف) R ناحیه‌ای است محدود به $y=\frac{x^2}{2}$ و $y=2x$.

ب) R ناحیه‌ای است محدود به $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$.

ج) R ناحیه‌ای است محدود به $y=x^2-4x+3$ و محور xها.

د) R ناحیه‌ای است محدود به $y=x$، $y=\ln x$، $y=0$ و خط $y=1$.

- در دو مسئله زیر انتگرال‌های دوگانه را محاسبه کنید (توجه کنید حتماً لازم است قبل از هر محاسبه‌ای، حدود انتگرال‌گیری بدقت تعویض شوند.)

۳۷. $\int_{\circ}^{۳}\int_{y}^{۳} e^{x^{۲}}dxdy$

۳۸. $\int_{\circ}^{۲}\int_{x}^{۲} e^{-y^{۲}}dydx$

- کدامیک از دو تساوی زیر غلط و کدام درست است؟

۳۹. $\int_{-۱}^{۱}\int_{-۲}^{۲} ydydx = \int_{-۱}^{۱}\int_{-۲}^{۲} ydxdy$

۴۰. $\int_{۲}^{۵}\int_{۱}^{۶} xdydx = \int_{۱}^{۶}\int_{۲}^{۵} xdxdy$

۴۱. ناحیه R در هر حالت توصیف شده است. با توجه به تابع داده شده، حجم روی R را بدست آورید.

الف) $f(x,y) = ۶ - ۲x - ۲y$، $\circ \leqslant x \leqslant ۱$، $\circ \leqslant y \leqslant ۲$.

ب) $f(x,y) = ۹ - x^{۲} - y^{۲}$، $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$، $-۲ \leqslant y \leqslant ۲$.

ج) $f(x,y) = ۲x + y$، $y = x$، $y = ۲ - x$، $y = \circ$.

د) $f(x,y) = ۴xe^{y}$، $y = ۲$، $y = ۲x$، $x = \circ$

۴۲. مقدار متوسط تابع‌ای داده شده زیر را روی ناحیه R بدست آورید.

الف) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$، $-۲ \leqslant x \leqslant ۳$، $۱ \leqslant y \leqslant ۳$.

ب) $f(x,y) = xye^{x^{۲}y}$، $\circ \leqslant x \leqslant ۱$، $\circ \leqslant y \leqslant ۲$.

ج) $f(x,y) = e^{x}y^{-۱/۲}$، $x = \sqrt{y}$، $y = \circ$، $x = ۱$.

۴۳. یک تولید کننده حدس می‌زند که با فروش x واحد از کالایش در بازار داخل و y واحد از همان کالا در بازار خارجی، سودی به میزان

$$P(x,y) = (x - ۳\circ)(۷\circ + ۵x - ۴y) + (y - ۴\circ)(۸\circ - ۶x + ۷y)$$

عایدش می‌شود. اگر مقادیر فروش داخلی به طور ماهانه $۱\circ\circ \leqslant x \leqslant ۱۲۵$ و در خارج $۷\circ \leqslant y \leqslant ۸۹$ داشته باشند، مطلوب است سود متوسط ماهانه.

۴۴. یک کارخانه تابع تولید خروجی به صورت

$$Q(x,y) = ۲x^{۳} + ۳x^{۲}y + y^{۳}$$

به ازای ورودی‌های x و y دارد. اگر بدانیم $۰ \leqslant x \leqslant ۵$ و $۰ \leqslant y \leqslant ۷$ میزان خروجی متوسط کارخانه چقدر است؟

۱.۳.۵ جواب و راهنمایی ها

۱. انتگرال را جدا می‌کنیم:

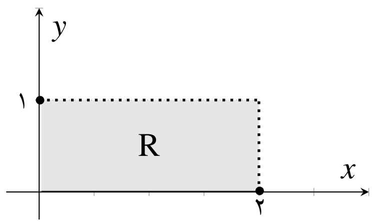
$$A = ۲x\int_{۰}^{x} dy - \int_{۰}^{x} ydy = ۲x\left(y|_{۰}^{x}\right) - \frac{y^{۲}}{۲}\Big|_{۰}^{x} = \frac{۳}{۲}x^{۲}.$$

۲. انتگرال را جدا کرده: $A = \int_{x^{۲}}^{\sqrt{x}}(x^{۲}+y^{۲})dy = \int_{x^{۲}}^{\sqrt{x}} x^{۲}dy + \int_{x^{۲}}^{\sqrt{x}} y^{۲}dy$ و نهایتاً $A = x^{۲}y|_{x^{۲}}^{\sqrt{x}} + \frac{y^{۳}}{۳}\Big|_{x^{۲}}^{\sqrt{x}} = x^{۲}(\sqrt{x}-x^{۲}) + \frac{۱}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۳}x^{۶}$. **۴.** متغیر انتگرال x بوده و لذا y مقدار ثابت در نظر گرفته می‌شود:

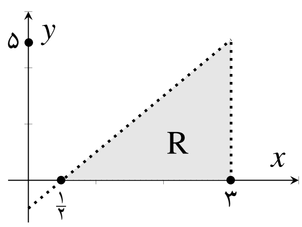
$$\int_{۱}^{e^{y}} \ln x\left(\frac{y}{x}\right)dx = y\int_{۱}^{e^{y}} \ln x\left(\frac{dx}{x}\right) = y\int_{۱}^{e^{y}} \ln(x)d(\ln x) = y\left(\frac{\ln^{۲}(x)}{۲}\Big|_{۱}^{e^{y}}\right) = \frac{y^{۳}}{۲}$$

۵. انتگرال بر حسب y است پس $\int_{۱}^{۲x}\frac{y}{x}dy = \frac{۱}{x}\int_{۱}^{۲x} ydy = \frac{۱}{x}\left(\frac{y^{۲}}{۲}\Big|_{۱}^{۲x}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۴x^{۲}-۱}{x}\right)$.

۹. ناحیه R به شکل زیر است. توصیف دیگری از R وجود ندارد زیرا R ناحیه‌ی مستطیلی است:

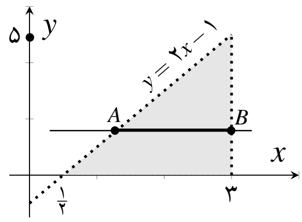


۱۱. ناحیه R به شکل زیر است. ناحیه مستطیلی نیست پس می‌توانیم توصیفی معادل از



R بدهیم. به ترتیب زیر عمل کنید: به موازات محور x ها یک خط دلخواه چنان رسم کنید که

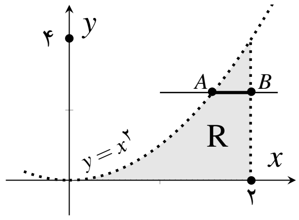
داخل ناحیه واقع شده و آنرا قطع کند. این خط دو مرز این ناحیه را از چپ در نقطه A و در هنگام خروج از آن در B قطع می‌کند: در صورت مسئله، طول هر دو نقطه بین $\frac{۱}{۲}$ و ۳ متغیر



است و لذا x بین دو کران عددی تغییرات دارد. سعی می کنیم تا سهم تغییرکردن بین دو مقدار عددی را به y داده تا نقش x و y را برای یافتن توصیفی معادل از ناحیه عوض کنیم. ولی عرض های این دو نقطه بین کدام حدود متغیر است؟ با اندکی دقت می فهمید که نه تنها برای این دو نقطه بلکه عرض کل نقاط در این ناحیه بین صفر و $\frac{۵}{۲}$ تغییر می کند، یعنی $۰ \leqslant y \leqslant ۵$. حال طول نقاط A و B را به ترتیب بدست آورید. برای A، $y = ۲x - ۱$ و بنابر این $x = \frac{y+۱}{۲}$. برای B، $x = ۴$ و لذا $x = ۴$. نقطه A سمت چپ B قرار دارد، پس بنویسید $\frac{y+۱}{۲} \leqslant x \leqslant ۴$. اکنون توصیف معادل از R به صورت زیر نوشته می‌شود:

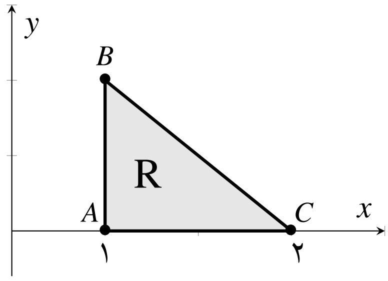
$$R: \ \frac{y+۱}{۲} \leqslant x \leqslant ۴, ۰ \leqslant y \leqslant \frac{۵}{۲}$$

۱۲. مراحلی را که در بالا انجام شد، برای ناحیه R زیر انجام می‌دهیم. واضح است که $۰ \leqslant$



$y \leqslant ۴$ از طرفی طول نقطه A برابر است با $x = \sqrt{y}$ و طول نقطه B چون روی خط $x = ۲$ قرار دارد برابر است با ۲. پس ناحیه R به شکل $۰ \leqslant y \leqslant ۴, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant ۲$ هم توصیف می شود.

۱۳. ترسیمی از ناحیه R به صورت زیر است، اگر چه رسم ناحیه به جهت توصیف آن لازم



نیست. مختصات A، B و C به ترتیب عبارتند از $(1,0)$، $(2,0)$ و $(1,1)$. در این مسئله یک توصیف از R را ارائه می‌دهیم. به وضوح $1 \leqslant x \leqslant 2$ و حدود تغییرات y از محور xها شروع شده و نهایتاً تا پاره خط BC بالا میرود. معادله خط گذرنده از B و C به صورت زیر است[۲]:

$$y-1=\frac{1-0}{1-2}(x-1)=(-x+1)\Longrightarrow y=-x+2.$$

لذا $1 \leqslant x \leqslant 2$ و $0 \leqslant y \leqslant -x+2$ توصیف جدید از ناحیه است. **۱۴.** در ناحیه R داده شده، مشاهده می‌کنید که $1 \leqslant x \leqslant e$ و از طرفی $0 \leqslant y \leqslant \ln x$. پس این دو نامساوی، توصیفی جدید از ناحیه هستند. **۱۷.** انتگرال دوگانهٔ را به صورت $\int_{-1}^{1}\left[\int_{-2}^{2} x^2 dy-\int_{-2}^{2} y^2 dy\right] dx$ جدا کرده و با حل انتگرال های داخلی داریم $\int_{-1}^{1}\left(x^2 y\Big|_{y=-2}^{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{2}\right) dx$. در نهایت جواب برابر است با $\int_{-1}^{1}(4x^2-\frac{16}{3})dx=(\frac{4}{3}x^3-\frac{16}{3}x)\Big|_{-1}^{1}=-8.$ **۱۹.** انتگرال ها به صورت $\int_{1}^{5} dx\int_{0}^{1} y\sqrt{1-y^2}dy$ و یا $\int_{1}^{5} dx\int_{0}^{1}\sqrt{1-y^2}d\left(\frac{1-y^2}{-2}\right)$ درآمده و جواب از حاصلضرب $x\Big|_{1}^{5}\times\frac{(1-y^2)^{3/2}}{-3}\Big|_{0}^{1}$ بدست می آید. مقدار آن $\frac{4}{3}$ است. **۲۰.** انتگرال دوگانهٔ را به شکل $\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{y} xdx+\int_{0}^{y} ydx\right] dy$ نوشته و داریم:

$$\int_{0}^{1}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{y}+yx\Big|_{0}^{y}\right) dy=\int_{0}^{1}\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right) dy=\frac{y^3}{2}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}.$$

---

[۲] معادله خط گذرنده از B و C با $y-y_B=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}(x-x_B)$ بدست می آید.

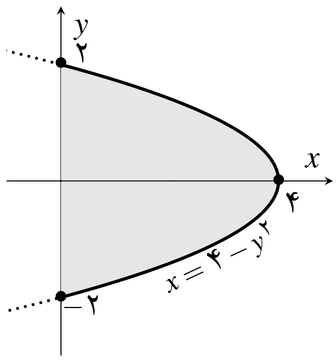
۲۱. انتگرال دوگانهٔ را به شکل $\int_1^2 \left[\frac{1}{x}\int_2^3 y\,dy + x\int_2^3 \frac{dy}{y}\right]dx$ نوشته و داریم:
$$\int_1^2\left[\frac{1}{x}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_2^3\right)+x\left(\ln y\Big|_2^3\right)\right]dx=\frac{5}{2}\int_1^2\frac{1}{x}dx+\ln(\tfrac{3}{2})\int_1^2 xdx$$
مقدار آن برابر است با $\frac{5}{2}\ln(x)+\ln(\frac{3}{2})(\frac{3}{2})$. **۲۲.** انتگرال دوگانهٔ را به شکل
$$\int_0^2 3y\left[\int_{3y^2-6y}^{2y-y^2}dx\right],$$
نوشته و با حل انتگرال داخل به حاصل $\int_0^2 3y(8y-4y^2)dy=16$ می رسیم. **۲۴.** انتگرال دوگانهٔ را به شکل $\int_0^2 -5y\left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xdx\right]dy$ نوشته و با حل انتگرال داخل به حاصل $\int_0^2 -5y\left(\frac{1-y^2}{2}\right)dy=5$ می رسیم. **۲۶. الف.** در این مسئله R به صورت $-1\leqslant x\leqslant 2$ و $-1\leqslant y\leqslant 0$ در می‌آید و بنابراین حاصل انتگرال های داده شده برابر است با:
$$\int_{x=-1}^2\int_{y=-1}^0 5xy^2dydx=\int_{-1}^2 5xdx\times\int_{-1}^0 y^2dy=\frac{5x^2}{2}\Big|_{-1}^2\times\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^0=\frac{5}{2}.$$
برای **ب**، ناحیه به صورت $0\leqslant y\leqslant x$ و $0\leqslant x\leqslant 1$ توصیف می شود. لذا
$$\iint_A xe^y dA=\int_{x=0}^1 x\int_0^x e^y dydx=\int_0^1 x(e^x-1)dx \overset{\text{جزبه جزء}}{=\!=} \frac{1}{2}.$$
ناحیه R در **د** به صورت $x^3\leqslant y\leqslant x$ که $0\leqslant x\leqslant 1$ قابل بیان است. بنابراین انتگرالها به شکل $\int_0^1 12x^2\int_{y=x^3}^x e^{y^2}dydx$ در می آید. ولی انتگرال داخلی قابل حل نیست[3]. در چنین مواقعی توصیف ناحیه را تعویض می کنیم. یعنی بطور معادل، ناحیه را به صورت $y\leqslant x\leqslant \sqrt[3]{y}$ که $0\leqslant y\leqslant 1$ می نویسیم. با این فرض انتگرالها به $\int_{y=0}^1 e^{y^2}\int_y^{\sqrt[3]{y}} 12x^2dx$ تبدیل شده و از آنجا به $\int_0^1(-4y^3+4y)e^{y^2}dy$ و بعد با جدا سازی به $\int_0^1 -4y^3e^{y^2}dy+\int_0^1 4ye^{y^2}dy$ میرسیم. با استفاده از روش جزء بجزء انتگرال اول و بعدی را با تغییر متغیر حل می کنیم. حاصل برابر است با $-2(y^2-2)e^{y^2}\big|_0^1=2e-4$. لازم به ذکر است انتگرال اول را از راه

[3] به بخش تابع چگالی احتمال مراجعه کنید.

