١ ❐

٢

مقدمه

در ویرایش دوم از کتاب حاضر شاهد یک بازنگری کلی در ارائه مطالب مرتبط با ماتریس‌ها و توابع چندمتغیره هستیم. اگرچه کلیت موضوعات یکی است و امکان تغییر قابل توجهی نمی‌توان داشت اما با این‌حال تعاریف و قضایایی همراه با مثالهایی اقناع کننده آورده شده‌اند. در این کتاب همچنان بر آن هستیم تا از ورود به مباحث و استدلالهای محض ریاضی دوری کنیم تا دانشجویان رشته های مرتبط با عناوین مدیریت ، اقتصاد و حسابداری قادر باشند تا از این دو مبحث مهم ریاضیات بهره ببرند. طرح درس مختصری که در هر دو عنوان و زیر عناوین هر یک آمده با آنچه در کتاب قبل دیده می‌شود تفاوت دارد. ضمن اینکه هنوز هم سعی کردیم تا کمترین دخالت را در نحوه تدریس استادان گرامی داشته باشیم. همچنان معتقدیم از این کتاب می توان برای آمادگی کنکور دوره های عالی تر و البته در مباحث مطرح شده استفاده خوبی کرد. امیدواریم از نقایص احتمالی کتاب از طریق آدرس دانشگاهی[1] مطلع شویم.

محمدرضا ثروهش-مجید کرمی
گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب
دی ۱۴۰۰

[1] sorouhesh@azad.ac.ir

فهرست مطالب

۱

مقدمات ماتریس

این فصل به معرفی مقدمات لازم برای آشنایی مختصر با یک مفهوم ساختاری و بسیار مهم بنام **ماتریس** که نقش مهمی در اغلب علوم دارد، می‌پردازد. در معرفی آن، دو دیدگاه وجود دارد.

در دیدگاه نخست آنرا بعنوان یک تابع تعریف می‌کنند. فرض کنیم $k, k' \in \mathbb{N}$ و $X \subset \mathbb{R}$ دلخواه بوده[۱] و قرار می‌دهیم:

$$I = \{۱, \dots, k\}, \quad J = \{۱, \dots, k'\}$$

تعریف ۱.۱. منظور از **ماتریس**A در مجموعه اعداد حقیقی، تابعی به‌شکل زیر است:

$$A : I \times J \to X \subset \mathbb{R}$$

که در آن $I \times J$ حاصلضرب دکارتی دو مجموعه I و J است.[۲]

مثال ۱.۱. فرض کنیم $k = k' = ۱$. توابع زیر همگی ماتریس‌هایی حقیقی‌اند:

$$A(۱,۱) = \tfrac{۴}{۱۱} \in \mathbb{R}, \quad F(۱,۱) = ۰ \in \mathbb{R}, \quad Y(۱,۱) = -۳۶ \in \mathbb{R}$$

که در آن $X = \{۲, ۱۳.۵۶, \tfrac{۴}{۱۱}, ۰, \sqrt{۱۰۰}, -۳۶\}$.

[۱] در علوم انسانی، به‌جهت معنی‌دار شدن مسائل، اغلب مجموعه X را **متناهی** می‌گیرند.
[۲] یعنی مجموعه $\{(i,j) \mid i \in I,\ j \in J\}$.

به تبعیت از توابع، هر ماتریس را بدلخواه با حروف بزرگ لاتین قابل نام‌گذاری می‌کنند، هرچند که در استفاده از تعدادی حروف لاتین آنهم برای هر ماتریسی محدودیت وجود دارد. این موضوع، در مثال قبل مشاهده می‌شود. بعلاوه، در تعریف ۱.۱، اعضایی (و یا همه اعضاء) از مجموعه X بتوسط دوتایی‌هایی از مجموعه دامنه، نشان‌دار می‌شوند. این نشان‌دار شدن، بیان دیدگاه دوم از یک ماتریس را تسهیل می‌کند.

مثال ۲.۱. با فرض $X = \{۰.۳, \pi, \frac{۳}{-۸}, ۴۴\}$، دو تابع زیر دو ماتریس حقیقی متمایزند:

$k = ۱, k' = ۲$	$k = ۲, k' = ۱$
$M(۱,۱) = ۳/-۸$	$H(۱,۱) = ۰.۳$
$M(۱,۲) = ۴۴$	$H(۲,۱) = \pi$

۱.۱ درآیه، سطر و ستون و انواع ابتدایی ماتریس

تعریف ۲.۱. عضوی از مجموعه X که در تشکیل یک ماتریس مورد استفاده قرار می‌گیرد را یک **درآیه** از آن ماتریس می‌گویند.

در نام‌گذاری یک درآیه از یک ماتریس، از حرف لاتین کوچک متناظر با اسم ماتریس استفاده می‌کنند. در یک ماتریس ممکن است همه درآیه‌ها مساوی بوده و یا حتی همگی صفر باشند ولی حق جابجایی بی‌قاعده و یا اصلاح دلخواه آنها را نداریم.

مثال ۳.۱. در مثال ۲.۱، $m = M(۱,۱) = \frac{۳}{-۱۸}$ درآیه‌ای از ماتریس M و عدد $h = H(۲,۱) = \pi$ نیز درآیه‌ای از ماتریس H است.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم $X \xrightarrow{A} I \times J$ یک ماتریس و $i \in I$ عددی معین و مشخص است، در این‌صورت مجموعه زیر را یک **سطر** از A می‌نامند:

$$R_i = \{A(i,j) \mid j \in J\}, \quad (\text{سطر } i \text{ ام})$$

همچنین برای عدد مشخص $j \in J$، مجموعه زیر یک **ستون** از ماتریس A را نشان می‌دهد:

$$C_j = \{A(i,j) \mid i \in I\}, \quad (\text{ستون } j \text{ ام})$$

مثال ۱.۴. در مثال ۱.۲، M دارای ۱ سطر و ۲ ستون و H دارای ۲ سطر و ۱ ستون می‌باشد.

نتیجه ۱.۱. هر ماتریس حقیقی یک ساختار دو بُعدی (دارای سطر و ستون) است.

این نحوه تعریف از سطر و ستون در ماتریس، آن‌را به‌طور طبیعی دارای تعدادی سطر یا ستون می‌کند و لذا با قرارگیری سطرها و ستونها در یک ماتریس، شکل ظاهری آن به یک آرایه‌ی مستطیلی شکل برمی‌گردد. این نوع دومی است که شکلی ملموس‌تر و شهودی‌تر از ماتریس نشان می‌دهد. بکارگیری هر دو نگاه (تابع‌ای شکل و یا آرایه‌ای)به ماتریس امکان‌پذیر است، اما نوع اول (تعریف ۱.۱) نسبت به دیگری، استفاده کمتری در علوم انسانی داشته و لذا در این کتاب به نوع دوم تکیه می‌کنیم. بعلاوه، نکات بیان شده در هر دو دیدگاه مشترکاً قابل استفاده و استناد است.
درآیه‌هایی که در یک امتداد افقی دیده می‌شوند یک **سطر** و درآیه‌های عمودی در این شکل ماتریسی یک**ستون** از ماتریس است.
به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱.۵. جدول زیر، شامل اطلاعاتی از مقدار استفادهٔ شدهٔ سه ماده اولیه در تولید دو کالا است:

	پلاستیک	استیل	شیشه
کالای اول	۳	۱	۵
کالای دوم	۴	۵	۲

چون ۲ سطر و ۳ ستون[۳] در اختیار است لذا $I = \{۱,۲\}$، $J = \{۱,۲,۳\}$ و در آن:

$$\begin{array}{lll} w(۱,۱) = ۳ & w(۱,۲) = ۱ & w(۱,۳) = ۵ \\ w(۲,۱) = ۴ & w(۲,۲) = ۵ & w(۲,۳) = ۲ \end{array}$$

در نامگذاری داده‌های جدول، فرض کردیم اسم ماتریسی که پدید می‌آید W باشد. فرم متعارف نمایش ماتریس در این مثال عبارت است از:

$$W = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۲ \end{pmatrix}$$

[۳] و جمعاً ۶ داده.

مثال ۶.۱. ماتریس‌های نظیر در مثال ۲.۱ عبارتند از:

$$M = \begin{pmatrix} ۳/-۸ & ۴۴ \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} ۰.۳ \\ \pi \end{pmatrix}$$

ماتریسهایی را که همانند M دارای فقط یک سطر هستند، **سطری** و ماتریسهایی را که مشابه H فقط یک ستون دارند، **ستونی** می‌نامند. گاهی به ماتریس سطری (یا ستونی) یک **بُردار** نیز می‌گویند. در این‌حالت اسم بردار را با اسم کوچک (و البته پر رنگ) نشان می‌دهند:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} ۳/-۸ & ۴۴ \end{pmatrix}$$

هر ماتریس را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از تعدادی بُردار (با شکل ماتریس سطری) و یا تعدادی بُردار (با شکل ماتریس ستونی) در نظر گرفت. به‌عنوان نمونه برای ماتریس W:

$$W = \left(\begin{pmatrix} ۳ \\ ۴ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۵ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۵ \\ ۲ \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۵ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ۴ & ۵ & ۲ \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

ساده‌ترین نتیجه‌ای که از طرز نوشتن فوق به‌دست می‌آید اینست که: در یک ماتریس، سطرها را از **بالا به پایین** و ستون ها را از **چپ به‌راست** شماره‌گذاری کنند. مثلاً در ماتریس

$$S = \begin{pmatrix} ۱ & -۶ & \boxed{۲} \\ -۴ & ۲ & \boxed{۱} \end{pmatrix}$$

درآیه‌های $\begin{matrix} ۱ \\ -۴ \end{matrix}$ ستون اول از S که با $C_۱$ نشان می‌دهند و $\begin{matrix} \boxed{۲} \\ \boxed{۱} \end{matrix}$ ستون سوم است که با $C_۳$ نشان می‌دهند. به همین صورت

$$(R_۲)\ \text{سطر دوم} \;\rightarrow \begin{pmatrix} ۱ & -۶ & ۲ \\ -۴ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} = S$$

حال که وضعیت و شماره‌های سطرها (و ستونها) در ماتریس معلوم شد، بنابر یک قرارداد، شماره سطر را بر شماره ستون ترجیح می‌دهیم. مثلاً در ماتریس S می‌گوییم عدد -۶ در سطر اول و ستون دوم واقعست و نه ستون دوم و سطر اول.

همچنین، برای مشخص کردن دقیق مکان یک درآیه از ماتریس، از شماره سطر و ستونی که در محل تقاطع آنها واقع است استفاده می کنند. مثلاً در ماتریس S درآیه ۲ هم در محل تقاطع سطر اول و ستون سوم (یعنی $R_۱C_۳$) و هم در محل تقاطع سطر دوم و ستون دوم (یعنی $R_۲C_۲$) دیده

می‌شود. این یکسان بودن درآیه‌ها باعث مشکل در تشخیص درست مکان درآیه‌ها شده و لذا برای ایجاد تمایز، از نمایش **اندیسی** کمک می‌گیرند. مثلاً در ماتریس S داریم:

$$s(۱,۱) = s_{۱۱} = ۱ \quad s(۱,۲) = s_{۱۲} = -۶ \quad s(۱,۳) = s_{۱۳} = ۲$$
$$s(۲,۱) = s_{۲۱} = -۴ \quad s(۲,۲) = s_{۲۲} = ۲ \quad s(۲,۳) = s_{۲۳} = ۱$$

یکی از محسنات طرز نوشتن فوق از درآیه‌ها اینست که موجب می‌شود تا آنها را بعد از نوشته شدن، بی قاعده و تصادفی نتوان جابجا کرد.

اکنون از روش نمادگذاری اندیسی کمک گرفته و ماتریس A در تعریف ۱.۱ را به‌صورت خلاصه زیر فرمول‌بندی می‌کنیم:

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i = ۱, \dots, k,\ j = ۱, \dots, k' \qquad (۱.۱)$$

صورت‌بندی (۱.۱) از ماتریس A دارای شکل گسترده مستطیلی به‌صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱k'} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲k'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k۱} & a_{k۲} & \cdots & a_{kk'} \end{pmatrix}$$

تعریف ۴.۱. ماتریس A با m سطر و n ستون را به‌شکل $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ نمایش داده و به $m \times n$ **مرتبه** A می‌گویند. مرتبه‌ی یک ماتریس، اندازه آن را نشان می‌دهد.[۴]

مثال ۷.۱. ماتریس S از مرتبه ۲×۳ (بخوانید ۳ در ۲) و دارای $۶ = ۲ \times ۳$ درآیه است.

ماتریس $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ را **مربعی** نامند هرگاه $m = n$. در چنین حالتی ممکن است بجهت اختصار نوشته شود $A = \|a_{ij}\|_n$ یا A_n. در این ماتریس‌ها، درآیه‌های a_{ii} که در آن $i = ۱, \dots, n$، **قطر اصلی** ماتریس را می‌سازند.

مثال ۸.۱. در ماتریس

$$H_۴ = \begin{pmatrix} ۴ & -۱ & e & ۳ \\ \sqrt{۸} & -۱ & ۴ & ۲/۳ \\ \sqrt{۳} & \sqrt{\pi} & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۴ & ۰ \end{pmatrix}$$

[۴] بدیهی است مواظب باشیم جای m و n بی دلیل عوض نشود.

تعداد سطرها و ستون‌ها مساوی بوده و لذا مربعی است. بعلاوه

$$\underbrace{h_{۲۱}}_{R_۲C_۱} = \sqrt{۸},\ \ \underbrace{h_{۳۳}}_{R_۳C_۳} = h_{۳۴} = \underbrace{h_{۴۲}}_{R_۴C_۲} = h_{۴۴} = ۰$$

و درآیه‌هایی که واقع بر قطر اصلی H هستند در دایره قرار دارند.

مثال ۹.۱. فرض کنید $m = n$ شهر داریم. a_{ij} را عددی بگیرید که فاصله شهرiام را با شهرjام نشان می‌دهد. بدیهی است که برای هر $i, j = ۱, \cdots, n$ اولاً $a_{ij} > ۰$، ثانیاً $a_{ii} = ۰$ و اینکه بازای $i \neq j$ داریم $a_{ij} = a_{ji}$. این اطلاعات را می‌توان در قالب یک ماتریس مرتب کرد. برای نمونه، ماتریس زیر، برای سه شهر مرتب شده است:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{تهران} & \text{مشهد} & \text{شیراز} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{تهران} \\ \text{مشهد} \\ \text{شیراز} \end{array} & \begin{pmatrix} ۰ & ۹۰۳ & ۹۱۱ \\ ۹۰۳ & ۰ & ۱۳۵۳ \\ ۹۱۱ & ۱۳۵۳ & ۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

مثال ۱۰.۱. فرض کنیم قاعده‌ی زیر برای یافتن درآیه‌های ماتریس $A_{۳\times۲}$ داده شده است:

$$a_{ij} = \frac{|i-۳j|}{۲}, \quad (i = ۱, \ldots, ۳,\ j = ۱, \ldots, ۲)$$

درآیه‌ها را میابیم:

$$\begin{array}{ll} a_{۱۱} = \frac{|۱-۳|}{۲} & a_{۱۲} = \frac{|۱-۶|}{۲} \\ a_{۲۱} = \frac{|۲-۳|}{۲} & a_{۲۲} = \frac{|۲-۶|}{۲} \\ a_{۳۱} = \frac{|۳-۳|}{۲} & a_{۳۲} = \frac{|۳-۶|}{۲} \end{array} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} ۱ & ۵/۲ \\ ۱/۲ & ۲ \\ ۰ & ۳/۲ \end{pmatrix}$$

اگر در ماتریس $A_{m\times n}$ یک سطر و ستون را حذف کنیم، حاصل آن مجدداً یک ماتریس است. مرتبه این ماتریس $(m-۱)\times(n-۱)$ بوده و یک **زیرماتریس** A نامیده می‌شود. مثلاً در ماتریس H با حذف سطر سوم و ستون اول به زیرماتریس زیر می‌رسیم:

$$H_{۳۱} = \begin{pmatrix} -۱ & e & ۳ \\ -۱ & ۴ & ۲/۳ \\ ۰ & ۴ & ۰ \end{pmatrix}$$

علاوه بر ماتریسهای مربعی که کاربردهای وسیعی از ماتریسها بر آنها متکی است، انواع دیگری نیز وجود دارند. اگر همه درآیه های یک ماتریس صفر باشد آن ماتریس را ماتریس **صفر** نامیده و با $\mathbf{0}$ نشان می‌دهند. این ماتریس از هر مرتبه‌ای می‌تواند ظاهر شود. مثلاً در نمونه‌های زیر، یکی مربعی، یکی دلخواه و دیگری سطری است:

$$\mathbf{0}_{۲\times۳} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0}_{۲\times۲} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0}_{۱\times۶} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

اگر در یک ماتریسی مربعی، درآیه‌های غیر از قطر اصلی همگی صفر باشند، آن را **قطری** می‌نامند. اگر درآیه‌های روی قطر اصلی مساوی هم بودند، ماتریس قطری در این شکل را **اسکالر** می‌گویند. مثلاً در بین ماتریسهای زیر، ماتریس Γ قطری و ماتریس قطری T اسکالر است:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \pi \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{pmatrix}$$

یک ماتریس اسکالر را **همانی** (یا واحد) گویند هرگاه درآیه‌های روی قطر اصلی‌اش همگی ۱ باشند. این ماتریس با حرف اختصاصی I نشان داده می‌شود. بعلاوه، هر ماتریس همانی دقیقاً به تعداد مرتبه‌اش ۱ دارد. این ماتریس هم همانند ماتریس صفر از هر مرتبه‌ای می‌تواند ساخته شود. نمونه‌های زیر دو ماتریس همانی از مراتب مختلف‌اند:

$$I_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \ I_۵ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

به‌سادگی می‌توان دید که درآیه‌ها در این ماتریس از قاعده زیر تبعیت می‌کنند:

$$i_{kk} = ۱,\ i_{km} = ۰, \quad (k, m = ۱, \ldots, n,\ k \neq m)$$

هرگاه همه درآیه های زیر قطر اصلی در یک ماتریس مربعی صفر باشند، ماتریس **بالا مثلثی** نامیده می‌شود (و بالعکس، **پایین مثلثی**). ماتریس های زیر بترتیب (از چپ به راست) پایین مثلثی و بالا مثلثی هستند:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ -۷ & ۹ & ۱ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & -۸ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

ماتریس $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ را **نامنفی** گویند، هرگاه

برای همه $i = ۱,\cdots,m$ و $j = ۱,\cdots,n$, $\quad a_{ij} \geqslant ۰$

برای راحتی در چنین مواقعی می‌نویسیم $A \geqslant \mathbf{0}$. به‌طور مشابه می‌توان ماتریس **مثبت** را تعریف کرده و نوشت $A > \mathbf{0}$. مثلاً ماتریس T، ماتریسی نامنفی، ماتریس A در مثال ۱۰.۱ ماتریسی مثبت هستند.

دو درآیه از دو ماتریس هم‌مرتبه را **متناظر** بهم می‌گوییم هرگاه هر دو در یک سطر و ستون قرار داشته باشند. برای نمونه دو درآیه ۷ و ۴ بترتیب از ماتریس Γ و T متناظرند و یا دو درآیه e از ماتریس $H_{۳۱}$ و درآیه ۹۰۳ در ماتریس مثال ۹.۱ متناظرند.[۵]

تعریف ۵.۱. دو ماتریس هم مرتبه، **مساوی** اند هرگاه درآیه های متناظر در هر دو ماتریس برابر باشند.

برای نمونه، جفت ماتریس‌های زیر مساوی نیستند:

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۰ & -۲ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ۸ \\ ۷ \\ ۲ \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

و یا دو ماتریس صفر $A = \mathbf{0}$ و $B = \mathbf{0}$ تا مرتبه آنها مشخص نشده را نمی‌توان یکی گرفت.

توجه کنید:

استفاده از نمادهای مشخص بدون دقت موجب اشتباه در محاسبات است.

تذکر ۱.۱. یک ماتریس سطری و یک ماتریس ستونی در صورتی مساوی‌اند که هر دو مربعی از مرتبه ۱ باشند.

[۵]این تناظر ممکن است در حالت کلی محتاج تعریف دقیق‌تری باشد.

تساوی ماتریس‌ها در مواقعی کمک می‌کند تا نسبت بین ماتریس‌ها را بهتر بفهمیم. مثلاً در تساوی زیر

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲x-۱ & ۲ \\ y+۳ & z \end{pmatrix}$$

داریم:

$$\begin{cases} ۲x-۱=۱ \rightarrow x={}^{۱}/_{۲} \\ y+۳=۳ \rightarrow y=۰ \\ z=۴ \end{cases}$$

۲.۱ تمرینات

با توجه به ماتریس‌های زیر به سؤالات از ۱ تا ۲۰ پاسخ دهید.

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & -۶ & ۲ \\ -۴ & ۲ & ۱ \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ \end{pmatrix},\quad J=(۴)$$

$$H=\begin{pmatrix} ۱ & ۶ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱/۴ & ۰ & ۶ & ۱ \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$K=۰_{۳\times۳},\quad D=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix} ۵ \\ ۶ \\ ۱ \end{pmatrix},\quad F=(۶ \quad ۲)$$

۱. مرتبه همه ماتریس‌ها را بدست آورید.

۲. کدامیک از ماتریس‌ها مربعی هستند؟

۳. آیا ماتریس G ستونی است؟ ماتریس C چطور؟ F چه نوع ماتریسی است؟

۴. جای خالی را در صورت امکان با درآیه های صحیح پر کنید.

$$f_{۲۱}=\square,\quad e_{۳۵}=\square,\quad a_{۲۱}=\square,\quad j_{۱۱}=\square$$
$$k_{۲۲}=\square,\quad d_{۳۳}=\square,\quad h_{۳۲}=\square,\quad l_{۳۵}=\square$$

۵. کدامیک از ماتریس‌ها را می‌توان بصورت یک بردار در نظر گرفت؟

۶. آیا در بین ماتریس‌ها از نوع بالا مثلثی یا پایین مثلثی دیده می شود؟

۷. $R_۱$ در F کدام است؟ $C_۳$ را در B نشان دهید.

۸. در کدام ماتریس $C_۱$ و $C_۲$ یکی هستند؟

۹. در کدام ماتریس دو سطر مساوی وجود دارد؟

۱۰. در کدام ماتریس یکی از سطرها از دو برابر کردن سطر دیگر همان ماتریس بدست آمده است؟

۱۱. در کدام ماتریس یکی از ستون‌ها چهار برابر ستون دیگری در همان ماتریس است؟

۱۲. اگر $J_{m\times n}$ باشد، آن گاه m و n چه اعدادی هستند؟

۱۳. اگر $E_{m\times n}$ باشد، آن گاه $m+n$ چه عددی است؟

۱۴. آیا در بین ماتریس‌ها، دو ماتریس مساوی وجود دارد؟

۱۵. کدامیک از ماتریس‌ها در مرتبه مساوی هستند؟

۱۶. ماتریسی بنویسید که قرینه L باشد.

۱۷. ماتریسی بنویسید که $۲E$ را نشان دهد.

۱۸. اگر $a_{i۲}=-۶$ باشد، آن گاه i چه عددی است؟

۱۹. اگر $h_{ij}=۰$ باشد، آن گاه i و j چه اعدادی هستند؟

۲۰. درآیه $b_{۳j}$ که در آن j می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ باشد، چه اعدادی را نشان می‌دهد؟

۲۱. یک ماتریس صفر از مرتبه ۵×۲ بسازید.

۲۲. آیا همه ماتریس‌های صفر با هم برابر هستند؟

۲۳. یک ماتریس از مرتبه چهار و بالا مثلثی بنویسید که هر درآیه در آن، با مجموع اعداد سطر و ستونی که در آن قرار دارد بدست می‌آید.

۲۴. با استفاده از دستورهای زیر ماتریس‌های خواسته شده را بسازید.

الف) $b_{ij}=\begin{cases} i & i\geqslant j \\ i+j & i<j \end{cases}, B_{۲\times۴}$

ب) $c_{ij}=\begin{cases} ۰ & i>j \\ i+j & i\leqslant j \end{cases}, C_{۳\times۳}$

ج) $z_{ij} = \begin{cases} i-j & i \geqslant j \\ i+j & i < j \end{cases}, Z_{۲\times۵}$

د) $d_{ij} = (-۱)^i j^۳, D_{۳\times۲}$

۲۵. اگر $A_{۱۲\times۱۰}$، آن گاه A چه تعداد درآیه دارد؟ فرض کنید برای $i = j$، $a_{ij} = ۱$ و برای بقیه اندیس‌ها $a_{ij} = ۰$. مطلوب است درآیه‌های $a_{۳۳}$، $a_{۵۳}$، $a_{۱۰,۱۰}$ و $a_{۱۲,۱۰}$.

سؤالات ۲۶ تا ۲۸ را از روی ماتریس های زیر پاسخ دهید.

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۴ & -۲ & ۹ \\ ۷ & ۵ & ۰ & -۱ \\ -۴ & ۶ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۷ & ۱ \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x^۲ & ۱ & ۲y \\ ۹ & \sqrt{y} & ۳ \\ y & z & ۱ \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} ۲x+۱ & ۱ & ۲y \\ ۱۵ & ۵ & ۱ \\ y-۵ & x & x \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{x-۳}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{y+۲}{۳} \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} ۳ & m+۱ & m+n \\ ۱-n & ۴ & ۱+m \\ ۰ & ۲n-۲ & ۵ \end{pmatrix}$$

۲۶. درآیه‌های روی قطر اصلی هرکدام را مشخص و مجموع آنها را جداگانه بدست آورید.

۲۷. در ماتریس C، حاصل جمع درآیه‌های قطر فرعی ۱۵ و حاصل‌جمع درآیه‌های قطر اصلی ۱۲ است. ماتریس را با درآیه‌هایش مشخص کنید. همچنین مقادیر x و y را در ماتریس D چنان مشخص کنید که یک ماتریس اسکالر شود.

۲۸. m و n چه باشند تا Z ماتریسی قطری شود؟

۲۹. ماتریس همانی از مرتبه ۵ و از مرتبه ۶ بسازید.

۳۰. ماتریس $A_{۳\times۳}$ مفروض است. کدامیک از قاعده‌های زیر ماتریس A را بالامثلثی می‌کند؟

الف) $\begin{cases} \left(\frac{i+j}{۲}\right) - ۲ & i > j \\ i-j & i \leq j \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \frac{i+j}{۳} & i > j \\ i-j & i \leq j \end{cases}$

د) $\begin{cases} \left(\frac{i-j}{۲}\right)-۲ & i>j \\ i+j & i\leq j \end{cases}$ ج) $\begin{cases} \left(\frac{i-j}{۳}\right)-۲ & i>j \\ i+j & i\leq j \end{cases}$

۳۱. ماتریس $A+B$ را تشکیل دهید به‌شرطی که:

الف) $A=[۲i+۲j]_{۳\times۳}, \quad B=[-i+۲j]_{۳\times۳}$.

ب) $A=[i+j]_{۲\times۲}, \quad B=[-i-j]_{۲\times۲}$.

ج) $A=[i+j-۱]_{۳\times۱}, \quad B=[۱+۲j]_{۳\times۱}$.

د) $A=[۲i-۳]_{۲\times۳}, \quad B=[-i+j]_{۲\times۳}$.

۳۲. به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر $A_{۳\times۴}$ و $a_{ij}=(-۱)^{i+j}(i^۲+j^۲)$، مجموع درآیه‌های ستون دوم A چیست؟

ب) اگر $B_{۴\times۳}$ و $b_{ij}=۲^{i+j}(ij)$، مجموع درآیه‌های سطر چهارم B چیست؟

۳۳. با فرض هر یک از ماتریسهای داده شده، معادله متناظر را حل کنید.

الف) $۲xa_{۱۳}-a_{۲۳}=۰$ ، $A=[i+۳j]_{۳\times۳}$.

ب) $b_{۳۳}x^۲+(b_{۱۱}+b_{۲۳})x-۵=۰$ ، $B=[۲i-j]_{۳\times۳}$.

ج) $c_{۲۲}x^۲+c_{۱۳}=۰$ ، $C=[i^۲-j^۲]_{۳\times۳}$.

د) $\frac{x+d_{۳۵}}{x-d_{۱۶}}=d_{۲۲}$ ، $D=[i+j-۳]_{۳\times۷}$.

۳۴. مجموع کل درآیه ها در ماتریس های زیر چه عددی است؟

ب) $A=[i+۳j]_{۲\times۳}$ الف) $C=[i^۲-j^۲]_{۳\times۲}$

د) $B=[۲i-j]_{۳\times۳}$ ج) $D=[i+j-۳]_{۲\times۴}$

۳۵. آیا جفت ماتریسهای زیر مساوی هستند؟

الف) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} \sqrt{(-۲)^۲} & ۱ \\ ۲ & ۲/۸ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & ۱/۴ \end{pmatrix}$ د) $\begin{pmatrix} ۱/۸ & ۱/۵ \\ \sqrt{۲} & ۱ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۰.۱۲۵ & ۰.۲ \\ ۱.۴۱۴ & ۱ \end{pmatrix}$

۳۶. مقادیر مجهول را بدست آورید.

الف) $\begin{pmatrix} x & ۱ & ۰ \\ ۰ & y & z \\ w & ۲ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} x & ۳ & ۲x \\ y & ۴ & ۴y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲x-۴ & z & ۸ \\ ۱ & w & ۳y+۱ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} ۲x & ۷ \\ ۷ & ۲y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & ۷ \\ ۷ & y \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} x & y & x+۳ \\ z & ۴ & ۴y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲x-۱ & -۱ & w \\ x & ۵+y & -۴ \end{pmatrix}$

ه) $\begin{pmatrix} x+۲ & ۸ & -۳ \\ ۱ & ۲y & ۲x \\ ۷ & -۲ & y+۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲x+۶ & ۸ & -۳ \\ ۱ & ۱۸ & -۸ \\ ۷ & -۲ & ۱۱ \end{pmatrix}$

و) $\begin{pmatrix} x^۲+۲۰۰x & \sqrt{x^۲} \\ x^۲ & \ln(e^x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲۰۰۱ & -x \\ ۲۰۰۱-۲۰۰x & x \end{pmatrix}$

۱.۲.۱ جواب و راهنمایی‌ها

۲. ماتریس‌های

$$D, H, B, L, K, E, J$$

همگی مربعی‌اند. **۵.** تمام ماتریس‌های سطری یا ستونی را می‌توان به‌عنوان بردار در نظر گرفت. از این‌رو ماتریس‌های F ، G و J می‌توانند بردار تلقی شوند. **۸.** فقط در ماتریس C، دو ستون اول و دوم برابرند. **۱۰.** فقط در ماتریس C، سطر دوم از دو برابر کردن سطر اول بدست آمده است. **۱۲.** مسلماً $m = n = ۱$. **۱۴.** هیچکدام از ماتریس‌ها مساوی نیستند. **۱۷.**

$$۲E = \begin{pmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & ۸ \\ ۰ & ۲ & ۱۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۱/۲ & ۰ & ۱۲ & ۲ \end{pmatrix}$$

۱۹. مقادیر $۳ \leqslant i \leqslant ۲$، $۳ \leqslant j \leqslant ۱$ مورد قبول است. **۲۱.**

$$\mathbf{0}_{۲\times ۵} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

۲۲. خیر. ماتریس $\mathbf{0}_{۲\times ۵}$ بالا و ماتریس $\mathbf{0}_{۱\times ۱} = (۰) = ۰$ هر دو ماتریس صفراند ولی مساوی نیستند. **۲۳.** ماتریس $A_{۴\times ۴}$ که بالا مثلثی بوده و واجد شرایط مسئله باشد یعنی از شکلی که برای درآیه‌هایش آمده تبعیت کند، نمایشی به‌صورت زیر دارد:

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۶ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۸ \end{pmatrix}$$

۲۴. درآیه‌های ماتریس

$$D_{۳\times ۲} = \begin{pmatrix} d_{۱۱} & d_{۱۲} \\ d_{۲۱} & d_{۲۲} \\ d_{۳۱} & d_{۳۲} \end{pmatrix}$$

به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\text{اگر } i = ۱, j = ۱ \longrightarrow d_{۱۱} = (-۱)^{۱} \times ۱^{۳} = -۱$$

$$i=1, j=2 \longrightarrow d_{12}=(-1)^1\times 2^3=-8$$ اگر

و برای بقیه درآیه‌ها: $d_{21}=(-1)^2\times 1^3=+1$، $d_{22}=(-1)^2\times 2^3=+8$ و بعلاوه داریم $d_{31}=(-1)^3\times 1^3=-1$، $d_{32}=(-1)^3\times 2^3=-8$. همچنین

$$Z_{2\times 5}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

۲۶. مجموع درآیه‌های روی قطر اصلی A برابر است با

$$2+5+3+1=11$$

برای ماتریس D برابر است با

$$\frac{x-3}{3}+5+\frac{y+2}{3}=\frac{(x-3)+15+(y+2)}{3}=\frac{x+y+14}{3}$$

و برای ماتریس C داریم

$$(2x+1)+5+x=3x+6$$

۲۷. برای اینکه D ماتریس اسکالر شود می‌بایستی هر سه درآیه روی قطر اصلی مساوی شوند. یعنی: $\frac{x-3}{3}=5=\frac{y+2}{3}$. با حل هر کسر بتنهایی $x=18$ و $y=13$. **۲۸.** ماتریسی قطری است که تمام درآیه‌هایش بغیر از قطر اصلی مطمئناً صفر باشد. **۳۰.** در یک ماتریس بالا مثلثی، مسلماً درآیه‌های زیر قطر اصلی همگی صفراند. در مورد **د** داریم:

$$a_{21}(i=2, j=1\to i>j)=\frac{2-1}{2}-2=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}\neq 0$$

پس دستور **د**، یک ماتریس بالامثلثی نمی‌سازد. **۳۱** در مورد **د**، دو ماتریس به فرم زیر بدست می‌آیند:

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۳۲. در یک ماتریس 3×4 درآیه‌های ستون دوم به شکل زیر می‌آیند:

$$\begin{array}{lclcr} a_{12} & \longrightarrow & (-1)^{1+2}[1^2+2^2] & = & 5 \\ a_{22} & \longrightarrow & (-1)^{2\times 2}[2^2+2^2] & = & 8 \\ a_{32} & \longrightarrow & (-1)^{3+2}[3^2+2^2] & = & -13 \end{array}$$

و جواب برابر است با $(-13)+8+-5=-10$. **۳۳.** برای **الف**، چون $a_{13}=1+3(3)=10$

و $a_{۲۳} = ۲ + ۳(۳)$ لذا معادله به $۲۰x - ۱۱ = ۰$ تبدیل و $x = \frac{۱۱}{۲۰}$ خواهد بود. **۳۴.** در مورد **الف** چون $c_{۳۲} = (۳^۲ - ۲^۲) = ۹ - ۴ = ۵$ و $c_{۱۳} = (۱^۲ - ۳^۲) = ۱ - ۹ = -۸$ لذا $۵x^۲ - ۸ = ۰$ و $x = \pm\sqrt{۸/۵}$. **۳۶.** مقادیر مجهول در **الف** عبارتند از

$$w = ۴,\ z = ۳,\ y = ۲,\ x = ۳$$

در **ب** عبارتند از $w = ۴,\ z = ۳,\ y = ۱,\ x = ۴$. برای **و** با فرض معادله مرتبه دوم داریم $x^۲ + ۲۰۰x = ۲۰۰۱$ که دو ریشه متمایز $x_۱ = -۱۰۰ + \sqrt{۱۲۰۰۱}$ و $x_۲ = -۱۰۰ - \sqrt{۱۲۰۰۱}$ برایش وجود داشته و چون بنابه تعریف $\sqrt{x^۲} = |x|$ و در اینجا $\sqrt{x^۲} = -x$ فرض است پس $x_۲$ جواب مسئله است.

۲

اَعمال روی ماتریس‌ها (۱)

در حالت کلی، منظور از اَعمال ماتریسی (عملگرهای ماتریسی)، کارهایی است که به‌طور قانونی روی یک ماتریس یا بین چند ماتریس انجام می‌شود تا انواع دیگری از ماتریسها را بدست آید[1].

۱.۲ اَعمال جبری بین ماتریس‌ها

تعدادی از اَعمال روی ماتریسها از نوع جبری هستند که در ادامه به آنها می‌پردازیم.

۱.۱.۲ عملگرهای جمع، ضرب اسکالری و تفاضل

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ و $B = \|b_{ij}\|_{m\times n}$ ماتریس‌هایی هم‌مرتبه و λ یک اسکالر[2] باشد. **جمع** دو ماتریس و **ضرب اسکالری** λ در A به‌ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A + B = \|a_{ij} + b_{ij}\|_{m\times n}, \quad \lambda A = \|\lambda a_{ij}\|_{m\times n}$$

جمع برای ماتریس‌هایی با مراتب مختلف تعریف نمی‌شود.

[1] تعداد این اَعمال زیاد است اما در این کتاب می توان به تعداد مقدماتی از آنها اشاره کرد.

[2] منظور عددی ثابت است.

تفاضل دو ماتریس بکمک جمع و ضریب اسکالری زیر قابل بیان است:

$$A-B=A+(-B)=\|a_{ij}-b_{ij}\|_{m\times n}$$

بوضوح هر کدام از این سه عمل، ماتریسی هم‌مرتبه با ماتریس‌های اصلی را نتیجه می‌دهد، ضمن اینکه در دو عمل جمع و تفریق، کنش عملیاتی بین درآیه‌های متناظر در ماتریسها انجام می‌گیرد.

مثال ۱.۲.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۴ & ۲ \\ ۷ & ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۷ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱۱ & ۵ \\ ۱۱ & ۲ \end{pmatrix}, \quad ۲\begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۲ & ۴ \\ ۱ & ۹ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۶ & ۰ \\ ۴ & ۸ \\ ۲ & ۱۸ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۴ & ۲ \\ ۷ & ۱ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۷ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۴ & ۲ \\ ۷ & ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -۳ & -۲ \\ -۷ & -۳ \\ -۴ & -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۲ & -۱ \\ -۳ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{pmatrix}$$

اَعمال جبری بیان شده در تعریف ۱.۲ بکمک دیگر مفاهیم پایه‌ای در این مبحث، دایره وسیع عملیاتی را در حل مسائل در بر می‌گیرند. برای نمونه و با فرض آشنایی خواننده با دستگاههای دو معادله و دو مجهولی در دبیرستان، به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲.۲. دستگاه زیر مفروض است. به بازنویسی آن بر حسب ماتریسها توجه کنید.

$$\begin{cases} -۲x+y=۱ \\ ۵x+۷y=-۳ \end{cases} \iff x\begin{pmatrix} -۲ \\ ۵ \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} ۱ \\ ۷ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ \\ -۳ \end{pmatrix}$$

۲.۱.۲ خواص مقدماتی

اَعمال جبری رو ماتریس‌ها دارای خواص مقدماتی است که اغلب بعنوان قضایای پایه‌ای ماتریس‌ها بیان می‌شود.[۳] تعدادی از مهمترین آنها در زیر می‌آید:

قضیه ۱.۲. برای سه ماتریس هم‌مرتبه B, A و C، دو تساوی زیر به‌ترتیب بنامهای خاصیت جابجایی جمع و خاصیت شرکت‌پذیری جمع برقراراند:

[۳] اثبات آنها را در کتابهای تخصصی می‌توان یافت.

الف) $A+B=B+A$

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$

قضیه ۲.۲. برای هر ماتریس A، ماتریس $-A$ بنام **قرینه** آن وجود دارد به‌طوری که:

الف) $-A=(-۱)\,A$

ب) $A+(-A)=\mathbf{0}$

نتیجه‌ای که از این قضیه بدست می‌آید اینست که هرگاه برای دو ماتریس تساوی $A+B=\mathbf{0}$ دیده شد، آن‌گاه حتما $B=-A$ بوده است.

قضیه ۳.۲. برای ماتریس $A_{m\times n}$ و ماتریس $\mathbf{0}_{m\times n}$، تساوی $A+\mathbf{0}=A$ برقرار است که نشان می‌دهد $\mathbf{0}$ **عضو خنثی عمل جمع** است.

قضیه ۴.۲. اگر $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ دلخواه باشند آن‌گاه خواص زیر برای هر دو ماتریس (هم‌مرتبه) برقرار است:

الف) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$. بنام خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب اسکالری.

ب) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$. بنام خاصیت پخشی جمع نسبت به ضرب اسکالری و

ج) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ که آن را خاصیت توزیع ضرب اسکالری نسبت به جمع ماتریسی می‌نامند. بعلاوه داریم:

$$۰\times A_{m\times n}=\mathbf{0}_{m\times n},\quad ۱\times A=A$$

بجاست که در ادامه خواصی که در بالا از این عملگرهای جبری روی ماتریس‌ها دیده شد، به یک خاصیت جالب که شبیه آن را بین اعداد برقرار داریم، اشاره شود:

برای ماتریس A و عدد k، نتیجه زیر برقرار است:

$$\text{اگر}\ kA=\mathbf{0}\ \overset{\text{آن‌گاه}}{\Longrightarrow}\ A=\mathbf{0}\ \text{یا}\ k=۰$$

۳.۱.۲ عملگر ضرب نقطه‌ای (داخلی)

تعریف ۲.۲. برای دو ماتریس بترتیب سطری و ستونی

$$B=\|b_{ij}\|_{n\times ۱},\quad A=\|a_{ij}\|_{۱\times n}$$

که هر دو به یک تعداد درآیه دارند، ضرب نقطه‌ای A در B عددی **حقیقی** است که به‌فرم زیر بدست می‌آید:

$$AB = \sum_{i=۱}^{n} a_{۱i} b_{i۱} = a_{۱۱} b_{۱۱} + \cdots + a_{۱n} b_{n۱} \ \ (\in \mathbb{R}) \qquad (۱.۲)$$

گاهی ضرب AB را به‌صورت $\langle A, B \rangle$ هم نمایش می‌دهند، ضمن اینکه در (۱.۲) درآیه‌ی $a_{۱i}$ از A، نظیر درآیه‌ی $b_{i۱}$ در B شناخته می‌شود.

مثال ۳.۲. به درآیه‌های متناظر در این نوع از ضرب توجه کنید:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ۳ & \boxed{۰} & -۲ \end{pmatrix}}_{۱\times۳} \overbrace{\begin{pmatrix} ۶ \\ \boxed{۴} \\ ۲ \end{pmatrix}}^{۳\times۱} = (۳ \times ۶) + (۰ \times ۴) + (-۲ \times ۲) = ۱۴$$

این نوع ضرب، آن‌گونه که در (۱.۲) می‌بینید، بین دو ماتریس (اولی سطری و دیگری ستونی) آمده است. چون هر ماتریس سطری (و یا ستونی) را می‌توان بنوعی یک بردار در نظر گرفت، لذا این ضرب همان ضرب نقطه‌ای بین دو بردار است. مهم اینست که دو ماتریس سطری و ستونی به یک تعداد درآیه داشته باشند.

این ضرب، دارای خواصی است که در زیر به دو نمونه از آنها اشاره می‌شود. اثبات آنها با کمک تعریف بدست می‌آید:

قضیه ۵.۲. خواص زیر برای ماتریس‌های سطری $A_{۱\times n}, B_{۱\times n}$ و ستونی $C_{n\times۱}$ و اسکالر λ برقرار است:

الف) $(\lambda A)C = \lambda(AC)$.

ب) $(A+B)C = AC + BC$.

۴.۱.۲ ضرب دو ماتریس

در این بخش، بکمک ضرب نقطه‌ای، ضرب دو ماتریس دلخواه (که واجد شرایط **خاص** هستند) را فرمول‌بندی می‌کنیم. در نکته ۳.۱ بیان شد که هر ماتریس را می‌توان هم به‌صورت مجموعه‌ای از سطرها و هم مجموعه‌ای از ستونها در نظر گرفت. مثلاً در ماتریس W در همانجا

هم:

$$W = (C_۱ \quad C_۲ \quad C_۳), \quad C_۱ = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۴ \end{pmatrix}, C_۲ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۵ \end{pmatrix}, C_۳ = \begin{pmatrix} ۵ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

درست است و هم:

$$W = \begin{pmatrix} R_۱ \\ R_۲ \end{pmatrix}, \quad R_۱ = (۳ \quad ۱ \quad ۵), R_۲ = (۴ \quad ۵ \quad ۲)$$

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ و $B = \|b_{ij}\|_{n\times p}$ ماتریس‌های دلخواهی هستند[۴] بنابه تعریف حاصلضرب AB (ضرب A در B) به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$AB = \left(\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} b_{jk}\right)_{m\times p}$$

در صورت معنی‌دار بودن تعریف فوق، A را **سازگار** با B می‌گویند. توجه کنید که اولاً تعداد ستونهای ماتریس A و تعداد سطرهای ماتریس B یکی است و بعلاوه ماتریس $C = AB$ ماتریسی است به‌شکل $\|c_{ij}\|_{m\times p}$ که در آن برای محاسبه c_{ij} از ضرب نقطه‌ای سطر i ام A در ستون j ام B استفاده می‌شود، یعنی:

$$R_i(A)C_j(B) = a_{i۱}b_{j۱} + \cdots + a_{in}b_{jm}, \quad (i = ۱, \ldots, n,\ j = ۱, \ldots, m)$$

مثال ۴.۲. برای دو ماتریس $A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{pmatrix}$ داریم:

$$AB = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{۱۱}b_{۱۱} + a_{۱۲}b_{۲۱}}^{R_۱(A)C_۱(B)} & a_{۱۱}b_{۱۲} + a_{۱۲}b_{۲۲} \\ a_{۲۱}b_{۱۱} + a_{۲۲}b_{۲۱} & \underbrace{a_{۲۱}b_{۱۲} + a_{۲۲}b_{۲۲}}_{R_۲(A)C_۲(B)} \end{pmatrix}$$

مثال ۵.۲. در ضرب زیر، به‌نحوه بدست آمدن درآیه‌ها در ماتریس حاصل و استفاده مناسب از ضرب نقطه‌ای

[۴] توجه داریم تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابراند. این همان شرط **خاص** است.

مجدداً دقت کنید:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} \overbrace{16}^{R_1C_1} & \overbrace{7}^{R_1C_2} & \overbrace{26}^{R_1C_3} \\ \underbrace{43}_{R_2C_1} & \underbrace{22}_{R_2C_2} & \underbrace{61}_{R_2C_3} \end{pmatrix} = AB$$

نکته ۲.۱. در تعریف ضرب دیدیم که برای ماتریسهای $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ و برای اینکه BA را تعریف کنیم باید $m = p$. از این رو بنظر می‌رسد امکان ضرب A و B از هر دو طرف وقتی هر دو مربعی و هم مرتبه هستند وجود دارد. ولی اینطور نیست! مثلاً برای دو ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ داریم:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} = BA$$

و لذا در حالت کلی **حاصلضرب بین دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد.** در واقع، یکی از حالاتی که ضرب در بین ماتریس‌های (دو طرفه سازگار) خاصیت جابجایی دارد این‌است که هر دو هم‌مرتبه و قطری باشند.

علاوه بر این، ممکن است با فرض تعریف شدن ماتریس BA، ماتریس AB اصلاً وجود نداشته باشد و یا در صورت وجود از مرتبه‌ای متفاوت باشد. مثلاً برای $A_{2\times 3}$ و $B_{3\times 4}$، ماتریس AB وجود دارد ولی BA بی معنی است! لذا دقت زیادی در تعریف حاصلضرب‌ها لازم داریم.

نکته ۲.۲. بر خلاف ادعای درست اینکه اگر حاصلضرب دو عدد صفر باشد آن‌گاه یکی از آن دو حتما صفر است، ماتریس‌هایی وجود دارند که در شرط $AB = \mathbf{0}$ صدق می‌کنند و هیچکدام هم، صفر نیستند. مثلاً دو ماتریس زیر را در نظر بگیرید و موضوع را تحقیق کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

بعلاوه همانطور که از تساوی $ab = ac$ در اعداد بسادگی $b = c$ را نتیجه نمی‌گیریم، در اینجا نیز محدودیت‌های هست که از $AB = AC$ بسادگی $B = C$ نتیجه نشود. مثلاً برای ماتریس‌های

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

داریم $AB = AC$ ولی $A \neq \mathbf{0}$ و $B \neq C$.

نکته ۲.۳. نوع ماتریس حاصلضرب دو ماتریس ممکن است با نوعی که هر کدام به آن تعلق دارند، متفاوت باشد. مثلاً دو ماتریس زیر، هیچکدام از نوع قطری نیستند، ولی ماتریس حاصلضرب آنها چنین نیست:

$$A = \begin{pmatrix} \circ & \circ & a \\ \circ & b & \circ \\ c & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \circ & \circ & c \\ \circ & b & \circ \\ a & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} a^۲ & \circ & \circ \\ \circ & b^۲ & \circ \\ \circ & \circ & c^۲ \end{pmatrix}$$

۲.۱.۵ خواص مقدماتی

برای ضرب ماتریس‌ها (ی قابل ضرب شدن) خواصی وجود دارد که تعدادی از آنها را در قضیه‌های زیر آورده‌ایم.

قضیه ۲.۶. فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R}$ اسکالری دلخواه است. اتحادهای زیر برقرارند:

الف) $\alpha(AB) = ((\alpha A)B) = A(\alpha B)$.

ب) $A(BC) = (AB)C$ که بنام شرکت‌پذیری در ضرب شناخته می‌شود.

ج) $A(B+C) = AB + AC$ که بنام پخشی ضرب نسبت به جمع شناخته می‌شود.

د) $(A+B)C = AC + BC$ که بنام پخشی جمع نسبت به ضرب شناخته می‌شود.

قضیه ۲.۷. برای ماتریس $A_{m\times n}$ داریم:

الف) همواره دو تساوی $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ و $AI = IA = A$ برقرارند. بعلاوه،

ب) اگر برای هر ماتریس $B_{n\times ۱}$ داشته باشیم $AB = \mathbf{0}_{m\times ۱}$ آن‌گاه حتما $A = \mathbf{0}$.

قضیه ۲.۸. الف) اگر AB قطری باشد آن‌گاه $AB = BA$.

ب) اگر AB مربعی باشد آن‌گاه BA نیز ماتریسی مربعی است.

ج) اگر A, B دو ماتریس پایین مثلثی باشند، ماتریس AB نیز پایین مثلثی است.

مثال ۲.۶. با توجه به موارد بالا، بسادگی ساده‌سازی عبارت‌های ماتریسی صورت می‌گیرد:

$$\begin{aligned} A(BC-CD)+A(C-B)D-AB(C-D) =& A(BC)-A(CD)+(AC-AB)D \\ & -(AB)C-(AB)D \\ =& ABC-ACD+ACD-ABD \\ & -ABC-ABD=\mathbf{0} \end{aligned}$$

تعریف ۲.۴. برای ماتریس مربعی A، توان و توان رساندن به‌صورت زیر قابل ارائه است:

$$A^{0}=I, \quad A^{2}=AA, \quad A^{3}=AAA=A^{2}A, \quad \dots \quad A^{n}=\underbrace{AA A\cdots A}_{\text{بار-}n}$$

نکته ۲.۴. برخلاف ادعای درست $a^{2}=0$ نتیجه می‌دهد $a=0$، ماتریسی را می‌توان یافت که این ادعا را رد می‌کند. مثلاً برای ماتریس غیر صفر $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ داریم $A^{2}=\mathbf{0}$.

نکته ۲.۵. برخلاف طبیعت مجموعه اعداد حقیقی که در آن، معادله $a^{2}=-1$ بی‌جواب است، می‌توان ماتریسی را یافت که به‌ازای آن معادله $A^{2}=-I$ برقرار باشد. مثلاً اگر $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ آن‌گاه با ضرب A در خودش داریم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-I$$

نکته ۲.۶. همانند نکته ۲.۵، و اینکه معادله $a^{2}=1$ دارای دقیقاً دو جواب حقیقی است، چنین معادله‌ای در بین ماتریس‌ها ممکن است بی‌شمار جواب داشته باشد! مثلاً به‌ازای $a\neq 0$ داریم

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}^{2}=I_{2}$$

تعریف ۲.۵. چندجمله‌ایهایی برحسب ماتریس‌های مربعی بسیار مشابه با چندجمله‌ایهای برحسب متغیر x هستند. اگر A ماتریسی مربعی باشد، آن‌گاه

$$p(A)=a_{0}I+a_{1}A+\cdots+a_{n}A^{n}$$

چندجمله‌ای برحسب A است. بدیهی است حاصل چنین عبارتی یک ماتریس هم‌مرتبه با A خواهد بود.

مثال ۷.۲. برای عدد صحیح و مثبت n، دو تجزیه زیر قابل توجه است:

$$I - A^n = (I - A)(I + A + \cdots + A^{n-1})$$
$$I + A^n = (I + A)(I - A + \cdots + A^{n-1})$$

تحقیق درستی اتحادهای بالا بسادگی قابل انجام است.

نکته ۷.۲. انواع دیگری از ضرب بین دو ماتریس تعریف می‌شود. برای دو ماتریس $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ و $B = \|b_{ij}\|_{p\times q}$ ضرب **کرونکر**[۵] A در B به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}_{mp\times nq}$$

همچنین برای ماتریس‌های هم‌مرتبه $A = \|a_{ij}\|$ و $B = \|b_{ij}\|$ ضربی بنام ضرب **هادامارد** با تعریف $A \circ B = \|a_{ij}b_{ij}\|_{m\times n}$ وجود دارد.

۲.۲ عمل تغییر شکل ماتریس (ترانهاده)

تعریف ۶.۲. ماتریس $B_{n\times m}$ را **ترانهاده** $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ می‌گویند هرگاه تساوی $a_{ij} = b_{ji}$ برقرار باشد که در آن، $i = 1, \dots, m$ و $j = 1, \dots, n$. ترانهاده ماتریس A را با A^t نشان می‌دهند.

مثال ۸.۲.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

۱.۲.۲ چند خاصیت مهم از ترانهاده‌گیری

برای ترانهاده‌گیری خواصی وجود دارد که تعدادی از آنها را در قضیه‌های زیر آورده‌ایم.

---

[۵] گاهی این ضرب را ضرب خارجی (ضرب تانسوری) هم می‌نامند.

قضیه ۹.۲. فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R}$ اسکالری دلخواه است. اتحادهای زیر برقرارند:

الف) $(A^t)^t = A$.

ب) $(\alpha A + B)^t = \alpha A^t + B^t$.

ج) $(AB)^t = B^t A^t$.

د) اگر A بالا مثلثی باشد آن‌گاه A^t پایین مثلثی است و بالعکس.

ه) اگر A قطری باشد آن‌گاه A^t نیز قطری است و بالعکس.

و) اگر A سطری باشد آن‌گاه A^t ستونی است و بالعکس.

مثال ۹.۲. با فرض تساوی زیر، ماتریس A را بکمک قضیه ۹.۲ پیدا می‌کنیم:

$$\left(۲A^t - ۳\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$\left(۲A^t - ۳\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}\right)^t \overset{(b)}{=} ۲(A^t)^t - ۳\left(\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}\right)^t \overset{(a)}{=} ۲A - ۳\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

حال کافی است از صورت مسئله استفاده کرده و A را بدست آوریم:

$$۲A - ۳\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} ۵/۲ & ۰ \\ ۵/۲ & ۵/۲ \end{pmatrix}$$

تعریف ۷.۲. ماتریس مربعی A را **متقارن** می‌نامند هرگاه $A = A^t$. اگر تساوی ماتریسی $A = -A^t$ برقرار شد، ماتریس A را **پادمتقارن** می‌گویند.

مثال ۱۰.۲. ماتریس زیر یک ماتریس متقارن است:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۷ & ۳ \\ ۷ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۵ & ۰ \end{pmatrix}$$

و ماتریس زیر یک ماتریس پادمتقارن است:

$$B = \begin{pmatrix} ۰ & -۷ & ۳ \\ ۷ & ۰ & ۵ \\ -۳ & -۵ & ۰ \end{pmatrix}$$

در یک ماتریس متقارن، درآیه‌های متساوی الفاصله نسبت به قطر اصلی ماتریس، برابرند. این نکته درباره ماتریس پادمتقارن به این شکل تغییر می‌کند که، این درآیه‌ها قرینه هم بوده و بعلاوه قطر اصلی شامل فقط عدد صفر است.

مثال ۲.۱۱.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ۱ & ۱۰ & ۱/۲ \\ ۱۰ & ۲ & \boxed{۳.۴} \\ ۱/۲ & \boxed{۳.۴} & ۳ \end{pmatrix}}_{\text{یک ماتریس متقارن}}, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} ۰ & ۱۰ & -۱/۲ \\ -۱۰ & ۰ & \boxed{-۳.۴} \\ ۱/۲ & \boxed{۳.۴} & ۰ \end{pmatrix}}_{\text{یک ماتریس پادمتقارن}}$$

۲.۲.۲ چند خاصیت برای ماتریس‌های متقارن و پادمتقارن

تعدادی از خواص ماتریسهای متقارن و پادمتقارن در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۲.۱۰. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ دلخواه است. اتحادهای زیر برقرارند:

الف) اگر A, B هر دو متقارن باشند آن‌گاه $A \pm B$ نیز چنین هستند.

ب) اگر A, B هر دو متقارن بوده و با هم جابجا شوند آن‌گاه ماتریس AB نیز متقارن است.

ج) اگر A متقارن باشد آن‌گاه A^n نیز متقارن است.

د) هنگامی که A مربعی است، ماتریس AA^t متقارن است.

ه) برای هر ماتریس A، ماتریس $A + A^t$، همواره متقارن است.

و) برای هر ماتریس A، ماتریس $A - A^t$، همواره پادمتقارن است.

نتیجه ۲.۱۱. بکمک دو حکم **ه** و **و** قضیه ۲.۱۰، نتیجه مهم زیر بدست می‌آید. این نتیجه می‌گوید که هر ماتریس را به‌صورت مجموعی از دو ماتریس متقارن و پادمتقارن می‌توان نوشت. یعنی

$$A = \frac{A+A^t}{۲} + \frac{A-A^t}{۲}$$

۳.۲ اثر ماتریس

تعریف ۸.۲. اثر یک ماتریس، تابعی است که به هر ماتریس مربعی ، یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد:

$$\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=۱}^{n} a_{ii}=a_{۱۱}+a_{۲۲}+\cdots+a_{nn}\ \ (\in\mathbb{R})$$

مثلاً

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳\\ ۱۰ & ۲۰ & ۳۰\\ ۱۰۰ & ۲۰۰ & ۳۰۰\end{pmatrix}=۳۲۱$$

بعلاوه ماتریس‌های مختلف ممکن است اثر یکسانی داشته باشند:

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} ۱ & -۲ & -۳\\ ۴.۴ & ۲ & -۲/۳\\ ۱ & ۷ & ۳.۲\end{pmatrix}=۶.۲=\operatorname{tr}\begin{pmatrix} ۰.۵ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۳.۱ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۲.۶\end{pmatrix}$$

۱.۳.۲ خواص مقدماتی

تعدادی از خواص اثر یک ماتریس در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۱۲.۲. فرض کنیم $\lambda\in\mathbb{R}$ دلخواه و ماتریسهای زیر سازگارند.آن‌گاه:

الف) همواره $\operatorname{tr}(\lambda A+B)=\lambda\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$.

ب) همواره $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.

ج) همواره $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A^t)$.

د) همواره $\operatorname{tr}(A^tB)=\operatorname{tr}(AB^t)$.

ه) همواره $\operatorname{tr}(I_n)=n$.

و) همواره $\operatorname{tr}(A\otimes B)=\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

ز) اگر A پادمتقارن باشد آن‌گاه $\operatorname{tr}(A)=۰$.

نکته ۸.۲. اثر یک ماتریس، عملگری ضربی نیست. در واقع برای دو ماتریس سازگار و در حالت کلی:

$$\operatorname{tr}(AB)\neq\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

۴.۲ تمرینات

۱. محاسبات زیر را انجام دهید (در صورت امکان).

الف) $\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & -۳ \\ -۱ & ۴ & ۰ \\ ۱ & -۶ & ۵ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۲ & -۳ & ۴ \\ -۱ & ۶ & ۵ \\ ۹ & ۱۱ & -۲ \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} ۲ & -۷ \\ -۶ & ۴ \end{pmatrix} + \dfrac{\begin{pmatrix} ۷ & -۴ \\ -۲ & ۱ \end{pmatrix}}{-۲} + ۳\begin{pmatrix} ۲ & ۷ \\ ۷ & ۲ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} ۷ & ۱ \\ ۱ & ۷ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ & ۷ \\ ۷ & ۱ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱ & ۷ \\ ۷ & ۱ \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}$

ه) $\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۴ & -۲ & ۶ \\ ۲ & ۱۰ & -۱۰ \\ ۰ & ۲۰ & ۷ \end{pmatrix} - \frac{۳}{۴}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۵ \end{pmatrix}$

و) $\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \end{pmatrix} + ۴\begin{pmatrix} -۲ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} - ۰\begin{pmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$.

ز) $۴ + ۲(۷)_{۱\times ۱}$

۲. در هریک از تساوی‌های زیر مطلوب است ماتریس A .

الف) $\dfrac{۵A}{۳} - \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix} = \dfrac{۷A}{۳} - \begin{pmatrix} ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱ \end{pmatrix}$

ب) $\frac{۲}{۳}A - \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \end{pmatrix} = \frac{۵}{۳}A - ۲\begin{pmatrix} ۳ \\ ۰ \end{pmatrix}$

ج) $-۲A + \begin{pmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۶ & ۱ \\ ۲ & ۹ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳ & -۱ & -۹ \\ ۰ & ۶ & -۶ \\ ۲ & ۷ & ۰ \end{pmatrix} + A$

د) $\dfrac{-۲}{۳}A - \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \\ -۲ & ۳ \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۰ & ۳ \\ ۲ & ۱۰ \end{pmatrix} + ۲A$

۳. با فرض $A=\begin{pmatrix} ۵ & -۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{pmatrix}$ مطلوبست ماتریس X.

الف) $X=۴A-۳B$

ب) $۴X-۸B=۴A$

ج) $۲X-۳A=B$

د) $\frac{۲}{۳}X-A=B+۳X$

ه) $\frac{۳X+B}{-۲}=۴A+X$

و) $\frac{-X+B}{۳}=-A+X$

۴. از روی دستگاه‌های زیر X و Y را برحسب ماتریس‌های A و B بدست آورید.

الف) $\begin{cases} ۲X-۴Y=A \\ ۳X+۴Y=۶B \end{cases}$ ب) $\begin{cases} ۲X-۴Y=A \\ ۳X+۴Y=۶B \end{cases}$ ج) $\begin{cases} -X+Y=۳A \\ ۲X+Y=B \end{cases}$

۵. در هریک از تساوی‌های زیر ماتریس A را برحسب ماتریس B بدست آورید.

الف) $A+B=۳A+۲B$ ب) $۲A-B=۵(A+۲B)$ ج) $۲A-B=۵A+۲B$

۶. مثالهایی از ماتریس‌های X و Y را چنان پیدا کنید که هر تساوی برقرار شود.[۶]

الف) $۳X-۲Y=\begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \end{pmatrix}$ ب) $۲X-۵Y=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ ج) $۴X-۲Y=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \end{pmatrix}$

۷. عبارتهای ماتریسی زیر را فقط ساده کنید.

الف) $۳[۹(\mathbf{0}-B)+(۲B-A)]-۲[(۲B+A)-۲(A+۳B)-۵(A-I)]$

ب) $۲\left(A-\frac{B}{۲}\right)+(۳A-۲B)\mathbf{0}(۱۰A+B)-(A+B)$

ج) $\frac{(۲A+B)+(۳B-۲A)+(\mathbf{0}-۲A)}{۲}+[(I-۲B)+A]$

[۶] جوابهای این مسئله منحصر به‌فرد نیست.

۸. اگر $A=\begin{pmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-۱&۰\\۰&۱\end{pmatrix}$، ماتریس‌های X و Y را طوری بدست آورید که

الف) $۲X=A-B,\quad Y-۲A+۳B=\mathbf{0}_۲$

ب) $X-A+I=B+۲I_۲,\quad Y+A+۳B=۲I_۲$

۹. در هر جفت از ماتریسهای زیر، دو درآیه $c_{۱۲}, c_{۲۳}$ را برفرض $C=۲A-۳B$ بیابید.

$$A=\begin{pmatrix}۲&۳&-۱\\-۱&۶&۰\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}۴&-۲&۶\\۱&۳&-۳\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}۲&۳&-۱\\-۱&۶&۰\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}۴&-۲&۶\\۱&۳&-۳\end{pmatrix}$$

۱۰. از روی معادلات ماتریسی زیر مقادیر مجهول را بدست آورید (در صورت امکان).

الف) $\begin{pmatrix}x&y\\y&z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۲x&-y\\۳y&-۴y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۶&۰\\۸&۹\end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix}x&۴\\۴y&w\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۴x&۲y\\-۳&-۲w\end{pmatrix}=۳\begin{pmatrix}۴&۸/۳\\y/۳&۲\end{pmatrix}$

ج) $x\begin{pmatrix}۱&-x\\۰&۲\end{pmatrix}+۲\begin{pmatrix}۱&-۱\\z&۱\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}۱&-۱\\y&۶\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z&۰\\۱۱&w\end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix}۱\\۳\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-۲\\۱\end{pmatrix}=۴\begin{pmatrix}۶&۰\end{pmatrix}$

ه) $\begin{pmatrix}-۱\\-۳\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۱\\۳\end{pmatrix}=۴(x)_{۱\times۱}$

و) $\begin{pmatrix}۱&x+۱&۰\\۰&-۲&k-۱\\z&۱&۲\end{pmatrix}-۳\begin{pmatrix}u&-۱&۲\\۱&v+۲&۳\\۰&-۳&۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۸&۷&-۲x\\u+y&-۷&۱-۷x\\۴&w+۱۱&t\end{pmatrix}$

ز) $x\begin{pmatrix}۲\\۰\\۲\end{pmatrix}+۲\begin{pmatrix}-۱\\۰\\۶\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}۰\\۲\\-۵\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱۰\\۶\\۲x+۱۲-۵y\end{pmatrix}$

ح) $۳\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-۳\begin{pmatrix}-۲\\۴\end{pmatrix}=۴\begin{pmatrix}۶\\-۲\end{pmatrix}$

۱۱. مجموع درآیه‌های ستون اول $C_{۱}$ در ماتریس $۳I - \begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ -۳ & ۵ \end{pmatrix}$ چه عددی است؟

۱۲. درآیه‌های $c_{۱۱}$، $c_{۳۳}$، $c_{۳۱}$، $c_{۲۱}$ و $c_{۳۲}$ را بیابید هرگاه

الف) $C = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & -۲ \\ -۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۴ & ۳ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ۰ & -۲ & ۳ \\ -۲ & ۴ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$

ب) $C = \begin{pmatrix} ۱ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$

۱۳. با فرض

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۰ & ۳ \\ -۳ & ۱ & -۱ & ۲ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \\ ۰ & -۲ \\ ۴ & ۱ \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} ۳ & -۲ & ۰ & ۵ \\ ۱ & ۰ & -۳ & ۴ \end{pmatrix}$$

الف) اگر $D = ABC$ وجود دارد درآیه $d_{۳۴}$ چه عددی است؟

ب) اگر $E = BAC$ وجود دارد درآیه $e_{۱۱}$ چه عددی است؟

ج) اگر $G = CAB$ وجود دارد درآیه‌های $g_{۲۱}$ و $g_{۲۳}$ چه اعدادی هستند؟

۱۴. $A_{۲\times۵}$ را در کدامیک از ماتریس‌های زیر می‌توان ضرب کرد؟

$$B_{۴\times۵}, \quad C_{۵\times۱}, \quad D_{۳\times۵}, \quad E_{۲\times۵}, \quad I_{۵}$$

۱۵. کدامیک از ماتریس‌های زیر را می‌توان در $A_{۲\times۵}$ ضرب نمود؟

$$B_{۲\times۵}, \quad C_{۵\times۵}, \quad I_{۵}, \quad I_{۲}, \quad F_{۷\times۲}$$

۱۶. فرض کنید که ضربهای زیر قابل انجام هستند

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۳ & ۳ \\ ۹ & ۶ & ۷ & ۰ \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} ۰ \\ ۵ \\ ۷ \\ ۹ \\ ۲ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۴ & ۱ \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}$$

اولاً مرتبه دو ماتریس A و B چیست و ثانیاً مرتبه ماتریس نهایی از بیابید.