جز به جزء حل کنید و بعد مقدار گذاری کنید. **۲۷.** برای **ب** به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{\infty} xe^{-x^{۲}}dx \times \int_{۰}^{\infty} ye^{-y^{۲}}dy = \underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{-t^{۲}}}{-۲}+\frac{۱}{۲}\right)}_{۰+\frac{۱}{۲}} \times \underbrace{\lim_{s\to\infty}\left(\frac{e^{-s^{۲}}}{-۲}+\frac{۱}{۲}\right)}_{۰+\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴}.$$

۳۱. ناحیه R در انتگرال به صورت زیر است:



$$\int_{-۲}^{۲}\int_{۰}^{۴-y^{۲}} dxdy = \int_{-۱}^{۲}(۴-y^{۲})dy = (۴y-\frac{y^{۳}}{۳})\Big|_{-۲}^{۲} = ۰.$$

۳۶. در این مسئله به نحوه یافتن محدوده R توجه کنید. برای **الف** در ابتدا دو تابع را قطع می‌دهیم: $۲x = \frac{x^{۲}}{۲} \to x = ۰, ۴$ و لذا $۰ \leqslant x \leqslant ۴$ چون دو تابع چندجمله‌ای هستند. برای اینکه بدانیم کدام تابع بالاتر و کدام تابع در حد پایین y قرار می‌گیرد، یک عدد بین صفر و ۴ به دو تابع می‌دهیم:

$$۰ \leqslant x = ۱ \leqslant ۴ \to ۲x = ۲x = ۲ > \frac{x^{۲}}{۲} = \frac{۱^{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲},$$

و لذا $\frac{x^{۲}}{۲} \leqslant y \leqslant ۲x$. در نهایت کافی است انتگرال دوگانه $\int_{۰}^{۴}\int_{y=\frac{x^{۲}}{۲}}^{۲x} dydx$ را حل کنیم.
برای **ج**، از حل معادله $x^{۲}-۴x+۳=۰$ داریم $x=۱,۳$ و لذا $۱ \leqslant x \leqslant ۳$. مساحت R با حل انتگرال دوگانه زیر محاسبه می‌شود:

$$\left|\int_{۱}^{۳}\int_{y=۰}^{x^{۲}-۴x+۳} dydx\right|.$$

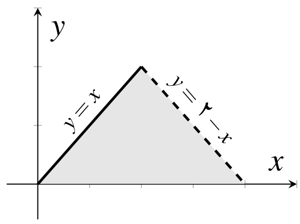
استفاده از قدرمطلق بدین علت است که این تابع یعنی $۱ \leqslant x \leqslant ۳$ زیر محور xها قرار دارد.
در بارهٔ **د**، کافی است انتگرال دوگانه زیر را حل کنیم:

$$\int_{۰}^{۱}\int_{\ln x}^{x} dydx = \int_{۰}^{۱}(x-\ln x)dx = \left(\frac{x^{۲}}{۲} - (x\ln x - x)\right)\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۳}{۲}.$$

۳۹. درست است. **۴۱.** برای **الف**، مقدار حجم برابر است با:

$$\int_{x=۰}^{۱}\int_{y=۰}^{۲}(۶-۲x-۲y)dydx = \int_{۰}^{۱}\left[۶y-۲xy-y^{۲}\right]_{۰}^{۲} dx$$
$$= \int_{۰}^{۱}(۸-۴x)dx = ۶.$$

و برای **ج** ، ناحیه مثلثی به شکل زیر است: توصیفی از ناحیه بطوری که y حدود عددی بگیرد،



عبارت است از $۰ \leqslant y \leqslant ۱$ و $y \leqslant x \leqslant ۲-y$ و لذا مقدار حجم برابر است با:

$$\int_{۰}^{۱}\int_{y}^{۲-y}(۲x+y)dydx = \int_{۰}^{۱}(-۲y^{۲}-۲y+۴)\,dy = \tfrac{۷}{۳}.$$

۴۲. برای نمونه، **ب** را حل می کنیم. اولاً بایستی مساحت R را بیابیم:

$$\text{مساحت } R = \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۲} dydx = ۲.$$

ثانیاً با توجه به فرمول مقدار متوسط داریم:

$$\text{مقدار متوسط} = \tfrac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{۱} xye^{x^{۲}y}dxdy = \tfrac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲} ydy\int_{۰}^{۱} xye^{x^{۲}y}dx,$$
$$= \tfrac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲} ydy\left(\tfrac{۱}{۲y}e^{x^{۲}y}\right)\Big|_{۰}^{۱} = \tfrac{۱}{۴}\int_{۰}^{۲}(e^{y}-۱)dy = \tfrac{e}{۴} - ۰/۵.$$

۴۳. مساحت ناحیهٔ مستطیلی در مسئله برابر است با $۴۷۵ = (۷۰-۸۹)(۱۰۰-۱۲۵)$.

مقدار متوسط سود به شکل زیر بدست می آید:

$$= \frac{۱}{۴۷۵}\int_{۷۰}^{۸۹}\int_{۱۰۰}^{۱۲۵}[(x-۳۰)(۷۰+۵x-۴y)+(y-۴۰)(۸۰-۶x+۷y)]dxdy,$$
$$= \frac{۱}{۴۷۵}\int_{۷۰}^{۸۹}\left(\frac{۵}{۳}x^۳-۴x^۲y+۸۰x^۲-۵۳۰۰x-۸۰xy+۷xy^۲\right)\Big|_{۱۰۰}^{۱۲۵}dy,$$
$$= \frac{۴۹۷۹۳}{۲}.$$

۴۴. مساحت ناحیهٔ برابر است با **۳۵**. مقدار متوسط مورد نظر مسئله از حل زیر بدست می آید:

$$\frac{۱}{۳۵}\underbrace{\int_{۰}^{۵}\underbrace{\int_{۰}^{۷}(۲x^۳+۳x^۲y+y^۳)dy}_{\left(۲x^۳y+۱/۵x^۲y^۲+۰/۲۵y^۴\right)\big|_{۰}^{۷}}dx}_{\left(\frac{۷}{۲}x^۴+\frac{۴۹}{۲}x^۳+\frac{۲۴۰۱}{۴}x\right)\big|_{۰}^{۵}=\frac{۳۳۰۰۵}{۴}} = \frac{۹۴۳}{۴}.$$

فصل ۶

بردارها

۱.۶ مقدمات

در کاربرد مفاهیم مجرد ریاضی در سایر قسمتهای علوم، بی شک یکی از مهمترین آنها **ماتریس** است. در بیان انواع ماتریس، ماتریسهایی که دارای یک سطر (یا یک ستون) هستند را سطری (یا ستونی) می نامند. این مبحث شامل نکات و تعاریف جدیدی دربارهٔ این نوع از ماتریسها (و البته با نامی متفاوت) است.

تعریف ۱.۶. اگر $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$، a_n اعداد حقیقی دلخواهی باشند، هر $n-$ تایی مرتب[1] $(a_۱ \quad a_۲ \quad a_۳ \quad \cdots \quad a_n)$ را یک **بُردار** $n-$ **بُعدی** می نامند.

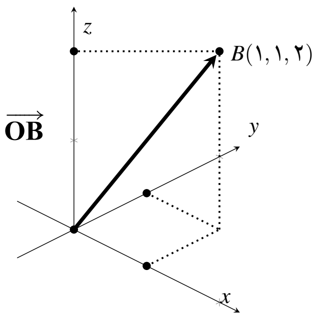
در نمایش یک بردار، نمادهای متفاوتی مرسوم است. مثلاً یک بردار ۲- بُعدی $(a_۱ \quad a_۲)$ را می توان بصورت های $\langle a_۱, a_۲\rangle$ و یا $(a_۱, \ a_۲)$ هم نشان داد. در این فصل، فرم نمایش ماتریسی (سطری) از بردار را بکار می بریم. برای عدم تداخل مفاهیم، ضمن نام گذاری یک بردار، می توان از یک فلش هم بر روی شکل ماتریسی آن استفاده کرده تا نهایتاً بردار از غیر

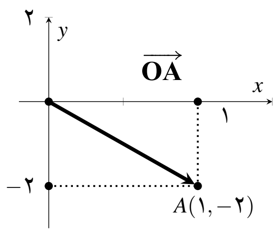
[1] که در واقع ماتریسی $n \times ۱$ است.

بردار متمایز شود.[۲] همانطور که بی دلیل نمی توان درآیه های یک ماتریس را تعویض کرد، درآیه های یک بردار (که آنها را **مؤلفه** می نامیم) را نیز نمی توان تغییر داد. بعبارت دیگر، این مؤلفه ها با دلیل و با ترتیب خاصی نوشته شده و لذا تغییر در آنها منجر به تغییر در کل بردار می گردد.[۳]

قرارداد ۱.۶. الف) در ادامه می توان برای هر بردار دو کار انجام داد. یکی نام گذاری آن و دیگر استفاده از یک فلش کوچک بالای نام انتخابی برای آن است (در این صورت، نمایش بالا از بردار ساده تر صورت می گیرد) و بعلاوه نام انتخابی را پر رنگ تر از بقیه حروف می نویسیم. مثلاً بردار $\vec{\mathbf{a}} = (۴\quad ۳-)$ بجای $\overrightarrow{(۴\quad ۳-)}$. ب) برای سادگی در نمایش، اغلب از بردارهای دو یا سه بعدی استفاده می کنیم. این قید تصور ما از آنها را راحتتر می کند. البته کار با بردارهای با ابعاد بالاتر، اگر از حیطه آنچه به آن نیاز داریم خارج نشود، همچنان ادامه دارد.

تعریف ۲.۶. برای هر نقطه در صفحه یا فضا، می توان یک بردار متناظر کرد. این بردار، **بردار مکان** آن نقطه نامیده می شود. بردار مکان به صورت پاره خطی جهت دار (که نقطه را نشانه گرفته) با ابتدای مبداء و انتهای آن نقطه رسم می شود. مثلاً برای دو نقطهٔ $A(۱,-۲)$ و $B(۱,۱,۲)$ بترتیب در صفحه و فضا، بردارهای مکان رسم شده اند:





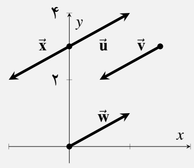
با توجه به نحوهٔ تعریف بردار مکان، برای هر کدام یک نقطه ابتدا (در اینجا مبداء) و یک نقطه انتها A (یا B) دیده می شود. ولی آیا همه بردارها، از نوع مکان هستند؟

---

[۲] برای نمونه، بردارهای $\overrightarrow{(۴\ -\ ۲)}$ و $\overrightarrow{(\tfrac{۱}{۳}\quad ۶\quad ۴-)}$ بردارهایی ۲-بعدی (مسطح) و سه بعدی (فضایی) اند.

[۳] مثلاً: $(a_۱\quad a_۲\quad a_۳) \neq (a_۲\quad a_۱\quad a_۳) \neq (a_۳\quad a_۲\quad a_۱)$.

نکات ۱.۶. الف) از نظر ترسیمی، دو بردار **مساوی** هستند هرگاه پاره خطهای رسم شده برای آنها در صفحه (و یا فضا) هم اندازه و هم جهت باشند. مثلاً دو بردار $\vec{\mathbf{u}}$ و $\vec{\mathbf{w}}$ مساویند. بردار $\vec{\mathbf{v}}$ ظاهراً فقط در اندازه با دو بردار دیگر یکسان است. بردار $\vec{\mathbf{x}}$ در این شکل هم راستا و هم طول با $\vec{\mathbf{u}}$ است و نا هم جهت با آن. توجه کنید غیر از $\vec{\mathbf{w}}$ هیچکدام از بردارها، بردار مکان نیستند.



ب) دو بردار قابل مقایسه[a] $\vec{\mathbf{u}}$ و $\vec{\mathbf{v}}$ با هم موازیند هرگاه نسبتِ بینِ مؤلفه های متناظر در هر دو، یکی شود. مثلاً دو بردار $\overrightarrow{(a \quad b \quad c)}$ و $\overrightarrow{(d \quad e \quad f)}$ موازیند اگفگر $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$. اگر همهٔ مؤلفه های یکی غیر صفر ولی فقط یکی از مؤلفه های دیگری صفر باشد، دو بردار موازی نیستند. همینطور است اگر مؤلفه های مختلف در دو بردار صفر باشند. در این صورت نیز بردارها موازی نیستند. مثلاً $\overrightarrow{(1 \quad 0 \quad 0)} \nparallel \overrightarrow{(0 \quad 1 \quad 0)}$.

ج) فقط در صورتی یک بردار صفر است که **همهٔ** مؤلفه هایش صفر باشد:

$$\overrightarrow{(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)} = \vec{\mathbf{0}} \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

[a] یعنی تعداد مؤلفه های یکسان دارند.

۲.۶ طول، جهت و اَعمال جبری

تعریف ۳.۶. فرض کنید $\vec{\mathbf{u}}$ برداری در صفحه (و یا در فضا) است. طول آنرا که عددی همواره نامنفی است، به صورت زیر تعریف می کنند:

$$\vec{\mathbf{u}} = (a_1 \quad a_2) \longrightarrow |\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$
$$\vec{\mathbf{u}} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \longrightarrow |\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

مثال ۱.۶. اگر $\vec{\mathbf{u}}=(-۲\quad ۳)$ آنگاه $|\vec{\mathbf{u}}|=\sqrt{(-۲)^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳}$ و اگر $\vec{\mathbf{v}}=(x\quad -x\quad x)$ آنگاه $|\vec{\mathbf{v}}|=\sqrt{x^۲+(-x)^۲+x^۲}=\sqrt{۳}|x|$. □

نکته ۱.۶. بردارهای موازی لزوماً دارای یک اندازه نیستند مثلاً اندازه بردار $\overrightarrow{(۱\quad ۲\quad -۳)}$ برابر با $\sqrt{۱۴}$ و اندازه بردار موازی با آن $\overrightarrow{(-۲\quad -۴\quad ۶)}$ برابر است با $۲\sqrt{۱۴}$.

تعریف ۴.۶. برداری که دارای طول ۱ باشد را **یکه** (واحد) می نامند. مثلاً:

$$|\overrightarrow{(\circ\quad ۱\quad \circ\quad \circ\quad \circ)}|=|\overrightarrow{\left(\circ\quad \frac{۱}{\sqrt{۲}}\quad \frac{-۱}{\sqrt{۲}}\right)}|=۱.$$

چون یک بردار ذاتاً یک ماتریس سطری (یا ستونی) است، لذا اَعمال جبری رو ماتریسها ها را می توان به سادگی برای آنها نیز بکار برد. برای نمونه، دو بردار قابل مقایسه، دو ماتریس سطری (یا ستونی) هم مرتبه بوده و لذا جمع و تفریق بین آنها معنی دارد. در اینجا تمام خواص جابجایی در جمع، شرکت پذیری و پخشی که بین ماتریسهای هم مرتبه برقرار بود، بین بردارهای هم بُعد نیز دیده می شود. بدیهی است با انجام هر عمل جبری نظیر جمع، تفریق و یا ضرب اسکالر بین بردارها، حاصل مجدداً یک بردار خواهد شد.

مثال ۲.۶. الف) با فرض $\vec{\mathbf{u}}=(-۲\quad ۳\quad ۱)$ و $\vec{\mathbf{v}}=(۴\quad ۶\quad \circ)$ داریم:

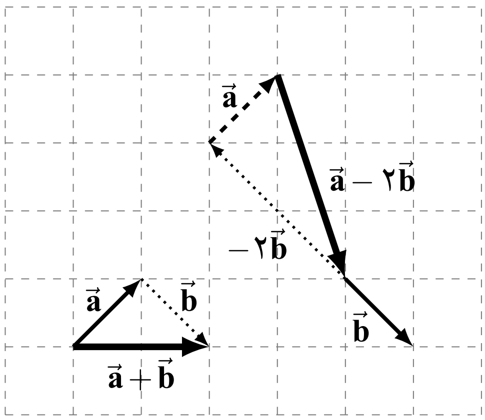
$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}&=(۴+(-۲)\quad ۶+۳\quad \circ+۱)=\overrightarrow{(۲\quad ۹\quad ۱)},\\
\vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{v}}&=(-۴+(-۲)\quad -۶+۳\quad -\circ+۱)=\overrightarrow{(-۶\quad -۳\quad ۱)},\\
۲\vec{\mathbf{u}}+۳\vec{\mathbf{v}}&=۲(-۲\quad ۳\quad ۱)+۳(۴\quad ۶\quad \circ)=(-۴\quad ۶\quad ۱)+(۱۲\quad ۱۸\quad \circ)=\overrightarrow{(۸\quad ۲۴\quad ۱)}.
\end{aligned}$$

ب) اگر $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ بردار مکان نقطهٔ A و $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ بردار مکان نقطهٔ B باشند، بنابه تعریف، برداری که با ابتدای A و انتهای B ساخته می شود برداری بصورت $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{OB}}-\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ است. دلیل این نحوه تعریف بکمک اولین نکته فوق بهتر فهمیده می شود. حال با فرض $A(-۲,۴)$ و $B(-۱,\circ)$ داریم:

$$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=|\overrightarrow{\mathbf{OB}}-\overrightarrow{\mathbf{OA}}|=|(-۱,\circ)-(-۲,۴)|=|\overrightarrow{(۱\quad -۴)}|=\sqrt{۱۷}. \qquad □$$

گاهی اعمال جبری روی بردارها را به صورت ترسیمی انجام می دهند. مثال بعدی از این دسته است.

مثال ۶.۳. در شکل زیر، دو بردار $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ داده شده اند. بردارهای $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ و $\vec{\mathbf{a}}-۲\vec{\mathbf{b}}$ دیده می شوند. شما مجازید تا یک بردار را با حفظ سمت و سو و البته اندازه، به هر جایی از صفحه یا فضا منتقل کنید. این انتقال را به اجبار مسئله یکبار برای $\vec{\mathbf{b}}$ و دیگر $\vec{\mathbf{a}}$ انجام داده ایم. برای بردار $۲\vec{\mathbf{b}}$، در خلاف جهت $\vec{\mathbf{b}}$ و هم راستا با آن، دو بار $\vec{\mathbf{b}}$ را رسم کردیم. حال $\vec{\mathbf{a}}$ را از نقطهٔ انتهایی $۲\vec{\mathbf{b}}$ رسم کرده و سپس از انتهای آن به ابتدای $۲\vec{\mathbf{b}}$ وصل می کنیم. برای مورد بعدی نیز به همین صورت، $\vec{\mathbf{b}}$ را بدون تغییر در اندازه و جهت از انتهای $\vec{\mathbf{a}}$ رسم کرده و ابتدای $\vec{\mathbf{a}}$ را به انتهای $\vec{\mathbf{b}}$ منتقل شده وصل می کنیم.[۴]



تعریف ۶.۵. فرض کنیم $\vec{\mathbf{u}}$ برداری غیر از $\vec{\mathbf{0}}$ است. در این صورت بردار خاص زیر را، **بردار جهت** بردار $\vec{\mathbf{u}}$ (و یا باختصار **جهت** $\vec{\mathbf{u}}$) می نامند:

$$\vec{\mathscr{U}}_{\vec{\mathbf{u}}}=\frac{۱}{|\vec{\mathbf{u}}|}\vec{\mathbf{u}}.$$

بردار جهت یک بردار، همواره با خود بردار موازی است.