۱۷. اگر AB ماتریسی ۵ × ۳ شود، آن گاه A و B چه مرتبه‌هایی خواهند داشت؟

۱۸. ماتریسهای $A^{۳۷}, B^{۱۳۸}, B^{۶۳}$ و $C^{۴۲}$ را با فرض ماتریسهای زیر بیابید.

$$A=\begin{pmatrix} ۱/۲ & ۱/۲ \\ ۱/۲ & ۱/۲ \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}, \quad C=AB$$

۱۹. درستی دو معادله $Z^{۳}-۳Z^{۲}-۹Z+۳I=\mathbf{0}_{۳}$ و $A^{۳}-I=\mathbf{0}_{۲}$ را به‌ازای دو ماتریس زیر تحقیق کنید.

$$A=\begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}, \quad Z=\begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$

۲۰. اگر $T=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix}$، مقادیر x و y را طوری بیابید که $xT^{۲}+yT=I_{۲}$ باشد.

۲۱. مقادیر مجهول را در تساوی‌های زیر بدست آورید (در صورت امکان).

الف) $\begin{pmatrix} ۱ & ۱/۳ \\ u & w \end{pmatrix}^{۲}=-I_{۲}$

ب) $\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ & -۵ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{pmatrix}$

ج) $(۱ \;\; ۲ \;\; ۳)\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & y \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & x & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix}=۰$

د) $(۱ \;\; ۲ \;\; ۳)\begin{pmatrix} ۰ & ۳ \\ ۱ & ۰ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-۱ \\ x+۳ \end{pmatrix}=-۹$

ه) $(۳ \;\; x)\begin{pmatrix} x & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}=-۳$

و) $(x \;\; -۱)\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -۱ \end{pmatrix}=۰$

ز) $(x \;\; ۲)\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ -۵ & ۴ \end{pmatrix}=۲\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ \\ x \end{pmatrix}$

ح) $\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۶ & -۵ \\ ۷ & -۷ \end{pmatrix}$

ط) $\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & -۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix}$

۲۲. برقراری $AB = \mathbf{0}_۲$ و $BA \neq \mathbf{0}_۲$ را به‌ازای دو ماتریس زیر تحقیق کنید.

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & -۲ \end{pmatrix}$$

۲۳. برقراری $AB = I_۲$ و $BA \neq I_۳$ را به‌ازای دو ماتریس زیر تحقیق کنید.

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}, \quad B = ۱/۳ \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

۲۴. اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد، حاصل $A^۲ - ۴A - ۵I$ چه ماتریسی است؟

۲۵. آیا برای دو ماتریس A و B می‌توانیم بنویسیم $(\frac{۱}{۴}A)\,B = \frac{۱}{۴}(AB)$.

۲۶. آیا این ادعا درست است که $AB = \mathbf{0}$ نتیجه می دهد لااقل یکی از دو ماتریس صفر است؟

۲۷. اگر

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \frac{۱}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

مطلوب است محاسبه ماتریس‌های AB و BA. همچنین چه شرطی بر عدد $ab - dc$ بگذاریم تا ماتریس B وجود داشته باشد؟

۲۸. ثابت کنید اگر برای ماتریس‌های A و B داشته باشیم $AB = BA$، آن گاه

$$(A - B)(A - B) = A^۲ - B^۲$$

۲۹. مثالی از سه ماتریس ۲×۲، A، B و C بزنید که $AC = AB$ بوده ولی $B \neq C$ باشد.

۳۰. آیا حاصلضرب دو ماتریس قطری مجدداً قطری است؟ آیا خاصیت جابجایی در ضرب دو ماتریس قطری حفظ می‌شود؟

۳۱. برای دو ماتریس A و B، روابط زیر برقراراند

$$A^{۲}=\begin{pmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{pmatrix},\quad B^{۲}=\begin{pmatrix}۰ & ۱\\ ۲ & -۱\end{pmatrix},\quad B-A=\begin{pmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}$$

مطلوب است ماتریس $AB+BA$.

۳۲. اگر برای ماتریس‌های A و B، $AB+BA=\mathbf{0}$ و بدانیم $B^{۲}A-kAB^{۲}=\mathbf{0}$ ، آن گاه k کدام است؟

۳۳. مجموع درآیه‌های ماتریس $(ABA^{-۱})^{۳۰۰}$ را بیابید، هرگاه

$$A=\begin{pmatrix}۱۹ & ۱۷\\ ۱ & ۴\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\sqrt{۳} & -۱\\ ۱ & \sqrt{۳}\end{pmatrix}$$

۳۴. A ماتریسی مربعی و ناصفر است بطوری که $A^{۲}=\mathbf{0}$ است. مطلوب است

$$(۲A-I)^{۳}$$

۳۵. اگر $A_{n\times n}$ و $B=I-A$، ماتریس $A^{۲}+AB+B$ چه ماتریسی است؟

۳۶. مجموع ریشه‌های معادله $\begin{pmatrix}۱ & ۴ & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۴\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ ۴\\ -۱\end{pmatrix}=۰$ را بدست آورید.

۳۷. اگر $\begin{pmatrix}m & n\\ ۳ & ۷\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۲ & -۵\\ ۵ & ۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲ & -۵\\ ۵ & ۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & n\\ ۳ & ۷\end{pmatrix}$ ، m و n کدامند؟

۳۸. ماتریسهای A^n، $B^{۵}$، $C^{۴۶۷}$ و $D^{۱۴۰۰}$ را بدست آورید اگر

$$A=\begin{pmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۰\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}۰ & ۰ & ۴\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۳ & ۰ & ۰\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}۲ & -۷\\ ۱ & -۳\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۵ & ۰\end{pmatrix}$$

۳۹. با فرض $H=\begin{pmatrix}۲ & -۱ & ۰\\ ۳ & ۱ & ۲\\ -۱ & ۱ & ۱\end{pmatrix}$ و اینکه $S=H^{۳}$ باشد، مطلوب است $s_{۲۳}$.

۴۰. مجموع درآیه‌های ماتریس A را به‌ازای $n>۱$ بیابید.

$$A=\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۱\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ n & ۱\end{pmatrix}$$

۴۱. برای ماتریس $A_{۳\times۳}$ رابطه زیر برقرار است. مقادیر n و m کدامند؟

$$(I+A)(I+A^t)=\begin{pmatrix} ۶ & ۱-۲m & ۱ \\ m-۵ & ۲ & -۱ \\ ۲n-۱ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

۴۲. ماتریس‌های $A^{۳۰۰}$ و $B^{۱۰۰}$ را در صورتی پیدا کنید که

$$A=\begin{pmatrix} ۱/۲ & -\sqrt{۳}/۲ \\ \sqrt{۳}/۲ & ۱/۲ \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -۱ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & -۱ \end{pmatrix}$$

۴۳. کمترین مقدار n چه باشد تا $\begin{pmatrix} -۱/۲ & \sqrt{۳}/۲ \\ -\sqrt{۳}/۲ & -۱/۲ \end{pmatrix}^n = I$؟

۴۴. اگر برای ماتریس A داشته باشیم، $A^۲=۵A-۲I$، ماتریس $A^۳$ را بدست آورید.

۴۵. مقدار k را طوری بدست آورید که برای دو ماتریس A و B داشته باشیم

$$۲AB+BA=\mathbf{0},\quad B^۳A=kAB^۳$$

۴۶. اگر برای ماتریس A داشته باشیم $A^۲=۳A$، مطلوبست ماتریس $A^{۱۰۰}$.

۴۷. برای ماتریس $A=\begin{pmatrix} -۲ & ۳ \\ ۸ & ۵ \end{pmatrix}$، $A^۲=mA+nI$ مطلوب است m و n.

۴۸. اگر $A=\begin{pmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ و $B=A^۳$ باشند، مطلوب است $b_{۲۳}$.

۴۹. ماتریس $A=\begin{pmatrix} m & ۱ \\ ۳ & n \end{pmatrix}$ در رابطه $A^۲-۶A+۵I=\mathbf{0}$ صدق می‌کند مطلوب است $|m-n|$.

۵۰. با فرض تعویض‌پذیر بودن ماتریسهای زیر، مقدار $(۴a+۵b)^{۲m}$ را بیابید.

$$A=\begin{pmatrix} ۲a-۳ & ۵ \\ ۳m-۱ & ۷ \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & b+۱ \end{pmatrix}$$

۵۱. حاصل $(AB)^{۱۰۰}$ را بازای $A=\begin{pmatrix} ۳ \\ ۲ \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \end{pmatrix}$ بدست آورید.

۵۲. فرض کنیم

$$C=\begin{pmatrix} ۵ & -۶ \\ -۷ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۷ & ۸ & -۳ \\ ۱ & ۱۲ & a \end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix} ۵ & -۶ \\ -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۱ & ۸ & -۳ \\ ۰ & ۱۰ & a \end{pmatrix}$$

الف) اگر درآیه $c_{۱۳}$ عدد ۳ باشد، a را بدست آورید.

ب) اگر $h_{۲۳}=۱۲$ بدست آید، مطلوب است مقدار a.

۵۳. از هر یک از معادلات زیر مقدار x را بدست آورید.

الف) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۳ \\ ۱ & ۰ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-۱ \\ x+۳ \end{pmatrix}=-۹$

ب) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}=۰$

ج) $\begin{pmatrix} ۱ & x & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \\ x \end{pmatrix}=۱$

۵۴. در معادلات زیر چه رابطه ای بین مجهولات وجود دارد؟

الف) $\begin{pmatrix} ۱ & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ x \end{pmatrix}_{x\neq ۰}=۱$

ب) $\begin{pmatrix} ۱ & -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ y \end{pmatrix}=۰$

ج) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & y \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & x & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix}=۰$

۵۵. با فرض

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & ۱ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۱/۲ & -\sqrt{۳}/۲ \\ \sqrt{۳}/۲ & ۱/۲ \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{۲}/۲ & -\sqrt{۲}/۲ \\ \sqrt{۲}/۲ & \sqrt{۲}/۲ \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ ۱ & \sqrt{۳} \end{pmatrix}$$

مطلوب است $A^{۱۰۰}$، $\left(\frac{۱}{۲}B\right)^{۳}$ و $C^{۲۰} \times D^{۶۰}$.

۵۶. مجموع درآیه‌های $A^{۱۴۰۰}$ را بدست آورید هرگاه $A = \begin{pmatrix} \sqrt{۳} & ۱ & ۰ \\ -۱ & \sqrt{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ باشد. مسئله را برای $A = \begin{pmatrix} ۱ & \sqrt{۳} & ۰ \\ -\sqrt{۳} & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ مجدداً تکرار کنید.

۵۷. اگر برای ماتریس A، $A^{۲} = ۴A + ۳I$ باشد محاسبه $A(۲A - ۳I)^{۲}$ را انجام دهید.

۵۸. برای ماتریس‌های A و B که $-AB + BA = I$، مطلوبست $B^{۲}A - AB^{۲}$.

۵۹. اگر $A = [۲i + j]_{۳\times۳}$ و $B = [۳i - j]_{۳\times۳}$ و $C = AB$ و $D = BA$ باشند، حاصل $c_{۲۱} + d_{۲۳}$ را بدست آورید.

۶۰. اگر برای $A = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ داشته باشیم $A^{۳} + \alpha A^{۲} + \beta A = I$ مقدار α و β چیست؟

۶۱. اگر برای دو ماتریس مربعی و هم مرتبه A و B داشته باشیم $۳AB + BA = \mathbf{0}$ حاصل $(A + B)(A + ۳B)$ را بدست آورید.

۶۲. برای ماتریس‌های A و B، روابط زیر برقراراند. مطلوبست $AB + BA$:

$$A^{۲} = \begin{pmatrix} ۰ & ۳ \\ -۳ & ۳ \end{pmatrix}, \quad B^{۲} = \begin{pmatrix} ۷ & ۳ \\ ۹ & ۷ \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}$$

۶۳. ماتریس های P و Q از مرتبه ۳ هستند و $k \in \mathbb{N}$.

الف) نشان دهید اگر $P^{۳}Q = PQ$ آن گاه $P^{۵}Q = PQ$.

ب) نشان دهید اگر $PQ-QP=P$ آن گاه داریم

$$P^3Q-QP^3=3P^3, \quad P^2Q-QP^2=2P^2$$

بعلاوه آیا رابطه $P^kQ-QP^k=kP^k$ برای این دو ماتریس برقرار است؟

۶۴. اگر $A^2=-2A+6I$ باشد، حاصل A^4 کدام است؟

۶۵. درآیه سطر دوم ، ستون سوم A^3 و درآیه سطر دوم ستون سوم A^{12} کدامند وقتی:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۶۶. برای ماتریس A تساوی $A^3-2A^2+3A-I=\mathbf{0}$ برقرار است، ماتریس B را طوری پیدا کنید که $AB=I$ شود.

۶۷. فرض کنید $A^2=\mathbf{0}$ باشد، مطلوب است $2A(I+2A)^2$.

۶۸. حاصل $A^{100}-A^{99}$، B^{99} و G^7-G^4 را برای ماتریسهای زیر بیابید.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad G=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

۶۹. برای ماتریس $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ رابطه $A^2=\alpha A+\beta I_2$ برقرار است. اعداد β و α را بیابید.

۷۰. در ماتریس $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ حاصلجمع درآیه‌های $A+A^2+A^3+A^4$ را بیابید.

۷۱. آیا برای ماتریس $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ حاصل جمع درآیه‌ها A^4 عددی مثبت است؟

۷۲. در ماتریس $A^{۶}$ مجموع درآیه‌های ستون دوم ، مجموع درآیه‌های $B^{۱۰}$ و مجموع درآیه‌های $C^{۵}$ کدام اند، هرگاه

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

.۷۳] برای دو ماتریس A و B که $-AB+BA=I$، حاصل تفاضل زیر را بدست آورید.

$$B^{۲}A-AB^{۲}$$

۷۴. نشان دهید برای اعداد حقیقی دلخواه c,b,a و d، دو ماتریس زیر نسبت به ضرب جابجا می شوند.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

۷۵. فرض کنید حرف i دارای این خاصیت است که $i^{۲}=-۱$.

الف) نشان دهید برای ماتریسهای زیر تساوی $AB=-BA$ برقرار است.

$$A=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰ \end{pmatrix}$$

ب) نشان دهید حاصلضرب هر دو ماتریس از این هشت ماتریس مجدداً یکی از این ماتریسها خواهد شد.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -i & ۰ \\ ۰ & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۰ & -i \\ -i & ۰ \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} ۰ & i \\ i & ۰ \end{pmatrix}}_{A}$$

ج) برای ماتریس A قسمت ب، ماتریسهای $A^{۲},A^{۳}$ و $A^{۴}$ را بدست آورید. آیا می توانید برای محاسبه ساده تر $A^{n}\ (n\in\mathbb{N})$، یک قاعده بسازید؟

۷۶. اگر توانی از ماتریس A با ماتریس صفر مساوی شد[۷]، آنرا ماتریس **پوچ توان** می گویند. پوچ توان بودن را برای دو ماتریس زیر تحقیق کنید.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & -۳ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -۴ & ۴ & -۴ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۵ & -۵ & ۵ \end{pmatrix}$$

۷۷. اگر ماتریس A پوچ توان از مرتبه ۲ و ماتریس B پوچ توان از مرتبه ۳ باشند، مرتبه پوچ توانی $A+B$ چیست؟ (فرض کنید دو ماتریس نسبت به ضرب جابجا می شوند)

۷۸. آیا هر ماتریس به شکل $A = \begin{pmatrix} ab & a^۲ \\ -b^۲ & -ab \end{pmatrix}$ پوچ توان است؟

۷۹. اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ نشان دهید

$$A^n = \begin{pmatrix} ۲^n & ۳(۲^n - ۱) \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}_{(n\in\mathbb{N})}$$

۸۰. اگر $A = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۰ \end{pmatrix}$ نشان دهید

$$A^n = \begin{pmatrix} ۲^{n+۱} - ۱ & ۲^n - ۱ \\ ۲ - ۲^{n+۱} & ۲ - ۲^n \end{pmatrix}_{(n\in\mathbb{N})}$$

۸۱. نشان دهید دو ماتریس زیر نسبت به ضرب، جابجا می شوند.

$$\begin{pmatrix} ۲ & -۲\sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & ۲ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۲ & \sqrt{۲} \\ -۲\sqrt{۲} & ۲ \end{pmatrix}$$

۸۲. معادله زیر را به شکلی خالی از فرم ماتریسی درآورید.

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{pmatrix}$$

---

[۷] این توان را که کوچکترین عدد طبیعی با این خاصیت است، مرتبه پوچ توانی می نامند.

۸۳. نشان دهید:

$$ax^۲+bxy+cy^۲=(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b/۲ \\ b/۲ & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

۸۴. با فرض پادمتقارن بودن ماتریسهای زیر ، مجموع عناصر ستون دوم ماتریس A چند است؟ حاصل‌جمع درآیه‌های سطر دوم B چقدر است؟

$$A=\begin{pmatrix} ۰ & m+۲ & ۲ \\ ۳m+۲ & m^۲-۱ & ۵ \\ -۲ & -۵ & ۰ \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} ۰ & m-۵ & ۲ \\ ۲m-۱ & m^۲-۴ & ۷ \\ -۲ & -۷ & ۰ \end{pmatrix}$$

۸۵. اگر برای ماتریس متقارن A و پاد متقارن B ، دو ماتریس $(A+B)(A-B)$ و $A^۲-B^۲$ یکی باشند، ماتریس AB چه نوع ماتریسی است؟

۸۶. ماتریسهای زیر مفروضند

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & b \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} ۴ & ۱-m & ۵ \\ ۶ & -۲ & ۳ \\ n+۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix} ۰ & -۲ & ۱ \\ ۲ & m^۲-m & m^۲ \\ -۱ & m^۳ & ۰ \end{pmatrix}$$

الف) اگر توان دوم ماتریس A را بصورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن بنویسیم مجموع درآیه‌های ماتریس متقارن کدام است؟

ب) ماتریس B را به‌صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن بنویسید.

ج) در ماتریس C ، $m+n$ را بیابید اگر این ماتریس متقارن باشد.

د) ماتریس S به ازای چه مقدار m پادمتقارن می‌شود؟

۸۷. کدامیک از ماتریس‌های زیر متقارن هستند اگر بدانیم A و B متقارن‌اند؟

الف) $(A+۲I)(B+I)$

ب) $(A-B^{۲}+۵A^{۲}-I)$

ج) $AB-A^{۲}-B^{۳}+۲BA$

د) $(A+۵I)(A^{۲}-۲I)$

سؤالات ۸۸ تا ۹۳ را از روی ماتریس‌های زیر پاسخ دهید.

$$A=\begin{pmatrix} ۶ & -۳ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & ۸ \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۶ \end{pmatrix}, \quad F=\mathbf{0}_{۵\times۵}, \quad H=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

۸۸. ترانهاده هرکدام را بدست آورده و معین کنید کدام ماتریس متقارن و کدام قطری است؟

۸۹. کدام ماتریس هم بالا مثلثی و هم پایین مثلثی است؟

۹۰. آیا A، ماتریس متقارن است؟ $A+A^t$ چه نوع ماتریسی است؟

۹۱. آیا $C-C^t$ ماتریسی متقارن است یا پادمتقارن؟

۹۲. آیا AA^t ماتریسی متقارن است؟ درستی این مطلب را در حالت کلی بررسی کنید.

۹۳. ماتریس $\frac{۱}{۲}(A+A^t)+\frac{۱}{۲}(A-A^t)$ را بدست آورید.

۹۴ در ماتریس‌های ذیل همه مقادیر x و y را بیابید که به ازای آن‌ها هر ماتریس متقارن شود.

$$\begin{pmatrix} ۱ & x \\ ۲ & y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y \\ xy & ۱ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & ۲x & xy \\ y & -۱ & x \\ y & x^{۲} & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۱ & x & y \\ ۲x-۱ & ۶ & ۳ \\ ۶-y & ۳ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & x & ۱ \\ x & x & -۳ \\ ۱ & ۳ & y \end{pmatrix}$$

۹۵. در ماتریس‌های زیر مقادیر مجهول را طوری بدست آورید که هر ماتریس پاد متقارن شود.

$$\begin{pmatrix} ۰ & b+c-f & d+a \\ ۱ & a & ۵ \\ ۷ & ۲b-c & b+۴ \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x+۳ & z-۱ & x+y \\ x & ۳y-۲x & f-۱ \\ t+۱ & y & ۰ \end{pmatrix}$$

۹۶. آیا $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & -۳ & ۰ \end{pmatrix}$
ماتریسی پاد متقارن است؟ ماتریس $A^۲$ چطور؟

۹۷. دو ماتریس متقارن ۲×۲ شامل صفر و یک مثال بزنید که حاصلضربشان متقارن نباشد.

۹۸. اگر ماتریس $A = \begin{pmatrix} -۲ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۲ \end{pmatrix}$ را به‌صورت $A = B - C$ (B متقارن و C پادمتقارن) بنویسیم، حاصل‌ضرب درآیه‌های بالای قطر اصلی B چیست؟

۹۹. مسئله قبلی را برای ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ تکرار کنید.

۱۰۰. با فرض برقراری قاعده $a_{ij} = i - j$ برای ماتریس مربعی A، نوع ماتریس $A^۴$ چیست؟

۱۰۱. ماتریس A متقارن و B ماتریس پاد متقارن مناسبی هستند به‌طوری که $AB = BA$. نوع ماتریس $A^۲B^۳ - AB^۵$ را مشخص کنید.

۱۰۲. با مثال نشان دهید توان‌های زوج ماتریس‌های پادمتقارن، متقارن و توان‌های فرد آن‌ها مجدداً پادمتقارن هستند.

۱۰۳. با مثال نشان دهید اگر A و B ماتریس‌هایی مربعی و متقارن (و یا پادمتقارن) باشند، در هر صورت AB ماتریسی متقارن است.

۱۰۴. الف) با فرض

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۳ \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -۶ & -۵ \\ ۲ & -۳ \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -۲ & -۱ \\ -۳ & ۳ \end{pmatrix}, \; D = \mathbf{0}_{۲\times۲}$$

مطلوبست محاسبه ماتریس‌های زیر

$$(D-۲A^t)^t-۲C \qquad \frac{۳}{۵}(۲A-۷B) \qquad ۲A+۳(-A)$$

$$\frac{۱}{۱۰}A-۲(B^t+C) \qquad \left(\frac{A-۲B+C}{۳}\right)^t \qquad A^t+B^t$$

$$-۲A-۲(B^t-۲C^t) \qquad D^t+B^t \qquad (۲A)^t-\left(\frac{B}{-۵}\right)$$

۱۰۵. در هرکدام از موارد زیر A را بیابید.

الف) $$\left(A+۳\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۰ \\ ۸ & ۳ \end{pmatrix}$$

ب) $$\left(۲A^t-۵\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}\right)^t=۴A-۹\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

۱۰۶. ماتریس‌های $A_{۲\times۳}$، $B_{۳\times۱}$، $C_{۲\times۵}$، $D_{۴\times۳}$، $E_{۳\times۲}$ و $F_{۲\times۳}$ مفروض هستند. مرتبه هریک از ماتریس‌های زیر را بدست آورید (در صورت امکان).

$$(AB)^tC \qquad EE^tB \qquad EC \qquad \frac{EC}{\mathrm{tr}(A+F-E)}$$

$$\frac{B^tF^t}{-۴} \qquad \mathrm{tr}(A)AEF \qquad (F+۲A)B \qquad E(FB)$$

۱۰۷. اگر

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -۲ & ۳ & ۰ \\ ۱ & -۴ & ۱ \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix} ۱/۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱/۳ \end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

مطلوب است محاسبه ماتریس‌های زیر (در صورت امکان)

$$BCA - \frac{I^t}{-۱} \qquad A\left(I - \frac{\mathbf{0}}{۸}\right) \qquad \frac{B^۲}{۴}\left(\frac{C}{-۲}\right) + A^t \qquad \frac{A^۲ + I}{۳}$$

$$\frac{(KLP)^t}{-۲} \qquad F^۲ - ۲F + I \qquad K(L^t)^۲P \qquad S^۳ + I^۵$$

$$L^۲ - ۳L + ۲I \qquad H^t(S^t)^۲H^t \qquad H(۲I) - HO^t \qquad CC^t + F$$

۱۰۸. اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}$، مجموع درآیه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس زیر چیست؟

$$A + ۲A^t - ۳I$$

۱۰۹. اگر A ماتریسی خودتوان ($A^۲ = A$) و تساوی $\mathbf{0} = ^۲(A - A^t)$ درست باشد، مطلوب است حاصل $AA^t + A^tA$.

۱۱۰. برای دو ماتریس ۲ × ۲، $A^tB^t = \begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ \end{pmatrix}$، ماتریس BA را بدست آورید.

۱۱۱. اگر $A + ۲A^t = \begin{pmatrix} ۰ & ۵ \\ ۴ & -۳ \end{pmatrix}$ باشد، آن‌گاه درآیه سطر دوم ستون دوم AA^t چیست؟

۱۱۲. درآیه سطر دوم و ستون اول ماتریس $B(C^tA)^t$ چه عددی است اگر

$$AB^t = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۵ \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}$$

۱۱۳. اگر A و B دو ماتریس و $A^tB^t = \begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}$ ماتریس BA کدام است؟

۱۱۴. اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۱ & ۴ \\ ۹ & ۵ \end{pmatrix}$ باشند، مطلوب است محاسبات ماتریسی زیر

$$\operatorname{tr}\left(\frac{(A+B)^t}{۲} + \frac{I}{۳}\right) \qquad [\operatorname{tr}(A - ۲B)]^۳, \qquad \operatorname{tr}\left(\frac{۳A^t - ۴B}{۵}\right),$$

$$(\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B))^۳ \qquad \frac{\operatorname{tr}(A+I) + \operatorname{tr}(B-I)}{\operatorname{tr}(A-I) + \operatorname{tr}(B+I)}, \qquad \frac{\operatorname{tr}(A)A - \operatorname{tr}(B)B}{\operatorname{tr}(A+B)},$$

۱.۴.۲ جواب و راهنمایی‌ها

۱. جواب **ز** عبارت است از $۴+۱۴=۱۸$. مورد **د** قابل حل نیست! **۲.** برای **ب**، ماتریس $A=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ را در نظر گرفته و در تساوی صدق دهید. برای **د** از راهنمایی زیر کمک بگیرید:

$$۲A+\tfrac{۲}{۳}A=\begin{pmatrix}۳&-۱\\۰&۳\\۲&۱۰\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}۱&-۱\\۰&۱\\-۲&۳\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲&۰\\۰&۲\\۴&۷\end{pmatrix}$$

۳. برای **ج**، واضح است که اگر $۲X-۳A=B$ آن گاه $X=\frac{۳A+B}{۲}$ و لذا

$$X=\begin{pmatrix}۱۵/۲&-۵/۲\\۱/۲&۲\\۹/۲&۷\end{pmatrix}$$

۴. با استفاده از روشهای حذفی که در حل دستگاه معادلات دو معادله دو مجهولی می‌دانیم، برای **الف** داریم

$$X=\tfrac{۶B+A}{۵},\quad Y=\tfrac{۱۲B-۳A}{۲۰}$$

و برای **د**:

$$X=B-\tfrac{A}{۳},\quad Y=-B+\tfrac{۲A}{۳}$$

۶. برای **ب** کافی است دو ماتریس $X=(x\quad y)$ و $Y=(z\quad t)$ را در نظر گرفته ، جایگذاری کرده و امکانات مختلف را با عددگذاری دلخواه بجای z و t بدست آورید. مثلاً اگر $z=t=۰$ آن گاه $x=۱/۲, y=۱$ بدست می‌آیند.

۷. برای **ب** چون عبارت دومی چون شامل ماتریس صفر $\mathbf{0}$ است لذا کل عبارت با در نظر گرفتن جملات اول و دوم به $A-۲B$ ساده می‌شود. **۸.** برای **الف**

$$X=\begin{pmatrix}۱&۱\\۳/۲&۳/۲\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}۵&۴\\۶&۵\end{pmatrix}$$

۱۰. موارد **د** و **ه** حل‌پذیر نیستند. برای **ح** از این راهنمایی استفاده کنید که $۳x+۶=۲۴$ و $۳y-۱۲=-۸$. **۱۲.** ماتریس اول را A و دیگری را B می‌نامیم. از روند ضربی AB می‌دانیم

که

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = (1 \times 0) + (3 \times -2) + (-2 \times 3) = -12$$

بعلاوه

$$c_{32} = R_3(A)C_2(B) = (0 \times -2) + (4 \times 4) + (3 \times 1) = 19$$

۱۳. در قسمت **الف**، توجه کنید که برای درآیه d_{34} داریم:

$$R_3(A)C_1(B)c_{14} + R3(A)C_2(B)c_{24} = d_{34}$$

برای **ب** توجه داریم $B_{3\times 2}$، $A_{4\times 4}$ و $C_{2\times 4}$ است و لذا E تعریف نمی‌شود. برای **ج** با توجه به نکات قسمت **ب**، G ماتریس 2×2 است (چرا؟). برای بدست آوردن g_{21} ابتدا سطر دوم ماتریس $CA = K$ را به‌طور کامل بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} k_{21} &= R_2(C)C_1(A) = c_{21}a_{11} + c_{22}a_{21} + c_{23}a_{31} + c_{24}a_{41} \\ &= (1 \times 1) + (0 \times 0) + (-3 \times 2) + (4 \times -3) = -17 \end{aligned}$$

به‌همین ترتیب $k_{22} = -8$، $k_{23} = -5$ و $k_{24} = 1$ بدست می‌آیند:

$$R_2(K): \quad -17 \quad -8 \quad -5 \quad 1$$

حال کافی است سطر فوق را در ستون اول B ضرب کنیم:

$$g_{21} = R_2(K)C_1(B) = (-17 \times 1) + (-8 \times 3) + (-5 \times 0) + (1 \times 4) = -37$$

۱۴. ماتریس A را می‌توان در ماتریس‌های C و D ضرب کرد.

۱۵. ماتریس F تنها ماتریس است که به‌ازای آن FA معنی دارد.

۱۶. برای آنکه ضرب تعریف شود:

$$(2 \times 4)(m \times n)(5 \times 1) \longrightarrow m = 4,\ n = 5$$

$$(3 \times 3)(m \times n)(2 \times 2) \longrightarrow m = 3,\ n = 2$$

۱۸. چون $A^{۲}=A$ پس به‌ازای هر توانی از A، حاصل خود A بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} A^{۳۷} &= A(A^{۳۶}) = A(A^{۲})^{۱۸} = A(A)^{۱۸} \\ &= A(A^{۲})^{۹} = A(A)^{۹} = A^{۱۰} \\ &= (A^{۲})^{۵} = A^{۵} = A(A^{۲})^{۲} \\ &= AA^{۲} = AA = A^{۲} = A. \end{aligned}$$

بعلاوه داریم $B^{۲}=I$ پس $B^{۶۳}=B^{۶۲}\cdot B=I\cdot B=B$ و $B^{۱۳۸}=I$. توجه کنید

$$C^{۲}=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

۲۰. کافی است معادله ماتریسی زیر را حل کنیم:

$$xT^{۲}+yT=\begin{pmatrix} x+y & ۰ \\ ۲y & x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}=I_{۲}$$

۲۱. برای ۵، مقدار x برابر است با ۱ زیرا:

$$۳=(۳ \quad x)\begin{pmatrix} x & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}=(۵x \quad ۳-x)\begin{pmatrix} -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}=-۵x+(۳-x)$$

۲۵. این تساوی در صورتی که AB با معنی باشد کاملاً درست است. **۲۶.** لزوماً این ادعا درست نیست. دو ماتریس غیرصفر

$$A=\begin{pmatrix} ۱/۲ & -۱/۲ \\ ۱/۲ & -۱/۲ \end{pmatrix}=B$$

حاصلضرب صفر دارند. **۲۷.** حاصلضرب AB و BA هردو ماتریس همانی $I_{۲}$ خواهند شد. تنها شرطی که لازم داریم این است که $ad-bc\neq ۰$ شود. **۲۹.** بگیرید:

$$A=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

۳۰. جواب کاملاً مثبت است. **۳۱.** از این روابط استفاده کنید که

$$(B-A)^{۲}=B^{۲}+A^{۲}-۲BA$$

و بعلاوه $(A-B)^{۲}=A^{۲}+B^{۲}-۲AB$. **۳۲.** تساوی فرض مسئله یعنی $-AB=BA$ را

از راست و چپ جداگانه در B ضرب می‌کنیم:

$$-AB^{۲} = BAB \to -kAB^{۲} = kBAB$$

$$-BAB = B^{۲}A \to B^{۲}A = -BAB$$

با جمع طرفین دو تساوی بالا و اینکه مجموع سمت چپ دو تساوی صفر است داریم:

$$(k-۱)BAB = ۰$$

اگر حاصلضرب BAB تعریف شده و غیر صفر باشد آن‌گاه $k = ۱$. **۳۳.** می‌دانیم مجموع درآیه‌های یک ماتریس ۲×۲ به‌صورت

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

قابل محاسبه است. از طرفی

$$B^{۲} = ۲\begin{pmatrix} ۱ & -\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & ۱ \end{pmatrix}, \quad B^{۴} = ۲^{۲}\begin{pmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & ۱ \end{pmatrix}$$

و با محاسبه معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} B^{۳۰۰} &= (B^{۸})^{۳۷} \cdot B^{۴} = -B^{۴۱} \\ &= -(B^{۸})^{۵} \cdot B \\ &= -(۸B^{۲})^{۵} \cdot B \\ &= -\left(۸ \times ۲\begin{pmatrix} ۱ & -\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & ۱ \end{pmatrix}\right)^{۵} \cdot B = -۲^{۲۰}\begin{pmatrix} ۱ & -\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & ۱ \end{pmatrix}^{۵} \cdot B \end{aligned}$$

که قابل محاسبه است. حال توجه می‌کنیم $(ABA^{-۱})^{۳۰۰} = AB^{۳۰۰}A^{-۱}$.