مثال ۶.۴. الف) اگر $\vec{\mathbf{u}}=(۲\quad -۳\quad ۰)$ آنگاه جهت آن، برداری به شکل زیر است:

$$\vec{\mathscr{U}}_{\vec{\mathbf{u}}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}(۲\quad -۳\quad ۰)=(\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\quad \frac{-۳}{\sqrt{۱۳}}\quad ۰).$$

[۴] این فرایند را در تمرینات پایانی بهتر متوجه خواهید شد.

ب) بردار $\vec{\mathbf{v}} = (۱\ \ ۴\ \ -۱)$ را به برداری با طول ۱ تبدیل کنید[۵].

حل: برای حل کافی است همانند الف، بردار جهت $\vec{\mathbf{v}}$ را بدست آوریم:

$$\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{\mathbf{v}}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۸}}(۱\quad ۴\quad -۱) = (\frac{۱}{\sqrt{۱۸}}\quad \frac{۴}{\sqrt{۱۸}}\quad \frac{-۱}{\sqrt{۱۸}}). \qquad \square$$

۳.۶ بردارهای استاندارد

همانند آنچه در ساخت مفاهیم اساسی در ریاضیات به چشم می خورد، در مبحث بردارها هم بردارهایی وجود دارند که مصالح اولیهٔ شکل گیری دیگر بردارها باشند. بعبارت دیگر، این بردارها، بکمک اعمال جبری و با هم، دیگر بردارها را می سازند. مثلاً بردار $\overrightarrow{(۶-\quad ۷)}$ را میتوان به شکل $\overrightarrow{(۰\quad ۱)}۴ + \overrightarrow{(۲\quad ۱-)}۳-$ نوشت. در واقع، دو بردار با هم و به شکلی خاص ، بردارهای اولیه و سازنده $\overrightarrow{(۶-\quad ۷)}$ شده اند.

تعریف ۶.۶. فرض کنیم بردارهای $\vec{\mathbf{u}}_۱, \vec{\mathbf{u}}_۲, \cdots, \vec{\mathbf{u}}_n$ همه از یک بُعد هستند. حاصل زیر را یک **ترکیب خطی** بر حسب آنها می نامند:

$$c_۱\vec{\mathbf{u}}_۱ + c_۲\vec{\mathbf{u}}_۲ + \cdots + c_n\vec{\mathbf{u}}_n.$$

که در آن $c_i (۱ \leqslant i \leqslant n)$ ها اعداد (ضرایب) دلخواهی هستند.

مثال ۵.۶. چون $\underbrace{\overrightarrow{(۲۳-\quad ۱\quad ۳-)}}_{\vec{\mathbf{u}}} = \underbrace{\overrightarrow{(۶\quad ۱۰-\quad ۲)}}_{\gamma}۰ + \underbrace{\overrightarrow{(۱\quad ۱\quad ۱)}}_{\beta}(۳-) + \underbrace{\overrightarrow{(۵-\quad ۱\quad ۰)}}_{\alpha}۴$ پس $\vec{\mathbf{u}}$ ترکیبی خطی از سه بردار α, β و γ است. همچنین از آنجاییکه

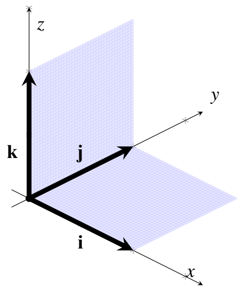
$$(-۳)\overrightarrow{(۲\quad ۰)} + ۲\overrightarrow{(۳\quad ۰)} = \vec{\mathbf{0}}.$$

لذا بردار صفر $\vec{\mathbf{0}}$ ترکیبی خطی از دو بردار $\overrightarrow{(۳\quad ۰)}$ و $\overrightarrow{(۲\quad ۰)}$ است. $\square$

---

[۵] برداری با طول ۱ و هم جهت با $\vec{\mathbf{v}}$ بدست آورید.

تعریف ۷.۶. بردارهای $\mathbf{i} = (۱ \quad ۰ \quad ۰)$، $\mathbf{j} = (۰ \quad ۱ \quad ۰)$ و $\mathbf{k} = (۰ \quad ۰ \quad ۱)$ را بردارهای **استاندارد** فضای سه بعدی و بردارهای $\mathbf{i} = (۱ \quad ۰)$ و $\mathbf{j} = (۰ \quad ۱)$ را بردارهای **استاندارد** برای صفحه می نامند.



شکل ۲.۶: بردارهای استاندارد در فضای ۳ بعدی

این بردارها با طول ۱ بوده و لذا یکه اند.

نکته ۲.۶. هر بردار دلخواه بر حسب بردارهای استاندارد به شکل منحصر بفردی (ترکیب خطی) نوشته می شود: در فضا، $\overrightarrow{(a \quad b \quad c)} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ و در صفحه، $\overrightarrow{(a \quad b)} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

مثال ۶.۶. الف) دو نقطه $A(۱,۰)$ و $B(۲,-۱)$ در صفحه داده شده اند. بردار $۳\overrightarrow{\mathbf{BA}}$ را برحسب بردارهای یکه و استاندارد صفحه بازنویسی کنید.

ب) اگر برای بردار سه بعدی $\vec{\mathbf{u}}$ دو ترکیب خطی زیر داده شده باشد، آنگاه مقادیر مجهول کدامند؟

$$۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - \mathbf{k}, \qquad (x-y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} - (x^{۲} - z)\mathbf{k}.$$

حل: برای **الف**: $۳\overrightarrow{\mathbf{BA}} = ۳(A-B) = ۳[(۱,۰)-(۲,-۱)] = ۳(-۱,+۱) = (-۳)\mathbf{i} + ۳\mathbf{j}$.

برای **ب** به این نکته توجه می کنیم که، نوشته شدن یک بردار بر حسب بردارهای یکه استاندارد یک ترکیب خطی یکتاست. از اینرو لزوماً $x-y=۲,\ y=۳,\ x^{۲}-z=۱$ و لذا $x=۵,\ y=۳,\ z=۲۴$. □

۴.۶ ضرب ها

در مبحث ماتریسها، بعد از بیان ضرب اسکالر، ضرب دیگری بنام ضرب نقطه ای بین دو نوع ماتریس سطری و ستونی تعریف می شود:

$$\overrightarrow{(x_۱ \quad x_۲ \quad \cdots \quad x_n)}\overrightarrow{\begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} = \sum_{i=۱}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

اگر توجه کنیم، هر دو ماتریس بنوعی بردار هستند که یکی به شکل سطری و دیگری ستونی شکل در نظر گرفته می شود. البته هر دو به یک تعداد مؤلفه(درآیه) دارند.

تعریف ۸.۶. اگر $\vec{\mathbf{u}} = (a \quad b \quad c)$ و $\vec{\mathbf{v}} = (d \quad e \quad f)$ بردارهایی دلخواه باشند، آنگاه ضرب نقطه ای(داخلی) آنها به صورت $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = ad + eb + fc$ تعریف می شود:[۶]

نکات ۲.۶. الف) ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد: $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$.
ب) دو بردار از لحاظ ترسیمی بر هم **عمود** هستند[a] اگفگر ضرب داخلی آنها **صفر** شود.

[a] به این بردارها متعامد نیز می گویند.

مثال ۷.۶. مقدار x را طوری بدست آورید که دو بردار $\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $(۱ + x)\mathbf{i} + \mathbf{j}$ متعامد باشند.

حل: دو بردار متعامد است هرگاه حاصلضرب داخلی آن دو صفر باشد، پس:

$$(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot ((۱ + x)\mathbf{i} + \mathbf{j}) = ۰ \to (۱ + x) \times ۱ + x \times ۱ + ۰ = ۰ \to x = -\tfrac{۱}{۲}.$$ □

تعریف ۹.۶. اگر $\vec{\mathbf{u}} = (a \quad b \quad c)$ و $\vec{\mathbf{v}} = (d \quad e \quad f)$ بردارهایی دلخواه باشند، آنگاه **ضرب**

[۶] تعریف به شکل مشابه برای بردارهای دو بعدی قابل انجام است.

برداری(خارجی) $\vec{\mathbf{u}}$ در $\vec{\mathbf{v}}$ به صورت زیر تعریف میشود[۷]:

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

نکات ۳.۶. الف) حاصلضرب خارجی دو بردار، مجدداً یک بردار است. بعلاوه حاصلضرب خارجی هر بردار در خودش صفر است. در حالت خاص، دو بردار هم راستا[a] هستند هرگاه ضرب خارجی آنها صفر شود.

ب) حاصلضرب خارجی برای بردارهای دو بعدی تعریف نمی شود.

ج) در حالت کلی، حاصلضرب خارجی دو بردار واجد خاصیت جابجایی نیست و در واقع

---

[۷] برای محاسبه دترمینان یک ماتریس ۳×۳ در حالت کلی، از روشی بنام **ساروس** بنحو زیر استفاده می کنیم. فرض کنید دترمینان زیر مورد نظر است:

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}.$$

ابتدا، دو ستون اول و دوم را در کنار ستون سوم نوشته و درآیه های اُریب را در هم ضرب می کنیم. مثلاً اولین ضرب، جمله $a_{۳۳}a_{۲۲}a_{۱۱}$، دومین جمله $a_{۳۱}a_{۲۳}a_{۱۲}$ و سومین جمله $a_{۳۲}a_{۲۱}a_{۱۳}$ هم سو با قطر اصلی ماتریس بدست می آیند. این سه جمله را جمع کرده و با یک علامت مثبت در پشت مجموع، آنرا همراهی می کنیم:

$$+(a_{۳۳}a_{۲۲}a_{۱۱} + a_{۳۱}a_{۲۳}a_{۱۲} + a_{۳۲}a_{۲۱}a_{۱۳}),$$

با انجام شبیه روند فوق برای درآیه های اُریب درجهت قطر فرعی، جمع جملات و محاسبه یک منفی (در پشت مجموع) به عبارت

$$-(a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱} + a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲} + a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳}),$$

می رسیم. در نهایت، دترمینان، جمع دو مقدار نهایی بدست آمده اخیر است.

$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$.

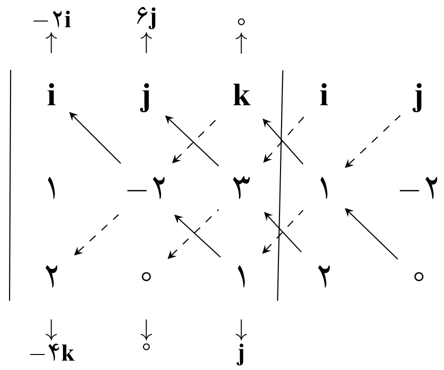
د) حاصلضرب خارجی دو بردار، برداری است که بر هر دوی آنها عمود است. یعنی

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = ۰.$$

به شکل ضربی $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})$ **ضرب سه گانه** $\vec{\mathbf{u}}$ و $\vec{\mathbf{v}}$ هم می گویند.

[a] یا موازی.

مثال ۸.۶. با فرض $\vec{\mathbf{a}} = (۱ \quad -۲ \quad ۳)$ و $\vec{\mathbf{b}} = (۲ \quad ۰ \quad ۱)$ حاصلضرب خارجی آنها را محاسبه می کنیم. بنابه روشی که در پاورقی توضیح داده شد، دو ستون اول و دوم را بعد از ستون سوم بازنویسی کرده و سه جفت از درآیه های اُریب را مانند شکل ضرب کرده سپس مجموع گرفته و با محاسبهٔ یک تفاضل، نهایتاً دترمینان را بدست می آوریم. $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -۲\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$. بسادگی بررسی کرد که $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = ۰$ صفر است:



۵.۶ استقلال خطی، وابستگی خطی

در بخش ۳ معنی ترکیب خطی بیان شد. در واقع بنابه این مفهوم چند بردار با کمک هم و با استفاده از جمع و ضرب اسکالری، یک بردار دیگر را می سازند. این نحوه ساخته شدن منحصر بفرد نیست ولی گاهی با افزودن یک خاصیت می شود آنرا منحصر بفرد کرد. مثلاً از بردارهای

استاندارد یکه استفاده کرد. در این قسمت می خواهیم این نقش مهم بردارهای استاندارد را به بردارهای دیگر حتی غیر یکه بدهیم. برای این منظور بردار صفر $\vec{\mathbf{0}}$ را در نظر بگیرید.

تعریف ۶.۱۰. هرگاه بردار $\vec{\mathbf{0}}$ را نتوان به صورت ترکیب خطی تعدادی بردار نوشت که در آن حداقل یکی از ضرایب انتخابی[8] غیر صفر باشد، آنگاه آن دسته از بردارها را **وابسته خطی** میگویند. بعبارت دیگر اگر $c_1\vec{\mathbf{u}}_1 + c_2\vec{\mathbf{u}}_2 + \cdots + c_1\vec{\mathbf{u}}_n = \vec{\mathbf{0}}$ و لااقل یکی از ضرایب غیر صفر، آنگاه بردارهای $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{u}}_n$ وابسته خطی هستند.[9](در غیر این صورت) اگر بهیچ وجهی نتوان جلوی صفر نشدن همهٔ ضرایب $c_i (1 \leqslant c_i \leqslant n)$ را گرفت و بنابر این همه صفر شدند، آنگاه بردارها $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{u}}_n$ را **مستقل خطی** می گویند.

مثال ۶.۹. بردارهای استاندارد یکه (و ضرایب اسکالری آنها) ساده ترین مثالی است که برای یک دسته از بردارهای مستقل خطی می توان زد. □

مثال ۶.۱۰. آیا بردارهای $\vec{\mathbf{u}} = (1 \quad -2 \quad 3)$ ، $\vec{\mathbf{v}} = (0 \quad 1 \quad 3)$ و $\vec{\mathbf{w}} = (1 \quad -1 \quad 4)$ استقلال خطی دارند؟

حل: بعنوان یک راه حل بسیار عالی **هرگاه تعداد بردارهایی که قصد بررسی استقلال خطی آنها را دارید با بُعد بردارها مساوی بود (که در اینجا چنین است)، یک ماتریس بسازید که سطرهای آن بردارهای مورد نظر باشد، سپس دترمینان آنرا محاسبه کنید. ریاضیات اجازه می دهد که در صورت غیر صفر شدن دترمینان، آنها را مستقل خطی بدانید. در غیر این صورت بردارها وابسته خطی هستند.**[10] در این مثال داریم:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0 \rightarrow \text{بردارها مستقل خطی اند}$$

□

[8] در اینجا اعداد را از مجموعه اعداد حقیقی می گیریم.
[9] بزبان عامیانه یعنی حداقل یکی از آن بردارها با کار روی دیگر بردارها بدست می آید
[10] راه حل دیگر را در دو مثال دیگر ببینید.

مثال ۶.۱۱. مسئلهٔ قبل را برای $\vec{\mathbf{u}} = (۱ \ \ -۲ \ \ ۳)$ ، $\vec{\mathbf{v}} = (\circ \ \ ۱ \ \ ۳)$ و $\vec{\mathbf{w}} = (-۱ \ \ -۱ \ \ -۱۲)$ تکرار کنید. بوضوح:

$$\begin{vmatrix} \circ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ & ۳ \\ -۱ & -۱ & -۱۲ \end{vmatrix} = (-۱۲+۳)+۶+۳ = \circ \rightarrow \text{بردارها وابستهٔ خطی اند}$$

□

مثال ۶.۱۲. با توجه به پاورقی صفحهٔ گذشته، کدام یک از بردارهای مثال قبل به دو دیگری وابستهٔ خطی است؟

حل: یک راه اینست که وقتی تعداد بردارها با بُعد بردارها یکی است کاربرد دارد. **ماتریسی میسازیم که سطرهایش بردارهای داده شده باشد. سپس بکمک عملیات سطری مقدماتی آنرا به شکل بالا مثلثی در می آوریم. اگر در انتها درآیه های هیچیک از سطرها همگی صفر نشدند[11] آنگاه بردارها مستقل خطی و اگر یک و یا یا چند سطر بطور کامل صفر شدند، آنگاه بردارهایی که متناظر با این سطرهای کامل صفر شده هستند به بردارهایی که درآیه های غیر صفر باقی مانده دارند، وابسته خطی اند.** داریم:

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ \circ & ۱ & ۳ \\ -۱ & -۱ & -۱۲ \end{pmatrix} \xrightarrow{R_۱+R_۳\mapsto R_۳} \begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ \circ & ۱ & ۳ \\ \circ & -۳ & -۹ \end{pmatrix} \xrightarrow{۳R_۲+R_۳\mapsto R_۳} \begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ \circ & ۱ & ۳ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

سطر سوم کامل صفر شد. این سطر متناظر بردار $\vec{\mathbf{w}}$ است. بنابر این $\vec{\mathbf{w}}$ به دو بردار دیگر وابسته خطی است و در واقع $\vec{\mathbf{u}}$ و $\vec{\mathbf{v}}$ می توانند با هم $\vec{\mathbf{w}}$ را بسازند. □

[11] منظور درآیه های آنهاست.

۶.۶ تمرینات

۱. کدامیک از موارد ذیل بردارهایی از یک بُعد هستند؟

الف) $\{۳,۴\},\ \{-۱,۲\}$ ب) $\begin{pmatrix} ۱ \\ -۵ \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -۱ & ۲ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۷ \end{pmatrix}$ د) $\begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۵}{۲} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$

ه) $\begin{pmatrix} -۴/۲ \\ ۳ \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -۱ \\ ۶ \end{pmatrix}$ و) $\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

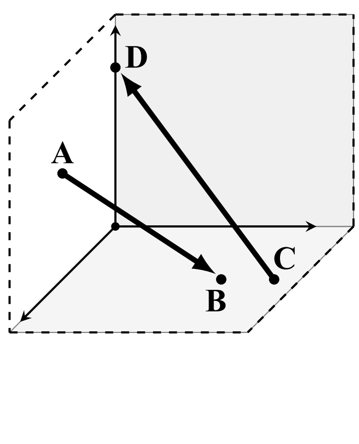
۲. بُعد بردارهای مسئله را بدست آورید.

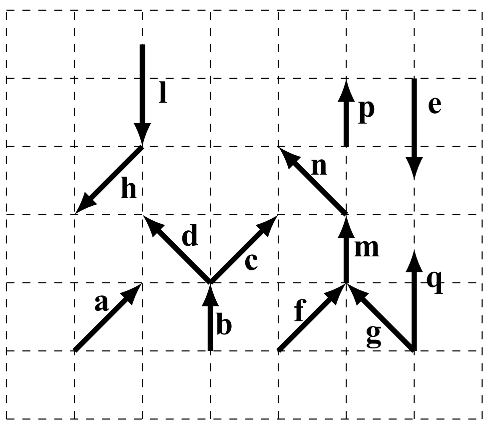
۳. یک بردار با بُعد ۱ و یک بردار از بُعد ۴ بسازید.

۴. بردار صفر چهار بُعدی چگونه است؟ در این فضا، برداری بنام بردار **یک** وجود دارد؟

۵. آیا یک ماتریس ۲×۱ یا یک ماتریس ۱×۷ را می‌توان بردار در نظر گرفت؟

۶. در شکل زیر (بدون دیدگاه محاسباتی و فقط از لحاظ شکلی) کدام بردارها با هم مساویند؟ کدامیک هم راستا هستند؟





۷. در شکل قبل، چهار نقطه

$$A(۱,۰,۲),\ B(۱,۲,۰), C(۱,۳,۰),\ D(۰,۰,۴),$$

نشان داده شده اند. بردارهای را که در شکل می بینید را نوشته و سپس بردار مکانی متناظر و مساوی آنها را رسم کنید.

۸. در چه صورتی تساوی بین بردارهای زیر بامعنی است؟

الف) $\overrightarrow{(x \quad y \quad z+۱ \quad ۶)} = \overrightarrow{(-۱ \quad ۶ \quad x \quad ۶)}$.

ب) $\overrightarrow{(x \quad y \quad ۳)} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} -۲ \\ ۱-x \\ ۳ \end{pmatrix}}$.

۹. دو بردار نامساوی بسازید که هم طول باشند. مسئله را بازای هم جهت بودن مجددا حل کنید.

۱۰. بردارهای زیر را یکه کنید.

الف) $\vec{\mathbf{u}} = (۳ \quad ۰),\ \vec{\mathbf{v}} = (۳ \quad ۱ \quad ۰),\ \vec{\mathbf{w}} = (۰ \quad -۱ \quad -۱ \quad -۱ \quad ۰ \quad ۰)$

ب) $\vec{\mathbf{x}} = (۲ \quad ۰ \quad -۱),\ \vec{\mathbf{y}} = (\sqrt{۵} \quad ۰ \quad -۱),\ \vec{\mathbf{z}} = (-۱ \quad ۲ \quad -۱ \quad ۳)$

۱۱. جهت هر یک از بردارهای زیر را بدست آورید.

الف) $\vec{\mathbf{u}} = (۳ \quad ۰),\ \vec{\mathbf{v}} = (۳ \quad ۰ \quad ۰),\ \vec{\mathbf{w}} = (۰ \quad ۰)$

ب) $\vec{\mathbf{x}} = (۰ \quad ۴ \quad ۰),\ \vec{\mathbf{s}} = (\sqrt{۳} \quad ۰ \quad ۰),\ \vec{\mathbf{z}} = (-۱ \quad ۱)$

ج) $\vec{\mathbf{a}} = (۷ \quad -۶ \quad ۰),\ \vec{\mathbf{b}} = (-\frac{۱}{۲} \quad \frac{۱}{۲} \quad ۰),\ \vec{\mathbf{c}} = (۳ \quad ۴ \quad ۰)$

۱۲. در هر کدام از موارد زیر، یک بُردار با شرایط خواسته شده ارائه دهید.

الف) در جهت عکس $\vec{\mathbf{v}} = (۴- \quad ۳)$ و دارای طولی نصف $\vec{\mathbf{v}}$ است.

ب) دارای طول $\sqrt{۱۷}$ و هم جهت با $\vec{\mathbf{v}} = (۷\quad ۰\quad -۶)$ است.

ج) برداری یکه و در خلاف جهت $\overrightarrow{(۱۰\quad -۵\quad ۱۰)}$ است.

د) بردار مسطح $\vec{\mathbf{v}}$ که $|\vec{\mathbf{v}}| = ۵$ و مولفهٔ طولی آن با مولفهٔ عرضی آن یکی باشند.

۱۳. بردارهای با طول واحد در صفحه چگونه نوشته می شوند؟

۱۴. با فرض $|\overrightarrow{(۲m\quad ۱\quad -m)}| = \sqrt{۲۶}$ و $|\overrightarrow{(۲t+۱\quad t\quad -۲+t)}| = \sqrt{۱۱}$ مقادیر مجهول را بدست آورید.

۱۵. دو بردار $\vec{\mathbf{u}} = (k\quad -۱)$ و $\vec{\mathbf{v}} = (۳\quad -۲)$ داده شده‌اند. مقدار k را طوری بدست آورید هرگاه $\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$. فرض مسئله را بطور جداگانه با $\vec{\mathbf{u}} = -۳\vec{\mathbf{v}}$ و سپس $|\vec{\mathbf{u}}| = |\vec{\mathbf{v}}|$ تغییر داده و حل کنید.

۱۶. نشان دهید امتداد واصل بین نقاط $(۱,۲,۳)$ و $(۴,۵,۷)$ با امتداد واصل بین دو نقطه $(۲,۹,۲)$ و $(-۴,۳,-۶)$ موازی است.

۱۷ نشان دهید نقاط $(-۱,-۲,۱)$, $(۲,۳,۴)$, $(۴,۷,۸)$ و $(۱,۲,۵)$ رئوس یک متوازی الاضلاع هستند.

۱۸. آیا می‌توان بردار $\vec{\mathbf{a}} = (۱\quad ۲)$ را با بردار $\vec{\mathbf{b}} = (۳\quad ۰\quad -۱)$ جمع کرد؟ در چه صورتی این مجموع امکان‌پذیر است؟

۱۹. فرض کنیم $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ دو بردار مسطح و دلخواه هستند. با رسم شکل، بردارهای زیر را نشان دهید

$$۳\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{0}}, \quad \frac{\vec{\mathbf{b}}}{-۳}, \; ۲\vec{\mathbf{a}} + \frac{۱}{۲}\vec{\mathbf{b}}, \; \frac{۱}{۲}\vec{\mathbf{a}} - \frac{۳}{۲}\vec{\mathbf{b}}$$

۲۰. با رسم یک شکل نشان دهید که اگر A, B و C سه نقطه دلخواه در صفحه باشند آنگاه

همواره
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{\mathbf{0}}.$$

۲۱. متوازی الاضلاع $ABCD$ با اقطار AC و BD داده شده است.

الف) دو بردار $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ و $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$ را برحسب بردارهای $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ و $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ بیان کنید.

ب) دو بردار $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ و $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$ را برحسب بردارهای $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ و $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$ بیان کنید.

ج) نشان دهید تساوی های زیر برقرارند:
$$\overrightarrow{\mathbf{AC}}+\overrightarrow{\mathbf{DB}}=۲\overrightarrow{\mathbf{DC}},\qquad \overrightarrow{\mathbf{AC}}-\overrightarrow{\mathbf{BD}}=۲\overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

۲۲. اگر $\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{b}}$، آیا می توان نتیجه گرفت که $|\vec{\mathbf{a}}|=|\vec{\mathbf{b}}|+|\vec{\mathbf{c}}|$؟

۲۳. با فرض $|\vec{\mathbf{a}}|=۱۱$ و $|\vec{\mathbf{b}}|=۲۳$ و $|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}|=۳۰$، مقدار $|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|$ چیست؟

۲۴. با فرض $|\vec{\mathbf{a}}|=۱۳$ و $|\vec{\mathbf{b}}|=۱۹$ و $|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|=۲۴$، مقدار $|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}|$ را بیابید.

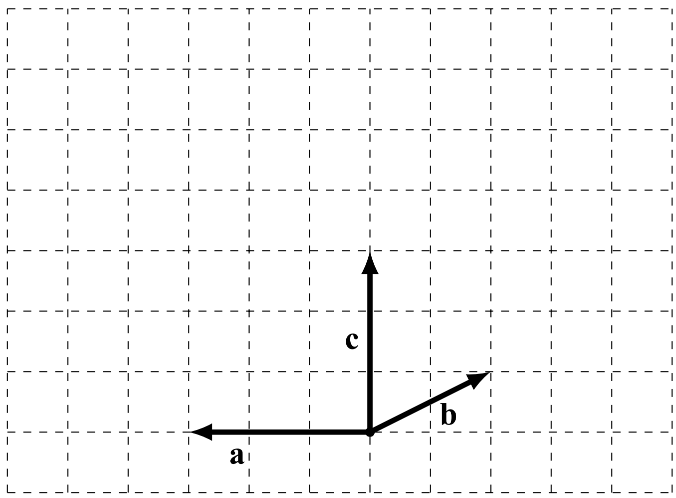
۲۵. اگر دو بردار $(۲x-۱)\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$ و $(x-۲)\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ موازی باشند، مقدار مجهول چیست؟

۲۶. به ازای دو بردار $\vec{\mathbf{a}}=(۱\quad ۲\quad ۲)$ و $\vec{\mathbf{b}}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ مطلوبست محاسبه $|\vec{\mathbf{a}}+۲\vec{\mathbf{b}}|$.

۲۷. به ازای دو نقطه $\mathbf{A}(۱,۲)$ و $\mathbf{B}(-۱,۳)$ بردارهای
$$\overrightarrow{\mathbf{AB}},\ \overrightarrow{\mathbf{BA}},\ \overrightarrow{\mathbf{A}-\mathbf{B}},\ \overrightarrow{۲\mathbf{A}-۳\mathbf{B}},\ ۲\overrightarrow{\mathbf{AB}}-۲\overrightarrow{\mathbf{BA}}$$
را رسم کنید.

۲۸. مسئله قبل را برای دو نقطه $A(۱,۱,۰)$ و $B(۱,۱,۱)$ و بردارهای $\overrightarrow{\mathbf{AB}},\ \overrightarrow{\mathbf{BA}},\ \overrightarrow{\mathbf{B}-\mathbf{A}}$ تکرار کنید.

۲۹. با توجه به وضعیت سه بردار در شکل



مطلوبست بردارهای زیر با رسم آنها

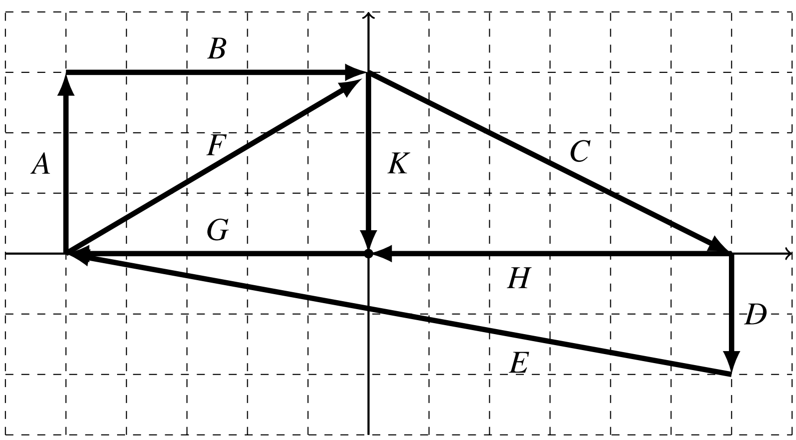
$$۳\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{a}},\quad \vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}},\quad \vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}+۲\vec{\mathbf{c}},\quad ۲\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{c}}$$

۳۰. با توجه به شکل زیر، کدام یک از موارد صحیح اند؟

الف) $\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{F}}$ ب) $\vec{\mathbf{C}}=\vec{\mathbf{D}}-\vec{\mathbf{E}}+\vec{\mathbf{F}}$ ج) $\vec{\mathbf{E}}+\vec{\mathbf{D}}=\vec{\mathbf{G}}+\vec{\mathbf{H}}$

د) $\vec{\mathbf{K}}+\vec{\mathbf{G}}=\vec{\mathbf{F}}$ ه) $\vec{\mathbf{G}}+\vec{\mathbf{H}}-\vec{\mathbf{E}}=\vec{\mathbf{D}}$ و) $\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{K}}+\vec{\mathbf{G}}=\vec{\mathbf{0}}$

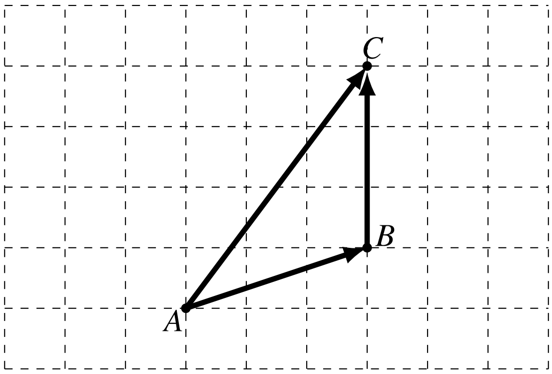
ز) $\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{C}}+\vec{\mathbf{H}}+\vec{\mathbf{G}}=\vec{\mathbf{0}}$ ح) $\vec{\mathbf{H}}-\vec{\mathbf{C}}=\vec{\mathbf{G}}-\vec{\mathbf{F}}$



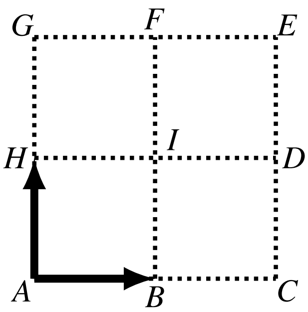
۳۱. با توجه به شکل زیر، کدام یک از موارد صحیح اند؟

الف) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}+\overrightarrow{\mathbf{CA}}=\overrightarrow{\mathbf{0}}$ ب) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}-\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\overrightarrow{\mathbf{0}}$

د) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}-\overrightarrow{\mathbf{CB}}+\overrightarrow{\mathbf{CA}}=\overrightarrow{\mathbf{0}}$ ج) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}-\overrightarrow{\mathbf{CA}}=\overrightarrow{\mathbf{0}}$



۳۲. در شکل زیر چهار مربع دیده می شود که در آن $\overrightarrow{\mathbf{AH}}=\mathbf{q}$ و $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\mathbf{p}$:



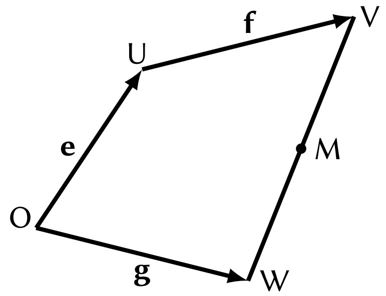
کدامیک از موارد زیر درست هستند؟

الف) $\overrightarrow{\mathbf{FE}}=\mathbf{p}$ ب) $\overrightarrow{\mathbf{GH}}=\mathbf{q}$ ج) $|\overrightarrow{\mathbf{FB}}|=|۲\mathbf{p}|$ د) $|\mathbf{p}|=|\mathbf{q}|$

ه) $\overrightarrow{\mathbf{GE}}=۲\mathbf{p}$ و) $\overrightarrow{\mathbf{GI}}=\overrightarrow{\mathbf{FD}}$ ز) $\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\mathbf{p}$ ح) $|\overrightarrow{\mathbf{HD}}|=۲|\mathbf{q}|$

م) $\mathbf{q} = \mathbf{p}$ ل) $\overrightarrow{\mathbf{ED}} = -\mathbf{q}$ ک) $|\overrightarrow{\mathbf{GF}}| = \mathbf{q}$ ی) $\overrightarrow{\mathbf{FG}} = -\mathbf{p}$

۳۳. در نمودار زیر، نقطه M وسط VW است. مطلوبست عبارتهایی برای بردارهای $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$، $\overrightarrow{\mathbf{UM}}$، $\overrightarrow{\mathbf{VW}}$ و $\overrightarrow{\mathbf{OV}}$ بر حسب $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$.