۳۴.

$$\begin{aligned} (۳A-I)^{۳} &= ۶۴A^{۳} - ۴۸A^{۲} + ۱۲A - I \\ &= ۶۴A(A^{۲}) - ۴۸A^{۲} + ۱۲A - I \\ &= \mathbf{0} - \mathbf{0} + ۱۲A - I = ۱۲A - I \end{aligned}$$

۳۵. کافی است بجای B در عبارت داده شده جایگذاری کنید تا حاصل ماتریس I شود. **۳۷.**

$m=۷$ و $n=-۳$. **۳۸.** با محاسبات داریم

$$B^{۵}=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۵۷۶ \\ ۰ & ۳۲ & ۰ \\ ۴۳۲ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad D^{۳}=\mathbf{0}_{۳\times ۳}$$

۳۹. برای محاسبه $s_{۲۳}$ مشاهده می‌کنیم که باید سطر دوم $H^{۲}$ را در ستون سوم H ضرب کنیم. سطر دوم $H^{۲}$ با ضرب سطر دوم H در تک تک ستون‌های H بدست می‌آید:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}}_{R_{۲}(H)}\begin{pmatrix} ۰ & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۷ \end{pmatrix}$$

حال سطر بدست آمده را در ستون سوم H ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۷ \end{pmatrix}}_{R_{۲}(H^{۲})}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix}=۴$$

۴۰. با محاسبه‌ای کوتاه $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱+۲ & ۱ \end{pmatrix}$ و

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱+۲ & ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱+۲+۳ & ۱ \end{pmatrix}$$

و با تعمیم مناسب:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}\times\cdots\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ n & ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱+۲+\ldots+n & ۱ \end{pmatrix}$$

پس $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{n(n+۱)}{۲} & ۱ \end{pmatrix}$ و لذا مجموع درآیه‌های A به‌سادگی بدست می‌آید.

۴۱. از این نکته استفاده کنید که $(I+A)(I+A^{t})$ ماتریس متقارن است. **۴۲.** با محاسبه داریم: $A^{۶}=I_{۲}$ و لذا ماتریس $A^{۳۰۰}$ شناخته شده است. **۴۳.** مقدار $n=۳$ درست است. **۴۴.** طرفین تساوی را در A ضرب کرده و از فرض مسئله دوباره استفاده کنید. **۴۵.** قبلاً نمونه‌اش حل شده است. **۴۸.** به حل مسئله ۳۹ مراجعه کنید. **۵۰.** سعی کنید تا تساوی

$$۴a-۵b=\frac{۳۵}{۴}$$

را از تساوی $AB=BA$ بدست آورید، سپس مقدار $m=۲$ خواهد بود.

۵۱. حاصل عدد ۱ است. **۵۳.** برای **ب** داریم:

$$(1\ \ 2\ \ x)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=(1\ \ 2\ \ x)\begin{pmatrix}1\\6\\10\end{pmatrix}=0$$

و لذا $1+12+10x=0$ و بنابراین $x=-\frac{13}{10}$.

۵۶. با کمی محاسبه دستی می‌توان فهمید که وقتی توان ماتریس A بر ۴ قابل تقسیم باشد آن‌گاه

$$A^k=\begin{pmatrix}-2^{k-1} & * & 0\\ -* & -2^{k-1} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

۵۸. مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$BA-AB=I\xrightarrow[\text{از چپ}]{\times B}B^2A-BAB=BI=B.$$

$$BA-AB=I\xrightarrow[\text{از راست}]{\times B}BAB-AB^2=IB=B.$$

با جمع طرفین تساوی‌های بالا حاصل عبارت خواسته شده برابر است با $2B$.

۵۹. با محاسبه ماتریس $[B(C^tA)^t]^t$، درآیه مورد نظر بدست می‌آید. **۶۰.** $\alpha=-3$ و $\beta=3$.

۶۳. $\underbrace{P^3Q=PQ}_{\text{فرض}}\xrightarrow[\text{از چپ}]{\times P^3}P^5Q=P^3Q=PQ$. **۶۵.** با اندکی محاسبه می‌توان شکل کلی A^n $(n\in\mathbb{N})$ را بدست آورد:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2x & x^2+2y\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}1 & 3x & 3x^2+3y\\ 0 & 1 & 3x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

و در واقع

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & nx & \frac{n(n-1)}{2}x+ny\\ 0 & 1 & nx\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad (n\geqslant 1)$$

۶۶. با استفاده از تساوی داده شده و فاکتورگیری مناسب

$$I=A^3-2A^2+3A=A\underbrace{(A^2-2A+3)}_{B}$$

۷۲. الگوی زیر برای A^k وجود دارد:

$$(k \geqslant 1) \qquad A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

پس مجموع درآیه‌های ستون دوم A^6 برابر است با ۷. **۷۶.** توان ۲ ماتریس سمت چپ برابر است با $\mathbf{0}_3$. **۷۸.** جواب مثبت است در واقع $A^2 = \mathbf{0}_2$. **۸۵.** اگر $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ آن‌گاه $AB = BA$. اکنون از تساوی‌های

$$(AB)^t = B^t A^t = (-B)(A) = -BA = -AB$$

نتیجه می‌شود که AB ماتریسی پادمتقارن است. **۸۶.** در مورد **الف** و برای ماتریس A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

از آنجایی که هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشت، لذا برای ماتریس A^2 داریم:

$$B = \frac{A^2+(A^2)^t}{2}, \qquad C = \frac{A^2-(A^2)^t}{2}$$

و در آن B متقارن و C پادمتقارن است. بعلاوه $A^2 = B + C$. ماتریس B به‌شکل زیر بدست می‌آید که مجموع کل درآیه‌ها در آن عدد ۱۹ است:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

۸۷. مورد **الف** را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} [(A+2I)(B+I)]^t &= (AB)^t + A^t + 2(B^t) + 2I \\ &= B^t A^t + A + 2B + 2I \\ &= B^t A^t + A + 2B + 2I \\ &= BA + A + 2B + 2I \end{aligned}$$

تساوی $[(A+2I)(B+I)]^t = (A+2I)(B+I)$ فقط در صورت برقراری $AB = BA$

درست است، زیرا با این فرض

$$[(A+۲I)(B+I)]^t = BA+A+۲B+۲I = AB+A+۲B+۲I$$
$$= (A+۲I)(B+I).$$

ولی چنین شرطی نداریم و لذا **الف** ممکن است متقارن نباشد. **۸۹.** ماتریس E هم بالا مثلثی است هم پایین مثلثی. **۹۲.** با محاسبه خواهیم داشت:

$$AA^t = \begin{pmatrix} ۶ & -۳ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۶ & ۲ \\ -۳ & ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴۵ & ۰ \\ ۰ & ۲۰ \end{pmatrix}$$

که نشان می‌دهد AA^t قطری بوده و لذا متقارن هم هست. در حالت کلی AA^t برای هر ماتریس مربعی لزوماً قطری نمی‌شود ولی تساوی‌های $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$ نشان می‌دهد به‌ازای هر ماتریس مربعی A، AA^t همواره متقارن است. **۹۵.** کافی است دستگاه معادلات زیر را در نظر گرفته و حل کنید:

$$\Big\{a=۰, b+۴=۰, b+c-f=-۱, d+a=-۷, ۲b-c=-۵\Big\}$$

۹۶. A ماتریس پادمتقارن است ولی $A^۲$ نیست. در واقع $A^۲$ ماتریسی متقارن است:

$$A^۲ = \begin{pmatrix} -۲ & ۳ & ۳ \\ ۳ & -۱۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ & -۱۰ \end{pmatrix}$$

۹۸. کافی است بگیریم $B = \frac{A+A^t}{۲}$ و $C = \frac{A^t-A}{۲}$. در این‌صورت

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & ۳/۲ & ۵/۲ \\ ۳/۲ & ۱ & ۳/۲ \\ ۵/۲ & ۳/۲ & ۲ \end{pmatrix}$$

و حاصلضرب درآیه‌های بالای قطر اصلی B عدد ۴۵/۸ است.

۱۰۰. می‌دانیم توان زوج هر ماتریس پادمتقارن، یک ماتریس متقارن خواهد شد. در اینجا A ماتریس پادمتقارن است.

۱۰۴. اولاً

$$(D-۲A^t)^t - ۲C = D^t - ۲(A^t)^t - ۲C = D^t - ۲A - ۲C = -۲A - ۲C$$

سپس چون $D^t = \mathbf{0}$ داریم:

$$-۲\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۳ \end{pmatrix} - ۲\begin{pmatrix} -۲ & -۱ \\ -۳ & ۳ \end{pmatrix} = -۲\begin{pmatrix} ۴ & ۳ \\ ۶ & -۶ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۸ & -۶ \\ -۱۲ & ۱۲ \end{pmatrix}$$

۱۰۵. برای **الف** داریم:

$$\left(A + ۳\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}\right)^t = A^t + ۳\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ \end{pmatrix} = A^t + \begin{pmatrix} ۳ & ۳ \\ -۳ & ۶ \\ ۰ & ۱۲ \end{pmatrix}$$

و لذا

$$A^t = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ \\ ۳ & ۸ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ -۳ & ۶ \\ ۰ & ۱۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \\ ۳ & -۳ \end{pmatrix}$$

و A بدست می‌آید. **۱۰۹.** توجه کنید $(A^t)^۲ = (A^۲)^t$. حاصل با بسط تساوی داده شده، ماتریس صفر را نتیجه می‌دهد.

۱۱۰. چون $(BA)^t = A^tB^t$ لذا $BA = (A^tB^t)^t$.

۱۱۱. ماتریس $A_{۳\times۳}$ دلخواهی را گرفته و فرض مسئله را بکار برید تا درآیه‌های خواسته شده را بیابید. اگر $B = AA^t$ آن گاه $b_{۲۳} = ۳۷$.

۱۱۳. روی $(A^tB^t)^t$ کارکنید.

۳

اَعمال روی ماتریس‌ها (۲)

این بخش در سه قسمت مجزا و هر یک شامل کارهایی اثر گذارتر از عمل‌های فصل قبل است که روی یک ماتریس می‌توان انجام داد.

۱.۳ عملگر دترمینان

تعریف ۱.۳. دترمینان، تابعی است که از مجموعه ماتریس‌های مربعی به مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌شود.[۱] به‌عبارت دیگر برای هر ماتریس $A_{n\times n}$ داریم $\det(A) \in \mathbb{R}$. دترمینان A را با $|A|$ نیز نشان می‌دهند. دترمینان را روی مجموعه‌های دیگر نیز تعریف می‌کنند.

۱.۱.۳ دترمینان مراتب ۲ و ۳

دترمینان ماتریس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ به‌صورت $|A| = ad - bc$ تعریف می‌شود.[۲]

مثال ۱.۳.

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = (۲ \times ۳) - (-۱ \times ۱) = ۶ + ۱ = ۷$$

[۱] این عدد برای هر ماتریس منحصر به‌فرد است.

[۲] حاصلضرب از سمت قطر اصلی اولویت دارد.

$$\begin{vmatrix} ۲/۳ & -۴ \\ ۷/۴ & ۳ \end{vmatrix} = (۲/۳) \times ۳ - (-۴ \times ۵/۴) = ۶ + ۱ = ۷$$

این مثال نشان می‌دهد که ماتریس‌های متفاوت ممکن است دارای یک مقدار دترمینان باشند.

برای محاسبه دترمینان یک ماتریس ۳×۳ در حالت کلی، از روشی بنام **ساروس** بنحو زیر استفاده می‌کنیم. فرض کنید دترمینان زیر مورد نظر است:

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

ابتدا، دو ستون اول و دوم را بترتیبی که در زیر می‌بینید در کنار ستون سوم نوشته و به فرمی که فلشها نشان می‌دهند، درآیه‌های اُریب قرار گرفته را در هم ضرب می‌کنیم. مثلاً اولین ضرب، جمله $a_{۳۳}a_{۲۲}a_{۱۱}$، دومین جمله $a_{۳۱}a_{۲۳}a_{۱۲}$ و سومین جمله $a_{۳۲}a_{۲۱}a_{۱۳}$ هم سو با قطر اصلی ماتریس بدست می‌آیند (شکل زیر).

علامتهای مثبت در بالا این برای این است که سه جمله بالا را جمع کرده و با یک علامت مثبت در پشت مجموع، آنرا همراهی کنیم:

$$+(a_{۳۳}a_{۲۲}a_{۱۱} + a_{۳۱}a_{۲۳}a_{۱۲} + a_{۳۲}a_{۲۱}a_{۱۳})$$

با انجام شبیه روند فوق برای درآیه های اُریب درجهت قطر فرعی، جمع جملات و محاسبه یک منفی (در پشت مجموع) به‌عبارت

$$-(a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱} + a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲} + a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳})$$

می‌رسیم. در نهایت، دترمینان، جمع دو مقدار نهایی بدست آمده اخیر است.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \hline a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۱} & a_{۳۲} \\ \hline + & + & + & & \end{array}$$

مثال ۲.۳. برای محاسبه دترمینان ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ به روش ساروس، داریم:

$$\begin{array}{ccc|cc} \overset{۲}{\uparrow} & \overset{۵}{\uparrow} & \overset{۰}{\uparrow} & & \\ ۱ & ۵ & ۳ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ \underset{۶}{\downarrow} & \underset{۱}{\downarrow} & \underset{۰}{\downarrow} & & \end{array}$$

که با توجه به‌شکل فوق $|A| = (۲+۵+۰)-(۰+۱+۶) = ۰$ بدست می‌آید.

تذکر ۱.۳. روش ساروس **فقط و فقط** به جهت محاسبه مستقیم ماتریسهای ۳×۳ ابداع شده است و لذا به‌طور مستقیم در محاسبه ماتریس‌های با مرتبه‌های بالاتر ناتوان است.

قضیه ۱.۳. برای دترمینان خواصی وجود دارد. از جمله:

الف) اگر ماتریسی دارای یک سطر (یا ستون) کاملاً صفر باشد، دترمینانش صفر است.

ب) اگر دو سطر (یا دو ستون) از ماتریسی کاملاً یکسان باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

ج) اگر دو سطر (یا دو ستون) از ماتریسی را یکبار جابجا کنیم، دترمینان ماتریس حاصل، **قرینه** دترمینان ماتریس اصلی است[3].

د) اگر سطر (یا ستونی) از ماتریسی را در اسکالر k ضرب کنیم، دترمینان ماتریس حاصل، k برابر دترمینان ماتریس اصلی است[4].

ه) دترمینان ماتریسی قطری با حاصلضرب درآیه‌های روی قطر اصلی‌اش بدست می آید[5]. این نکته برای ماتریس‌های بالا مثلثی یا پایین مثلثی هم درست است.

و) $|AB| = |A||B|, \quad |A| = |A^t|$

ز) $|A+B| \neq |A|+|B|$ در حالت کلی

---

[3] لذا دوبار جابجایی در بین سطرها (یا ستونها) عدد دترمینان را تغییر نمی‌دهد.

[4] و بنابر این نتیجه می‌گیریم $|kA_{n\times n}| = k^n|A|$.

[5] پس دترمینان ماتریس همانی از هر مرتبه ای، ۱ است.

تعریف ۲.۳. اگر $|A| \neq 0$، ماتریس A را **نامنفرد** می‌نامند.

مثال ۳.۳. ماتریس مثال ۲.۳، نامنفرد نیست.

برای مراتب بالاتر از ۳، رویه های متفاوتی در اختیار داریم که دو روش زیر قابل توجه است. در ادامه فرض می‌کنیم A یک ماتریس مربعی است.

۲.۱.۳ استفاده از همسازه‌ها

تعریف ۳.۳. به‌ازای درآیه a_{ij} عددی که به‌صورت زیر بدست می‌آید، **همسازه** نظیر a_{ij} نامیده می‌شود:[۶]

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}), \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n)$$

که درآن، M_{ij} زیرماتریسی است که از حذف (ظاهری) سطر iام و ستون jام ماتریس A بدست می‌آید.[۷]

مثال ۴.۳. برای نمونه در ماتریس A از مثال ۲.۳، داریم:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

با استفاده از همسازه های سطر اول و بوسیله بسط زیر،[۸] دترمینان A محاسبه می شود:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

این روش مبتنی بر رابطه (بازگشتی) فوق بوده و در اصل روشی تعریفی است. اگر به جای سطر اول از سطر دیگری(مثلاً k ام) استفاده کنیم آن‌گاه:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

مثلاً برای ماتریسهای 3×3 جمعوند فوق به شکل زیر مرتب می‌شود:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

---

[۶] به آن، **کوفاکتور** نظیر درآیه هم اندیس‌اش در ماتریس هم می‌گویند.
[۷] به این ماتریس **مینور** (کهاد) نظیر a_{ij} می‌گویند.
[۸] این فرمول منتسب به **لاپلاس** (۱۷۴۹–۱۸۲۷) ریاضیدان فرانسوی است.

و با شکلی بهتر:

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{علامتها مهم اند}}}{+} \; a\underbrace{\begin{vmatrix}\square&\square&\square\\ \square&e&f\\ \square&h&i\end{vmatrix}}_{\underbrace{\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}}_{\text{دترمینان یکی از زیر ماتریسها}}} \underset{\uparrow}{-} b \underbrace{\begin{vmatrix}\square&\square&\square\\ d&\square&f\\ g&\square&i\end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}} \underset{\uparrow}{+} c \underbrace{\begin{vmatrix}\square&\square&\square\\ d&e&\square\\ g&h&\square\end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}}$$

فضاهای خالی همان حذف های ظاهری برای یافتن مینورها است. و یا برای ماتریس ۴×۴ داریم:

$$\det(A) = +a_{۳۱}A_{۳۱} + a_{۳۲}A_{۳۲} + a_{۳۳}A_{۳۳} + a_{۳۴}A_{۳۴}$$

هر کدام از دو بسط فوق را بر اساس شماره سطری انجام دادیم. اولی را بر حسب سطر اول و در دیگری بسط بر اساس سطر سوم انجام شده است[۹]. اینکه کدام سطر را انتخاب کرده و بسط را بر اساس آن بنویسید، دلخواه است.

مثلاً همیشه $i = ۱$ را انتخاب کنید ولی پیشنهاد می‌شود k را شماره سطری بگیرید که در آن سطر حداکثر صفر دیده می‌شود و بدین ترتیب به محاسبات همسازه‌ای کمتری نیاز دارید.

مثال ۳.۵. مناسب ترین شکل بسط لاپلاس را برای محاسبه دترمینان ماتریس زیر یافته و سپس مقدار آنرا بدست می‌آوریم.

$$|H| = \begin{vmatrix} -۲ & ۴ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲\\ ۱ & ۱ & -۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۰ & ۰\end{vmatrix}$$

دو سطر دوم و چهارم دارای یک تعداد صفر هستند و بنابر این اولویتی بین انتخاب این سطرها نداریم. بسط را بر اساس سطر چهارم نوشته و جلو می‌رویم، داریم:

$$|H| = -h_{۴۱}H_{۴۱} + h_{۴۲}H_{۴۲} - h_{۴۳}H_{۴۳} + h_{۴۴}H_{۴۴}$$

[۹] در عمل، باید به یک در میان + و − شدن جملات بسط توجه کرده و به اندیس ها دقت کنید تا همسازه هر درآیه را با دیگری اشتباه نکنید.

ولی $h_{۴۳}H_{۴۳} = ۰$ و $h_{۴۴}H_{۴۴} = ۰$ (چرا؟) و لذا

$$|H| = -۲\underbrace{\begin{vmatrix} \square & ۴ & ۳ & ۰ \\ \square & ۱ & ۰ & ۲ \\ \square & ۱ & -۱ & ۲ \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} ۴ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۸} + ۲\underbrace{\begin{vmatrix} -۲ & \square & ۳ & ۰ \\ ۰ & \square & ۰ & ۲ \\ ۱ & \square & -۱ & ۲ \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} -۲ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۲} = -۱۶ + ۴ = -۱۲$$

به نظر می‌رسد استفاده از همسازه‌ها برای ماتریس‌های مراتب کوچکتر مناسب‌تر است.

۳.۱.۳ عملگرهای سطری مقدماتی

راه بدست آوردن دترمینان یک ماتریس فقط بوسیله تعریف و بکمک همسازه‌ها نیست. در عوض روشی با محاسبات نسبتاً کمتری که روی سطرها و بالتبع آن روی درآیه‌ها اثر می‌کند، می‌شناسیم.

در این روش اصل بر تغییرات درآیه‌ای به‌طوری است که یک حک و اصلاح کلی در شکل ماتریس پیدا شود. اگرچه دست کاری درآیه‌های ماتریس مجاز نیست اما، این روش کاملاً مجاز، قانونی و به تعداد دلخواه تا حصول نتیجه قابل انجام است.

تعریف ۴.۳. فرض کنیم A یک ماتریس دلخواه ، R_i و R_j دو سطر آن و k یک اسکالر (ترجیحاً ناصفر) است. هر یک از عمل‌های زیر که روی سطرهای ماتریس انجام می‌گیرد را یک **عمل سطری مقدماتی** روی ماتریس می‌نامند. در این عمل‌ها $i, j = ۱, \dots, n$ هستند:

الف) $R_i \longleftrightarrow R_j$ (جابجایی سطرهای iام و jام)

ب) $kR_i \longmapsto R_i$ (جایگزینی مضرب اسکالری از R_i با خودش)

ج) $kR_i + R_j \longmapsto R_j$ (جایگزین کردن یک مجموع با R_j)[۱۰]

با انجام هر یک از اعمال فوق، یک تغییر اساسی روی ماتریس اتفاق می‌افتد. مثلاً با تغییر $R_۱ \leftrightarrow R_۲$ روی ماتریس A ماتریسی بدست می‌آید که جای دو سطرش نسبت به ماتریس قبلی

[۱۰] این مجموع شامل مضربی از سطر iام و سطر jام بجهت تغییر در سطر jاست.

تعویض شده است:

$$\begin{array}{l} R_۱ \to \\ R_۲ \to \end{array} \overbrace{\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ -۵ & ۴ \end{pmatrix}}^{A} \xrightarrow{R_۱ \leftrightarrow R_۲} \underbrace{\begin{pmatrix} -۵ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}}_{\text{سطری مقدماتی شده ماتریس } A}$$

با انجام عمل دوم، تقریباً چیزی از سطر اصلی و در ماتریس بعدی (نتیجه شده) دیده نمی شود و بجای آن یک سطر جدید می‌بینیم. مثلاً با انجام $(۳/۲)R_۲ \mapsto R_۲$ روی ماتریس A داریم:

$$R_۲ \to \overbrace{\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ -۵ & ۴ \end{pmatrix}}^{A} \xrightarrow{(۳/۲)R_۲ \mapsto R_۲} \begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳/۲ \times -۵ & ۳/۲ \times ۴ \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱۵/۲ & ۶ \end{pmatrix}}_{\text{سطری مقدماتی شده ماتریس } A}$$

در دو مثال بالا، دو عملیات سطری اول و دوم فقط بین سطرهایی که می‌خواهید تغییر دهید، عمل می کنند و در ماتریس آخر، آن سطرهایی که در عملیات نیامده اند بدون تغییر به ماتریس سمت راست منتقل شده اند. حتماً به این نکته توجه داشته باشید!

عمل سوم کاربردی تر و جالب تر عمل می‌کند. مثلاً با اعمال $(-۱/۲)R_۱ + R_۳ \mapsto R_۳$ بر ماتریس B زیر به ماتریسی جدید می‌رسیم که فقط در مشابهت با B، در دو سطر اول و دوم یکسان است.

$$R_۳ \to \overbrace{\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۵ \\ ۳ & ۷ \end{pmatrix}}^{B} \xrightarrow{(-۱/۲)R_۱ + R_۳ \mapsto R_۳} \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۵ \\ \boxed{۲} & \boxed{۱۳/۲} \end{pmatrix}$$

اما توضیحی درباره آنچه در بالا اتفاق افتاده است.

اول اینکه:

$$\begin{array}{rcccl} \text{مضرب ساختیم } R_۱ \text{ از } \to & -۱ & -۱/۲ & \\ \text{قدیم } R_۲ \to & ۳ & ۷ & \\ & ---- & ---- & \\ \oplus & \boxed{۲} & \boxed{۱۳/۲} & \leftarrow \text{ جدید } R_۲ \end{array}$$

دوم اینکه وقتی از یک سطر مضرب می‌سازیم، خود آن سطر در ماتریس جدید بدون تغییر وارد می‌شود و بعلاوه اینکه با سطرهای دیگر (در اینجا سطر دوم) کاری نداریم و باید بدون تغییر

به نتیجه منتقل شوند (ماتریس دوم سمت راست را ببینید).

سوم اینکه، مضربی را که انتخاب می‌کنید، به هدف شما از تغییر یک درآیه بر می‌گردد و مطلقاً در هر مسئله متفاوت است.

دایره عملیاتی عمل سطری مقدماتی سوم بیشتر از دو دیگری بوده و متنوع تر است. به مثال هدفمند زیر توجه کنید:

مثال ۳.۶. فرض کنید بخواهیم درآیه $b_{۳۲}$ در ماتریس B بالا را به ۵- تبدیل کنیم. یعنی

$$۷ \longmapsto -۵$$

عمل اول می‌گوید، اگر دو سطر دوم و سوم را جابجا کنیم، ۷ به ۵- تبدیل می‌شود، ولی دو درآیه دیگر نیز جابجا می‌شوند. به آنها نیز توجه کنید:

$$B = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۵ \\ ۳ & ۷ \end{pmatrix} \xrightarrow{R_۲ \leftrightarrow R_۳} \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۷ \\ ۱ & -۵ \end{pmatrix}$$

بر طبق عمل دوم، می‌توان سطر سوم را در عدد $\frac{-۵}{۷}$ ضرب کنیم تا ۷ به ۵- بدل شود ولی درآیه هم سطر آنهم تغییر می‌کند. به آن نیز توجه کنید:

$$B = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۵ \\ ۳ & ۷ \end{pmatrix} \xrightarrow{(-۵/۷) R_۳ \longmapsto R_۳} \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۵ \\ -۵/۷ \times ۳ & -۵/۷ \times ۷ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۵ \\ -۱۵/۷ & -۵ \end{pmatrix}$$

برای استفاده از عمل سوم، سطر اول را در نظر می‌گیریم.[۱۱] عددی که می‌تواند در این سطر متناظر جمعی یا تفاضلی ۷ باشد، عدد ۱ است. یک ضریب چنان پیدا می‌کنیم تا بعد از ضرب در ۱ و سپس جمع آن با ۷ عدد ۵- را تولید کند، یعنی $-۵ = ۷ + (۱ \times x)$. لذا $x = -۵ - ۷ = -۱۲$.

[۱۱] چرا سطر اول؟ در این مثال فقط می خواهیم توانایی عمل سوم را نشان دهیم و لذا یک سطر را انتخاب کردیم. این که چه سطری را می‌گیریم دلخواه است ولی درادامه راهی را برای نحوه انتخاب صحیح به شکل یک قرارداد می‌آوریم.

اکنون بنابه فرم عمل سوم می‌بایستی یک دستور نوشته و آنرا روی B اِعمال کنیم:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{چون عدد ۱ در این سطر است}}}{-۱۲\ R_۱} + \overset{\substack{\text{چون عدد ۷ در این سطر است} \\ \uparrow}}{R_۳} \longmapsto R_۳$$

و لذا:

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۵ \\ ۳ & ۷ \end{pmatrix} \xrightarrow{(-۱۲)R_۱+R_۳\mapsto R_۳} \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۵ \\ -۲۱ & -۵ \end{pmatrix}$$

در مثال ۶.۳، استفاده مناسب از اعمال سطری مقدماتی، توانست تغییری که بدنبالش بودیم ایجاد کند اما، در مواقعی در تغییرات درآیه ای ناتوان هستند.

مثلاً فرض کنید قصدتان تبدیل به ۰ درآیه ۷ است. به وضوح، نه درآیه هم ستون با ۷ داریم که صفر باشد تا با عمل اول آنرا به جای ۷ بیاوریم و نه ضرب در صفر گزینه خوبی برای صفر کردن ۷ است[۱۲]. این نشان می‌دهد که تبدیل به صفر یک درآیه ماتریس بکمک عملگرهای سطری مقدماتی یک استثنا در این روش بوده و اَعمال اول و دوم توانایی بر انجام آن ندارند. اینجاست که با استفاده از عمل سوم و با کمک گرفتن از درآیه‌های بالا یا پایین (در اینجا بالا) درآیه مورد نظر را صفر می‌کنیم.

قرارداد ۱.۳. برای ایجاد صفر بجای یک درآیه دلخواه با کمک عمل سوم :

الف) از سطری مضرب مناسب می‌سازیم که هم شماره با ستون درآیه مورد نظر است.

ب) ایجاد صفر در یک ستون هیچ اولویتی برای انجام ندارد بعلاوه اینکه ایجاد صفر در یک ماتریس را ستون به ستون (از ستون اول تا به ستونی که لازم است) انجام می‌دهیم.

ج) در هر مرحله ای که جلو می‌رویم، ماتریس آخر حاصل شده، ملاک عملیات بعدی است و به تغییری هم که روی دیگر درآیه‌ها موقع انجام دستورات پیش می‌آید توجه نکنید.

د) قبل از تشکیل ماتریس جدید و ورود تغییرات انجام شده، ابتدا سطرهایی که هیچ تغییری درآنها مد نظر نبوده است را در ماتریس وارد کرده و سپس تغییرات را در سطر مورد نظر می‌نویسیم.

---

[۱۲] اصولاً ضرب در صفر در عمل دوم اگرچه صفر یک اسکالر است و اشکالی هم ندارد ولی بواقع این ضرب درآیه‌های دیگر را نیز پوچ می‌کند و این زیاد مورد نظر نیست!

❐

مثال ۷.۳. جایگاه درآیه‌های مشخص شده در ماتریس زیر را به صفر تبدیل می‌کنیم.

$$W=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & ۳ \\ -۲ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

برای ایجاد صفر در این ستون بنابه الف از سطر اول مضرب مناسب ساخته و لذا از ۱ شروع می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & ۳ \\ -۲ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \xrightarrow{(-۱/۲)R_۱+R_۳\mapsto R_۳} \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & ۳ \\ -۲ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳/۲ & ۱۱/۲ & -۱/۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccr} -۳/۲ & ۱/۲ & -۱/۲ & -۱ & : & (-۱/۲)R_۱ \\ ۱ & ۵ & ۲ & ۱ & : & R_۳ \\ \hline -۱/۲ & ۱۱/۲ & ۳/۲ & ۰ & : & \text{جدید } R_۳ \end{array}$$

جای ۲− در ستون اول را به صفر تبدیل می‌کنیم. توجه دارید که ماتریس سمت راست بالا شروع عملیات بعدی است.

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & ۳ \\ -۲ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳/۲ & ۱۱/۲ & -۱/۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \xrightarrow{R_۱+R_۲\mapsto R_۲} \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۳/۲ & ۱۱/۲ & -۱/۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccr} ۳ & -۱ & ۱ & ۲ & : & R_۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ & -۲ & : & R_۲ \\ \hline ۴ & ۰ & ۴ & ۰ & : & \text{جدید } R_۲ \end{array}$$

کار ستون اول تمام شد! در ستون دوم باید عدد $\frac{۳}{۲}$ (که قبلاً ۲− بوده) به صفر تبدیل شود. برای کار در ستون دوم، از سطر دوم مضرب می‌سازیم. چه عددی ۴ را به قرینه $\frac{۳}{۲}$ تبدیل می‌کند تا در صورت جمع مضربی از سطر دوم با سطر سوم؛ $\frac{۳}{۲}$ به صفر تبدیل شود؟ آنرا به‌شکل معادله درآورید:

$$۴\times x=-\tfrac{۳}{۲}\longrightarrow x=-\tfrac{۳}{۸}$$

پس:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3/2 & 11/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3/8R_2+R_3\mapsto R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 11/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccr} -3/2 & 0 & -3/2 & 0 & : & (-3/8)R_2 \\ -1/2 & 11/2 & 3/2 & 0 & : & R_3 \\ \hline -2 & 11/2 & 0 & 0 & : & \text{جدید } R_3 \end{array}$$

با تمام شدن تغییرات در دو ستون اول و دوم، فقط جایگاه عدد ۱ در ستون سوم باقی می‌ماند. برای صفر کردن آن از سطر سوم کمک می‌گیریم:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 11/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2/11R_3+R_4\mapsto R_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 11/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 26/11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccr} 4/11 & -1 & 0 & 0 & : & (-2/11)R_3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & : & R_4 \\ \hline 26/11 & 0 & 0 & 0 & : & \text{جدید } R_4 \end{array}$$

و به این نحو، درآیه‌های خواسته شده به صفر تبدیل شدند.

تذکر ۳.۲. در نحوه استفاده از عملیات سطری مقدماتی هیچ فرم منحصر به‌فردی وجود ندارد. در واقع می‌توان از این قواعد به صورتهای دیگری هم استفاده و نتیجه گرفت. در قرار داد بالا فقط یک نحوه از این موارد بیان شد. بعلاوه، تغییر دیگر درآیه‌ها در ماتریس وقتی نظر به تغییر یک درآیه خاص دارید اهمیتی ندارد. مهم اینست که با توجه به قواعد پذیرفته شده، از این عملگرها استفاده و تغییر را بروی درآیه مورد نظر ببینید.

تذکر ۳.۳. حداقل دو کاربرد برای عملیات سطری می‌توان بیان کرد. یکی، استفاده از آن برای یافتن دترمینان و دیگری در بدست آوردن معکوس ماتریس است. اولی را در ادامه بررسی کرده و کاربرد بعدی را در بخش وارون ماتریس خواهیم گفت.

۴.۱.۳ عملیات سطری مقدماتی و محاسبه دترمینان

در ابتدای بخش و خواص دترمینان بیان شد که، جابجایی دو سطر ماتریس، دترمینان ماتریس حاصل را قرینه ماتریس اصلی می‌کند:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{-7} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \overbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}^{+7}$$

این همان عمل سطر مقدماتی اول است. پس، اگر یکبار از عمل اول استفاده کنید، دترمینان ماتریس سطری مقدماتی شده، قرینه ماتریس قبلی‌اش خواهد شد. بعلاوه، ضرب یک اسکالر در یک سطر باعث ضرب شدن دترمینان اصلی در همان عدد می‌شود:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-7} \xrightarrow{\sqrt{3}R_1 \mapsto R_1} \overbrace{\begin{vmatrix} 3\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}^{-7\times\sqrt{3}}$$

این عمل سطر مقدماتی دوم است. یعنی با جایگزین کردن مضرب سطری بجای خودش، دترمینان ماتریس سطری مقدماتی شده، با ضرب همان مضرب در دترمینان ماتریس قبلی بدست می‌آید.