۳۴. نقطه پایانی بردار $۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j}$ چیست اگر نقطه آغازی آن $(۱, -۲)$ باشد؟ نقطه شروع بردار $\vec{\mathbf{u}} = (۲ \quad ۱ \quad -۳)$ چیست اگر نقطه پایانی آن $(-۱, ۰, ۵)$ باشد؟

۳۵. به ازای نقاط داده شده زیر، بردار $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ را به فرم استاندارد $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ درآورید.

الف) $P(۰,۰),\ Q(۳,۴)$ ب) $P(۱,۰),\ Q(۰,۴)$

ج) $P(\frac{۳}{۵},۰),\ Q(۰,-\frac{۱}{۴})$ د) $P = (\frac{۲}{۵},-۲),\ Q = (۶,-\frac{۱}{۲})$

۳۶. فرض کنید $A = (-۱,۲)$، $B = (۲,۰)$، $C = (۱,-۳)$، و $D = (۰,۴)$ نقاطی در صفحه هستند. هر یک از بردارهای زیر را در صفحه رسم کرده و سپس برحسب بردارهای متعارف یکهٔ صفحه بنویسید.

الف) $\overrightarrow{\mathbf{AB}},\ \overrightarrow{\mathbf{BA}},\ -\overrightarrow{\mathbf{DA}}$ ب) $\overrightarrow{\mathbf{AC}},\ \overrightarrow{\mathbf{BD}},\ \frac{۱}{۲}\overrightarrow{\mathbf{CD}}$

ج) $\frac{\overrightarrow{\mathbf{CA}}+\overrightarrow{\mathbf{BD}}+\overrightarrow{\mathbf{BA}}}{۳},\ \overrightarrow{\mathbf{AC}} - ۲\overrightarrow{\mathbf{AB}},\ \overrightarrow{\mathbf{AB}} - \overrightarrow{\mathbf{BC}}$

۳۷. بردار $\vec{\mathbf{a}} = ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{t}$ چند بُعدی است؟ مولفهٔ چهارم آن چه عددی است؟ آیا $\vec{\mathbf{a}}$ متناظری در فضای سه بُعدی دارد؟

۳۸. فاصلهٔ بین نقاطی را بدست آورید که بردار مکان هر یک بتوسط جفت بردارهای زیر داده شده است.

الف) $\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{i}}۲ - \ ,\vec{\mathbf{k}}۶ - \vec{\mathbf{j}}۳ + \vec{\mathbf{i}}۴$ ب) $\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{i}}۷ \ ,\vec{\mathbf{k}}۵ + \vec{\mathbf{j}}۳ + \vec{\mathbf{i}}۲-$

ج) $\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{i}}۲ - \ ,\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{j}}۳$

۳۹. در هر کدام از موارد زیر، برداری با شرایط خواسته شده را بیابید.

الف) هم جهت با $\mathbf{j}۳ + \mathbf{i}۲ - = \vec{\mathbf{v}}$ و با طولی ۳ برابر طول بردار $\vec{\mathbf{v}}$ باشد.

ب) دارای طول ۲ و در جهت عکس $\mathbf{k} + \mathbf{j}۴ + \mathbf{i}۳-$ کشیده می شود.

۴۰. به ازای چه مقدار x، بردار $x(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ با طول یک است؟

۴۱. اگر $\mathbf{k}۵ - \mathbf{j}۲ + \mathbf{i}۳ = \vec{\mathbf{u}}$ و $\mathbf{j} - \mathbf{i}۴ = \vec{\mathbf{w}}$ مطلوبست بردار جهت بردار $\vec{\mathbf{w}}۲ - \vec{\mathbf{u}}$.

۴۲. کدام یک از بردارهای زیر با $\mathbf{j}۶ + \mathbf{i}۴$ موازی است؟

الف) $\mathbf{j}۶ - \mathbf{i}۴-$ ب) $\mathbf{j}۱۵ + \mathbf{i}$ ج) $\mathbf{j}۱۲ + \mathbf{i}$ د) $\mathbf{j}\frac{۳}{۲} - \mathbf{i}-$

ه) $(\mathbf{j}\frac{۵}{۱۲} - \mathbf{i}\frac{۱}{۲})۳ - (\mathbf{j} - \mathbf{i})۲$ و) $(\mathbf{j}۴ + \mathbf{i}۷) - (\mathbf{j} + \mathbf{i}۵)$

۴۳. به ازای جفت بردارهای زیر، $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ را بدست آورید.

الف) $\vec{\mathbf{A}} = (-۱ \quad ۲),\ \vec{\mathbf{B}} = (-۴ \quad ۳)$

ب) $\vec{\mathbf{A}} = ۲\mathbf{i} - \mathbf{j},\ \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۶\mathbf{k}$،

ج) $\vec{\mathbf{A}} = (\frac{۱}{۳} \quad -\frac{۱}{۲}),\ \vec{\mathbf{B}} = (\frac{۵}{۲} \quad \frac{۴}{۳})$

د) $\vec{\mathbf{A}} = -۲\mathbf{i},\ \vec{\mathbf{B}} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

۴۴. بردار یکه ای را پیدا کنید که به هر جفت از بردارهای زیر عمود باشد.

الف) $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{i}+۲\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ب) $\mathbf{i}+\mathbf{j},\ \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

ج) $۲\mathbf{i}+\mathbf{k},\ \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ د) $۳\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k},\ -۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$

۴۵. معیّن کنید زوج بردارهای زیر موازی اند یا متعامد؟[۱۲]

الف) $\vec{\mathbf{v}}=۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j},\ \vec{\mathbf{w}}=-۴\mathbf{i}-۶\mathbf{j}$ ب) $\vec{\mathbf{v}}=۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j},\ \vec{\mathbf{w}}=-۴\mathbf{i}+۶\mathbf{j}$

ج) $\vec{\mathbf{v}}=۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j},\ \vec{\mathbf{w}}=۴\mathbf{i}+۶\mathbf{j}$ د) $\vec{\mathbf{v}}=-۴\mathbf{i}+۲\mathbf{j},\ \vec{\mathbf{w}}=۲\mathbf{i}+۴\mathbf{j}$

ه) $\vec{\mathbf{v}}=-۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j},\ \vec{\mathbf{w}}=-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}$ و) $\vec{\mathbf{v}}=-۲\mathbf{i}-\mathbf{j},\ \vec{\mathbf{w}}=۲\mathbf{i}+\mathbf{j}$

۴۶. اگر $\vec{\mathbf{A}}=k\mathbf{i}+۲\mathbf{j}$ و $\vec{\mathbf{B}}=k\mathbf{i}+۶\mathbf{j}$، مقدار k را طوری بدست آورید که $\vec{\mathbf{A}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ برهم عمود باشند.

۴۷. ضرب داخلی بردار $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و بردار واحد در جهت بردار

$$(۲\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۵\mathbf{k})+(\lambda\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})$$

برابر با ۱ است. مقدار λ کدامست؟

۴۸. به ازای چه مقداری از k، دو بردار $\vec{\mathbf{A}}=(۵\quad -k)$ و $\vec{\mathbf{B}}=(k\quad ۶)$ باهم موازیند و یا برهم عمودند؟

۴۹. اگر $\vec{\mathbf{a}}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$، برداری با طول یکه چنان بدست آورید که بر $\vec{\mathbf{a}}$ عمود باشد.

۵۰. $|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|$ و $|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}|$ را چنان بدست آورید که $|\vec{\mathbf{a}}|=۵$، $|\vec{\mathbf{b}}|=۱۲$ و $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ برهم عمودند.

۵۱. برای بردار $\vec{\mathbf{a}}=(۲\quad ۱\quad -۱)$، برداری موازی با آن چون $\vec{\mathbf{x}}$ بیابید که $\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{a}}=۳$.

[۱۲] البته ممکن است هیچ یک از دو خاصیت را نداشته باشند.

۵۲. اگر $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{0}}$ و $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{0}}$؛ درباره $\vec{\mathbf{b}}$ چه می توان گفت؟

۵۳. با فرض یکه بودن بردارها و $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{0}}$، مقدار بردار

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{a}}$$

چه خواهد بود؟

۵۴. با در نظر گرفتن $\vec{\mathbf{a}}=(۱\quad ۴\quad ۲)$ و $\vec{\mathbf{b}}=(۳\quad -۲\quad ۷)$ و $\vec{\mathbf{c}}=(۲\quad -۱\quad ۴)$، بردار $\vec{\mathbf{d}}$ عمود بر دو بردار اولی را طوری پیدا کنید که $\vec{\mathbf{d}}\cdot\vec{\mathbf{c}}=۱۵$.

۵۵. اگر بدانیم $|\vec{\mathbf{a}}|=۳$ و $|\vec{\mathbf{b}}|=۵$، به ازای چه مقادیری از λ، دو بردار $\vec{\mathbf{a}}+\lambda\vec{\mathbf{b}}$ و $\vec{\mathbf{a}}-\lambda\vec{\mathbf{b}}$ برهم عمودند؟

۵۶. نشان دهید $\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})-\vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})$ بر $\vec{\mathbf{a}}$ همواره عمود است؟

۵۷. با چه شرطی $(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\perp(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}})$ ؟ با چه شرطی بر دو بردار ناصفر $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$

$$|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}|=|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|$$

۵۸. آیا از $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}}$ می توان نتیجه گرفت که $\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{c}}$؟ چرا؟

۵۹. عملیات جبری بین بردارها را انجام داده و ساده کنید.

الف) $(۲\mathbf{i})\times\mathbf{j}$ ب) $\mathbf{k}\times(۲\mathbf{i}-\mathbf{j})$ ج) $\mathbf{i}\times(-۳\mathbf{k})$

د) $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})$ ه) $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{k})$ و) $(\mathbf{i}\times\mathbf{k})\times(\mathbf{j}\times\mathbf{i})$

ز) $۴\mathbf{j}-۵(\mathbf{k}\times\mathbf{i})$ ح) $(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+۵\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}$ ط) $۲(\mathbf{i}\times\mathbf{i})\times\mathbf{j}$

ی) $\mathbf{i}\cdot[\mathbf{j}\times(-\mathbf{k})]$ ک) $۲\mathbf{j}\cdot[\mathbf{i}\times(\mathbf{j}-۳\mathbf{k})]$

۶۰. اگر $\vec{\mathbf{e}}_۱$ و $\vec{\mathbf{e}}_۲$ و $\vec{\mathbf{e}}_۳$ بردارهای متعارف یکه در فضای سه بُعدی باشند مطلوبست ساده شده عبارتهای بردارهای زیر

الف) $۴\vec{\mathbf{e}}_۱+۵\vec{\mathbf{e}}_۲-\vec{\mathbf{e}}_۳$ ب) $\vec{\mathbf{e}}_۱(\vec{\mathbf{e}}_۲\cdot\vec{\mathbf{e}}_۳)+\vec{\mathbf{e}}_۳(\vec{\mathbf{e}}_۱\cdot\vec{\mathbf{e}}_۲)$ ج) $\vec{\mathbf{e}}_۱\times\vec{\mathbf{e}}_۲\times\vec{\mathbf{e}}_۳$

د) $|\vec{\mathbf{e}}_۱+\vec{\mathbf{e}}_۲-\vec{\mathbf{e}}_۳|\vec{\mathbf{e}}_۲$ ه) $(\vec{\mathbf{e}}_۳-\vec{\mathbf{e}}_۲)\cdot\vec{\mathbf{e}}_۱+(\vec{\mathbf{e}}_۲-\vec{\mathbf{e}}_۱)\cdot\vec{\mathbf{e}}_۳+(\vec{\mathbf{e}}_۱-\vec{\mathbf{e}}_۳)\cdot\vec{\mathbf{e}}_۲$

.۶۱ با فرض $\vec{\mathbf{a}}=(۱\quad ۲\quad ۳)$، $\vec{\mathbf{b}}=(۳\quad -۱\quad ۰)$ و $\vec{\mathbf{c}}=(-۱\quad ۱\quad ۰)$ مطلوبست

الف) $(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})+(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}})+(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})$ ب) $(\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{a}}+(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{c}}$

ج) $\overrightarrow{\mathscr{U}}_{(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}})}$، $\overrightarrow{\mathscr{U}}_{(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}})\times(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})}$ د) $(\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{b}}+(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}},\ (\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}})$

ه) $\frac{\vec{\mathbf{c}}}{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}+\frac{\vec{\mathbf{b}}}{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}}+\frac{\vec{\mathbf{a}}}{\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}}}$ و) $\left(\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}\right)\vec{\mathbf{b}},\ \left|\frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|}\right|+۵\left|\frac{\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{b}}|}\right|$

ز) $|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}|,\ |\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|$ ح) $\vec{\mathbf{b}}\cdot(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}}),\ \vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$

ط) $\sqrt[۳]{(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{e}}_۱)+(\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{e}}_۲)}$

.۶۲ مقادیر y,x را طوری بدست آورید که هر تساوی درست باشد.

الف) $\overrightarrow{(x\quad ۱\quad ۲)}\cdot\overrightarrow{(-۱\quad ۳\quad x)}=۰$ ب) $\overrightarrow{(-x\quad x\quad ۱)}\cdot\overrightarrow{(-۲\quad ۱\quad ۷)}=۱۱$

ج) $\overrightarrow{(x\quad ۱\quad ۲)}\cdot\overrightarrow{(۱\quad -۲x\quad ۳)}=۱۰$ د) $\overrightarrow{(x\quad ۱)}\cdot\overrightarrow{(۱\quad -x)}=۰$

ه) $\frac{\overrightarrow{(۵\quad x)}}{-۳}\cdot\overrightarrow{(۶\quad x)}=۰$ و) $\overrightarrow{(x\quad -x+۸\quad x\quad x)}\cdot\overrightarrow{(x\quad ۱\quad -۲\quad ۱)}=۰$

ز) $\overrightarrow{(x\quad ۲\quad ۱)}\times\overrightarrow{(۱\quad ۲\quad y)}=\vec{\mathbf{0}}$

.۶۳ به ازای چه مقداری از t، دو بردار $۲t\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-(۱۰+t)\mathbf{k}$ و $\mathbf{i}+t\mathbf{j}+\mathbf{k}$ بر هم عمودند؟

.۶۴ اولاً تحقیق کنید سه بردار $\vec{\mathbf{u}}=\frac{۳}{۵}\mathbf{i}+\frac{۴}{۵}\mathbf{j}$، $\vec{\mathbf{v}}=\frac{۴}{۵}\mathbf{i}-\frac{۳}{۵}\mathbf{j}$ و $\vec{\mathbf{w}}=\mathbf{k}$ با طول واحد بوده و ضرب داخلی دو به دوی آنها صفر است. ثانیاً اگر $\vec{\mathbf{r}}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، نشان دهید بردار $\vec{\mathbf{r}}$ را می توان به شکل زیر هم نوشت:

$$\vec{\mathbf{r}}=(\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{u}})\vec{\mathbf{u}}+(\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{v}}+(\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}$$

۶۵. با ترسیم و سپس بکمک ضرب داخلی نشان دهید مثلثی که با راس های $A = (-۱, ۱)$ ، $B(۲, ۵)$ و $C = (۱۰, -۱)$ ساخته می شود، قائم الزاویه است.

۶۶. مختصات نقاط P، Q و R بترتیب برابرند با $(-۲, ۱, ۲), \ (۴, ۱, ۲), \ (۱, ۱, -۱)$.
کدامیک از موارد زیر برای مثلث PQR صحیح است؟

الف) همه اضلاع مثلث، طولی مساوی دارند.

ب) مثلث قائمه الزاویه است.

ج) مساحت مثلث برابر با ۱۸ مربع واحد است.

۶۷. معادلات زیر را با یافتن بردار $\vec{\mathbf{x}}$ مناسب حل کنید.

الف) $(-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) \times \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$

ب) $(-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}) \times \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{i} + ۵\mathbf{j}$

ج) $(-۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times \vec{\mathbf{x}} = ۷\mathbf{i} + ۱۰\mathbf{j} - ۶\mathbf{k}$

د) $(۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j}) \times \frac{\vec{\mathbf{x}}}{۲} = \frac{۳\mathbf{i}}{۲} - \mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$

۶۸. مساحت متوازی الاضلاعی را پیدا کنید که دو ضلع کناری آن بردارهای زیر باشد.

الف) $\vec{\mathbf{a}} = (۱ \quad ۲ \quad ۳), \ \vec{\mathbf{b}} = (-۱ \quad ۲ \quad ۴)$

ب) $\vec{\mathbf{a}} = (۳ \quad ۱ \quad ۴), \ \vec{\mathbf{b}} = (۱ \quad -۱ \quad ۱)$

ج) $\vec{\mathbf{a}} = (۲ \quad -۱ \quad ۱), \ \vec{\mathbf{b}} = (۰ \quad ۰ \quad ۳)$

۶۹. مساحت مثلثی را پیدا کنید که دارای رئوس زیر باشد.

الف) $(۰, ۰, ۰), \ (۱, ۲, ۳), \ (۲, -۱, ۴)$

ب) $(۱, ۰, ۰), \ (۰, ۱, ۰), \ (۱, ۱, ۱)$

ج) $(a,0,0),\ (0,b,0),\ (0,0,c)$

۷۰. برای بردارهای زیر حاصلضرب سه گانه $\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$ را بدست آورید.

الف) $\vec{\mathbf{a}}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \vec{\mathbf{b}}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k},\ \vec{\mathbf{c}}=\mathbf{j}+5\mathbf{k}$

ب) $\vec{\mathbf{a}}=\mathbf{i},\ \vec{\mathbf{b}}=\mathbf{i}+\mathbf{j},\ \vec{\mathbf{c}}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

ج) $\vec{\mathbf{a}}=(1\ \ -2\ \ 2),\ \vec{\mathbf{b}}=(0\ \ 3\ \ 2),\ \vec{\mathbf{c}}=(-4\ \ 1\ \ -3)$

۷۱. برای سه بردار $\vec{\mathbf{a}}=(2\ \ -1\ \ 1)$، $\vec{\mathbf{b}}=(0\ \ 1\ \ 2)$ و $\vec{\mathbf{c}}=(3\ \ 2\ \ 0)$ درستی رابطه های زیر را تحقیق کنید[13].

الف) $(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}})\times(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})=2(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})$

ب) $\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})=(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}}-(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}$

ج) $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\times\vec{\mathbf{c}}+(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})\times\vec{\mathbf{a}}+(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{a}})\times\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{0}}$

د) $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=[(\mathbf{i}\times\vec{\mathbf{a}})\cdot\vec{\mathbf{b}}]\mathbf{i}+[(\mathbf{j}\times\vec{\mathbf{a}})\cdot\vec{\mathbf{b}}]\mathbf{j}+[(\mathbf{k}\times\vec{\mathbf{a}})\cdot\vec{\mathbf{b}}]\mathbf{k}$

۷۲. فرض کنید برای سه بردار؛ رابطه $\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})=3$ برقرار است. مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{b}})$ ب) $\vec{\mathbf{c}}\cdot(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})$ ج) $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}})\cdot\vec{\mathbf{b}}$ د) $(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})\cdot\vec{\mathbf{a}}$

ه) $\vec{\mathbf{b}}\cdot(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}})$ و) $\vec{\mathbf{b}}\cdot(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{c}})$

۷۳. مقدار p چیست تا سه بردار $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \ \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k},\ \ 3\mathbf{i}+p\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ روی یک سطح تخت قرار گیرند؟ سپس بررسی کنید آیا بردارهای زیر روی یک سطح تخت منطبق می شوند یا خیر؟

[13] این روابط بطور کلی و درباره همه بردارهای سه بُعدی درستند.

الف) $\mathbf{j} - ۲\mathbf{k},\ \ \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \ -۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$

ب) $۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۲\mathbf{k},\ \ ۴\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \ ۳\mathbf{i} + \mathbf{k}$

۷۴. هر کدام از سه بردار $\vec{\mathbf{a}} = (۳ \quad -۲)$، $\vec{\mathbf{b}} = (-۲ \quad ۱)$ و $\vec{\mathbf{c}} = (۷ \quad -۴)$ را به شکل ترکیبی از سه بردار دیگر بنویسید.

۷۵. به ازای بردارهای $\vec{\mathbf{a}} = (۳ \quad -۱)$ ، $\vec{\mathbf{b}} = (۱ \quad -۲)$ و $\vec{\mathbf{c}} = (-۱ \quad ۷)$ بردار

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}$$

را به شکل ترکیبی از $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ بنویسید.

۷۶. فرض کنید بردارهای $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ و $\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{d}}$ طوری هستند که

$$۲\vec{\mathbf{a}} - ۳\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{c}},\quad -۳\vec{\mathbf{a}} + ۵\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{d}}$$

اکنون بردارهای $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ را بر حسب دو دیگری بنویسید. حکم مسئله را با فرض جفت معادلات زیر تکرار کنید.

الف) $-\vec{\mathbf{a}} + ۲\vec{\mathbf{b}} = ۲\vec{\mathbf{c}},\ \ ۵\vec{\mathbf{a}} - ۲\vec{\mathbf{b}} = ۳\vec{\mathbf{d}}$

ب) $-\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{c}},\ \ ۲\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{d}}$

۷۷. کدامیک از بردارهای زیر به دو بردار دیگر وابسته است؟

الف) $\vec{\mathbf{a}} = (۱ \quad ۲ \quad ۳),\ \ \vec{\mathbf{b}} = (۱ \quad ۰ \quad ۱),\ \ \vec{\mathbf{c}} = (۲ \quad -۲ \quad ۴)$

ب) $\vec{\mathbf{a}} = (۰ \quad ۱ \quad ۱),\ \ \vec{\mathbf{b}} = (۴ \quad -۲ \quad -۲),\ \ \vec{\mathbf{c}} = (-۱ \quad ۱ \quad ۱)$

ج) $\vec{\mathbf{a}} = (۳ \quad ۰ \quad ۰),\ \ \vec{\mathbf{b}} = (۰ \quad ۷ \quad ۰),\ \ \vec{\mathbf{c}} = (۰ \quad ۰ \quad -۶)$

۷۸. برای بردارهای دلخواه $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ و $\vec{\mathbf{c}}$ نشان دهید سه بردار

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{a}} - ۲\vec{\mathbf{b}} + ۳\vec{\mathbf{c}},\ \ \vec{\mathbf{v}} = -۲\vec{\mathbf{a}} + ۳\vec{\mathbf{b}} - ۴\vec{\mathbf{c}},\ \ \vec{\mathbf{w}} = -\vec{\mathbf{b}} + ۲\vec{\mathbf{c}}$$

وابسته خطی اند.

۷۹. k چه مقداری باشد تا سه بردار زیر وابسته خطی شوند؟

$$\vec{\mathbf{a}} = (۱ \quad ۲ \quad ۳),\ \vec{\mathbf{b}} = (۲ \quad k \quad ۳),\ \vec{\mathbf{c}} = (۰ \quad k \quad -۱)$$

۸۰. آیا بردارهای زیر مستقل خطی اند؟

الف) $\vec{\mathbf{a}} = (۱ \quad ۲),\ \vec{\mathbf{b}} = (۴ \quad -۱)$ ب) $\vec{\mathbf{a}} = (۳ \quad ۰),\ \vec{\mathbf{b}} = (\frac{۱}{۹} \quad ۰)$

ج) $\vec{\mathbf{a}} = (۱ \quad ۲ \quad ۳),\ \vec{\mathbf{b}} = (-۱ \quad ۰ \quad ۰),\ \vec{\mathbf{c}} = (۰ \quad ۱ \quad ۱)$

د) $\vec{\mathbf{a}} = (۱ \quad ۱ \quad ۱),\ \vec{\mathbf{b}} = (-۲ \quad -۲ \quad -۲),\ \vec{\mathbf{c}} = (-۱ \quad -۱ \quad -۱)$

۸۱. برای بردارهای مستقل خطی $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ و $\vec{\mathbf{c}}$ نشان دهید بردارهای زیر هم استقلال خطی دارند.

الف) $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}},\ \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}},\ \vec{\mathbf{w}} = ۲\vec{\mathbf{a}} - ۳\vec{\mathbf{b}} + ۴\vec{\mathbf{c}}$

ب) $\vec{\mathbf{u}} = ۲\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} + ۳\vec{\mathbf{c}},\ \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} - ۲\vec{\mathbf{c}},\ \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} - ۳\vec{\mathbf{c}}$

و برعکس، بردارهای زیر وابسته خطی اند:

ج) $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + ۳\vec{\mathbf{c}},\ \vec{\mathbf{v}} = ۲\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} - ۲\vec{\mathbf{c}},\ \vec{\mathbf{w}} = ۳\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} - ۳\vec{\mathbf{c}}$

۱.۶.۶ جواب و راهنمایی ها

۱. تنها موارد **د**، **ه** و **و** بردارهایی از یک شکل (بُعد) تعریف می‌کنند. موارد **الف** اصلاً بردار نیستند! **۲.** بردارهای **د** و **و** در فضای سه بعدی و بردار **ه**، دو بُعدی است. **۵.** جواب مسلماً مثبت است. هر ماتریس سطری و یا ستونی را می‌توان یک بردار در نظر گرفت. ولی نه بردارهایی که می توانند با هم کنش کنند. بهتر است فرم اولیهٔ پذیرش شکل یک بردار ، یکی از دو نوع سطری یا ستونی باشد. ماتریس ۱×۷ یک بردار در $\mathbb{R}^{۷}$ است. **۶.** بردارهای $\vec{\mathbf{g}}$, $\vec{\mathbf{d}}$, $\vec{\mathbf{n}}$ و $\vec{\mathbf{c}}$, $\vec{\mathbf{f}}$, $\vec{\mathbf{a}}$ از جمله بردارهای مساوی هستند. دو بردار $\vec{\mathbf{e}}$ و $\vec{\mathbf{q}}$ با اینکه مساوی نیستند ولی در یک امتدادند. بعلاوه هیچ برداری با $\vec{\mathbf{l}}$ هم راستا یا مساوی دیده نمی شود. **۸.** برای **الف**، مقادیر مجهول عبارتند از $x = -۱$، $y = ۶$، $z = -۲$. **۹.** بردارهای $\overrightarrow{(۰\ \ ۱\ \ -۱)}$ و $\overrightarrow{(۱\ \ ۱\ \ ۰)}$ نامساوی ولی هر دو دارای دارای طول $\sqrt{۲}$ هستند. برای قسمت بعدی می توان دو بردار $\overrightarrow{(-۱\ \ ۵\ \ ۲)}$ و $\overrightarrow{(۱\ \ -۵\ \ -۲)}$ را مثال زد. **۱۰.**

$$\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{u}} = \frac{(۳\ \ ۰)}{۳} = (۱\ \ ۰),$$

$$\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{w}} = \frac{\begin{pmatrix}۰ & -۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰\end{pmatrix}}{\sqrt{۳}} = \begin{pmatrix}۰ & -\frac{\sqrt{۳}}{۳} & -\frac{\sqrt{۳}}{۳} & -\frac{\sqrt{۳}}{۳} & ۰ & ۰\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{y}} = \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{۵}{۶}} & ۰ & -\sqrt{\frac{۱}{۶}}\end{pmatrix}.$$

۱۱.

$$\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix}۱ & ۰\end{pmatrix}}_{i}, \overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰\end{pmatrix}}_{i}, \overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix}۰ & ۱ & ۰\end{pmatrix}}_{j},$$

$$\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{d}} = \begin{pmatrix}\frac{۷}{\sqrt{۸۵}} & \frac{-۶}{\sqrt{۸۵}} & ۰\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{c}} = \begin{pmatrix}\frac{۳}{\sqrt{۱۳}} & \frac{۴}{\sqrt{۱۳}} & ۰\end{pmatrix}.$$

۱۲. برای **الف**، جهت بردار $\vec{\mathbf{v}}$ را بدست می آوریم: $\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{v}} = \frac{\overrightarrow{(۳\ \ -۴)}}{۵} = \overrightarrow{(\frac{۳}{۵}\ \ \frac{-۴}{۵})}$. اگر بردار مورد نظر را به شکل $\vec{\mathbf{X}} = (x\ \ y)$ بنویسیم، اولاً جهت $\vec{\mathbf{X}}$ و $\vec{\mathbf{v}}$ مخالف هم و ثانیاً طولش برابر با $\frac{۵}{۲}$ است. پس باید داشته باشیم: $\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{\mathbf{X}}} = \frac{۲}{۵}\vec{\mathbf{X}} = \overrightarrow{(\frac{۲}{۵}x\ \ \frac{۲}{۵}y)}$ و $\frac{۲}{۵}y = \frac{۴}{۵}y$ و $\frac{۲}{۵}x = \frac{-۳}{۵}y$

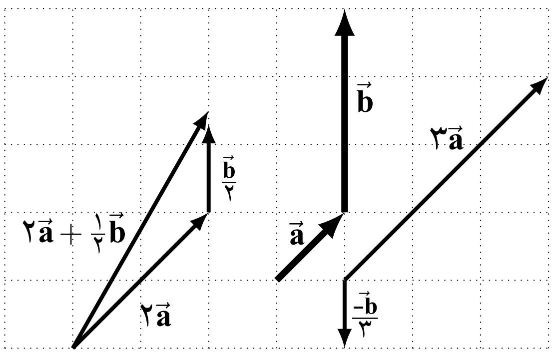
که مقادیر $x = -۱٫۵$ و $y = ۲$ بدست می آید. بطور مشابه برای **ج** ، بردار مجهول را به شکل $\vec{\mathbf{X}} = \overrightarrow{(x \quad y \quad z)}$ در نظر گرفته و یکه می کنیم:

$$\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{\mathbf{X}}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} \quad \frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} \right) = -\overrightarrow{(\tfrac{۱۰}{۱۵} \quad \tfrac{-۵}{۱۵} \quad \tfrac{۱۰}{۱۵})}.$$

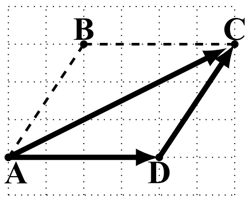
مقادیر مجهول بدست می آید. جواب مسئله همان بردار $\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{\mathbf{X}}}$ است. **۱۳.** با توجه به مسطح بودن بردار، می گیریم: $\vec{\mathbf{X}} = (x \quad y)$. چون باید طولش یک باشد پس آنرا یکه می کنیم. جواب مسئله بردار $\overrightarrow{(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}})}$ است (بطور بدیهی یکی از x یا y حتماً مخالف صفر اند). **۱۴.** $m = \pm\sqrt{۵}$. **۱۵.** دو بردار با مؤلفه های غیر صفر موازیند هرگاه نسبت این مؤلفه ها متناظراً مساوی باشند:

$$\frac{-۱}{۳} = \frac{k}{-۲} \longrightarrow k = \frac{۲}{۳}.$$

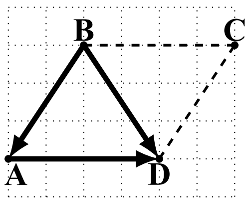
اگر علاوه بر آن، هم طول هم باشند آنگاه $\sqrt{۱۲} = \sqrt{۱ + k^۲}$ و لذا $k = \pm ۲\sqrt{۳}$. **۱۶.** برای حل، بردار واصل بین هر دو جفت از نقطه ها را بدست آورید. سپس جهت دو بردار را یافته و از حل مسئله ۱۵ کمک بگیرید. آیا نسبت بین مؤلفه ها در دو بردار جهت، یک عدد است؟ **۱۷.** از تعریف متوازی الاضلاع و راهنمایی مسئله قبل استفاده کنید. در اینجا باید دو جفت بردار موازی دیده شود. **۱۸.** دو بردار از یک بُعد نیستند پس قابل جمع نیستند. در هیچ صورتی امکان ندارد. **۱۹.** بنابه دلخواه بودن بردارها، $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ را به شکل زیر گرفته و مورد نظرها را بدست می آوریم:



۲۱. با رسم متوازی الاضلاعی که بردارهای مد نظر، اضلاع آن باشد، برای **الف** داریم:



$$\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\overrightarrow{\mathbf{AD}}+\overrightarrow{\mathbf{DC}}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{BD}}&=\overrightarrow{\mathbf{BA}}+\overrightarrow{\mathbf{AD}}\\&=-\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{AD}}\end{aligned}$$