مثال ۸.۳. دترمینان ماتریس $G_{5\times5}$ برابر ۳− است. در هر مرحله، یک عمل سطری مقدماتی روی آن انجام شده تا به ماتریس G_3 در آخر تبدیل شده است. تغییرات عدد دترمینان را ملاحظه کنید:

$$\underset{\underset{-3}{\downarrow}}{G} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \underset{\underset{+3}{\downarrow}}{G_1} \xrightarrow[-2R_1 \mapsto R_1]{R_3 \leftrightarrow R_4} \underset{\underset{+6}{\downarrow}}{G_2} \xrightarrow{(\sqrt{5}/7)R_5 \mapsto R_5} \overset{\overset{(6\sqrt{5}/7)}{\uparrow}}{G_3}$$

ه) از مجموعه خواص دترمینان این نکته باقی مانده که: استفاده از عمل سطری مقدماتی سوم هیچ تغییری در دترمینان ماتریس ایجاد نمی کند هرچند ماتریس و درآیه هایش تغییر می کند و شما مکرراً از این عملگر استفاده کنید. فایده این مطلب اینست که مانند مثال ۷.۳، ماتریس را بالا مثلثی کرده و سپس با ضرب

درآیه‌های روی قطر اصلی، دترمینان را می‌یابیم. از این‌رو، دترمینان ماتریس W برابر است با

$$۲ \times ۴ \times \tfrac{۱۱}{۲} \times \tfrac{۲۶}{۱۱} = ۱۰۴$$

مثال ۹.۳. قصد داریم تا مقدار k را طوری بدست آوریم که تساوی زیر برقرار باشد:

$$\begin{vmatrix} ۲a_۱ & ۲a_۲ & ۲a_۳ \\ ۳b_۱ + ۵c_۱ & ۳b_۲ + ۵c_۲ & ۳b_۳ + ۵c_۳ \\ ۷c_۱ & ۷c_۲ & ۷c_۳ \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

برای شروع از ضرایب ۲ و ۷ در دترمینان سمت چپ در دو مرحله فاکتور می‌گیریم:

$$۲ \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ ۳b_۱ + ۵c_۱ & ۳b_۲ + ۵c_۲ & ۳b_۳ + ۵c_۳ \\ ۷c_۱ & ۷c_۲ & ۷c_۳ \end{vmatrix} = ۱۴ \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ ۳b_۱ + ۵c_۱ & ۳b_۲ + ۵c_۲ & ۳b_۳ + ۵c_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mapsto R_۳]{-۵R_۳} \tfrac{۱۴}{-۵} \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ ۳b_۱ + ۵c_۱ & ۳b_۲ + ۵c_۲ & ۳b_۳ + ۵c_۳ \\ -۵c_۱ & -۵c_۲ & -۵c_۳ \end{vmatrix} \xrightarrow[\mapsto R_۲]{R_۳+R_۲} \tfrac{۱۴}{-۵} \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ ۳b_۱ & ۳b_۲ & ۳b_۳ \\ -۵c_۱ & -۵c_۲ & -۵c_۳ \end{vmatrix}$$

حال در دو مرحله از ۵− و ۳ از سطرهای سوم و دوم فاکتور می‌گیریم:

$$\tfrac{۱۴}{-۵} \times (-۵) \times ۳ \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} = ۴۲ \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} \rightarrow k = ۴۲$$

۲.۳ تمرینات

۱. به ازای کدام مقدار b دترمینان ماتریس‌های

$$\overbrace{\begin{pmatrix} ۱ & b & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}}^{B} \begin{pmatrix} ۱ & b & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}^{t}$$

مخالف صفر است؟

۲. از روی ماتریس‌های

$$F=\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۴ \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix} -۳ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۹ & ۱۳ \\ ۲ & ۶ & ۱۰ & ۱۴ \\ ۳ & ۷ & ۱۱ & ۱۵ \\ ۴ & ۸ & ۱۲ & ۱۶ \end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \\ ۴ & ۰ \end{pmatrix}$$

موارد زیر را محاسبه کنید:

الف) $\dfrac{F^t}{\det F}\times\dfrac{N^t}{\det N}\times\dfrac{Q^t}{\det Q}$

ب) $\det(VV^t-۴I)$

ج) $\det[(F-NQ)^t]$

د) $|A|,\ \det(B^{۱۰۰}),\ \det(P^n)$

ه) $\mathrm{tr}(F-N^t+۳)$

و) $\det\left(\dfrac{P^۵}{۳}\right),\ \mathrm{tr}(U^tU)$

۳. اگر $A=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ m & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} ۵ & ۱ \\ -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$، m را طوری بیابید که $|BA|=۰$.

۴. معادلات زیر چند ریشه (حقیقی) دارند(از ساروس استفاده کنید)؟

الف) $\begin{vmatrix} ۱+x & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+x & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+x \end{vmatrix} = ۰$

ب) $\begin{vmatrix} x^{۲} & x & ۰ \\ x & ۰ & x \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۱$

ج) $\begin{vmatrix} ۱ & x & x^{۲} \\ ۱ & x^{۲} & x \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۱$

د) $\begin{vmatrix} ۱ & ۲x & -۱ \\ ۱ & -۲x & ۱ \\ ۱ & -۴x & ۲ \end{vmatrix} = ۰$

۵. چه رابطه خطی بین مقادیر دو دترمینان زیر برقرار است؟

$$k_{۱} = \begin{vmatrix} ۲ & a & ۳a \\ ۲ & ۲a & ۴a \\ ۲ & ۰ & ۵a \end{vmatrix}, \quad k_{۲} = \begin{vmatrix} ۳ & ۳a & a \\ ۴ & ۴a & a \\ ۵ & ۲a & a \end{vmatrix}$$

۶. برای اعداد b, a، مطلوبست دترمینان ماتریسی که با ضابطه $[ai+bj]_{۳\times۳}$ داده می‌شود.

۷. اگر $|A^t - ۵I| = ۴$ آن گاه مقدار $|A - ۵I|$ چیست؟

۸. در ماتریس زیر اگر مجموع تمام درآیه‌ها برابر با ۶ آن گاه مقدار مجهول را بیابید به شرطی که:

$$\begin{vmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{vmatrix} = ۸$$

۹. مجموع زیر را محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} a & b-۱ & c \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲a & -۱ & c \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۱ & -۴ & -۲ \end{vmatrix}$$

۱۰. اگر $\begin{vmatrix} a & ۱ & ۰ \\ a & ۲ & b \\ b & -b & b \end{vmatrix} = ۲$ باشد، مطلوب است $\begin{vmatrix} a+b & ۱-b & b \\ ۰ & ۱ & b \\ ۲ & -۲ & ۲ \end{vmatrix}$.

۱۱. شیب‌های دو خط زیر را بدست آورید.

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰, \qquad \begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۱۲. اگر در دترمینان زیر، عدد a را به $a + ۲$ تغییر دهیم، به مقدار دترمینان چه عددی افزوده می‌شود؟

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ & a \\ ۶ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}$$

۱۳. می‌دانیم $k = \begin{vmatrix} ۱ & a & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ a & ۱ & ۲ \end{vmatrix}$. مطلوب است $\begin{vmatrix} ۱ & a & ۲ \\ ۲a & ۲ & ۴ \\ ۰ & -(۱+a) & -۲ \end{vmatrix}$ بر حسب k.

۱۴. اگر $A^t = -A^۲$ و A نامنفرد باشد حاصل $|A^۴|$ را بیابید.

۱۵. به درآیه $a_{۲۳}$ از ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ چه عددی بیافزائیم تا به مقدار $|A|$، ۷ واحد افزوده شود؟

۱۶. دترمینان $\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix}$ چه مقداری است اگر $x + y + z = ۰$ باشد.

۱۷. فرض کنید $A = [(i-j)^۲]_{۳\times۳}$ باشد، دترمینان $\left|\frac{۱}{۲}AA^t\right|$ را بیابید.

۱۸. اگر به درآیه‌های سطر دوم و ستون اول ماتریس

$$\begin{pmatrix} x & x+۱ & x+۲ \\ ۲x & ۲x+۱ & ۲x+۲ \\ x+۲ & x+۱ & x \end{pmatrix}$$

عدد ۲ را اضافه کنیم، دترمینان ماتریس بدون تغییر باقی می‌ماند. مقدار x کدامست؟

۱۹. برای دو ماتریس زیر، حاصل $\det\left(A^{۱۴۰۰}B^{۱۴۰۰}\right)$ را بدست آورید.

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} ۱ & -\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & ۱ \end{pmatrix}$$

۲۰. اگر $A\neq \mathbf{0}$ و $k\in\mathbb{R}$ باشد به‌طوری‌که $A^t=kA$ باشد مقدار k چیست؟

۲۱. اگر در $\begin{vmatrix} ۲ & ۴ & ۳ \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۲ & a \end{vmatrix}$ به a، ۳ واحد اضافه کنیم، به مقدار دترمینان چه عددی افزوده می‌شود؟

۲۲. وقتی $c\neq ۰$ از معادله زیر چه رابطه‌ای بین مجهولات برقرار است؟

$$\begin{vmatrix} ۱ & a+۱ & b+۱ \\ -a & ۰ & c \\ -b & -c & ۰ \end{vmatrix}=۰$$

۲۳. فرض کنیم به‌ازای ماتریس A، $AA^t=\begin{pmatrix} ۵ & ۳ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۰ \\ a & b & ۱ \end{pmatrix}$. مقدار $|A|$ چه عددی است؟

۲۴. اگر $A=\begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} ۷ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix}$ باشند، حاصل $|A+B|+|A^t+B^t|$ چیست؟

۲۵. دترمینان ماتریس AA^t+A^tA چیست اگر $A=\begin{pmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & -۳ \end{pmatrix}$؟

۲۶. اگر $A=\begin{pmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ a & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ و $B=AA^t$ باشد، آن‌گاه به‌ازای کدام مقادیر a، $|B|$ منفی است؟

۲۷. ماتریس زیر را به شکل مجموعی از دو ماتریس متقارن و پادمتقارن نوشته و سپس دترمینان ماتریس متقارن را بدست آورید.

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۵ & ۴ \\ -۳ & ۶ & -۱ \end{pmatrix}$$

۲۸. اگر برای $A_{۳\times۳}$، $|A|=-۲$ باشد، حاصل $\left|\dfrac{-۲A^۳A^t}{۷}\right|$ چیست؟

۲۹. معادله $\begin{vmatrix} a^{۳} & b^{۳} & x^{۳} \\ a^{۲} & b^{۲} & x^{۲} \\ a & b & x \end{vmatrix} = ۰$ در فاصله $۰ < b < a$ چند ریشه دارد؟

۳۰. معادله زیر چند ریشه متمایز دارد؟

$$\begin{vmatrix} a-۲ & ۴ & ۱ \\ ۴ & a-۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ & a-۲ \end{vmatrix} = ۰$$

۳۱. ماتریس A زیر داده شده است. به تمام درآیه‌های سطر اول A، ۵ واحد اضافه کرده و سطر سوم A را دو برابر کرده و حاصل را B می‌نامیم. مطلوب است $\dfrac{|B|}{|A|}$.

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۴ & c \\ a & b & c \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{pmatrix}$$

۳۲. مختصات نقطه‌ای را ارائه دهید که روی خط $\begin{vmatrix} x & y & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۲ \end{vmatrix} = ۰$

۳۳. اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ باشند، آن‌گاه $|BA| + |BA|$ چیست؟

۳۴. برای ماتریس زیر حاصل $\left|\frac{۱}{۲}(A^{۴} - A^{۳})\right|$ را بدست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

۳۵. حاصل محاسبات زیر چه عددی است؟

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۴ & ۱ & ۵ \\ ۵ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۵ & ۴ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۴ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۶ & ۷ \\ ۱ & ۵ & ۴ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}$$

۳۶. اولاً درستی تساوی زیر را تحقیق کرده و سپس با ایده‌ای که از آن می‌گیرید، شکل دترمینانی

ماتریسی را حدس بزنید که حاصلش، عبارت $ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ شود.

$$\begin{vmatrix} x & ۰ & c \\ -۱ & x & b \\ ۰ & -۱ & a \end{vmatrix} = ax^{۲}+bx+c$$

۳۷. درستی یا نادرستی تساوی $\det(AB)=\det(BA)$ را درباره دو ماتریس زیر تحقیق کنید.

$$A=\begin{pmatrix} x & ۰ & c \\ -۱ & x & b \\ ۰ & -۱ & a \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} x & ۰ & c \\ -۱ & x & b \\ ۰ & -۱ & a \end{pmatrix}$$

۳۸. دترمینان دو ماتریس زیر را بکمک بسط لاپلاس بیابید.

$$A=\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۳ \\ -۶ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} ۱ & -۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}$$

۳۹. هرکدام از دستورهای زیر را روی ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ اثر داده و دترمینان ماتریس حاصل را بدست آورید.

الف) $R_۱ \overset{①}{\longleftrightarrow} R_۲,\ R_۲ \overset{②}{\longleftrightarrow} R_۲,$ ب) $۲R_۱ \mapsto R_۱,$ ج) $R_۱ \leftrightarrow R_۲$

۴۰. ماتریس زیر مفروض است:

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۵ \end{pmatrix}$$

با توجه به هر یک از دستورهای زیر، ماتریس‌هایی بدست می‌آیند (انتهای هر فلش). دترمینان هر یک را بدون یافتن خود ماتریس، بدست آورید.

الف) $A \xrightarrow{R_۲\leftrightarrow R_۱} B \xrightarrow{۲R_۳\mapsto R_۳} C \xrightarrow{-R_۱+R_۲\mapsto R_۲} D \xrightarrow{R_۲\leftrightarrow R_۳} E \xrightarrow{-R_۳+R_۲\mapsto R_۲} F$

ب) $A \xrightarrow{-۲R_۱\mapsto R_۱} B \xrightarrow{R_۳+R_۲\mapsto R_۲} C \xrightarrow{-R_۱\mapsto R_۱} D \xrightarrow{R_۲\leftrightarrow R_۳} E$

ج) $A \xrightarrow{R_۱\leftrightarrow R_۳} B \xrightarrow{-R_۳+R_۲\mapsto R_۲} C \xrightarrow{R_۲\leftrightarrow R_۱} D$

۴۱. الف) در ماتریس زیر و بوسیله اعمال سطری، هرکدام از درآیه‌های خواسته شده را بترتیب از چپ براست به عدد مطلوب (انتهای فلش) تبدیل کنید[۱۳].

$$a_{۱۱} \to ۴, \quad a_{۳۱} \to ۳, \quad a_{۳۲} \to ۰, \quad a_{۲۳} \to -۱, \quad a_{۲۲} \to ۲$$

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$$

ب) در هر کدام از موارد ذیل، از روی ماتریس سمت چپ با استفاده از یک عمل سطری مقدماتی مناسب ماتریس سمت راست بدست آمده است. عمل سطری را حدس زده و سپس جای خالی را با عددی درست پر کنید.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۵ & -۲ & ۴ \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & \square & -۱ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۳ & ۱۲ \\ ۱۸ & -۸ & ۴ \end{pmatrix} \longrightarrow C = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & \square \\ ۱۸ & -۸ & ۴ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \longrightarrow D = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ \square & ۱ & -۳ \end{pmatrix}$$

۴۲. ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ را بکمک عملیات سطری به ماتریسی بالا مثلثی تبدیل کنید.

۴۳. برای ماتریس $A = \begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۵ \end{pmatrix}$ موارد زیر را جداگانه در نظر بگیرید:

الف) $a_{۱۱} = ۱ \mapsto -۲$

ب) $a_{۲۱} = ۳ \mapsto ۰$

ج) $a_{۲۲} = ۰ \mapsto +۲$

د) $a_{۲۳} = ۴ \mapsto ۰$

[۱۳] روش منحصر به‌فرد نیست.

اکنون مشخص کنید، کدامیک از دستورهای زیر، موارد بالا را (جداگانه) بطور خواسته شده انجام می‌دهد؟

$(a)\ \ R_1+R_2 \overset{1}{\mapsto} R_2, \quad R_2 \overset{2}{\leftrightarrow} R_3$

$(b)\ \ -R_1+R_2 \mapsto R_2$

$(c)\ \ -R_2+R_1 \mapsto R_1$

$(d)\ \ -3R_1+R_3 \overset{1}{\mapsto} R_3, \quad R_1 \overset{2}{\leftrightarrow} R_2$

$(e)\ \ R_3+R_2 \mapsto R_2$

$(f)\ \ R_1 \overset{1}{\leftrightarrow} R_3, \quad -R_3+R_1 \overset{2}{\mapsto} R_1$

$(g)\ \ 4R_1+R_2 \mapsto R_2$

۴۴. معادلات زیر چند ریشه (حقیقی) دارند(از اعمال سطری استفاده کنید)؟

الف) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$ ب) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

ج) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$ د) $\begin{vmatrix} 1 & 2x & -1 \\ 1 & -2x & 1 \\ 1 & -4x & 2 \end{vmatrix} = 0$

ه) $\begin{vmatrix} 0 & x & x+1 \\ 1 & 0 & -x \\ x^2-1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$ و) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x \end{vmatrix} = 0$

ز) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$ ح) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

۴۵. دترمینان ماتریس زیر چیست؟

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m^2+1 & 5m \\ -m^2-1 & 0 & 7m-4 \\ -5m & 4-7m & 0 \end{pmatrix}$$

۴۶. اگر $k=\begin{vmatrix}-a & b & ۰\\ -۱ & +b & a\\ a & -b & b\end{vmatrix}$ باشد، مطلوب است $\begin{vmatrix}b+a & ۱ & ۰\\ -b-۱ & -۱ & -۲a\\ -a-b & -۱ & ۲b\end{vmatrix}$.

۴۷. اگر $-۲=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}$ باشد، مطلوب است $\begin{vmatrix}a & -۲b & c\\ -۲a' & ۶b' & -۲c'\\ a'' & -۲b'' & c''\end{vmatrix}$.

۴۸. اگر $k=\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۴\\ a & b & ۱\\ ۲ & ۵ & ۱\end{vmatrix}$ باشد، مطلوب است مقدار $\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۴\\ ۲ & ۵ & ۱\\ a & b & -۱\end{vmatrix}$.

۴۹. اگر $A=\begin{pmatrix}۱ & a & ۰\\ -۲ & ۳ & ۱\end{pmatrix}$ باشد، به‌ازای کدام مقدار a، $|AA^t|\neq ۰$

۵۰. مقدار دترمینان‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\begin{vmatrix}a-۱ & ۲ & ۳\\ a+۲ & -۱ & ۳\\ a-۳ & ۶ & ۱\end{vmatrix}$ ب) $\begin{vmatrix}۰ & ۰ & a & b\\ ۰ & ۰ & c & d\\ a & b & ۰ & ۰\\ c & d & ۰ & ۰\end{vmatrix}$ ج) $\begin{vmatrix}a & a & a\\ ۲ & ۳ & ۱\\ ۰ & ۰ & a\end{vmatrix}$

د) $\begin{vmatrix}a & ۰ & a\\ ۲ & -a & ۳\\ ۴ & ۰ & ۵\end{vmatrix}$ ه) $\begin{vmatrix}۰ & a & a\\ a & ۰ & a\\ a & a & ۰\end{vmatrix}$ و) $\begin{vmatrix}۱ & -b & ۱ & -d\\ ۱ & b & c & d\\ ۱ & b & c & d\\ ۱ & b & -۱ & d\end{vmatrix}$

ز) $\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{vmatrix}$ ح) $\begin{vmatrix}۰ & a & ۰\\ ۱ & b & ۱\\ b & c & a\end{vmatrix}$

۵۱. اگر $a+b+c=-۵$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix}a & b & c+۲\\ a & b+۲ & c\\ a+۲ & b & c\end{vmatrix}$ را بدست آورید.

۵۲. اگر $\begin{vmatrix} y & z & 0 \\ x & 0 & z \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = k$ باشد، مطلوب است مقدار زیر

$$\begin{vmatrix} (y^2+z^2) & xy & xz \\ xy & (x^2+z^2) & yz \\ xz & yz & (x^2+y^2) \end{vmatrix}$$

۵۳. با بکارگیری اعمال سطری مقدماتی به‌طور مناسب دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ب) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

ج) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

د) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

ه) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

و) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

ز) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 8 & 5 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 6 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

ح) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$

۵۴. نشان دهید تساوی‌های زیر همگی درست هستند (از خواص دترمینان کمک بگیرید).

الف) $\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$

ب) $\begin{vmatrix} ۱ & x & x^۲ \\ ۱ & y & y^۲ \\ ۱ & z & z^۲ \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

ج) $\begin{vmatrix} ۱ & \log(x) & \log(yz) \\ ۱ & \log(y) & \log(xz) \\ ۱ & \log(z) & \log(xy) \end{vmatrix} = ۰$

د) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ a & a+x & x \\ a & x & a+x \end{vmatrix} = a^۳$

ه) $\begin{vmatrix} y+z & x & x \\ y & x+z & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix} = ۴xyz$

و) $\begin{vmatrix} ۱ & ۱+a & a^۲(b+c) \\ ۱ & ۱+b & b^۲(a+c) \\ ۱ & ۱+c & c^۲(a+b) \end{vmatrix} = ۰$

ز) $\begin{vmatrix} zy & x^۲ & x^۲ \\ y^۲ & xz & y^۲ \\ z^۲ & z^۲ & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} zy & xy & xz \\ xy & xz & zy \\ xz & zy & xy \end{vmatrix}$

ح) $\begin{vmatrix} ۰ & x & y \\ -x & ۰ & -z \\ -y & z & ۰ \end{vmatrix} = ۰$

ط) $\begin{vmatrix} a & ۱ & c \\ ۹ & ۲۱ & ۳ \\ ۶-۲a & ۱۲ & ۲-۲c \end{vmatrix} = ۰$

ی) $\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ x-۲ & y-۲ & z-۲ \\ x & y & z \end{vmatrix} = ۰$

ک) $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+x & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+y & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱+z \end{vmatrix} = xyz$

ل) $\begin{vmatrix} ۱+a & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+b & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+c \end{vmatrix} = abc\left(۱+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)$

م) $\begin{vmatrix} a & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & a & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & a & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & a \end{vmatrix} = (a+۳)(a-۱)^۳$

ث) $\begin{vmatrix} bc & ac & ba \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = 0$

ن) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

ع) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ p & q & r & s & t \\ u & v & w & x & y \end{vmatrix} = 0$

۵۵. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x-2 & 3 \\ x & x+1 & x \end{vmatrix} = 3$

ب) $\begin{vmatrix} -x & 2 & 1-x \\ 3 & -x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = 7$

ج) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x & -1 \\ 4 & x & -2 \end{vmatrix} = 2$

د) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 27$

ه) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & x^2 & -x \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$

و) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ x & 0 & -x \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$

ز) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & -1 \\ 0 & x & 2 & x-1 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 1$

ح) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & x & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

ط) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4x$

ی) $\begin{vmatrix} \frac{1+x+2x^2}{x} & 1/x & 1 \\ x & \frac{2+x+x^2}{x} & 1 \\ x & 1/x & \frac{1+2x+x^2}{x} \end{vmatrix} = 1$

۵۶. در دترمینانهای زیر چه رابطه‌ای بین متغیرها وجود دارد؟

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ 5 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+1 & y+2 & z+3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

۵۷. اعمال سطری زیر را بترتیب روی ماتریس A اعمال کرده و tr ماتریس‌های نتیجه را بدست آورید.

$$A=\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۷ \\ ۰ & ۴ & -۲ \\ ۵ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$

الف) $A \xrightarrow{-R_۱ \mapsto R_۱} B \xrightarrow{R_۲ \leftrightarrow R_۳} C \xrightarrow{R_۱+R_۲ \mapsto R_۲} D$

ب) $A \xrightarrow{۲R_۲+R_۳ \mapsto R_۳} B \xrightarrow{(۱/۲)R_۱ \mapsto R_۱} C \xrightarrow{(-۵/۲)R_۱+R_۳ \mapsto R_۳} D$

۵۸. ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ را با اعمال سطری مناسب به ماتریس‌های زیر تبدیل کنید.

$$B_۱=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}, \quad B_۲=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}, \quad B_۳=\begin{pmatrix} ۳ & ۵ & ۷ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$$

۵۹. اگر در ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & y \\ ۱ & x & ۰ \end{pmatrix}$، رابطه $A_{۲۳}+A_{۳۲}=۱$ برقرار باشد، چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟

۶۰. مجموع همسازه‌های نظیر درآیه‌های ستون دوم ماتریس زیر کدام است؟

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & -۱ & -۲ \end{pmatrix}$$

۶۱. با فرض ماتریس‌های زیر مقادیر مجهول را بدست آورید.

الف) $A=\begin{pmatrix} ۵ & ۳ & -۱ \\ -۲k & ۰ & ۶ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix}, \quad A_{۲۲}=-۳۶$

ب) $B=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -a \\ a & ۵ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad B_{۲۲}=-۱$

ج) $C = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ u & ۵ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}, \quad C_{۳۱} = ۲$

۶۲. مجموع همه همسازه‌های ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ a & ۴ \end{pmatrix}$ صفر است. دترمینان ماتریس را بدست آورید.

۶۳. در ماتریس $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ مطلوب است $(A_{۲۱} + A_{۲۲} + A_{۲۳})^{۲}$.

۶۴. مجموع درآیه‌های ستون دوم ماتریس الحاقی ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ را بدست آورید.

۶۵. برای یک ماتریس منفرد A از مرتبه ۳ (که مثال می‌زنید)، تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\det\left[\left(\left(A^*\right)^*\right)^*\right] = |A|^{۸}$$

۱.۲.۳ جواب و راهنمایی‌ها

۱. چون $\det(BB^t) = ۵b^۲ + ۱۲b + ۱۰$ و Δی معادله $۵b^۲ + ۱۲b + ۱۰ = ۰$ همواره منفی است لذا هر مقداری را می‌توان برای b انتخاب کرد. **۲.** برای **الف** داریم:

$$\frac{F^t}{\det F} \times \frac{N^t}{\det N} \times \frac{Q^t}{\det Q} = \frac{\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -۳ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}}{۴ \times ۶ \times -۳}$$
$$= \frac{\begin{pmatrix} -۱۳ & ۷ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix}}{-۷۲}$$

۳. بوضوح مجبورید تا ماتریس BA را محاسبه کنید:

$$BA = \begin{pmatrix} ۱۰ + m & ۷ & ۲۱ \\ -۲ & -۱ & -۴ \\ ۲ + ۲m & ۵ & ۶ \end{pmatrix}$$

۴. برای **ج** حاصل دترمینان برابر است با $p = x^۲ + x^۴-$ و لذا باید روی حل معادله دومجذوری $p = ۱$ فکر کنید.

۵. $k_۱ = -۲k_۲$. **۶.** با راهنمایی‌هایی که در فصل نخست شد، ماتریس مورد نظر برابر است با

$$\begin{pmatrix} a + b & a + ۲b & a + ۳b \\ ۲a + b & ۲a + ۲b & ۲a + ۳b \\ ۳a + b & ۳a + ۲b & ۳a + ۳b \end{pmatrix}$$

۸. $x = \pm ۲$. **۹.** مجموع برابر است با $۴b - ۶a-$ و بستگی به مقدار c ندارد.

۱۱. شیب خط (سمت چپ) برابر است با $m = ۴$.

۱۲. دترمینان ماتریس برابر است با $۲۰a - ۱۲۷$ که با تبدیل شدن a به $a + ۲$ این عدد به $۲۰a - ۸۷$ تغییر می‌کند. بعلاوه می‌توانیم به شکل زیر هم اقدام کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ & a + ۲ \\ ۶ & -۲ & ۳ \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ & a \\ ۶ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}}_{۲۰a - ۱۲۷} + \underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۵ & ۲ & ۲ \\ ۶ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}}_{+۴۰} = ۲۰a - ۸۷$$

.۱۳

$$\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & a & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ a & ۱ & ۲ \end{vmatrix}}_{=k} \xrightarrow{R_۱ \leftrightarrow R_۳} \underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & a & ۲ \\ a & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}}_{=-k} \xrightarrow{۲R_۲ \to R_۲} \underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & a & ۲ \\ ۲a & ۲ & ۴ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}}_{=-۲k}$$

$$\xrightarrow{R_۱ + R_۳ \to R_۳} \underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & a & ۲ \\ ۲a & ۲ & ۴ \\ ۰ & a+۱ & ۲ \end{vmatrix}}_{=-۲k} \xrightarrow{-R_۳ \to R_۳} \begin{vmatrix} ۱ & a & ۲ \\ ۲a & ۲ & ۴ \\ ۰ & -(۱+a) & -۲ \end{vmatrix} = ۲k$$

.۱۵ چون

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۲+x \\ ۴ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}}_{۲} + \underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ & x \\ ۴ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}}_{۷x}$$

و می‌خواهیم به $|A| = ۲$، عدد ۷ واحد افزوده شود پس $۷x = ۷$ و این یعنی $x = ۱$.

.۱۶ می‌دانیم

$$\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & y & z \\ ۰ & a+y & z \\ ۰ & y & a+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix}$$

اولین دترمینان بعد از مساوی برابر است با $a\Big((a+y)(a+z)-yz\Big)$ و برای دترمینان دیگر داریم:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & ۰ & z \\ x & a & z \\ x & ۰ & a+z \end{vmatrix}$$

ولی

$$\begin{vmatrix} x & ۰ & z \\ x & a & z \\ x & ۰ & a+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & ۰ & ۰ \\ x & a & ۰ \\ x & ۰ & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & ۰ & z \\ x & a & z \\ x & ۰ & z \end{vmatrix} = a^۲x + ۰$$

لذا دترمینان خواسته شده برابر است با $a^۲(a+x+y+z)$ که با فرض داده شده مساوی است

با $a^{۳}$. **۱۸.** از این راهنمایی کمک بگیرید که:

$$\begin{vmatrix} x & x+۱ & x+۲ \\ ۲x & ۲x+۱ & ۲x+۲ \\ x+۲ & x+۱ & x \end{vmatrix} = ۰$$

۱۹. با کمی دقت داریم:

$$A^{۴k} = \begin{pmatrix} ۲^{۲k} & ۰ \\ ۰ & ۲^{۲k} \end{pmatrix}$$

که در آن k زوج است. با یافتن چنین الگویی برای ماتریس B و استفاده از خواص دترمینان، مقدار خواسته شده بسادگی بدست می‌آید. توجه کنید $۳۵۰ \times ۴ = ۱۴۰۰$.

۲۰. از خواص دترمینان استفاده کنید. مقدار k از حل معادله $k^n = ۱$ بدست می‌آید. **۲۲.** رابطه مورد نظر $b = a + c$ است. **۲۵.** توجه کنید برای ماتریس‌های مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$:

$$|kA| = k^n|A| \quad , \quad |AB| = |A||B| \quad , \quad |A| = |A^t|$$

در اینجا A ماتریس متقارن است یعنی $A = A^t$ پس:

$$|AA^t + A^tA| = |۲AA^t| = ۴|A||A^t| = ۴|A|^{۲} = ۴ \times ۹ = ۳۶$$

۲۸. $|-\frac{۲}{۷}A^{۳}A^t| = (-\frac{۲}{۷})^{۳}|A^{۳}||A^t| = \frac{-۸}{۳۴۳}|A^{۳}| \times |A| = \frac{-۸}{۳۴۳} \times \underbrace{|A|^{۴}}_{(-۲)^{۴}} = \frac{-۱۲۸}{۳۴۳}$.

۲۹. با کمی محاسبات طولانی و البته فاکتورگیری مناسب، دترمینان ماتریس عبارت است از:

$$abx(b-x)(a-x)(a-b)$$

۳۰. دترمینان به‌شکل $(a-۶)(a^{۲}-۹)$ در می‌آید. **۳۱.** $\frac{|B|}{|A|} = ۲$.

۳۲. کافی است $x = ۱$ و $y = ۲$ یا $x = ۲$ و $y = ۵$ اختیار شوند (چرا؟). این نقاط منحصر به‌فرد نیستند. **۳۳.** داریم: $A^{۴} - A^{۳} = \begin{pmatrix} ۵۰ & ۸ & ۳۲ \\ ۴۰ & ۱۰ & ۲۴ \\ ۱۳۶ & ۱۶ & ۹۰ \end{pmatrix}$.

۳۶. ماتریس مورد نظر عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} x & ۰ & ۰ & d \\ -۱ & x & ۰ & c \\ ۰ & -۱ & x & b \\ ۰ & ۰ & -۱ & a \end{pmatrix}$$

۴۲.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow{R_۱ \leftrightarrow R_۲} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{pmatrix} \xrightarrow{-۳R_۱ + R_۲ \to R_۲} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۲ & -۳ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(۲/۳)R_۲ + R_۳ \to R_۳} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۳ & -۲ \\ ۰ & ۰ & -۱/۳ \end{pmatrix}$$

۴۴. برای **الف**، $x = -۳$ و $x = ۰$، برای **د**، به‌ازای هر مقدار x، دترمینان صفر و برای **ز**، $x = ۲$ و $x = ۰$ بدست می‌آیند.

۴۵. به عنوان یک نکته، دترمینان ماتریس مرتبه ۳ که روی قطر اصلی آن صفر است به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{vmatrix} ۰ & a & b \\ c & ۰ & d \\ e & f & ۰ \end{vmatrix} = fbc + aed$$

نتیجه اینکه دترمینان یک ماتریس ۳×۳ پادمتقارن همواره صفر است.

۴۶. به مراحل زیر دقت کنید:

$$\begin{vmatrix} b+a & ۱ & ۰ \\ -b-۱ & -۱ & -۲a \\ -a+b & -۱ & ۲b \end{vmatrix} \xrightarrow[b \neq ۰]{bC_۲ \to C_۲} (۱/b) \begin{vmatrix} b+a & b & ۰ \\ -b-۱ & -b & -۲a \\ -a+b & ۰b & ۲b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-۱/۲)C_۲ \to C_۳]{-R_۲ \to R_۲} (-۲/b) \begin{vmatrix} b+a & b & ۰ \\ b+۱ & +b & +a \\ -a+b & -b & b \end{vmatrix} \xrightarrow{-C_۱ + C_۲ \to C_۱}$$

$$(۲/b) \underbrace{\begin{vmatrix} -a & b & ۰ \\ -۱ & b & a \\ +a & -b & b \end{vmatrix}}_{=k} = \frac{+۲k}{b}$$

۴۸. به مراحل زیر دقت کنید:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 1\\ a & b & 1+x\end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ a & b & 1+x\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}\\ &= -\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ a & b & 1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}}_{=k} - \underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ a & b & x\\ 2 & 5 & 0\end{vmatrix}}_{=-x}\end{aligned}$$

حال قرار دهید $x=-2$. **۵۰.** به عنوان یک نکته می‌پذیریم

$$\underbrace{\begin{vmatrix}A & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A\end{vmatrix}}_{n\times n} = |A|^2$$

که در آن A ماتریسی $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$ است. از این‌رو جواب قسمت **ب** برابر است با $(ad-bc)^2$. درباره قسمت **ز**، اگر سطر دوم و سوم را جمع کرده و بجای سطر سوم بگذاریم داریم:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a+b+c & a+b+c & a+b+c\end{vmatrix} = (a+b+c)\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}_{=0} = 0$$

برای قسمت **و** به آنچه با توجه به خواص دترمینان بدست می‌آید دقت کنید:

$$\begin{vmatrix}1 & -b & -1 & -d\\ 1 & b & c & d\\ 1 & b & c & d\\ 1 & b & -1 & d\end{vmatrix} = b^4c^2d^4\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 0$$

۵۲. k^2.