با ایده ای که از نحوهٔ اثباتی از روی شکل فراهم شده است، می توان داشت:

$$\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}},\qquad -\overrightarrow{\mathbf{BD}}=\overrightarrow{\mathbf{DB}}=\overrightarrow{\mathbf{DA}}+\overrightarrow{\mathbf{AB}}=-\overrightarrow{\mathbf{BC}}+\overrightarrow{\mathbf{AB}}.$$

و لذا $\overrightarrow{\mathbf{AC}}+(-\overrightarrow{\mathbf{BD}})=۲\overrightarrow{\mathbf{AB}}$. به این ترتیب یکی از قسمت های **ج** حل می شود. **۲۲.** خیر نمی توان. مثلاً اگر $\vec{\mathbf{a}}=(۲\ \ ۳)$، $\vec{\mathbf{b}}=(۰\ \ -۱)$ و $\vec{\mathbf{c}}=(۲\ \ -۲)$ آنگاه $\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}$ ولی $\sqrt{۱۳}=|\vec{\mathbf{a}}|$، $|\vec{\mathbf{b}}|=۱$ و $\sqrt{۸}=|\vec{\mathbf{c}}|$ که نشان می دهد لزوماً تساوی ادعا شده درست نیست. **۲۴.** دو بردار $\vec{\mathbf{a}}=(x\ \ y)$ و $\vec{\mathbf{b}}=(t\ \ k)$ را مسطح می گیریم. بنابر این $\overbrace{x^۲+y^۲}^{|\vec{\mathbf{a}}|^۲}=۱۶۹$، $|\vec{\mathbf{b}}|^۲=t^۲+k^۲=۳۶۱$ و $|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|^۲=(x+t)^۲+(y+k)^۲=۵۷۶$. از آخرین تساوی و با کمک تعریف داریم: $x^۲+y^۲+t^۲+k^۲+۲(xt+yk)=۵۷۶$. با مقدار گذاری و انجام ترتیبات بالا بالعکس خواهیم داشت:

$$|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}|^۲=(x-t)^۲+(y-k)^۲=۱۶۹+۳۶۱-\underbrace{۲(xt+yk)}_{۴۶}=۴۸۴.$$

و لذا $|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}|=۲۲$. **۲۵.** از حل مسئلهٔ ۱۵ کمک بگیرید. **۳۰.** موارد **الف، د، ه، و** و **ز** قطعاً صحیح اند. **۳۳.** با توجه به شکل می توان نوشت: $\overrightarrow{\mathbf{OV}}=\vec{\mathbf{e}}+\vec{\mathbf{f}}$. چون $\vec{\mathbf{e}}+\vec{\mathbf{f}}+\overrightarrow{\mathbf{VW}}=\vec{\mathbf{g}}$ و لذا $\overrightarrow{\mathbf{VW}}=\vec{\mathbf{g}}-\vec{\mathbf{f}}-\vec{\mathbf{e}}$. همچنین $\overrightarrow{\mathbf{OM}}+\overrightarrow{\mathbf{MW}}=\vec{\mathbf{g}}$ و لذا

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}}=\vec{\mathbf{g}}-\underbrace{\overrightarrow{\mathbf{MW}}}_{\frac{۱}{۲}\overrightarrow{\mathbf{VW}}}=\vec{\mathbf{g}}-\tfrac{۱}{۲}(\vec{\mathbf{g}}-\vec{\mathbf{e}}-\vec{\mathbf{f}})=+\tfrac{۱}{۲}(\vec{\mathbf{g}}+\vec{\mathbf{e}}+\vec{\mathbf{f}}).$$

۳۴. بردار $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (a \quad b)$ با ابتدای A و انتهای B همواره به صورت زیر و بر حسب آنها نوشته می شود: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = B - A = \overrightarrow{(x_B - x_A \quad y_B - y_B)}$. **۳۵.** برای **الف**:

$$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = (۳,۴) - (۰,۰) = \overrightarrow{(۳ \quad ۴)} = ۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j}$$

برای **ج**: $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = (۰, \frac{-۱}{۴}) - (\frac{۳}{۵}, ۰) = \overrightarrow{(\frac{-۳}{۵} \quad \frac{۱}{۴})} = \frac{-۳}{۵}\mathbf{i} + \frac{-۱}{۴}\mathbf{j}$. **۳۷.** این بردار ۴ بُعدی است و مؤلفهٔ چهارم آن عدد ۱ است. بطور کلی برداری با ابعاد بالاتر را نمی توان در بعد پایینتر نشاند. **۳۸.** برای **الف**، نقاط متناظر عبارتند از $A(-۲,۱,-۱)$ و $B(۴,۳,-۶)$. برای محاسبه فاصله بین این دو کافی است بردار $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ را یافته و طول آنرا بدست آوریم:

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = B - A = \overrightarrow{(۶ \quad ۲ \quad -۵)} \to |\overrightarrow{\mathbf{AB}}| = \sqrt{۶۵}.$$

۳۹. به مسئله ۱۲ مراجعه کنید. **۴۰.** $x = \pm\sqrt{\frac{۱}{۳}}$. **۴۲.** در ه داریم:

$$۲(\mathbf{i} - \mathbf{j}) - ۳(\tfrac{۱}{۲}\mathbf{i} - \tfrac{۵}{۱۲}\mathbf{j}) = (۲ - \tfrac{۳}{۲})\mathbf{i} + (\tfrac{۱۵}{۱۲} - ۲)\mathbf{j} = \tfrac{۱}{۲}\mathbf{i} + (\tfrac{-۹}{۱۲})\mathbf{j}.$$

اگر این بردار با $۴\mathbf{i} + ۶\mathbf{j}$ موازی باشد آنگاه حاصل تساوی های زیر یکی باشد که نیست:

$$\frac{۴}{(\frac{۱}{۲})} = ۸ \neq \tfrac{-۴}{۳} = \frac{۶}{\left(\frac{-۹}{۲}\right)}.$$

. برای قسمت **و** بردار به شکل $-۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j}$ نوشته میشود. برای این بردار داریم:

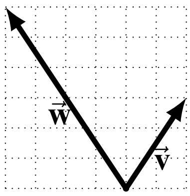
$$\tfrac{۴}{-۲} = -۲ = -۲ = \tfrac{۶}{-۳}.$$

و لذا این بردارها موازیند. **۴۳.** با توجه به تعریف بترتیب: $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = ۱۰$، $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = -۱$، $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \frac{۱}{-۶}$ و $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = ۲$. **۴۴.** بنابه آنچه در بیان ضرب خارجی دو بردار و خواص آن آمده است، بردار $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ هم بر $\vec{\mathbf{a}}$ و هم بر $\vec{\mathbf{b}}$ همزمان عمود است. لذا در اینجا کافی است تا این ضرب را برای این دو بردار بیابیم. برای **ب** داریم:

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - ۲\mathbf{k}.$$

۴۵. برای **ب**، محاسبه نسبت مؤلفه های دو بردار $\frac{۳}{۶} \neq \frac{۲}{-۴}$ نشان می دهد که آنها ناموازی

اند. از طرفی $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = ۱۰ \neq ۰$ پس دو بردار عمود نیز نیستند. شکلی از این دو بردار نتایج را نشان می دهد. زاویهٔ بین دو بردار تقریباً ۶۷/۳ است. **۴۶.** معادلهٔ $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = ۰$ را حل



کنید. **۴۸.** بازای $k = ۰$ بر همدیگر عمود و بازای هیچ مقداری با هم موازی نیستند. در واقع معادلهٔ $k^۲ = -۳۰$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد. **۴۹.** برداری به شکل $\vec{\mathbf{X}} = (a \quad b)$ را که در آن مؤلفه ها همزمان صفر نیستند را در نظر گرفته و یکه می کنیم: $\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{\mathbf{X}}} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \quad \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\right)$ و چون $\vec{\mathbf{a}}\cdot\overrightarrow{\mathscr{U}}_{\vec{\mathbf{X}}} = ۰$ پس $\frac{ax+by}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = ۰$ که نتیجتاً $ax+by = ۰$. لذا مقادیر a و b را طوری می گیریم که تساوی آخر برقرار شود. مثلاً $a = y$ و $b = -x$. حال بردار یکه را بسازید. **۵۰.** از این نکته استفاده کنید که $|\vec{\mathbf{a}}|^۲ = \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = ۰$. بنابر این:

$$|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|^۲ = (\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\cdot(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{b}}.$$

۵۳. مجدداً از نکات بیان شده در ۵۰ استفاده کنید. بعلاوه $|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}|^۲ = ۰$ را باز کرده و بکار ببرید. **۵۶.** کافی است نشان دهید $\vec{\mathbf{a}}\cdot\left(\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})\right) = ۰$. داریم:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\left(\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})\right) = (\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}) - (\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}) = ۰.$$

۵۸. لزوماً برقرار نیست. مثلاً برای $\vec{\mathbf{a}} = (۱ \quad ۰ \quad ۱)$، $\vec{\mathbf{b}} = (۳ \quad ۰ \quad ۲)$ و $\vec{\mathbf{c}} = (۵ \quad ۰ \quad ۴)$ داریم: $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}} = \mathbf{j}$ ولی $\vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{c}}$. **۵۹.** الف) $(۲\mathbf{i})\times\mathbf{j} = ۲(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) = ۲\mathbf{k}$.

ب) $\mathbf{k}\times(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}) = \mathbf{k}\times(۲\mathbf{i}) - (\mathbf{k}\times\mathbf{j}) = ۲\mathbf{j} - (-\mathbf{i}) = \mathbf{i}+۲\mathbf{j}$.

ج) $\mathbf{i}\times(-۳\mathbf{k}) = -۳(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) = -۳\mathbf{j}$.

د) $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) = \mathbf{i}\times\mathbf{i} = ۰$.

ه) $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = ۰$.

و) $(\mathbf{i}\times\mathbf{k})\times(\mathbf{j}\times\mathbf{i})=(-\mathbf{j})\times(\mathbf{k})=\mathbf{i}$.

ح) $(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+۵\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}=۲(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})-(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})+۵(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})=۲|\mathbf{i}|^{۲}=۲$. **۶۱.** برای **الف**: $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}=+۱$، $\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{c}}=-۴$ و $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=۱$ و لذا مقدار **الف** برابر با ۲− است. برای **ب**، بکمک **الف** داریم:

$$(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{c}}+(\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{a}}=۱\overrightarrow{(-۱\ \ ۱\ \ ۰)}+(-۴)\overrightarrow{(۱\ \ ۲\ \ ۳)}=\overrightarrow{(-۶\ \ -۷\ \ -۱۲)}.$$

برای **و** توجه داریم $\left|\frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|}\right|=\left|\frac{\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{b}}|}\right|=۱$ و لذا $\left|\frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|}\right|+۵\left|\frac{\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{b}}|}\right|=۶$. برای **ط**، چون $\vec{\mathbf{e}}_{۱}=(۱\ \ ۰\ \ ۰)$ و $\vec{\mathbf{e}}_{۲}=(۰\ \ ۱\ \ ۰)$ بنابر این $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{۱}=+۱$ و $\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{e}}_{۲}=-۱$ و لذا مقدار مورد نظر برابر است با $\sqrt[۳]{۱+(-۱)}=۰$. **۶۲.** بترتیب برای **الف**، **ج**، **د** و **ز** داریم:

$$\overbrace{\overrightarrow{(x\ \ ۱\ \ ۲)}\cdot\overrightarrow{(-۱\ \ ۳\ \ x)}}^{-x+۳+۲x=x+۳}=۰\to x=-۳.$$

$$\overbrace{\overrightarrow{(x\ \ ۱\ \ ۲)}\cdot\overrightarrow{(۱\ \ -۲x\ \ ۳)}}^{x-۲x+۶=-x+۶}=۱۰\to x=-۴.$$

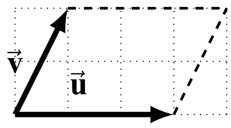
$\overbrace{\overrightarrow{(x\ \ ۱)}\cdot\overrightarrow{(۱\ \ -x)}}^{x-x=۰}=۰\to$ $\quad$ x هر عددی می تواند باشد

$$\vec{\mathbf{0}}=\overrightarrow{(x\ \ ۲\ \ ۱)}\times\overrightarrow{(۱\ \ ۲\ \ y)}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ x&۲&۱\\ ۱&۲&y\end{vmatrix}=(۲y-۲)\mathbf{i}-(xy-۱)\mathbf{j}+(۲x-۲)\mathbf{k}.$$

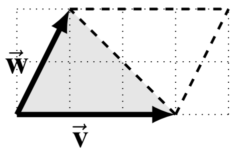
پس با صفر قرار دادن همهٔ ضرایب در طرف راست تساوی؛ $x=y=۱$. **۶۳.** حاصلضرب داخلی را محاسبه و مساوی با صفر حل کنید. **۶۵.** با توجه به فرضیات، $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(۳\ \ ۴)$، $\overrightarrow{\mathbf{AC}}=(۱۱\ \ -۲)$ و $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(۸\ \ -۶)$. اکنون $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{BC}}=۰$ و $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{AC}}=۲۵\neq ۰$ که نشان می دهد مثلث ABC در رأس B قائمه است. **۶۷.** دربارهٔ **ب**: فرض کنیم $\vec{\mathbf{x}}=(a\ \ b\ \ c)$ و حاصلضرب زیر را محاسبه می کنیم:

$$\overrightarrow{(-۱ \ \ ۲ \ \ -۳)} \times \overrightarrow{(a \ \ b \ \ c)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۱ & ۲ & -۳ \\ a & b & c \end{vmatrix}$$
$$= (۲c + ۳b)\mathbf{i} + (c + ۳a)\mathbf{j} + (-b - ۲b)\mathbf{k}.$$

اما حاصل باید با بردار $\mathbf{i} + ۵\mathbf{j}$ یکی باشد لذا: $۲c + ۳b = ۱$، $c + ۳a = ۵$ و $-b - ۲a = ۰$، بنابر این $a = \frac{۳}{۴}, b = \frac{-۳}{۲}, c = \frac{۱۱}{۴}$. **۶۸.** راهنمایی برای این مسئله بدین صورت است که مساحت متوازی الاضلاع در شکل، با محاسبه عدد $|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}|$ بدست می آید. لذا برای هر قسمت ابتدا $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ را یافته و سپس اندازه آنرا بیابید: **۶۹.** چون هر متوازی الاضلاع از



دو مثلث مساوی و هم قاعده ساخته شده است، لذا برای محاسبه مساحت مثلث مورد نظر، مساحت متوازی الاضلاع را مطابق مسئله قبل بدست آورده و نصف می کنیم. برای درک بهتر شکل را نگاه کنید: برای مورد ج ، داریم:



$$\vec{\mathbf{v}} = (۰ \ \ b \ \ ۰) - (a \ \ ۰ \ \ ۰) = (-a \ \ b \ \ ۰), \quad \vec{\mathbf{w}} = (۰ \ \ ۰ \ \ c) - (a \ \ ۰ \ \ ۰) = (-a \ \ ۰ \ \ c).$$

و بنابر این $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = (bc \ \ ac \ \ ba)$ و لذا مساحت مثلث برابر است با نصف مقدار

$$\sqrt{b^۲a^۲ + b^۲c^۲ + a^۲c^۲}.$$

۷۰. برای **الف**، مقدار این حاصلضرب سه گانه برابر است با $\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}) = ۸۰$. و برای **ج**، برابر است با ۱۷. **۷۲.** برای **الف**، $\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{a}}\cdot(-\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}) = -\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}) = -۳$. برای **ب**، $\vec{\mathbf{c}}\cdot(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}) = -\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{b}}) = -(-۳) = +۳$. برای **ه**،

$$\vec{\mathbf{b}}\cdot(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}}) = -\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}) = -۳.$$

و مقدار **و** صفر است. توجه کنید بنابه حاصلضرب سه گانه:

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \star & \star & \star \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \vec{\mathbf{a}}\text{مؤلفه های بردار} \\ \leftarrow \vec{\mathbf{b}}\text{مؤلفه های بردار} \\ \leftarrow \vec{\mathbf{c}}\text{مؤلفه های بردار} \end{array}$$

و دیگر اینکه، با جابجایی دو سطر در دترمینان، حاصل آن قرینه می شود. **۷۳.** بعنوان یک نکته، شرط اینکه سه بردار $\vec{\mathbf{u}}$، $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{w}}$ در یک صفحه قرار بگیرند این است که $\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}}) = ۰$. حال با محاسبهٔ ضرب سه گانهٔ بالا و بازای بردارهای داده شده، داریم: $۱۰ - ۵p = ۰$ ، یعنی $p = ۵$. با بررسی مشابه، مورد **ب** واجد شرایط است. **۷۴.** بردار $\vec{\mathbf{a}}$ بر حسب $\vec{\mathbf{b}}$ و $\vec{\mathbf{c}}$ نوشته می شود هرگاه بازای اعداد x, y : $\vec{\mathbf{a}} = x\vec{\mathbf{b}} + y\vec{\mathbf{c}}$. پس باید:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(۳ \quad -۲)} &= x\overrightarrow{(-۲ \quad ۱)} + y\overrightarrow{(۷ \quad -۴)} = \overrightarrow{(-۲x \quad x)} + \overrightarrow{(۷y \quad -۴y)}, \\ &= \overrightarrow{(-۲x + ۷y \quad x - ۴y)}. \end{aligned}$$