۵۳. برای قسمت **و** داریم:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -4\end{vmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} -\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -4\end{vmatrix} \xrightarrow[R_1+R_2\to R_2]{-2R_1+R_3\to R_3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2+R_3\to R_3} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1/2)R_3\to R_3}$$

$$-2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1/2)R_3\to R_3} -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 \end{vmatrix} = -5$$

به عنوان یک نکته، برای ماتریس مرتبه n:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \cdots & a \\ a & a & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & & \vdots \\ a & a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)a^n$$

و لذا دترمینان مورد **ح** مساوی است با $3\times(-1)^{n-2}(n-2)3^{n-1}$.

۵۴. برای **ب** داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}}_{-R_1+R_2\to R_2}$$

$$= (y-x)(z-x)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix}}_{=(z-y)}$$

برای **ج** از خواص لگاریتم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & \log(x) & \log(yz) \\ 1 & \log(y) & \log(xz) \\ 1 & \log(z) & \log(xy) \end{vmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_2\to R_2]{-R_1+R_3\to R_3} \begin{vmatrix} 1 & \log(x) & \log(yz) \\ 0 & \log(\frac{y}{x}) & \log(\frac{x}{y}) \\ 0 & \log(\frac{z}{z}) & \log(\frac{x}{z}) \end{vmatrix}$$

$$= \log\left(\tfrac{y}{x}\right)\log\left(\tfrac{x}{z}\right) - \log\left(\tfrac{z}{x}\right)\log\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

برای **د** داریم:

$$\begin{vmatrix} a & x & x \\ a & a+x & x \\ a & x & a+x \end{vmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_2\to R_2} \begin{vmatrix} a & x & x \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \overset{\text{ماتریس بالا مثلثی}}{\underset{\text{است}}{=\!=\!=}} a^3$$

برای **ه** داریم:

برای **ی** داریم:

$$\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ x-2 & y-2 & z-2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x-2 & y-2 & z-2 \end{vmatrix} = 0$$

درباره **ح** ، ماتریس پادمتقارن است.

۵۵. برای **الف**، معادله $x(x-2)-3(x+1)=0$ را حل کنید. برای **ز** داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & -1 \\ 0 & x & 2 & x-1 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ x & 2 & x-1 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_2\to R_2} \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-x\,R_1+R_3\to R_3} -\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1-x^2 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = 1+x-x^3.$$

۴

وارون ماتریس (معکوس)

بحثی که در ادامه می‌آید با موضوع دترمینان بسیار مرتبط است. شاید از خود پرسیده باشید معنای تقسیم دو ماتریس چیست؟ آیا چنین شکل‌های مستطیلی را می‌توان برهم تقسیم کرد؟ مسلماً آن تلقی که به‌طور مستقیم از تقسیم دو عدد داریم درباره ماتریس‌ها نمی‌تواند کارساز باشد. کار را به‌نحو دیگری جلو می‌بریم.

معادله $ax = b$ که در آن a, b و x اعداد حقیقی هستند، داده شده است. همانطور که در زیر آمده است، تحت شرط $a \neq ۰$ جواب $x = b/a$ تنها جواب معادله است:

$$ax = b \Rightarrow \frac{۱}{a}(ax) = \frac{۱}{a}(b) \Rightarrow \left(\frac{۱}{a}(a)\right) = \frac{b}{a} \Rightarrow ۱ \times x = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a} \qquad (۱.۴)$$

از طرفی

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{۱}{a}\right) b = a^{-۱} b \qquad (۲.۴)$$

که نشان می‌دهد شرط $a \neq ۰$ چقدر اهمیت دارد. ضمن اینکه شما در (۲.۴) تقسیم را به ضرب تبدیل کرده‌اید!

حال معادله فوق را بر حسب ماتریس‌ها بصورت $AX = B$ می‌نویسیم. اگر بتوان روند (۱.۴) را شبیه سازی کرد آن‌گاه:

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-۱} B \qquad (۳.۴)$$

که در آن منظور از $A^{-۱}$ همانی است که می‌بایست از معکوس $a^{-۱}$ بفهمیم با فرق اینکه $A^{-۱}$ برای

یک ماتریس A نمادین شده است. این استدلال کوتاه توضیح داد که چرا باید دنبال چنین ماتریسی باشیم.

تعریف ۱.۴. ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را **وارون (معکوس) پذیر** گویند هرگاه ماتریس B ای وجود داشته باشد که

$$AB = BA = I_n \;\; \text{(ماتریس همانی)} \tag{۴.۴}$$

اگر B وجود داشته باشد منحصر به‌فرد بوده و $B = A^{-1}$ معکوس A است.

اگر چه در تعریف فوق، برقراری تساوی (۴.۴) لازم و ضروری است اما با توجه به قضیه بعد، برقرای یکی از آنها کفایت می‌کند که A دارای وارون B باشد.

قضیه ۱.۴. برای ماتریس مربعی A، اگر ماتریسی مربعی چون B چنان یافت شود که یکی از دو تساوی زیر برقرار باشد، آن‌گاه A معکوس‌پذیر بوده و $A^{-1} = B$:

$$AB = I, \;\; \text{یا} \;\; BA = I \tag{۵.۴}$$

مثال ۱.۴. اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ آن‌گاه $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ معکوس ماتریس A است زیرا

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

بهمین صورت ماتریس‌های زیر معکوس یکدیگر هستند:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +1/5 & 4/5 & -2/5 \\ -1/5 & 6/5 & -3/5 \\ -1/5 & 1/5 & +2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1/5 & 4/5 & -2/5 \\ -1/5 & 6/5 & -3/5 \\ -1/5 & 1/5 & +2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = I_3$$

قضیه ۲.۴. اگر ماتریس A وارون داشته باشد، A حتماً مربعی است.

عکس قضیه ۱.۴ الزاماً درست نیست. مثلاً برای دو ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

که در آن B دلخواهست، اگر B معکوس A باشد، آن‌گاه باید $BA = I_۲$ شود:

$$BA = \begin{pmatrix} ۰ & b_{۱۱} + b_{۱۲} \\ ۰ & b_{۲۱} + b_{۲۲} \end{pmatrix}$$

به‌وضوح هیچگاه نمی‌توان $BA = I_۲$ را نشان داد و لذا وجود وارون برای A منتفی است.

برای معنی دار بودن اثبات (۱.۴)، شرط $a \neq ۰$ شرطی لازم است. چون (۳.۴) را نیز به‌همان روش جلو بردیم، لذا این سئوال مطرح می‌شود که آیا تعریف ۱.۴، لزوماً برای هر ماتریس قابل اجرا است؟

جواب منفی است!

مثال ۲.۴. برای هر عددی که جای مجهولات x, y, z و w قرار دهید، نمی‌توانید حاصلضرب زیر را به ماتریس همانی از نوع $I_۲$ برسانید:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \neq I_۲$$

نتیجه اینکه لازم است شرط معکوس‌پذیر بودن ماتریس مربعی A را بدانیم.

قضیه ۳.۴. ماتریس A دارای وارون است اگر و فقط اگر A نامنفرد باشد.

به‌عبارت دیگر شرط معنا داشتن (۳.۴)، ناصفر بودن دترمینان A است.

مثال ۳.۴. ماتریس A در مثال ۲.۳ نامنفرد نیست و لذا وارون ندارد، در حالی‌که ماتریس H در بعد آن این‌طور نیست.

در قضیه زیر، پاره‌ای از مهمترین خواص ماتریس‌های وارون‌پذیر آمده است.

قضیه ۴.۴. اگر ماتریسهای A, B معکوس‌پذیر باشند:

الف) آن‌گاه $A^{-۱}$ نیز وارون داشته و $(A^{-۱})^{-۱} = A$.

ب) با شرط $c \neq ۰$ آن‌گاه ماتریس cA نیز وارون داشته و $(cA)^{-۱} = \frac{۱}{c} A^{-۱}$.

ج) در صورت هم‌مرتبه بودن A, B اولاً AB معکوس دارد و ثانیاً $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$.

د) آن‌گاه A^t نیز وارون داشته و $(A^{-۱})^t = (A^t)^{-۱}$.

ه) هرگاه $n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه A^n نیز وارون داشته و $(A^{-۱})^n = (A^n)^{-۱}$.

و) آن‌گاه A ماتریسی پادمتقارن است اگر و تنها اگر A^{-1} پادمتقارن است.

ز) برای ماتریس همانی $I_n^{-1} = I_n$.

ح) اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه $\det(A)\det(A^{-1}) = -1$.

مثال ۴.۴. برای دو ماتریس $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ داریم:

$$(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}+B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

نکته ۱.۴. با توجه به مثال ۴.۴، در حالت کلی و برای ماتریس‌های وارون‌پذیر و هم‌مرتبه A, B،

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

نکته ۲.۴. با توجه به حالت ه از قضیه ۳.۴، می‌توان توانهای منفی را نیز برای A تعریف کرد. و از این‌رو دو قانون معروف و کاربردی $A^t A^s = A^{t+s}$ و $(A^r)^s = A^{rs}$ به‌ازای هر دو عدد صحیح r, s و فقط برای ماتریس‌های وارون‌پذیر برقرار است.

مثال ۵.۴. فرض کنیم ماتریس X مجهول و همه روابطی که در تساوی زیر آمده‌اند معنی‌دار هستند:

$$A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^3)^2$$

راههای زیادی هست که X را بیابیم. مثلاً:

$$\begin{aligned}
A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^3)^2 &\Rightarrow ((BX)A)^{-1} = (A^{-1}B^3)^2 \\
&\Rightarrow \left(((BX)A)^{-1}\right)^{-1} = ((A^{-1}B^3)^2)^{-1} \\
&\Rightarrow (BX)A = ((A^{-1}B^3)(A^{-1}B^3))^{-1} \\
&\Rightarrow (BX)A = B^{-3}(A^{-1})^{-1} B^{-3}(A^{-1})^{-1} \\
&\Rightarrow (BX)A = B^{-3} A B^{-3} A
\end{aligned}$$

بعلاوه

$$\begin{aligned}
&B^{-۱}\Big((BX)A\Big)A^{-۱} = B^{-۱}B^{-۳}A\,B^{-۳}A\,A^{-۱}\\
&\Rightarrow (B^{-۱}B)\,X\,(AA^{-۱}) = B^{-۴}A\,B^{-۳}(A\,A^{-۱})\\
&\Rightarrow I\,X\,I = B^{-۴}AB^{-۳}\,I \Rightarrow X = B^{-۴}AB^{-۳}
\end{aligned}$$

۱.۴ روشهای یافتن معکوس

در این بخش ماتریس A را ماتریسی نامنفرد می‌گیریم. دو روش عملی برای یافتن $A^{-۱}$ ارائه می‌کنیم. یکی مبتنی بر تعریف و استفاده از همسازه‌ها و دیگری بر اساس روش سطری مقدماتی کردن ماتریس است. روش اول، روشی تعریفی و اصلی است در حالی که در روش دوم کمک عملگرهای سطری مقدماتی بوضوح دیده می‌شود.

۱.۱.۴ روش همسازه ها

تعریف ۲.۴. فرض کنیم همسازه متناظر هر درآیه از A را یافته و در یک ماتریس با توجه به اندیس‌هایشان مرتب کرده‌ایم. این ماتریس را **ماتریس همسازه** A می‌نامند.

اگر ماتریس همسازه را یافتیم، دیگر چیزی به یافتن $A^{-۱}$ نمی‌ماند جز انجام فرمول زیر:

قضیه ۵.۴. برای ماتریس معکوس‌پذیر A:

$$A^{-۱} = \tfrac{۱}{|A|}\mathrm{adj}(A)$$

که در آن $\mathrm{adj}(A) = N^t$ ترانهاده ماتریس همسازه A است.[۱]

مثال ۶.۴. در حالت کلی، برای ماتریس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و بکمک روش بخش قبل:

$$A_{۱۱} = d,\ A_{۱۲} = -c,\ A_{۲۱} = -b,\ A_{۲۲} = -a$$

[۱] به این ماتریس **ماتریس الحاقی** نیز می‌گویند

که نشان می‌دهد ماتریس همسازه عبارت است از:

$$N=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

و لذا:

$$A^{-۱}=\tfrac{۱}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (ad-bc)=|A|\neq ۰$$

مثال ۷.۴. وارون ماتریس از مرتبه ۳ در مثال ۸.۳ را بکمک همسازه ها یافته و درستی ادعای مثال را مجدد نشان می‌دهیم.

اولاً روش ساروس نامنفرد بودن ماتریس را نشان می‌دهد:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} ۳ & -۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{vmatrix}}_{P}=۵\neq ۰$$

بعلاوه:

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}}_{P_{۱۱}=۱}, \quad \underbrace{-\det\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}}_{P_{۱۲}=-۱}, \quad \underbrace{\det\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}}_{P_{۱۳}=-۱}$$

$$\underbrace{-\det\begin{pmatrix} -۲ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}}_{P_{۲۱}=۴}, \quad \underbrace{\det\begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}}_{P_{۲۲}=۶}, \quad \underbrace{-\det\begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}}_{P_{۲۳}=۱}$$

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}}_{P_{۳۱}=-۲}, \quad \underbrace{-\det\begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}}_{P_{۳۲}=-۳}, \quad \underbrace{\det\begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}}_{P_{۳۳}=۲}$$

و بدین ترتیب ماتریس معکوس برابر است با:

$$P^{-۱}=\tfrac{۱}{۵}\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۴ & ۶ & ۱ \\ -۲ & -۳ & ۲ \end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix} +۱/۵ & ۴/۵ & -۲/۵ \\ -۱/۵ & ۶/۵ & -۳/۵ \\ -۱/۵ & ۱/۵ & +۲/۵ \end{pmatrix}$$

۲.۱.۴ استفاده از اعمال سطری مقدماتی

بجز روش همسازه‌ها، از عملگرهای سطری مقدماتی هم برای یافتن معکوس ماتریس نامنفرد استفاده کرد. در این روش یک ماتریس جدید از روی ماتریس A بنام **ماتریس افزوده** می‌سازیم. به این ترتیب که بعد از آخرین ستون ماتریس، ماتریس همانی هم مرتبه اضافه کرده و سپس ماتریس را می‌بندیم. مثلاً برای یک ماتریس از مرتبه ۳ ماتریس افزوده به‌صورت زیر است:

$$Q=\begin{pmatrix} ۱ & ۴ & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۷ & ۰ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{افزوده}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۷ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right)$$

حال با کمک عملیات سطری مقدماتی رو سطرهای ماتریس A در ماتریس افزوده (سمت راستی)، آنرا به ماتریس همانی بدل می‌کنیم. بدین ترتیب که ابتدا در هر ستون درآیه های واقع بر قطر اصلی (درآیه های مشخص شده) را به عدد ۱ و سپس در مکانهای پایین و بالا، بقیه درآیه ها را به صفر تبدیل می‌کنیم. در همین زمان، اجازه می‌دهیم تا عملیات روی سطرهای کناری هم، همزمان انجام شود (تغییرات روی این سطرها مهم نیستند). وقتی کاملاً ماتریس A به ماتریس همانی تبدیل شد، ماتریس کناری همان وارون مورد نظر است.

در ابتدا با یک مثال ساده شروع می‌کنیم:

مثال ۸.۴.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow{-۲R_۱+R_۲\mapsto R_۲} \left(\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۵ & -۲ & ۱ \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-۱/۵)R_۲\mapsto R_۲} \left(\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲/۵ & -۱/۵ \end{array}\right) \xrightarrow{-۲R_۲+R_۱\mapsto R_۱} \left(\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & ۱/۵ & ۲/۵ \\ ۰ & ۱ & ۲/۵ & -۱/۵ \end{array}\right)$$

ماتریس سمت راست آخرین ماتریس همان معکوس ماتریس مسئله است.

مثال ۹.۴. وارون ماتریس Q را با روش سطری مقدماتی بدست می‌آوریم. روش کار را در زیر ببینید:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۷ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow{۲R_۱+R_۲\mapsto R_۲} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{۱} & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ \boxed{۰} & ۱۱ & ۲ & ۲ & ۱ & ۰ \\ \boxed{۱} & ۷ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right)$$

سپس $-R_{۱}+R_{۳}\mapsto R_{۳}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{۱} & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ \boxed{۰} & ۱۱ & ۲ & ۲ & ۱ & ۰ \\ \boxed{۰} & ۳ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right)$$

سپس $(۱/۱۱)R_{۲}\mapsto R_{۲}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{۱} & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ \boxed{۰} & \boxed{۱} & ۲/۱۱ & ۲/۱۱ & ۱/۱۱ & ۰ \\ \boxed{۰} & ۳ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right)$$

سپس $-۳R_{۲}+R_{۳}\mapsto R_{۳}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{۱} & ۴ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ \boxed{۰} & \boxed{۱} & ۲/۱۱ & ۲/۱۱ & ۱/۱۱ & ۰ \\ \boxed{۰} & \boxed{۰} & -۶/۱۱ & -۱۷/۱۱ & -۳/۱۱ & ۱ \end{array}\right)$$

سپس $-۴R_{۲}+R_{۱}\mapsto R_{۱}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{۱} & \boxed{۰} & -۸/۱۱ & ۳/۱۱ & ۱/۱۱ & ۰ \\ \boxed{۰} & \boxed{۱} & ۲/۱۱ & ۲/۱۱ & ۱/۱۱ & ۰ \\ \boxed{۰} & \boxed{۰} & -۶/۱۱ & -۱۷/۱۱ & -۳/۱۱ & ۱ \end{array}\right)$$

سپس $(-۱۱/۶)R_{۳}\mapsto R_{۳}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{۱} & \boxed{۰} & -۸/۱۱ & ۳/۱۱ & ۱/۱۱ & ۰ \\ \boxed{۰} & \boxed{۱} & ۲/۱۱ & ۲/۱۱ & ۱/۱۱ & ۰ \\ \boxed{۰} & \boxed{۰} & \boxed{۱} & ۱۷/۶ & ۱/۲ & -۱۱/۶ \end{array}\right)$$

سپس $(-۲/۱۱)R_{۳}+R_{۲}\mapsto R_{۲}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{۱} & \boxed{۰} & -۸/۱۱ & ۳/۱۱ & ۱/۱۱ & ۰ \\ \boxed{۰} & \boxed{۱} & \boxed{۰} & -۱/۳ & ۰ & ۱/۳ \\ \boxed{۰} & \boxed{۰} & \boxed{۱} & ۱۷/۶ & ۱/۲ & -۱۱/۶ \end{array}\right)$$

و نهایتاً $R_۱ \mapsto R_۱ + R_۳(۸/۱۱)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{۱} & \boxed{۰} & \boxed{۰} & ۷/۳ & ۰ & -۴/۳ \\ \boxed{۰} & \boxed{۱} & \boxed{۰} & -۱/۳ & ۰ & ۱/۳ \\ \boxed{۰} & \boxed{۰} & \boxed{۱} & ۱۷/۶ & ۱/۲ & -۱۱/۶ \end{array}\right)$$

حال ماتریس سمت راست آخرین ماتریس همان معکوس Q است.

۲.۴ تمرینات

۱. در ماتریس زیر مقدار a چه باشد تا ماتریس A وارون نداشته باشد؟

$$A = \begin{pmatrix} -۶ & a & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ a & -۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

۲. به ازای چه مقداری از m دترمینان ماتریس زیر و دترمینان وارون آن یکی می‌شوند؟

$$\begin{pmatrix} ۲ & m & ۳ \\ m & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

۳. از روی ماتریس های زیر، موارد داده شده را بیابید.

$$F = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۴ \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -۳ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix},\ W = \begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

الف) $NQ^{-۱} + (FN)^t$

ب) $\mathrm{tr}(N) \times (Q^{-۱})^t$

ج) $(VW)^t - N^{-۱}$

د) $\det\left(\dfrac{F^{-۱} + N^{-۱} + Q^{-۱}}{۲}\right)$

ه) $(P^{۸} + B^t)^{-۱}$

و) $\det(P^{۲۴} P^{-۲۴})$

۴. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۳ \\ ۱ & -۳ & ۰ \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{pmatrix},\, T=\begin{pmatrix}۱&۳\\۲&-۱\end{pmatrix},\, U=\begin{pmatrix}۲&۱\\۰&۵\end{pmatrix},\, K=\begin{pmatrix}۳&۱\\-۱&۴\end{pmatrix}$$

$$Z=\begin{pmatrix}۴&۳&-۱\\۰&۶&-۲\\۰&۲&۱\end{pmatrix}$$

الف) درآیه سطر سوم و ستون دوم ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

ب) معادله $\det(F-xI)=۰$ را حل کنید. مسئله را برای Z تکرار کنید.

ج) در ماتریس $G^{-۱}$، $g_{۱۳}$ چه عددی است؟

د) دترمینان ماتریس X را که در آن $QX=Q^{-۱}$ چه عددی است؟

ه) مقدار $\mathrm{tr}(T^{-۱})$ چه عددی است؟

و) معادله درجه دومی چنان بیابید که U در آن صدق کند و سپس از روی آن $U^{-۱}$ را بدست آورید.

ز) مورد قبل را برای ماتریس K تکرار کنید.

۵. مقداری برای a ارائه دهید که وارون پذیری هرکدام از ماتریس‌های زیر (جداگانه) تضمین شود.

$$\begin{pmatrix}۱&۲&۱\\a&۱&۲\\a&۱&۰\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}۰&-a&۱\\۱&۰&۱\\۱&-a&۰\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a&-۱&۱\\۱&a&۱\\۱&-۱&a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}۰&۰&۰\\۱&۰&۰\\۱&-a&۰\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&۲&۰\\۰&a+۱&۲\\۰&۱&a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a&۰&۱\\۰&a&۳\\۲&۲&a-۲\end{pmatrix}$$

۶. آیا تساوی $|A^{-۱}B|=|A|\times|B|$ در حالت کلی درست است؟ با چه شرایطی درست است؟

۷. اگر رابطه $A=AB^{-۱}CXC^{-۱}BA^{-۱}$ برقرار باشد، با فرض $|A|=۲$، $|B|=-۳$ و $|C|=\frac{۱}{۳}$ مطلوب است دترمینان ماتریس X.

۸. آیا اتحاد $(A+B)^{-۱}=A^{-۱}+B^{-۱}$ صحیح است؟ از میان ماتریس‌های ۲×۲ دلیل بیاورید. اتحاد $(AB)^{-۱}=A^{-۱}B^{-۱}$ چطور؟

۹. آیا اگر ماتریسی متقارن باشد، وارون آن نیز متقارن است؟ چرا؟

۱۰. اگر $ABC = I$، آیا می‌توان گفت هر سه ماتریس وارون دارند؟

۱۱. اگر ماتریس‌های زیر دارای معکوس هستند، معکوس آن‌ها را بدست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = (\alpha + 1)_{1\times 1},\ K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

۱۲. اگر $Z = \operatorname{adj}(B)$، مطلوب است محاسبه $\sqrt{z_{11}z_{13}z_{31}z_{33}}$ و $\operatorname{tr}(Z)$ که در آن ماتریس B در تمرین ۱۱ است.

۱۳. با فرض $abc \neq 0$، معکوس ماتریس‌های $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ را بدست آورید.

۱۴. برای هرکدام از ماتریس‌های زیر $(I-A)^{-۱}$ را بیابید

$$A=\begin{pmatrix} ۵ & -۲ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} -۳ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

۱۵. آیا تساوی‌های $(A^{-۱})^۲ = (A^۲)^{-۱}$ و $(A^{-۱})^t = (A^t)^{-۱}$ به‌ازای $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ صحیح‌اند؟

۱۶. دو ماتریس A و B هم مرتبه، خودتوان و نیز نامنفرداند. مطلوبست $\left|A^{۱۴۰۰} \times B^{۱۴۰۰}\right|$.

۱۷. اگر $A_{۲\times ۲}$ ماتریسی منفرد و بدانیم $A^۲ = ۳A + I$ مطلوب است $|A - A^{-۱}|$.

۱۸. اگر $W = \begin{pmatrix} a & ۱ \\ -۱ & a \end{pmatrix}$، مطلوب است وارون ماتریس $W^۲$ در صورتی‌که $a \neq \pm ۱$.

۱۹. برای ماتریس M معادله $M^۲ - ۷M + ۱۰I = \mathbf{0}$ برقرار است. ماتریس $M^{-۱}$ را بیابید.

۲۰. با فرض

$$A=\begin{pmatrix} ۵ & ۳ \\ ۹ & ۶ \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -۳ & -۲ \\ ۷ & ۵ \end{pmatrix}$$

ماتریس X را از رابطه $AX = A - A^t$ و $BX = B^t - ۲I$ بدست آورید.

۲۱. هر چهار ماتریس زیر وارون دارند. ماتریس‌های X و Y را طوری بدست آورید که

$$XA^۲ = A^{-۱}, \qquad (A^{-۱}Y)^{-۱} = A(B^{-۲}A)^{-۱}$$

۲۲. با کمک ماتریس وارون، به‌ازای $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix}$، مقادیر α و β را طوری بیابید که

$$A^۲ = \alpha A + \beta I$$

۲۳. با فرض نامنفرد بودن A و B، از $ABCB^{-۱}A^{-۱} = A^۲B^۲$ ماتریس C را بدست آورید.

۲۴. اگر $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ مطلوب است محاسبه ماتریس‌های $A^{-۱}, A^۲, A^۳, A^{۱۰۰۰}$.

۲۵. ماتریس‌های A، B و C مربعی و هم‌مرتبه هستند. به‌علاوه A معکوس‌پذیر است. نشان دهید تساوی $ABA = ACA$ نتیجه می‌دهد $B = C$.

۲۶. فرض کنید F ماتریسی مربعی است به‌طوری‌که $F^{۲} = F$ است. نشان دهید $F = I$.

۲۷. آیا ماتریس های زیر متعامد[۲] هستند؟

$$A_{۱} = \begin{pmatrix} ۳/۵ & -۴/۵ \\ ۴/۵ & ۳/۵ \end{pmatrix}, \quad A_{۲} = ۱/۳ \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & -۲ & -۱ \end{pmatrix}, \quad A_{۳} = ۱/۷ \begin{pmatrix} ۲ & ۶ & ۳ \\ ۳ & ۲ & -۶ \\ ۶ & -۳ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$A_{۴} = ۱/۲ \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}, \quad A_{۵} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$A_{۶} = \begin{pmatrix} ۱/\sqrt{۲} & ۰ & -۱/\sqrt{۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱/\sqrt{۲} & ۰ & ۱/\sqrt{۲} \end{pmatrix}, \quad A_{۷} = \begin{pmatrix} ۳/۵ & ۰ & -۴/۵ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۴/۵ & ۰ & ۳/۵ \end{pmatrix}$$

۲۸. برای چه مقدار x ماتریس‌های زیر متعامداند؟ رابطه‌ای بین اعداد ناصفر a, b بدست می‌آورید؟

$$\begin{pmatrix} ۱/۲ & x \\ -x & ۱/۲ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & \sqrt{۳}/۲ \\ -\sqrt{۳}/۲ & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & ۰ & -b \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ b & ۰ & a \end{pmatrix}$$

۲۹. اگر A و G متعامد باشند، حاصل $A(A^t + G^t)G$ چه ماتریسی خواهد بود؟

۳۰. A ماتریسی متعامد و B ماتریسی متقارن از مرتبه مناسب است. حاصل $(A^t B^t)^{-۱}$ چیست؟

۳۱. اگر A متعامد و متقارن باشد، ماتریس $A^{۴}$ را بدست آورید.

۳۲. اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۵ \end{pmatrix}$، ماتریس X را از معادله $AX = ۲A^t$ بدست آورید.

۳۳. اگر ماتریسهای A، B و C هم مرتبه و نا منفرد باشند، از روی هر کدام از تساوی های زیر ماتریس X را بدست آورید.

---

[۲] ماتریس A را متعامد می‌گویند هرگاه $A^t = A^{-۱}$ باشد.

الف) $(XA)^t = B$ ب) $XA = B - ۲X$ ج) $AXB = C$

د) $A(XB)^{-۱} = C^t$ ه) $C^t XA + (X^t C)^t = I - ۳C^t X$

۳۴. چند ماتریس وجود دارد که $\begin{pmatrix} ۲ & ۵ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix} A$؟

۳۵. اگر $\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix} = A^{-۱}$ و $\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix} = B^{-۱}$ دراینحالت $(۸AB)^{-۱}$ را محاسبه کنید.

۳۶. با فرض وارون داشتن A و B، حاصل $A^{-۱}(A^{-۱} + B^{-۱})^{-۱} B^{-۱}$ چه ماتریسی است؟

۳۷. برای ماتریس مربعی A، عدد طبیعی n ای هست که $A^n = \mathbf{0}$. آیا $(I - A)$ وارون دارد؟

۳۸. اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۳|A| \\ |A| & ۲ \end{pmatrix}_{۲\times۲}$ با درآیه‌های طبیعی باشد، مطلوب است $A^{-۱}$.

۳۹. با فرض $(A - I)^{-۱} = \begin{pmatrix} -۵ & ۲ & ۲ \\ ۸ & ۳ & -۱ \\ ۱۱ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$ مطلوب است $A(A - I)^{-۱}$.

۴۰. با توجه به تعریف نشان دهید ماتریس B وارون ماتریس A است.

الف) $\underbrace{\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱/۲ & ۳/۲ \end{pmatrix}}_{B}$ ب) $\underbrace{\begin{pmatrix} ۳ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} -۳ & ۲ \\ ۵ & -۳ \end{pmatrix}}_{B}$

ج) $\underbrace{\begin{pmatrix} ۱۱ & -۱۷ & ۲ \\ -۷ & ۱۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ & ۰ \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ -۳ & ۴ & ۲ \\ -۵ & ۶ & ۳ \end{pmatrix}}_{B}$

د) $\underbrace{\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۱ & -۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} -۱ & -۱ & ۲ & -۱ \\ -۶ & -۵ & ۹ & -۴ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۳ & -۵ & ۳ \end{pmatrix}}_{B}$

۴۱. فرض کنید ماتریس $I-A=B$ وارون دارد. اگر

$$S=I+A+A^{۲}+A^{۳}+\cdots+A^m,\ (m\in\mathbb{N})$$

نشان دهید $SB=I-A^{m+۱}$.

۴۲. فرض کنید ماتریس A نامنفرد بوده و $AB=BA$ برقرار است. نشان دهید اگر $S^{۲}=B$ آن‌گاه $(A^{-۱}SA)^{۲}=B$.

۴۳. فرض کنید ماتریسهای A,B هم مرتبه و B نامنفرد است. نشان دهید دو ماتریس $BA^{۴}B^{-۱}$ و $(BAB^{-۱})^{۴}$ مساویند.

۴۴. محاسبه زیر را انجام دهید.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & -۲ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱۳ & ۳ \\ ۲ & -۲ \end{pmatrix}^{-۱} - ۳\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ \\ ۳ & ۰ \end{pmatrix}$$

۴۵. اگر $A_{۳\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\frac{(i+j)!}{i!j!}$ نشان دهید ماتریس نا منفرد است.

۴۶. مقدار x را طوری بدست آورید که معکوس هر ماتریس، خودش شود.

الف) $A=\begin{pmatrix} ۳ & x \\ -۲ & -۳ \end{pmatrix}$ ب) $A=\begin{pmatrix} ۲ & x \\ -۱ & -۲ \end{pmatrix}$

۴۷. از تساوی‌های زیر ماتریس A را بدست آورید.

الف) $(۲A)^{-۱}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ ب) $(۴A)^{-۱}=\begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ -۳ & ۲ \end{pmatrix}-I_{۲}$

ج) $(-۳A+I_{۲})^{-۱}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{pmatrix}$ د) $(A-I_{۲})^{-۱}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix}^{-۱}$

۴۸. برای ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{pmatrix}$ نشان دهید تساوی $A^{-۱}=\frac{۱}{۵}(۲I-A)$ برقرار است.

۴۹. آیا اگر $(I-AB)$ نامنفرد باشد، ماتریس $(I-BA)$ نیز چنین است؟

۵۰. اگر $A,\ B$ نامنفرد باشند، نشان دهید

$$(I+AB)^{-1}A = A(I+BA)^{-1} \qquad (A^{-1}-B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B,$$

۵۱. اگر $A,\ B$ نامنفرد و متقارن باشند به‌طوری که $AB = BA$، نشان دهید ماتریس‌های $A^{-1}B$، AB^{-1} و $A^{-1}B^{-1}$ همگی متقارن‌اند.

۵۲. اگر A خودتوان و $a \neq -1$، نشان دهید $(I+aA)^{-1} = I - \left(\frac{a}{a+1}\right)A$.

۱.۲.۴ جواب و راهنمایی‌ها

۲. اگر بخواهیم $\det(A)=\det(A^{-۱})$ شود چون $\det(A^{-۱})=\frac{۱}{\det(A)}$ پس باید

$$(\det(A))^{۲}=۱$$

برقرار شود. با محاسبه داریم $\det(A)=m(۳-m)$.

۳. و برای دو قسمت **ب** و **و** بترتیب:

$$\mathrm{tr}(N)\times(Q^{-۱})^t=۵\times\begin{pmatrix}-۱/۳ & -۱/۳\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-۵/۳ & ۰\\ -۵/۳ & ۵\end{pmatrix}$$

$$\det(P^{۲۴}P^{-۲۴})=\det(I)=۱$$

۴. برای قسمت **ب** چون $F-xI=\begin{pmatrix}۱-x & ۰ & ۰\\ ۰ & ۵-x & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴-x\end{pmatrix}$ پس

$$\det(F-xI)=(۱-x)(۵-x)(۴-x)$$

و لذا جواب های معادله عبارتند از $x=۱$ و $x=۵$ و $x=۴$. برای ماتریس‌های قطری، جواب $\det(A-xI)=۰$ همان درآیه‌های روی قطر اصلی ماتریس است (همانند ماتریس F). درباره قسمت **و** می‌دانیم هر ماتریس مربعی از اعداد حقیقی در یک معادله صدق می‌کند این معادله را **معادله مشخصه** می‌نامند. معادله مشخصه ماتریس مربعی A به‌صورت $\det(A-xI)=۰$ بدست می‌آید. این معادله برای ماتریس U به‌شکل $x^{۲}-۷x+۱۰$ است. با استفاده از آن داریم

$$U^{۲}-۷U+۱۰I=\mathbf{0}_{۲}\rightarrow\frac{۱}{۱۰}U(U-۷I)=I$$

و لذا $U^{-۱}=\frac{۱}{۱۰}(U-۷I)$ خواهد شد.