و لذا دستگاه زیر را حل می کنیم. اگر جواب داشت، جواب مسئله مثبت است:

$$\begin{cases} -۲x + ۷y = ۳ \\ \quad x - ۴y = -۲ \end{cases} \longrightarrow x = ۲,\ y = ۱.$$

۷۶. بردار $\vec{\mathbf{b}}$ را بین دو تساوی داده شده، عیناً مثل موقعی که یک دستگاه دو معادله دو مجهولی را حل می کنید، حذف می کنیم:

$$\begin{cases} ۲\vec{\mathbf{a}} - ۳\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{c}} \xrightarrow{\times ۵} ۱۰\vec{\mathbf{a}} - ۱۵\vec{\mathbf{b}} = ۵\vec{\mathbf{c}} \\ -۳\vec{\mathbf{a}} + ۵\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{d}} \xrightarrow{\times ۳} -۹\vec{\mathbf{a}} + ۱۵\vec{\mathbf{b}} = ۳\vec{\mathbf{d}} \end{cases}$$

$$\oplus:\ \vec{\mathbf{a}} = +۵\vec{\mathbf{c}} + ۳\vec{\mathbf{d}}$$

همین روش را این بار با حذف $\vec{\mathbf{a}}$ انجام داده تا دیگر بردار را بدست آورید. **۷۷.** با توجه به راه ارائه شده در مسئله قبل، یک ماتریس بسازید که سطرهای آن، بردار های $\vec{\mathbf{a}}$ ، $\vec{\mathbf{b}}$ و $\vec{\mathbf{c}}$ باشند. روی این ماتریس اعمال سطری مقدماتی را تا جایی اثر دهید که ماتریس به سمت پایین مثلثی شدن پیش رود. دربارهٔ **ب** داریم:

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۴ & -۲ & -۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow[R_۱\leftrightarrow R_۳]{-R_۳\mapsto R_۳} \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & -۱ \\ ۴ & -۲ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow{۱۴R_۱+R_۲\leftrightarrow R_۲}$$
$$\begin{pmatrix} ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow[R_۲\leftrightarrow R_۳]{-۲R_۲+R_۳\mapsto R_۳} \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

ماتریس، بالا مثلثی شده ولی یکی از سطرها کاملاً از بین رفت! سطر سوم که کاملاً صفر شد، متناظر با کدام بردار در ابتدای ساخت ماتریس بود؟ اگر روال عملیات سطری را از پایان تا به ابتدا مجدداً بازبینی کنیم، بردار مورد نظر $\vec{\mathbf{b}}$ بوده است. پس این بردار به دو بردار $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{c}}$ وابسته است. **۷۹.** راهنمایی: دترمینان ماتریسی را که بواسطه بردارهای $\vec{\mathbf{a}}$، $\vec{\mathbf{b}}$ و $\vec{\mathbf{c}}$ ساخته اید را مساوی با صفر حل کرده و k را بدست آورید. **۸۰**. برای **الف**،

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{vmatrix} = -۱-۸ = -۹ \neq ۰ \rightarrow \quad \text{مستقل اند } \vec{\mathbf{b}} \text{ و } \vec{\mathbf{a}}$$

و برای **ج**،

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۱-۸ = -۹ \neq ۰ \rightarrow \quad \text{استقلال دارند } \vec{\mathbf{b}} \text{ و } \vec{\mathbf{a}}$$

ضمائم

تعدادی از انتگرالهای کاربردی

۱. $\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C, a \neq 0$

۲. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, n \neq -1, a \neq 0$

۳. $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a(x+a)} + C, a \neq 0$

۴. $\int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln|b+ax| + C, a \neq 0$

۵. $\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln|a^2+x^2| + C,$

۶. $\int \sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2} + C, a \neq 0$

۷. $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\, dx = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C, a \neq 0$

۸. $\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}}\, dx = \frac{2}{3}(x \mp 2a)\sqrt{x \pm a} + C,$

۹. $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{3}\left(x^2 \pm a^2\right)^{3/2} + C,$

۱۰. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C,$

۱۱. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C,$

۱۲. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C,$

۱۳. $\int x^n \ln(ax)\, dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln(ax)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + C, n \neq -1,$

۱۴. $\int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C, a \neq 0$

۱۵. $\int x^2 e^{ax+b}\, dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) e^{ax+b} + C, a \neq 0$

۱۶. $\int x^3 e^x\, dx = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) e^x + C.$

مقادیر $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{z}\exp(-۰/۵z^{۲})dz$ یا منحنی نرمال

x	۰.۰۰	۰.۰۱	۰.۰۲	۰.۰۳	۰.۰۴	۰.۰۵	۰.۰۶	۰.۰۷	۰.۰۸	۰.۰۹
۰.۰	۰.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۳۹۹	۰.۰۰۷۹۸	۰.۰۱۱۹۷	۰.۰۱۵۹۵	۰.۰۱۹۹۴	۰.۰۲۳۹۲	۰.۰۲۷۹۰	۰.۰۳۱۸۸	۰.۰۳۵۸۶
۰.۱	۰.۰۳۹۸۳	۰.۰۴۳۸۰	۰.۰۴۷۷۶	۰.۰۵۱۷۲	۰.۰۵۵۶۷	۰.۰۵۹۶۲	۰.۰۶۳۵۶	۰.۰۶۷۴۹	۰.۰۷۱۴۲	۰.۰۷۵۳۵
۰.۲	۰.۰۷۹۲۶	۰.۰۸۳۱۷	۰.۰۸۷۰۶	۰.۰۹۰۹۵	۰.۰۹۴۸۳	۰.۰۹۸۷۱	۰.۱۰۲۵۷	۰.۱۰۶۴۲	۰.۱۱۰۲۶	۰.۱۱۴۰۹
۰.۳	۰.۱۱۷۹۱	۰.۱۲۱۷۲	۰.۱۲۵۵۲	۰.۱۲۹۳۰	۰.۱۳۳۰۷	۰.۱۳۶۸۳	۰.۱۴۰۵۸	۰.۱۴۴۳۱	۰.۱۴۸۰۳	۰.۱۵۱۷۳
۰.۴	۰.۱۵۵۴۲	۰.۱۵۹۱۰	۰.۱۶۲۷۶	۰.۱۶۶۴۰	۰.۱۷۰۰۳	۰.۱۷۳۶۴	۰.۱۷۷۲۴	۰.۱۸۰۸۲	۰.۱۸۴۳۹	۰.۱۸۷۹۳
۰.۵	۰.۱۹۱۴۶	۰.۱۹۴۹۷	۰.۱۹۸۴۷	۰.۲۰۱۹۴	۰.۲۰۵۴۰	۰.۲۰۸۸۴	۰.۲۱۲۲۶	۰.۲۱۵۶۶	۰.۲۱۹۰۴	۰.۲۲۲۴۰
۰.۶	۰.۲۲۵۷۵	۰.۲۲۹۰۷	۰.۲۳۲۳۷	۰.۲۳۵۶۵	۰.۲۳۸۹۱	۰.۲۴۲۱۵	۰.۲۴۵۳۷	۰.۲۴۸۵۷	۰.۲۵۱۷۵	۰.۲۵۴۹۰
۰.۷	۰.۲۵۸۰۴	۰.۲۶۱۱۵	۰.۲۶۴۲۴	۰.۲۶۷۳۰	۰.۲۷۰۳۵	۰.۲۷۳۳۷	۰.۲۷۶۳۷	۰.۲۷۹۳۵	۰.۲۸۲۳۰	۰.۲۸۵۲۴
۰.۸	۰.۲۸۸۱۴	۰.۲۹۱۰۳	۰.۲۹۳۸۹	۰.۲۹۶۷۳	۰.۲۹۹۵۵	۰.۳۰۲۳۴	۰.۳۰۵۱۱	۰.۳۰۷۸۵	۰.۳۱۰۵۷	۰.۳۱۳۲۷
۰.۹	۰.۳۱۵۹۴	۰.۳۱۸۵۹	۰.۳۲۱۲۱	۰.۳۲۳۸۱	۰.۳۲۶۳۹	۰.۳۲۸۹۴	۰.۳۳۱۴۷	۰.۳۳۳۹۸	۰.۳۳۶۴۶	۰.۳۳۸۹۱
۱.۰	۰.۳۴۱۳۴	۰.۳۴۳۷۵	۰.۳۴۶۱۴	۰.۳۴۸۴۹	۰.۳۵۰۸۳	۰.۳۵۳۱۴	۰.۳۵۵۴۳	۰.۳۵۷۶۹	۰.۳۵۹۹۳	۰.۳۶۲۱۴
۱.۱	۰.۳۶۴۳۳	۰.۳۶۶۵۰	۰.۳۶۸۶۴	۰.۳۷۰۷۶	۰.۳۷۲۸۶	۰.۳۷۴۹۳	۰.۳۷۶۹۸	۰.۳۷۹۰۰	۰.۳۸۱۰۰	۰.۳۸۲۹۸
۱.۲	۰.۳۸۴۹۳	۰.۳۸۶۸۶	۰.۳۸۸۷۷	۰.۳۹۰۶۵	۰.۳۹۲۵۱	۰.۳۹۴۳۵	۰.۳۹۶۱۷	۰.۳۹۷۹۶	۰.۳۹۹۷۳	۰.۴۰۱۴۷
۱.۳	۰.۴۰۳۲۰	۰.۴۰۴۹۰	۰.۴۰۶۵۸	۰.۴۰۸۲۴	۰.۴۰۹۸۸	۰.۴۱۱۴۹	۰.۴۱۳۰۸	۰.۴۱۴۶۶	۰.۴۱۶۲۱	۰.۴۱۷۷۴
۱.۴	۰.۴۱۹۲۴	۰.۴۲۰۷۳	۰.۴۲۲۲۰	۰.۴۲۳۶۴	۰.۴۲۵۰۷	۰.۴۲۶۴۷	۰.۴۲۷۸۵	۰.۴۲۹۲۲	۰.۴۳۰۵۶	۰.۴۳۱۸۹
۱.۵	۰.۴۳۳۱۹	۰.۴۳۴۴۸	۰.۴۳۵۷۴	۰.۴۳۶۹۹	۰.۴۳۸۲۲	۰.۴۳۹۴۳	۰.۴۴۰۶۲	۰.۴۴۱۷۹	۰.۴۴۲۹۵	۰.۴۴۴۰۸
۱.۶	۰.۴۴۵۲۰	۰.۴۴۶۳۰	۰.۴۴۷۳۸	۰.۴۴۸۴۵	۰.۴۴۹۵۰	۰.۴۵۰۵۳	۰.۴۵۱۵۴	۰.۴۵۲۵۴	۰.۴۵۳۵۲	۰.۴۵۴۴۹
۱.۷	۰.۴۵۵۴۳	۰.۴۵۶۳۷	۰.۴۵۷۲۸	۰.۴۵۸۱۸	۰.۴۵۹۰۷	۰.۴۵۹۹۴	۰.۴۶۰۸۰	۰.۴۶۱۶۴	۰.۴۶۲۴۶	۰.۴۶۳۲۷
۱.۸	۰.۴۶۴۰۷	۰.۴۶۴۸۵	۰.۴۶۵۶۲	۰.۴۶۶۳۸	۰.۴۶۷۱۲	۰.۴۶۷۸۴	۰.۴۶۸۵۶	۰.۴۶۹۲۶	۰.۴۶۹۹۵	۰.۴۷۰۶۲
۱.۹	۰.۴۷۱۲۸	۰.۴۷۱۹۳	۰.۴۷۲۵۷	۰.۴۷۳۲۰	۰.۴۷۳۸۱	۰.۴۷۴۴۱	۰.۴۷۵۰۰	۰.۴۷۵۵۸	۰.۴۷۶۱۵	۰.۴۷۶۷۰
۲.۰	۰.۴۷۷۲۵	۰.۴۷۷۷۸	۰.۴۷۸۳۱	۰.۴۷۸۸۲	۰.۴۷۹۳۲	۰.۴۷۹۸۲	۰.۴۸۰۳۰	۰.۴۸۰۷۷	۰.۴۸۱۲۴	۰.۴۸۱۶۹
۲.۱	۰.۴۸۲۱۴	۰.۴۸۲۵۷	۰.۴۸۳۰۰	۰.۴۸۳۴۱	۰.۴۸۳۸۲	۰.۴۸۴۲۲	۰.۴۸۴۶۱	۰.۴۸۵۰۰	۰.۴۸۵۳۷	۰.۴۸۵۷۴
۲.۲	۰.۴۸۶۱۰	۰.۴۸۶۴۵	۰.۴۸۶۷۹	۰.۴۸۷۱۳	۰.۴۸۷۴۵	۰.۴۸۷۷۸	۰.۴۸۸۰۹	۰.۴۸۸۴۰	۰.۴۸۸۷۰	۰.۴۸۸۹۹
۲.۳	۰.۴۸۹۲۸	۰.۴۸۹۵۶	۰.۴۸۹۸۳	۰.۴۹۰۱۰	۰.۴۹۰۳۶	۰.۴۹۰۶۱	۰.۴۹۰۸۶	۰.۴۹۱۱۱	۰.۴۹۱۳۴	۰.۴۹۱۵۸
۲.۴	۰.۴۹۱۸۰	۰.۴۹۲۰۲	۰.۴۹۲۲۴	۰.۴۹۲۴۵	۰.۴۹۲۶۶	۰.۴۹۲۸۶	۰.۴۹۳۰۵	۰.۴۹۳۲۴	۰.۴۹۳۴۳	۰.۴۹۳۶۱
۲.۵	۰.۴۹۳۷۹	۰.۴۹۳۹۶	۰.۴۹۴۱۳	۰.۴۹۴۳۰	۰.۴۹۴۴۶	۰.۴۹۴۶۱	۰.۴۹۴۷۷	۰.۴۹۴۹۲	۰.۴۹۵۰۶	۰.۴۹۵۲۰
۲.۶	۰.۴۹۵۳۴	۰.۴۹۵۴۷	۰.۴۹۵۶۰	۰.۴۹۵۷۳	۰.۴۹۵۸۵	۰.۴۹۵۹۸	۰.۴۹۶۰۹	۰.۴۹۶۲۱	۰.۴۹۶۳۲	۰.۴۹۶۴۳
۲.۷	۰.۴۹۶۵۳	۰.۴۹۶۶۴	۰.۴۹۶۷۴	۰.۴۹۶۸۳	۰.۴۹۶۹۳	۰.۴۹۷۰۲	۰.۴۹۷۱۱	۰.۴۹۷۲۰	۰.۴۹۷۲۸	۰.۴۹۷۳۶
۲.۸	۰.۴۹۷۴۴	۰.۴۹۷۵۲	۰.۴۹۷۶۰	۰.۴۹۷۶۷	۰.۴۹۷۷۴	۰.۴۹۷۸۱	۰.۴۹۷۸۸	۰.۴۹۷۹۵	۰.۴۹۸۰۱	۰.۴۹۸۰۷
۲.۹	۰.۴۹۸۱۳	۰.۴۹۸۱۹	۰.۴۹۸۲۵	۰.۴۹۸۳۱	۰.۴۹۸۳۶	۰.۴۹۸۴۱	۰.۴۹۸۴۶	۰.۴۹۸۵۱	۰.۴۹۸۵۶	۰.۴۹۸۶۱
۳.۰	۰.۴۹۸۶۵	۰.۴۹۸۶۹	۰.۴۹۸۷۴	۰.۴۹۸۷۸	۰.۴۹۸۸۲	۰.۴۹۸۸۶	۰.۴۹۸۸۹	۰.۴۹۸۹۳	۰.۴۹۸۹۶	۰.۴۹۹۰۰

کتابنامه

1. Harshbarger R.، ***Mathematical Applications***، D. C. Heath & Company، 1989.
2. Simon C.، ***Mathematics for Economist***، W. W. Norton 1994.
3. Dowling E.، ***Introduction to Mathematical Economics***، Schums's outline، 1992.
4. Jacques I.، ***Mathematics for Economics & Business***، Prentice Hall، 1994.
5. Hammond K.، ***Economic Analysis***، Prentice Hall، 2005.
6. Gordon W.، ***Applied Calculus for Business***، Pearson Education، Inc. 2007.
7. Hammond K.، ***Essential Mathematics for Economic Analysis***، Prentice Hall، 2006.