۵.

$$\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ a & ۱ & ۲\\ a & ۱ & ۰\end{vmatrix}\neq ۰\longrightarrow ۴a-۲\neq ۰\longrightarrow a\neq ۲$$

$$\begin{vmatrix}a & ۰ & ۱\\ ۰ & a & ۳\\ ۲ & ۲ & a-۲\end{vmatrix}\neq ۰\longrightarrow a(a+۲)(a-۴)\neq ۰\longrightarrow a\neq ۰, a\neq -۲, a\neq ۴$$

۷. اگر $A = AB^{-1}CXC^{-1}BA^{-1}$ آن‌گاه

$$2 = |A| = |AB^{-1}CXC^{-1}BA^{-1}| = \underbrace{|A|}_{2}\,\overbrace{|B^{-1}|}^{-1/3}\,\underbrace{|C|}_{1/3}\,|X|\,\overbrace{|C^{-1}|}^{3}\,\underbrace{|B|}_{-3}\,\overbrace{|A^{-1}|}^{1/2}$$

حال $|X|$ را بیابید. **۸.** هیچکدام برقرار نیستند. در واقع اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ آن‌گاه:

$$A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (A+B)^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}B^{-1}$$

۹. جواب مثبت است. این را به‌عنوان یک خاصیت می‌پذیریم که $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ و با استفاده از آن

$$A^{-1} \underset{A=A^t}{=\!=\!=} (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

۱۰. جواب مثبت است.

$$1 = |I| = |ABC| = |A| \times |B| \times |C|$$

۱۱. ماتریس‌های A, F و Y وارون ندارند (چرا؟). برای ماتریس‌های D و Q مطلقاً معکوس تعریف نمی‌شود. بعلاوه

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 1/-\pi & -1/\pi \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 & 3/5 \\ 4/15 & 1/5 & -4/15 \\ -1/15 & 1/5 & 1/15 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/11 & 0 & -2/11 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 5/11 & 0 & 1/11 \end{pmatrix}$$

اکنون مراحل یافتن G^{-1} را به کمک ماتریس الحاقی آن مرحله به مرحله انجام می‌دهیم. اولاً با

کمک روش ساروس $\det(G)=-۷۲$ که نشان می‌دهد این ماتریس نامنفرد است: ثانیاً

$$G_{۱۱}=\det\begin{pmatrix}۴&۰\\۱&۰\end{pmatrix}=۰ \qquad G_{۱۲}=-\det\begin{pmatrix}-۱&۰\\۲&۰\end{pmatrix}=۰$$

$$G_{۱۳}=\det\begin{pmatrix}-۱&۴\\۲&۱\end{pmatrix}=-۹ \qquad G_{۲۱}=-\det\begin{pmatrix}۰&۸\\۱&۰\end{pmatrix}=۸$$

$$G_{۲۲}=\det\begin{pmatrix}۲&۸\\۲&۰\end{pmatrix}=-۱۶ \qquad G_{۲۳}=-\det\begin{pmatrix}۲&۰\\۲&۱\end{pmatrix}=-۲$$

$$G_{۳۱}=\det\begin{pmatrix}۰&۸\\۴&۰\end{pmatrix}=-۳۲ \qquad G_{۳۲}=-\det\begin{pmatrix}۲&۸\\-۱&۰\end{pmatrix}=-۸$$

$$G_{۳۳}=\det\begin{pmatrix}۲&۰\\-۱&۴\end{pmatrix}=۸$$

و بنابراین ماتریس الحاقی G به شکل زیر در می‌آید

$$\operatorname{adj}(G)=\begin{pmatrix}۰&۸&-۳۲\\۰&-۱۶&-۸\\-۹&-۲&۸\end{pmatrix}$$

و لذا

$$G^{-۱}=\frac{۱}{-۷۲}\begin{pmatrix}۰&۸&-۳۲\\۰&-۱۶&-۸\\-۹&-۲&۸\end{pmatrix}$$

۱۲. با روش توضیح داده شده در مسئله **۱۱** ماتریس الحاقی B برابر است با:

$$Z=\operatorname{adj}(B)=\begin{pmatrix}۳&۰&-۶\\۰&۱۱&۰\\۱۵&۰&۳\end{pmatrix}$$

۱۴. داریم $\begin{pmatrix}۴&-۲\\۱&۱\end{pmatrix}=(I-A)$ و بنابراین $\begin{pmatrix}۱/۶&۱/۳\\-۱/۶&۲/۳\end{pmatrix}=(I-A)^{-۱}$ بدست می‌آید.

۱۵. این دو تساوی همواره و بازای هر توانی از ماتریس مربعی A به‌عنوان اتحاد برقرارند.

۱۷. اولاً $A^{۲}=۳A+I$. ثانیاً با ضرب از سمت راست در $A^{-۱}$ داریم $A=۳I+A^{-۱}$ که با $A-A^{-۱}=۳I$ یکی است. بنابراین $|A-A^{-۱}|=۳^{۳}=۲۷$. **۱۸.** با کمک مسئله قبل می‌توانید $(W^{-۱})^{۲}$ را هم که با حکم تمرین یکی است، بدست آورید.

۱۹. چون $M^{۲}-۷M=-۱۰I$ لذا $\frac{M}{۱۰}(M-۷I)=I$ و بنابر این $M^{-۱}=\frac{۱}{۱۰}(M-۷I)$.

۲۰. توجه کنید اگر $AX = A - A^t$ و با فرض وجود A^{-1} (که در این مسئله وجود دارد) داریم $AX = A - A^t$ که با ضرب آن از چپ در A^{-1} داریم $X = I - A^{-1}A^t$. حال با محاسبه A^{-1} و A^t، X بدست می‌آید.

۲۱. از روی $(A^{-1}Y)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$ داریم $Y^{-1}A = A(A^{-1}B^{-2}) = (B^{-1})^2$. که با ضرب آن از چپ در Y داریم $A = Y(B^2)^{-1}$. تساوی اخیر را در B^2 از راست ضرب کنید تا $AB^2 = Y$.

۲۳. با ضرب $ABCB^{-1}A^{-1} = A^2B^2$ از راست در A داریم $ABCB^{-1} = A^2BA$. با ضرب این تساوی از راست در B داریم $ABC = A^2BAB$ که با ضرب آن از چپ در A^{-1} داریم $BC = ABAB$ و یا $B^{-1}(AB)^2$.

۲۵. کافی است طرفین تساوی را در معکوس ماتریس A ضرب کنید. **۲۶.** مسلماً ناصفر بودن ماتریس F لازم است تا نتیجه حاصل شود.

۲۷. ماتریس‌های A_1 و A_2 و A_4 مطمئناً متعامد هستند. **۲۸.** بر اینکه یک ماتریس متعامد شود بایستی $A^t = A^{-1}$ برقرار شود:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & x \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} \frac{4x}{4x^2+3} & \frac{-2\sqrt{3}}{4x^2+3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{4x^2+3} & \frac{4x}{4x^2+3} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & x \end{pmatrix}^t \longrightarrow x = 0, \pm\tfrac{1}{2}$$

۲۹. چون A و G متعامدند پس $A^t = A^{-1}$ و $G^t = G^{-1}$ لذا

$$A(A^t + G^t)G = A(A^{-1} + G^{-1})G = (AA^{-1} + AG^{-1})G$$

که برابر است با $AA^{-1}G + AG^{-1}G$ و یا $G + A$.

۳۱. A متعامد و متقارن است پس داریم $A^t = A^{-1}$ و $A^t = A$ لذا

$$A = A^{-1} \xrightarrow{\times A} A^2 = AA^{-1} = I \to A^4 = I^2 = I$$

۳۲. بدیهی است که $X = 2A^{-1}A^t$. **۳۳.** درباره **الف** داریم $(XA)^t = B$ و یا $A^tX^t = B$

که با ضرب در $(A^t)^{-۱}$ داریم $X^t = (A^t)^{-۱}B$ و لذا

$$X = \Big((A^t)^{-۱}B\Big)^t = B^t\Big((A^t)^{-۱}\Big)^t$$

که با $B^tA^{-۱}$ یکی است و درباره **د** داریم:

$$A(XB)^{-۱} = C^t \to A(B^{-۱}X^{-۱}) = C^t \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times A^{-۱}} B^{-۱}X^{-۱} = A^{-۱}C^t$$

با ضرب در ماتریس B از چپ داریم:

$$\xrightarrow[\text{از چپ}]{\times B} X^{-۱} = BA^{-۱}C^t \to X = (BA^{-۱}C^t)^{-۱}$$

۳۴. کافی است $\begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۳ & ۳ \end{pmatrix}^{-۱}$ را محاسبه و از سمت راست در طرفین تساوی ضرب کنید.

۳۵. توجه کنید که $(۸\,AB)^{-۱} = ۸\,B^{-۱}A^{-۱}$. **۳۷.** چون $A^n = \mathbf{0}$ پس $I - A^n = I$ (چرا؟). حال می‌دانیم:

$$I = I - A^n = (I - A)\underbrace{(A^{n-۱} + \cdots + I)}_{B}.$$

ماتریس B معکوس خواسته شده است. **۳۹.** ابتدا وارون ماتریس سمت راست را بدست آورید. فرض کنید اسم این ماتریس B باشد. لذا $B = (A - I)$ و از آنجا $A = I + B$.

۴۲. $(A^{-۱}SA)^۲ = (A^{-۱}SA)(A^{-۱}SA) = A^{-۱}S^۲ = A^{-۱}BA = B$. **۴۵.** ماتریس A به‌شکل زیر بدست می‌آید:

$$a_{۱۱} = \frac{(۱+۱)!}{۱!۱!} = ۲ \qquad a_{۱۲} = \frac{(۱+۲)!}{۱!۲!} = \frac{۳!}{۲!} = ۳ \qquad a_{۱۳} = ۴$$

$$a_{۲۱} = ۳ \qquad a_{۲۲} = ۶ \qquad a_{۲۳} = ۱۰$$

$$a_{۳۱} = ۴ \qquad a_{۳۲} = ۱۰ \qquad a_{۳۳} = ۲۰$$

روش ساروس نتیجه می‌دهد $|A| = ۴ \neq ۰$ و لذا A نامنفرد است.

۵

دستگاه معادلات خطی

یکی از کاربردهای وسیع ماتریسها را در این بخش مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض بر این‌است که خواننده با مفهوم متغیر آشناست. در این بخش تمام $x_n, \dots, x_۲, x_۱$ ها متغیر هستند و بعلاوه از همه نکاتی که در فصلهای قبل بیان شد استفاده می‌شود.

۱.۵ مقدمات

مفهوم یک n- تایی از اعداد حقیقی که به‌شکل

$$X = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)$$

بیان می‌شود از جمله بنیادی‌ترین تعاریف در ریاضیات است. شماره‌گذاری اندیسی اعداد (یا مؤلفه‌ها) در X نشان می‌دهد که ترتیب آمدن آنها مهم است از این‌رو گاهی به آن یک n–تایی مرتب هم می‌گویند. مجموعهٔ همهٔ چنین n- تایی‌های از اعداد حقیقی را با نماد $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهند.

باید بخاطر داشت که هر n–تایی **تنها یک عضو**(مثلاً بنام X) از مجموعه فوق است و با تغییر در مولفه‌ها و یا در ترتیب آنها، این عضو به عضو دیگری تبدیل می‌شود. به‌عنوان مثال ۳–تایی های زیر یکسان نیستند

$$(۱, ۲, ۳) \neq (۱, ۳, ۲) \neq (۳, ۱, ۲)$$

یکی از موقعیتهای تلاقی بحث فعلی و مفهوم ماتریس تا قبل از این بیان شد، این است که عضو $X \in \mathbb{R}^n$ را بدون شک می‌توان یک ماتریس سطری $۱ \times n$ در نظر گرفت هرچند تصوری از آن به‌عنوان یک ماتریس ستونی $n \times ۱$ هم غلط نیست. یعنی

$$X = \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

تعریف ۱.۵. عبارت

$$\sum_{۱}^{n} a_i x_i = a_۱ x_۱ + \cdots + a_n x_n \qquad (۱.۵)$$

را **عبارتی خطی** برحسب متغیرهای x_i $_{(۱\leqslant i \leqslant n)}$ و با ضرایب $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ می‌نامند.

گاهی، معادله (۱.۵) را به‌صورت زیر نیز بیان می‌کنند. در این شکل بواقع از مفهوم ماتریس بخوبی استفاده می‌شود ولی در این فصل به نگاه اول بیشتر نظر داریم:

$$\sum_{۱}^{n} a_i x_i = \begin{pmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^t X$$

واضح است که اگر بخواهیم بجای x_i ها مقدار گذاری کنیم، آن‌گاه هر مقدار داده شده را می‌بایست دقیقاً بجای متغیر متناظرش جایگذاری شود. مثلاً در عبارت خطی $x_۱ - ۲x_۳ + ۴x_۷$ با جایگذاری ۷-تایی $(۲, -۳, ۱/۲, ۴, ۷, ۱۰, ۱)$ به مقدار زیر می‌رسیم:

$$۲ - ۲(۱/۲) + ۷(۱) = ۸$$

تعریف ۲.۵. منظور از یک **معادله خطی**،[1] معادله‌ای به‌صورت زیر است:

$$\sum_{۱}^{n} a_i x_i = a_۱ x_۱ + \cdots + a_n x_n = b \qquad (۲.۵)$$

---

[1] n مجهولی

که در آن به b مقدار ثابت می‌گویند.[۲] اگر $b = 0$ آن‌گاه **معادله همگن** نظیر (۲.۵) بدست می‌آید:

$$\sum_{1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \tag{3.5}$$

مثال ۱.۵. معادله $-2x + 4y = 51$ یک معادله خطی ۲-متغیره است. معادله $2x_1 - x_2 + 5x_6 = 7$ معادله‌ای خطی ۶-مجهولی(متغیره) و معادله $2x_1 - x_2 + 5x_6 = 0$ معادله همگن نظیر آن است.

تعریف ۳.۵. به مجموعه‌ای از m معادله خطی و n مجهول، یک **دستگاه معادلات خطی** گفته می‌شود.[۳]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.5}$$

مثال ۲.۵. دستگاه‌های زیر به‌ترتیب ۳ معادله،۳-مجهولی و ۳ معادله،۴ -مجهولی‌اند:

$$\begin{cases} 2x + 3y - \quad z = 10 \\ \qquad y - \quad 4z = 0 \\ x \qquad - (1/2)z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} t + \sqrt{2}x + 3y - 2z = -8 \\ \qquad\qquad 5y - 4z = t \\ - \quad 2x \qquad - 3z = 0 \end{cases}$$

مسئله ۱.۵. معادله $2x - y = 1$ مفروض است. همانند بسیاری از معادلات ریاضی، این معادله نیز نمایشی در صفحه $\mathbb{R}^2$ دارد که یک **خط راست** است (شکل زیر). از طرفی هر خط در صفحه، مجموعه‌ای از بی‌شمار نقطه از صفحه است بطوری که خط از روی آنها گذر می‌کند. آیا نقطه $(1, -2)$ روی این خط قرار دارد؟

برای حل مسئله، در معادله قرار می‌دهیم $x = 1$ و $y = -2$:

$$2x - y = 1 \xrightarrow{x=1,\ y=-2} 2(1) - (2) = 1 \to 0 = 1$$

که تناقض است زیرا $0 \neq 1$. پس خط از این نقطه نمی‌گذرد.

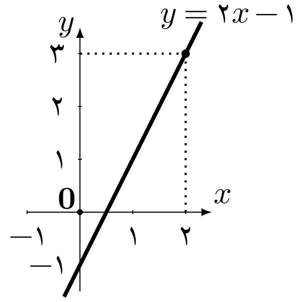
---

[۲] همگی حقیقی‌اند.

[۳] معمولاً فرض بر این‌است که همه این معادلات به‌طور یکسان متغیر دارند.

ما نتیجه فوق را به این‌صورت بازنویسی می‌کنیم که:

دوتایی $(1,-2)$ در معادله داده شده صدق نمی‌کند و یا به‌عبارت دیگر **جوابی** برای معادله $2x-y=1$ نیست. اکنون فرض کنید به مسئله به این صورت نگاه شود که **همه نقاط روی خط و توصیف آنها را بیابید.** ما چگونه این بی‌شمار نقطه را توصیف کنیم؟ یک راه این‌است که معادله حل شود.



شکل ۱.۵: یک خط راست واقع در صفحه

معادله $2x-y=1$ دارای دو متغیر است و لذا فقط امکان یافتن یکی از آنها (قاعدتاً بر حسب دیگری) هست. داریم:

$$2x-y=1 \Longrightarrow y=2x-1$$

پس به‌ازای هر x یک y داریم که هر دو در $y=2x-1$ **همزمان** صدق می‌کنند. چون y را بر حسب x بدست آوردیم، لذا توصیفی که به آن نیاز داشتیم به‌شکل زیر است:

$$(x,y) \equiv (x,\ \ 2x-1)_{1\times 2} \qquad (۵.۵)$$

توجه دارید که نمایش ماتریسی را در توصیف (۵.۵) وارد کردیم. شکل (۵.۵) را به فرمهای زیر هم می‌نویسند

$$\{x=x, \quad y=2x-1\}, \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} x \\ 2x-1 \end{pmatrix}$$

حال بدیهی است با تغییر x در مجموعه اعداد حقیقی، یه دوتایی بدست می‌آید. مثلاً

$$x=0 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 2(-1)-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x=1/2 \to \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2(1/2)-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نتیجه اینکه **بی‌شمار دوتایی** بدست می‌آید که روی این خط واقعند.

تعریف ۴.۵. منظور از یک **جواب** برای معادله (۲.۵)، n-تایی مرتبی است مانند

$$(c_۱, c_۲, \dots, c_n)$$

است به‌طوری که با جایگذاری آنها در مجهولات متناظر، معادله به یک عبارت بامعنی تبدیل شود[۴].

مثال ۳.۵. دو دسته جواب برای معادله چهار مجهولی $x + y - ۲z + t = ۱$ عبارتند از[۵]

$$\text{دسته جواب اول}: \begin{pmatrix} x = ۱ \\ y = -۲ \\ z = ۳ \\ t = ۸ \end{pmatrix}, \qquad \text{دسته جواب دوم}: \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۳ \\ ۶ \end{pmatrix}$$

در این مثال نیز همانند مطالبی که برای مسئله ۱.۵ بیان شد، بی‌شمار ۴-تایی جواب داریم.

تعریف ۵.۵. منظور از یک جواب برای یک دستگاه، هر چندتایی (به تعداد متغیرهای دستگاه) از اعداد است که به‌معنی قبل در همه معادلات **همزمان** صدق کند و همه آنها را به یک عبارت بامعنی برساند. دستگاهی از معادلات خطی که دارای جواب باشد، **سازگار** و در غیر این صورت **ناسازگار** می‌نامند.

مثال ۴.۵. دستگاه دو معادله، دو مجهولی

$$\begin{cases} ۳x + \ \ y = ۱ \\ -۶x - ۲y = -۲ \end{cases}$$

سازگار است. کافی است دوتایی $(۰, ۱)$ و یا $(-۳, ۱۰)$ را در دستگاه صدق دهید.

حساسیت کار با دستگاه معادلات و در موضوع جواب، این دو نکته است که

الف) آیا می‌توان همواره برای آن جواب بدست آورد (حتی یک دسته)؟ و دیگر اینکه

ب) آیا این جواب بر فرض وجود، منحصر به‌فرد است؟

مثلاً دستگاههای زیر را درنظر بگیرید. با ایده‌هایی که در حل دستگاها (از دبیرستان) می‌دانیم،

---

[۴] به این جواب اصطلاحاً یک دسته جواب گفته می شود. هر دسته جواب یک ماتریس سطری است.

[۵] درستی جواب بودن آنها را با جایگذاری هر عدد بجای متغیر هم مکان خودش بررسی کنید.

دستگاه زیر فاقد جواب است :

$$\begin{cases} x_۱ + ۵x_۲ = ۱ \\ x_۱ + ۵x_۲ = ۷ \end{cases}$$

دستگاه زیر دارای جواب منحصربه‌فرد $(۱,۳)$ است:

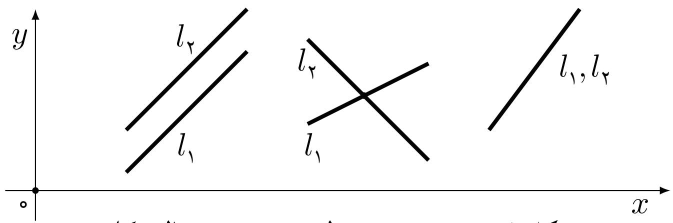
$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ = ۷ \\ x_۱ + x_۲ = ۴ \end{cases}$$

و دستگاه زیردارای بی‌شمار جواب است (چرا؟)

$$\begin{cases} ۳x_۱ - x_۲ = ۱ \\ ۶x_۱ - ۲x_۲ = ۲ \end{cases}$$

بنابر این به دو سئوال فوق بوسیله حل آنها بدرستی پاسخ داده شد. همین موضوع را به‌صورت دیگری هم می‌شد انجام داد:

هرکدام از این دستگاهها دارای دو معادله است که هر معادله، با خطی در صفحه متناظر می‌باشد. چون دو معادله خط داریم و وضعیت دو خط در صفحه از یکی از حالات زیر است لذا بایستی جوابهای فوق را از روی شکل ۲.۵ پیدا کنیم.



شکل ۲.۵: وضعیت دو خط در صفحه در حالت کلی

اگر معادلات در دستگاه اول را رسم کنید، هیچ تقاطعی پیدا نمی‌کنید (یعنی حالت سمت چپ در شکل بالا) و بنابر این ناسازگار است.

رسم معادلات در دستگاه دوم یک نقطه تقاطع (حالت وسط) را نتیجه می‌دهد که در اصل همان جواب $(۱,۳)$ است. در این‌حالت یک جواب منحصر به‌فرد داریم.

و در حال بعدی، دو خط داریم که هر دو عملاً یک خط هستند و لذا هر نقطه روی یکی از آنها بروی دیگر واقع است وبالعکس. این آخری معنی بی‌شمار جواب است (حالت انطباق در سمت راست). در اینجا هم دستگاه جواب منحصر به‌فرد ندارد ولی سازگار است.

در نمونه های فوق، موضوع اصلی ما برای دو معادله دو مجهولی قابل ترسیم بود و این شهود به دریافت ما از نتیجه حل دستگاهها کمک کرد. اما، برای دستگاههایی با تعداد مجهولات بیشتر اگر بخواهیم با رسم تک تک معادلات و یافتن محل تلاقی (همرسی) همه با هم، جواب را بیابیم (حتی برای سه مجهولی ها) مطلب بسیار دشوار و بدون نرم افزار کمکی ممکن نیست. لذا باید پذیرفت که افزوده شدن تعداد متغیرها، موضوع تصویرسازی (از نوع ساده آن) به نحو فوق را منتفی کرده و بنابر این به ابزارهایی عملیاتی (محاسباتی) برای حل و تحلیل دستگاه‌ها[۶] نیاز داریم.

قرارداد ۱.۵. به جهت محدود و ساده کردن مطلب، ترجیحاً روشها حل و نکات مرتبط با دستگاه معادلات خطی را برای انواع ۳ معادله،۳- مجهولی شرح و بسط می‌دهیم. این روشها (و نکات مرتبط) برای دستگاههای که تعداد معادلاتشان با تعداد متغیرشان یکی است کاملاً قابل بیان و تعمیم اند[۷].

تعریف ۶.۵. از روی دستگاه مفروض زیر سه ماتریس استخراج می‌شود:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + a_{۲۳}x_۳ = b_۲ \\ a_{۳۱}x_۱ + a_{۳۲}x_۲ + a_{۳۳}x_۳ = b_۳ \end{cases} \tag{۶.۵}$$

ماتریس A را ماتریس ضرایب، X را ماتریس مجهولات و $\mathbf{b}$ را ماتریس ثابتها:

$$A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{pmatrix}$$

از این‌رو (۶.۵) را به‌فرم یک معادله ساده ماتریسی $AX = \mathbf{b}$ قابل باز نویسی است.

در دستگاه (۶.۵)، وقتی $\mathbf{b} = \mathbf{0}_۳$ آن‌گاه دستگاه $AX = \mathbf{0}$ را متناظرِ همگن (۶.۵) می‌نامند:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ = ۰ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + a_{۲۳}x_۳ = ۰ \\ a_{۳۱}x_۱ + a_{۳۲}x_۲ + a_{۳۳}x_۳ = ۰ \end{cases} \tag{۷.۵}$$

[۶] منظور ماتریس است.

[۷] بحث درباره بقیه حالات دستگاهها از حوصله این کتاب خارج است.

۱.۱.۵ سازگاری دستگاه معادلات خطی

در دستگاه (۷.۵) واضح است که مقادیر $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ در همه معادلات دستگاه صدق کرده و لذا

$$X_0 = (0,\ 0,\ 0)$$

جوابی بدیهی برای آن می‌سازد. از این‌رو **یک دستگاه همگن هیچگاه ناسازگار نیست.**

در ادامه، از دو نکته که قابل اثبات است کمک می‌گیریم.

اول آنکه اگر $|A| \neq 0$ [۸]، آن‌گاه دستگاه متناظرش همواره سازگار است. در این حالت دسته جواب بدست آمده منحصراً یکی است. و سپس

اگر $|A| = 0$، آن‌گاه یا دستگاه مطلقاً فاقد جواب است یا بی‌شمار جواب دارد[۹]. اگر مطمئن شویم دستگاه سازگار است، دراین صورت بی‌شمار جواب داشتن دستگاه تضمین است و در غیر این‌صورت جوابی نداریم.

یافتن جوابها در این دو مورد با روشهای عالی‌تر مانند حداقل نُرم یا حداقل مربعات انجام می‌شود.

۲.۵ روشهای حل دستگاه

در دبیرستان، دو روش عمده برای بررسی سازگاری یک دستگاه معادلات خطی که عموماً تعداد متغیرها با تعداد معادلات یکسان بودند، وجود داشت. روشهای **جانشانی** و **حذفی**. در این روشها معمولاً از ضرب یک اسکالر مناسب و یا جمع یک معادله با معادله دیگری بهره گرفته می‌شد. اگرچه چنین روشهایی قادر بودند تا ما را در یافتن جوابهای ممکن دستگاه معادلات خطی کمک کنند اما مواردی هم هست که توانایی کامل این روشها بصورتی که عمل می‌کنند را زیر سئوال می‌برد.

مثلاً در حل دستگاه زیر با جمع دو معادله نخست، معادله سوم نتیجه شده که این عملاً تعداد

---

[۸] A نامنفرد باشد.

[۹] تفکیک کلی این دو حالت در ادامه بیان می شود.

معادلات فعال در دستگاه را کاهش داده و تشخیص جواب را دچار مشکل می‌کند:

$$\begin{cases} \quad x - ۲y - ۴z = ۰ \\ -۲x + ۴y + ۳z = ۱ \\ -۲x + \ \ y - \ \ z = ۱ \end{cases}$$

در این بخش و به‌جهت حل مشکلاتی اینچنین، به بیان سه روش متعارف برای دستگاههای تحت قرارداد ۱.۵ می‌پردازیم.

۱.۲.۵ روش ماتریس معکوس

می‌دانیم که معادلهٔ عددی $ax = b, (a \neq ۰)$ دارای جواب منحصر به‌فرد $x = {}^{b}\!/_{a}$ است. این جواب را می‌توان به‌صورت $x = ba^{-۱}$ هم نوشت که در آن $a^{-۱}$ معکوس ضربی a است. اگر با حفظ شکل معادله و بجای a و b از ماتریس استفاده شود، فرم ماتریسی زیر که شبیه معادله ماتریسی نظیر (۶.۵) است، پدید می‌آید:

$$AX = \mathbf{b} \tag{۸.۵}$$

ماتریس‌های A و $\mathbf{b}$ معلوم (دارای درآیه‌های مشخص) و ماتریس X مجهول است. با مشابه سازی از روی جواب معادلهٔ عددی و برای (۶.۵) انتظار داریم حاصلی همچون

$$X = A^{-۱}\mathbf{b} \tag{۹.۵}$$

بدست آید که در آن $A^{-۱}$ معکوس A تلقی می‌شود[۱۰]. اگر بتوان چنین تلقی را به‌واقعیت تبدیل کرد آن گاه برای حل (۶.۵) مناسب است تا از ماتریس معکوس استفاده کنیم.

ایده روش (۹.۵) که ما آنرا حل دستگاه (۶.۵) به **روش ماتریس معکوس** می‌نامیم فقط موقعی عملیاتی است که ماتریس ضرایب دستگاه نامنفرد باشد. اینکه در روند انجام روش، $A^{-۱}$ را چگونه بدست می‌آوریم، مسلماً مورد بحث و اهمیت نیست.

مثال ۵.۵. در صورت امکان، دستگاه زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید:

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = ۶ \\ \qquad ۲y + ۵z = -۴ \\ ۲x + ۵y - \ \ z = ۲۷ \end{cases}$$

[۱۰] این معادله ماتریسی، برای هر ماتریس $\mathbf{b}$ برقرار است.

دترمینان ماتریس ضرایب برابر است با $|A| = -۲۱ \neq ۰$ و لذا $A^{-۱}$ وجود دارد[۱۱]. با کمک روشهای ماتریس افزوده و یا استفاده از ماتریس الحاقی داریم:

$$A^{-۱} = \frac{-۱}{۲۱}\begin{pmatrix} -۲۷ & ۶ & ۳ \\ ۱۰ & -۳ & -۵ \\ -۴ & -۳ & ۲ \end{pmatrix}$$

و از آنجا:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = A^{-۱}B = \frac{-۱}{۲۱}\begin{pmatrix} -۲۷ & ۶ & ۳ \\ ۱۰ & -۳ & -۵ \\ -۴ & -۳ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۶ \\ -۴ \\ ۲۷ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۵ \\ ۳ \\ -۲ \end{pmatrix}$$

دسته جواب بالا فقط یکی است و انتظار دسته جواب دیگری برای این دستگاه نداریم.

۲.۲.۵ روش کرامر

از این روش نیز همانند روش قبلی در صورت نامنفرد بودن ماتریس ضرایب استفاده می شود. مجدداً دستگاه (۴.۵) را در نظر گرفته و از روی ماتریس ضرایب و ماتریس ثابتها در آن، ماتریسهای جدید زیر را شکل می‌دهیم:

ماتریس B بجای ستون اول A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{vmatrix} & \begin{matrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{matrix} \end{pmatrix}}_{A_۱(B)}$$

ماتریس B بجای ستون دوم A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ a_{۳۱} \end{matrix} & \begin{vmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{vmatrix} & \begin{matrix} a_{۱۳} \\ a_{۲۳} \\ a_{۳۳} \end{matrix} \end{pmatrix}}_{A_۲(B)}$$

ماتریس B بجای ستون سوم A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{matrix} & \begin{vmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{vmatrix} \end{pmatrix}}_{A_۳(B)}$$

[۱۱] و بنابر این دستگاه قابل حل است.

سپس بطور مستقیم، مقادیر مجهول بدست می‌آیند:

$$x = \frac{|A_۱(B)|}{|A|}, \qquad y = \frac{|A_۲(B)|}{|A|}, \qquad z = \frac{|A_۳(B)|}{|A|}$$

دستگاه مثال قبل را با این روش مجدداً حل می‌کنیم. چون هر یک از ماتریس‌های A و $A_j(B)$ که در آن $j = ۱, ۲, ۳$ از مرتبه ۳ هستند پس برای انجام روش کرامر باید چهار بار روش ساروس را بکار ببریم. اولاً $|A| = -۲۱$ و ثانیاً:

$$|A_۱(B)| = \begin{vmatrix} ۶ & ۱ & ۱ \\ -۴ & ۲ & ۵ \\ ۲۷ & ۵ & -۱ \end{vmatrix} = -۱۰۵, \qquad |A_۲(B)| = \begin{vmatrix} ۱ & ۶ & ۱ \\ ۰ & -۴ & ۵ \\ ۲ & ۲۷ & -۱ \end{vmatrix} = -۶۳$$

$$|A_۳(B)| = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۶ \\ ۰ & ۲ & -۴ \\ ۲ & ۵ & ۲۷ \end{vmatrix} = ۴۲,$$

و از این‌رو $x = \frac{-۱۰۵}{-۲۱} = ۵$، $y = \frac{-۶۳}{-۲۱} = ۳$ و $z = \frac{۴۲}{-۲۱} = -۲$.

چون در هر دو روش بالا از نامنفرد بودن ماتریس ضرایب استفاده می شود لذا این روشها درباره تعیین سازگاری یا ناسازگاری دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب منفرد ناتوانند. اما روشی وجود دارد که نه تنها برای عملیاتی شدن به منفرد یا نامنفرد بودن ماتریس ضرایب کاری ندارد بلکه در روال حل می‌توان سازگاری (از نوع جواب منحصر بفرد و یا بی‌شمار جواب) و یا ناسازگاری دستگاه را فهمید. این روش مبتنی بر بکارگیری عملیات سطری مقدماتی است و بعلاوه بر خلاف دو روش قبلی، می‌تواند برای دستگاه‌هایی که تعداد معادلات و مجهولاتشان یکی نیستند نیز بکار برده شود.

۳.۲.۵ روش حذفی گاوس

در این روش ابتدا ماتریس افزوده $(A|B)$ را تشکیل داده و سپس همانند استفاده از عملیات سطری مقدماتی در محاسبه ماتریس وارون، این سه عملگر را بر ماتریس افزوده اثر داده تا ماتریس A به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل شود:

$$(A|B) \xrightarrow{\text{عملیات سطری مقدماتی}} (\underbrace{C}_{\text{بالا مثلثی}}|D)$$

سپس از روی ماتریس بالا مثلثی بدست آمده در ماتریس افزوده، مجدداً یک دستگاه معادلات خطی ساخته که بسادگی قابل حل است.

مثال ۶.۵. دستگاه زیر را به روش حذفی گاوس حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x+y-\ \ z=۸ \\ -۳x-y+۲z=-۱۱ \\ -۲x+y+۲z=-۳ \end{cases}$$

ماتریس افزوده متناظر را تشکیل داده و آنقدر از اعمال سطری مقدماتی روی آن اثر می دهیم تا ماتریس ضرایب بالا مثلثی شود:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۱ & -۱ & ۸ \\ -۳ & -۱ & ۲ & -۱۱ \\ -۲ & ۱ & ۲ & -۳ \end{array}\right) \xrightarrow[(۳/۲)R_۱+R_۲\mapsto R_۲]{R_۱+R_۳\mapsto R_۳} \left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۱ & -۱ & ۸ \\ ۰ & ۱/۲ & ۱/۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۵ \end{array}\right) \xrightarrow{-۴R_۲+R_۳\mapsto R_۳}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۱ & -۱ & ۸ \\ ۰ & ۱/۲ & ۱/۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{array}\right)$$

دستگاه متناظر با ماتریس افزوده آخر عبارت است از:

$$\begin{cases} ۲x+\qquad y-\qquad z=۸ \\ \qquad (۱/۲)y+(۱/۲)z=۱ \\ \qquad\qquad -\qquad z=۱\rightarrow z=-۱ \end{cases}$$

با جایگذاری z در معادله دوم $y=۳$ و با جایگذاری هر دو در معادله اول داریم $x=۲$.

۴.۲.۵ نکات خاص، مثالهای خاص

نکاتی وجود دارد که با توجه به آنها پیش بینی سازگاری و یا ناسازگاری یک دستگاه معادلات خطی ممکن است.

تعریف ۷.۵. فرض کنید A یک ماتریس دلخواه باشد که درآیه ها در آن به فرم زیر قرار گرفته‌اند:

الف) تمام سطرهایی که کاملاً صفر هستند در انتهای ماتریس دیده می‌شوند.

ب) اگر سطری درآیه غیر صفر دارد (درآیه پیشرو) آن درآیه نسبت به درآیه پیشروی سطر قبلی در موضعی عقب تر دیده میشود. بعبارت دیگر اگر درآیه پیشروی سطر ناصفر i ام در ستون k_i دیده شد آن گاه

$$k_۱ < k_۲ < \cdots < k_r$$

رعایت می‌شود. در این صورت می‌گویند A در شکل سطری پلکانی خود قرار دارد.

نمونه های زیر واجد شرایط الف و ب بالا هستند. به شکل پلکانی شده ماتریس ها توجه کنید:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ ۰ & \blacksquare & * & * & * \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ ۰ & \blacksquare & * \\ ۰ & ۰ & \blacksquare \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۰ & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ ۰ & ۰ & ۰ & \blacksquare & * & * & * & * \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \blacksquare & * & * & * \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \blacksquare & * & * \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \blacksquare \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

ماتریسهای زیر نیز هر کدام بدلیلی نمی‌توانند در شکل سطری مقدماتی دیده شوند:

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

نکته ۱.۵. روش سطری پلکانی کردن یک ماتریس، استفاده مناسب از اعمال سطری و ایجاد صفر بنحوی است که یک ماتریس سطری پلکانی احتیاج دارد.

مثال ۷.۵. ماتریس زیر را به شکل سطری پلکانی خودش تبدیل می‌کنیم:

$$Q = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۸ & -۷ \\ ۲ & -۲ & ۴ & ۰ \\ -۳ & ۴ & -۲ & -۵ \end{pmatrix} \xrightarrow{R_۱ \leftrightarrow R_۲} \begin{pmatrix} ۲ & -۲ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۸ & -۷ \\ -۳ & ۴ & -۲ & -۵ \end{pmatrix} = Q_۱$$

$$Q_۱ \xrightarrow[\mapsto R_۳]{۳R_۱ + R_۳} \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۸ & -۷ \\ ۰ & ۱ & ۴ & -۵ \end{pmatrix} = Q_۲$$

$$Q_۲ \xrightarrow{R_۳ \leftrightarrow R_۲} \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۴ & -۵ \\ ۰ & ۲ & ۸ & -۷ \end{pmatrix} = Q_۳$$

$$Q_{۳} \xrightarrow{-۲R_{۲}+R_{۳}\mapsto R_{۳}} \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۴ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix} = Q_{۴}$$

$$Q_{۴} \xrightarrow{(۱/۳)R_{۳}\mapsto R_{۳}} \begin{pmatrix} \boxed{۱} & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & \boxed{۱} & ۴ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \boxed{۱} \end{pmatrix}$$

۵.۲.۵ رتبه

تعریف ۸.۵. فرض کنیم A ماتریسی دلخواه باشد. تعداد سطرهای ناصفری که در شکل سطری پلکانی شده A دیده می‌شود را **رتبه** A نامیده و با $\text{rank}(A)$ نشان می‌دهند. عدد ۰ را رتبه ماتریس صفر تعریف می‌کنند.

مثال ۸.۵.

$$\text{rank}(Q) = ۳, \quad \text{rank}\begin{pmatrix} ۳ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۵ & ۴ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۵ \end{pmatrix} = ۳, \quad \text{rank}\begin{pmatrix} ۳ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۵ & ۴ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} = ۳$$

بحث درباره رتبه زیاد است ولی اجمالاً چند نکته زیر قابل ذکراند:

قضیه ۲.۵. الف) اگر $A_{m\times n}$ آن گاه $\text{rank}(A) \leqslant \min(m,n)$.

ب) برای ماتریس مربعی $A \neq \mathbf{0}_n$ همواره $۱ \leqslant \text{rank}(A) \leqslant n$ ولی اگر ماتریس نامنفرد باشد آن‌گاه حتماً $\text{rank}(A) = n$ و بالعکس.

ج) برای دو ماتریس هم مرتبه B, A، رابطه نامساوی زیر برقرار است:

$$\text{rank}(A+B) \leqslant \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

مفهوم رتبه را می توان در بررسی دستگاه معادلات خطی استفاده کرد به این صورت که نکات زیر برای یک دستگاه معادلات m معادله و n مجهولی $AX = \mathbf{b}$ قابل توجه اند:

قضیه ۳.۵. الف) اگر $m < n$ آن گاه در حالت کلی دستگاه، یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد ولی اگر $\text{rank}(A) = m$ به ازای هر $\mathbf{b}$ بی‌شمار جواب دارد. در حالتی که $\mathbf{b} = \mathbf{0}$، دستگاه حتماً بی‌شمار جواب دارد.

ب) اگر $m > n$ آن‌گاه در حالت کلی دستگاه، یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد ولی اگر $\text{rank}(A) = n$ به ازای هر $\mathbf{b}$ یا فاقد جواب است یا فقط یک دسته جواب دارد. در حالتی که $\mathbf{b} = \mathbf{0}$، دستگاه یا یک دسته و یا بی‌شمار جواب دارد.

ج) اگر $m = n$ آن‌گاه در حالت کلی دستگاه، یا یک یا بی‌شمار جواب و یا ناسازگار است ولی اگر $\text{rank}(A) = n(= m)$ به ازای هر $\mathbf{b}$ فقط یک دسته جواب دارد. در حالتی که $\mathbf{b} = \mathbf{0}$، دستگاه یا یک دسته و یا بی‌شمار جواب دارد.

۳.۵ تمرینات

۱. دستگاه‌های زیر را با استفاده از ضرب ماتریس به فرم معادله‌ای ماتریسی بنویسید.

الف) $\begin{cases} ۳x + y = ۶ \\ ۲x - ۹y = ۵ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} -x + ۳y = ۱ \\ x - ۲y = ۵ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} ۳x + y + z = ۲ \\ x - y + z = ۴ \\ ۵x - y + ۲z = ۱۲ \end{cases}$ د) $\begin{cases} ۲r - s + ۳t = ۹ \\ ۵r - s + ۲t = ۵ \\ r - s + ۳t = -۱ \end{cases}$

۲. با کمک ماتریس معکوس، معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$ د) $X \begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$

۳. چرا نمی‌توان روش کرامر را برای معادله $AX = B$ وقتی A ماتریسی منفرد است، بکار برد؟

۴. دستگاه‌های زیر را حل کنید. کدام سازگار و کدام ناسازگاراند؟

الف) $\begin{cases} x + ۲y + z = ۴ \\ ۳x + z = ۲ \\ x - y + z = ۱ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x - ۲y + z = ۰ \\ ۲x + y - ۲z = ۲ \\ ۵x + ۲y - ۳z = ۲ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x + ۳y + ۳z = ۷ \\ ۲x + y + z = ۴ \\ x + y + z = ۳ \end{cases}$ د) $\begin{cases} ۲x + ۳y + ۴z = ۲ \\ x + ۲y + ۲z = ۱ \\ x + y + ۲z = ۲ \end{cases}$

ه) $\begin{cases} x + y + z = ۰ \\ ۲x - y - z = ۰ \\ -x + ۲y + ۲z = ۰ \end{cases}$ و) $\begin{cases} x + ۳z = ۱ \\ y - z = ۲ \\ x + ۳y = ۰ \end{cases}$

ز) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+2z=-1 \\ x+3z=4 \end{cases}$

ح) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-2z=1 \\ -x+y+4z=0 \end{cases}$

ط) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ -x+2y+2z=0 \end{cases}$

ی) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ y+2z=1 \\ 3x+y-7z=-2 \end{cases}$

ک) $\begin{cases} 6x+5y=2 \\ x+y=-3 \end{cases}$

ل) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y+3z=-5 \\ 2x-y-13z=17 \end{cases}$

م) $\begin{cases} x-3y+3z=7 \\ x+2y-z=-2 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$

ن) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-2z=2 \\ 3x+2y-3z=2 \end{cases}$

۵. مقادیری از a و b ارائه دهید که دستگاه زیر سازگار باشند.

الف $\begin{cases} x-2y=a \\ 3x-6y=b \end{cases}$

ب) $\begin{cases} ax+2y=1 \\ x+y=b \end{cases}$

۶. مقدار k را طوری تعیین کنید که دستگاه‌های زیر جواب نابدیهی (غیرصفر) داشته باشند.

الف $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ 4x+y+kz=0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+ky+3z=0 \\ 8x-y+3z=0 \end{cases}$

ج $\begin{cases} ky+x+2z=0 \\ (k-1)x-y=0 \\ 2x+y+4z=0 \end{cases}$

د) $\begin{cases} kx+y+2z=0 \\ x+2y+kz=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$

۷. دستگاه‌های زیر به ازای چه مقدار k بی‌شمار جواب دارند؟

الف) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+y+kz=0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x-y+kz=0 \\ y-2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x+ky+z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}$

۸. مقدار k چه عددی باشد تا دستگاه زیر تنها یک دسته جواب داشته باشد؟

$$\begin{cases} kx+y-z=1 \\ 2x+y+kz=2 \\ x+2y-2z=1 \end{cases}$$

۹. دستگاه‌های زیر به‌ازای کدام مقدار a سازگار هستند؟

الف) $\begin{cases} 2x+3y=-a \\ 3x+2y=6 \\ ax-4y=13 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x+2y=a \\ 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} 2x+ay=1 \\ ax+y=5 \\ x-2y=4 \end{cases}$

۱۰. مجموعه جواب دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -x+2y=8 \end{cases}$ چیست؟

۱۱. از دستگاه معادلات $\begin{cases} \dfrac{xy}{y-x}=6 \\ \dfrac{xy}{2x+3y}=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$ مقدار x کدام است؟

۱۲. از دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x-y-z=-9 \\ -x+2y+z=10 \\ x+y+2z=11 \end{cases}$ مقدار z کدام است؟

۱۳. از دستگاه معادلات $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{y+z}{3}=z-3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ مقدار y چقدر است؟

۱۴. دستگاه $\begin{cases} mx-2y=0 \\ -2x+my=0 \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار m بی‌نهایت جواب دارد؟

۱۵. برای کدام مقدار m دستگاه معادلات **الف** جواب غیرصفر و **ب** جواب منحصر به‌فرد ندارد؟

الف) $\begin{cases} mx + y + 2z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x + my + z = -1 \\ 2x + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \end{cases}$

۱۶. دستگاههای زیر چند جواب دارند؟

الف) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + z = 3 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + y = 2 \\ x + y = 9 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ -4x + 2y + 2z = -20 \end{cases}$

۱۷. دستگاه معادلات زیر با کدام شرایط بی‌شمار جواب دارد؟

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

۱۸. سه صفحه با معادله ماتریسی زیر مفروضند. فصل مشترک‌های دو به دوی این سه صفحه چگونه‌اند؟

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۱۹. در دستگاه $\begin{cases} xy^2z = 2 \\ xyz^2 = 16 \\ x^2yz = 32 \end{cases}$، y کدام است؟

۲۰. در دستگاه زیر، معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به‌صورت $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ است، $x + y$ کدام است؟

$$\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$$

۲۱. دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادله

$$\begin{cases} ax + y + ۲z = ۱ \\ x + by + ۳z = ۲ \\ cx + ۲y - z = -۱ \end{cases}$$

برابر ۴ است. اگر $x = \frac{۱}{۲}$ مقدار b را بدست آورید.

۲۲. در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} ax + ۲y - z = ۱ \\ bx - y + z = ۰ \\ cx + ۳y + ۲z = ۷ \end{cases}$$

اگر دترمینان ضرایب مجهولات برابر ۶ باشد، مقدار چه رابطه‌ای بین ضرایب مجهول برقرار است؟

۲۳. با اعمال سطری مقدماتی ماتریس افزوده A به B تبدیل شده است. مقدار a، b و c کدام‌اند؟

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۱ & ۲ \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & a \\ ۰ & ۱ & ۰ & b \\ ۰ & ۰ & ۱ & c \end{pmatrix}$$

۲۴. در حل یک دستگاه معادلات خطی به روش حذفی گاوس، ماتریس افزوده A به B تبدیل شده است. حاصل $a+b+c$ چه عددی است؟

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۵ & -۱ & a \\ ۴ & ۳ & ۷ & b \\ -۱ & -۳ & -۱ & c \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۱۲ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۵ & ۱۵ \end{pmatrix}$$

۲۵. در حل دستگاه سه معادله سه مجهولی به روش کرامر، مقدار یک متغیر به‌شکل زیر داده شده است. مطلوبست دیگر متغیرها:

الف) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۴ & ۰ & ۱ \\ -۳ & ۱ & -۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{vmatrix}}$ ب) $y = \dfrac{\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ & -۴ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۶ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۴ \end{vmatrix}}$ ج) $z = \dfrac{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۹ \\ ۴ & ۵ & ۲۴ \\ ۳ & ۱ & ۴ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۱ & -۲ \end{vmatrix}}$

۲۶. مقدار k کدام است هرگاه دستگاه زیر دارای جواب باشد؟

$$\begin{cases} ۲x - y + ۴z = ۳ \\ x + ۲y + ۲z = ۴ \\ -x + y - ۲z = k + ۳ \end{cases}$$

۲۷. در دستگاه معادلات زیر اگر دترمینان ضرایب برابر ۱۷ باشد، مقدار y کدام است؟

$$\begin{cases} ۲x + ay - z = ۱ \\ x + ۲y + ۳z = -۷ \\ -x + by - ۲z = ۰ \end{cases},$$

۲۸. دو دستگاه زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

الف) $\begin{cases} ۳x + ۳y - z = ۷ \\ ۲x - y + ۳z = ۶ \\ x + y - z = ۱ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x + ۳y - z = ۱ \\ ۲x - y + ۳z = ۰ \\ x - z = ۱ \end{cases}$

۲۹. اعمال سطری مقدماتی (روش حذفی گاوس)، تغییر زیر را بوجود آورده است. مطلوبست مقدار a.

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{اعمال سطری}} \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۰ & ۴ & a \\ ۴ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

۳۰. دستگاه زیر به‌ازای چه مقادیری از a بی‌شمار جواب و به‌ازای چه مقادیری از a فقط جواب صفر دارد؟

$$\begin{cases} ax + ۲y = ۰ \\ ۳x - ۲y = ۰ \end{cases}$$

۳۱. به‌ازای کدام مقدار m، دستگاه زیر فاقد جواب است؟

$$\begin{cases} (m-۳)x + ۳y = m \\ (m+۱)y = ۲ - ۴x \end{cases}$$

۳۲. مجموعه جواب‌های دستگاه معادلات زیر چیست؟

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۵ \\ -x + ۲y = ۸ \end{cases}$$

۳۳. فرض کنید

$$x=\begin{pmatrix}۱\\۰\\۱\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}۱\\۱\\۰\end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix}۰\\۱\\۱\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}۱\\۲\\۳\end{pmatrix}$$

مقادیر a، b و c را طوری بیابید که $ax+by+cz=\mathbf{b}$.

۳۴. رتبه ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\begin{pmatrix}۱&۲&۱&۲\\۲&۱&۲&۱\\۳&۳&۳&۳\\۶&۶&۶&۶\end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix}۱&۲&۱&۱\\۲&۱&۱&۰\\۱&۲&-۱&-۲\\۳&۳&۲&۱\end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix}۱&۱&۲&۴\\۲&۴&۵&۹\\۰&۲&۱&۱\\۱&۳&۳&۵\end{pmatrix}$

۳۵. یک مقدار برای x را طوری بدست آوردید که موارد خواسته شده زیر برقرار باشد.

الف) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}۱&۰\\۳&x\end{pmatrix}=۲$ ب) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱+x&۱\\۱&۱&۱+x\end{pmatrix}=۳$

ج) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}x&۲&۱\\۱&-x&۲\\۰&۱&-x\end{pmatrix}=۲$

۳۶. با یک مثال نشان دهید رابطه زیر بین دو ماتریس ۲×۲ برقرار است.

$$\operatorname{rank}(A+B)\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$

۱.۳.۵ جواب و راهنمایی‌ها

۱. شکل ماتریسی **الف** به‌صورت $\begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۹ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۶ \\ ۵ \end{pmatrix}$ در می‌آید. و برای **د** داریم:

$$\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۵ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۹ \\ ۵ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

۲. برای **الف:** از فرمول ماتریس معکوس یک ماتریس منفرد از مرتبه ۲ داریم:

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}^{-۱} = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

حال تساوی داده شده را از سمت چپ در ماتریس معکوس بالا ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -۲ \\ ۵ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

لذا $x = -۲$ و $y = ۵$. همین روش را برای **ب** بکار ببرید. برای قسمت **د**، ماتریس

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}^{-۱}$$

را از راست همانند کار بالا در تساوی داده شده ضرب کنید. **۳.** چون در روش کرامر، یافتن متغیرها منوط به نامنفرد بودن ماتریس ضرایب است. **۴.** برای **الف**، دترمینان ماتریس ضرایب -۶ است. بکمک روش ماتریس معکوس و اینکه:

$$A^{-۱} = \begin{pmatrix} -۱/۶ & ۱/۲ & -۱/۳ \\ ۱/۳ & ۰ & -۱/۳ \\ ۱/۲ & -۱/۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

داریم

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-۱} \begin{pmatrix} ۴ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

در مورد **د**، ماتریس ضرایب منفرد است لذا این دستگاه ناهمگن جواب یکتا ندارد. اینکه ماتریس بی‌شمار یا اصلاً جواب ندارد را باید از روی شکل سطری پلکانی شده نهایی ماتریس افزوده متناظرش بفهمیم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۳ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۲ \end{array}\right) \xrightarrow[\text{اعمال سطری مقدماتی}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right)$$

چون رتبه ماتریس ضرایب (عدد ۲) از رتبه ماتریس افزوده (که عدد ۳ است) کمتر شده[۱۲] لذا این دستگاه ناسازگار است. در مورد قسمت **ه** دترمینان ماتریس ضرایب مجدداً صفر است. دستگاه همگن همواره سازگار است[۱۳] ادعا داریم در این حالت بی‌شمار جواب را می‌توان برای دستگاه یافت. فرم سطری پلکانی نهایی ماتریس افزوده را مانند نمونه قبلی بدست می‌آوریم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۳ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right)$$

در اینجا، رتبه ماتریس ضرایب و رتبه ماتریس افزوده برابر (با عدد ۳) و از تعداد معادلات کمتر است و بنابر این دستگاه بی‌شمار جواب دارد. برای ارائه این بی‌شمار جواب مانند روش گاوس، یک دستگاه معادلات نظیر آخرین ماتریس می‌سازیم:

$$\Big\{x+y+z=۰, -۳y-۳z=۰\Big\}$$

متغیر y را برحسب z بدست آورده در معادله اول جانشین کرده تا x هم بر حسب z بدست آید. یعنی $-۳y-۳z=۰$ نتیجه می‌دهد $y=-z$ و $x=۰$. در نهایت شکل کلی این بی‌شمار جواب عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}, \quad z\in\mathbb{R}$$

تساوی آخر نشان می‌دهد که هر مضربی از ماتریس آخر، یک جواب برای دستگاه می‌شود. در قسمت **ل** دترمینان ماتریس ضرایب ۱ است (بکمک روش ساروس) و لذا این دستگاه فقط یک

---

[۱۲] به سطر آخر توجه کنید.

[۱۳] حداقل جواب $X=(۰\ ۰\ ۰)$ را دارد.

دسته جواب دارد. بعد از انجام مراحل روش گاوس، به ماتریس سطری پلکانی شده زیر می‌رسیم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۴ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}\right)$$

دستگاه معادلات نظیر آخرین ماتریس برابر است با:

$$\left\{x-y+z=۰, y+۴z=-۵, z=۲\right\}$$

که نتیجه می‌دهد، $x=۱۵$، و $y=-۱۳$.

۵. برای **الف**، فرم ماتریسی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۶ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس ضرایب صفر است لذا سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه را از روی ماتریس سطری پلکانی شده ماتریس افزوده باید بفهمیم:

$$\left(\begin{array}{cc|c} ۱ & -۲ & a \\ ۳ & -۶ & b \end{array}\right)\xrightarrow{-۳R_۱+R_۲\mapsto R_۲}\left(\begin{array}{cc|c} ۱ & -۲ & a \\ ۰ & ۰ & -۳a+b \end{array}\right)$$

دستگاه در صورتی سازگار است که سطر آخر کاملاً صفر شود یعنی $-۳a+b=۰$.

۶. یک دستگاه همگن در صورتی جواب نابدیهی دارد که دترمینان ماتریس ضرایبش صفر شود. لذا از **الف** تا **د**، مقادیر k به‌ترتیب عبارتند از $k=۴$، $k=-۲$، $k=۱,\frac{۱}{۲}$ و $k=۴,-۱$.

۷. روش تمرین قبل را بکار برده و از **الف** تا **ج** به‌ترتیب داریم $k=۳$، $k=۱$ و $k=-\frac{۱}{۳}$.

۸. دترمینان ماتریس ضرایب را ناصفر قرار دهید.

۹. هرگاه تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر باشد برای سازگاری–ناسازگاری دستگاه روی سطری پلکانی شده ماتریس افزوده حساب کنید. مثلاً برای **الف**:

$$\left(\begin{array}{cc|c} ۲ & ۳ & -a \\ ۳ & ۲ & ۶ \\ a & -۴ & ۱۳ \end{array}\right)\xrightarrow[\text{اعمال سطری مقدماتی}]{}\left(\begin{array}{cc|c} ۲ & ۳ & -a \\ ۰ & -۵/۲ & ۶+(۳/۲)a \\ ۰ & ۰ & (۱۷/۵)+(-۲/۵)a^۲-۶a \end{array}\right)$$

برای اینکه دستگاه سازگار باشد باید $\frac{۱۷}{۵}+\frac{-۲}{۵}a^۲-۶a=۰$ که چون دارای مفسر مثبت است برای a دو جواب متمایز خواهیم داشت.

۱۰. این دستگاه یک دسته جواب منحصر به‌فرد دارد.

۱۱. راهنمایی حل به این صورت است که:

$$\frac{y-x}{xy} = 1/6 \to 1/x - 1/y = 1/6$$ معادله اول:

$$\frac{2x+3y}{xy} = -2 \to 2/y + 3/x = 2$$ معادله دوم:

اکنون بگیرید $X = \frac{1}{x},\ Y = \frac{1}{y}$ و دستگاه معادل زیر را حل کنید[14]:

$$\left\{X - Y = 1/6, -3X + 2Y = -2\right\}$$

۱۳. برای حل این دستگاه سعی کنید تا از هر تساوی در معادله اول، یک معادله بر حسب متغیرهای همان تساوی بسازید:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{y+z}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3x + y - 2z = 0$$

$$\frac{z+y}{3} = \frac{-3+z}{1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} y - 2z = -9$$

و سپس دستگاه زیر را حل کنید:

$$\left\{3x + y - 2z = 0, y - 2z = -9, x + y + z = 0\right\}$$

۱۵. برای اینکه دستگاه همگن جواب غیر صفر داشته باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب‌اش صفر شود. لذا برای **الف** مقادیر $m = -1, 4$ بدست می‌آیند. با فرض جواب داشتن **ب**، دترمینان ماتریس ضرایب را مجدداً صفر کرده و حل کنید. برای **الف** نکات اضافه زیر وجود دارد:

ماتریس سطری پلکانی شده ماتریس افزوده را بدست می‌آوریم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & m & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{اعمال سطری مقدماتی}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{2m-1}{m} & \frac{m^2-2}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^2-3m-4}{2m-1} & 0 \end{array}\right)$$

اگر $m \neq 0$ و $m \neq 1/2$ آن‌گاه دو مقدار داده شده بالا، سطر آخر را کاملاً صفر کرده و لذا دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

---

[14] بدیهی است هیچکدام از متغیرها صفر نیستند.

۱۶. برای ج ، ماتریس سطری پلکانی ماتریس افزوده به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & -۱ & -۱ & ۵ \\ -۴ & ۲ & ۲ & -۲۰ \end{array}\right) \xrightarrow[\text{اعمال سطری مقدماتی}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & -۱ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱۰ \end{array}\right)$$

با توجه به سطر آخر، این دستگاه فاقد جواب است. **۱۸.** ماتریس سطری پلکانی شده ماتریس افزوده را بدست می‌آوریم:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & -۱ & ۵ & ۱ \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۷ & -۷ & -۷ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۸ \end{array}\right)$$

سطر آخر نشان می‌دهد این دستگاه جواب ندارد. بعبارت دیگر این سه معادله که هر کدام یک صفحه هستند، یک نقطه مشترک در تقاطع ندارند (شکل زیر) ولی چون تعداد متغیرها در هر جفت از معادلات:

$$\begin{cases} x-۲y+۳z=۴ \\ ۲x+۳y-\ \ z=۱ \end{cases}, \quad \begin{cases} ۲x+۳y-\ \ z=۱ \\ ۴x-\ \ y+۵z=۱ \end{cases}, \quad \begin{cases} x-۲y+۳z=۴ \\ ۴x-\ \ y+۵z=۱ \end{cases}$$

از تعداد معادلات بیشتر است لذا هر دستگاه بی‌شمار جواب دارد و هر جواب در واقع توصیفی از فصل مشترک دو صفحه است. در اینجا یکی از دستگاهها را حل می‌کنیم:

$$\left\{x-۲y+۳z=۴, ۲x+۳y-z=۱\right\}$$

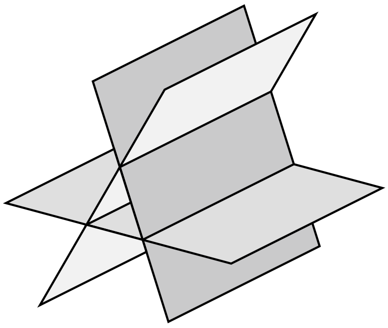
دومتغیر x و y را برحسب z بدست می‌آوریم:

$$\left\{x-۲y=(۴-۳z), ۲x+۳y=(۱+z)\right\}$$

و لذا دسته جواب‌های به‌شکل زیر قابل توصیفند:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲-z \\ z-۱ \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۰ \end{pmatrix}}^{A} = \underbrace{z\begin{pmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۰ \end{pmatrix}}_{\substack{\text{توصیف یک خط راست} \\ \text{که از نقطه } A \text{ می گذرد}}}$$

اکنون مجدداً شکل بالا را ببینید. فصل مشترک‌ها کدامند؟



۲۰. اولاً ماتریس ضرایب $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ منفرد است[۱۵] و ثانیاً با کمک فرمول داریم:

$$A^{-۱} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix} \to d = -۱,\ b = ۰,\ c = ۲,\ a = ۱$$

البته توجه داریم $|A| = ad - bc = -۱$. حال مقادیر بدست آمده را در دستگاه جای‌گذاری و حل کنید. **۲۱.** از روش کرامر می‌دانیم:

$$\frac{۱}{۲} = x = \frac{\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & b & ۳ \\ -۱ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}}{۴} \to \frac{b+۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \to b = ۱$$

۲۳. مقادیر عبارتند از $a = \frac{۲۳}{۱۷},\ \ b = \frac{۳}{۱۷},\ \ c = -\frac{۵}{۱۱}$. **۲۴.** چون از ماتریس آخر مقادیر $x = ۴,\ \ y = ۱,\ \ z = ۳$ بدست می‌آید لذا کافی است آنها را در دیگر دستگاه مسئله جایگزین و مقادیر $c,\ b,\ a$ را بیابید. **۲۵.** کافی است فرمول روش کرامر را در نظر گرفته و با توجه به نحوه ساخت، بقیه مجهولات را بیابیم. مثلاً برای **الف** داریم:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ ۰ & -۳ & -۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{vmatrix}}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۱ & -۳ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{vmatrix}}$$

[۱۵] چون $|A^{-۱}| = -۱ \neq ۰$ پس $|A| = \frac{۱}{|A^{-۱}|} = -۱ \neq ۰$.

۲۶. ماتریس افزوده نظیر دستگاه را به‌شکل سطری پلکانی درآورید:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & -۱ & ۴ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۴ \\ -۱ & ۱ & -۲ & k+۳ \end{array}\right) \xrightarrow[\text{اعمال سطری مقدماتی}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} ۲ & -۱ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۵/۲ & ۰ & ۵/۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & k+۴ \end{array}\right)$$

برای سازگار ماندن دستگاه، سطر آخر باید کاملاً دارای صفر باشد. **۲۸.** برای **الف**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۳ & ۳ & -۱ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۳ & ۶ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \end{array}\right) \xrightarrow[\text{اعمال سطری مقدماتی}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} ۳ & ۳ & -۱ & ۷ \\ ۰ & -۳ & ۱۱/۳ & ۴/۳ \\ ۰ & ۰ & -۲/۳ & -۴/۳ \end{array}\right)$$

۲۹.

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{pmatrix} \xrightarrow{R_۱ \leftrightarrow R_۳} \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow[R_۱+R_۲ \mapsto R_۲]{R_۱+R_۳ \mapsto R_۳} \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & -۱ \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_۲ \leftrightarrow R_۳} \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۰ & ۴ & -۱ \\ ۴ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -۱$$

۳۱. ماتریس افزوده نظیر دستگاه را به‌شکل سطری پلکانی درآورید:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m-۳ & ۳ & m \\ ۴ & m+۱ & ۲ \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} m-۳ & ۳ & m \\ ۰ & \frac{m^۲-۲m-۱۵}{m-۳} & \frac{۲m+۶}{۳-m} \end{array}\right)$$

حال اگر فرض کنیم $m \neq ۳$ آن‌گاه $m = ۵$ مقدار $\frac{m^۲-۲m-۱۵}{m-۳}$ در ماتریس سمت راست را صفر ولی $\frac{۲m+۶}{۳-m}$ همان ماتریس را به $۸ \neq ۰$ می‌کند و لذا دراین حالت دستگاه ناسازگار می‌گردد.

۳۴. شکل سطری پلکانی شده مورد **ب** به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & -۳ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

که نتیجه می‌دهد رتبه ماتریس **۲** است (۲ سطر غیر صفر).

۳۵. برای قسمت **ب** کافی است دترمینان دستگاه را غیر صفر قرار دهید. برای **ج** اگر $x = ۰$ باشد آن‌گاه دترمینان ماتریس حاصل -۱ شده که در این صورت رتبه ماتریس ۳ است. اما اگر $x \neq ۰$:

$$\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 2 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{اعمال سطری مقدماتی}]{} \begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & \frac{x^2+2}{-x} & \frac{2x-1}{x} \\ 0 & 0 & \frac{x^3+1}{-x^2-2} \end{pmatrix}$$

بنابه حکم مسئله، رتبه باید ۲ شود و لذا یک سطر را صفر می‌کنیم. کافیست $x = -1$ انتخاب شود.

۶

مقدمات آشنایی با توابع چند متغیره

مفهوم یک n- تایی از اعداد حقیقی که به‌شکل

$$(a_۱, a_۲, \dots, a_n) \tag{۱.۶}$$

بیان می‌شود از جمله بنیادی‌ترین تعاریف در ریاضیات است. اولین چیزی که در (۱.۶) دیده می‌شود، ترتیبی است که در شماره‌گذاری اندیسی مؤلفه‌های آن شاهدیم.[۱] از این‌رو گاهی به آن یک n-**تایی مرتب** هم می‌گویند.

در این قسمت فرض بر اینست که هر $a_{i(۱\leqslant i\leqslant n)}$، در (۱.۶) عددی حقیقی باشد. مجموعهٔ همهٔ چنین n- تایی‌های از اعداد حقیقی را با نماد $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهند. در مواقعی ممکن است از هر عضو از این مجموعه، به‌عنوان یک **نقطه** از فضای $\mathbb{R}^n$ و بالتبع به مؤلفه‌های $a_{i(۱\leqslant i\leqslant n)}$ **مختصات** این نقطه اطلاق کنیم. برای نمونه ۵-تایی $A = (۱, ۲, ۳, -۶, ۱۷)$، نقطه‌ای با مختصات بترتیب

$$a_۱ = ۱, a_۲ = ۲, a_۳ = ۳, a_۴ = -۶, a_۵ = ۱۷$$

از فضای ۵-بُعدی $\mathbb{R}^۵$ است که تقریباً تصوری از آن در دنیای واقعی نداریم.

تغییر در مولفه‌ها و یا در ترتیب آنها در نمایش یک چندتایی و یا بهتر بگوییم، مختصات یک نقطه (در حالت کلی)، آنرا به نقطه متمایز دیگری و در واقع به چندتایی متفاوتی تبدیل می‌کند و لذا تغییر در آنها بدون دلیل موجه مجاز نیست. مثلاً در بارکد زیر

[۱] دقیقاً با همان مفهومی که در اندیس گذاری درآیه‌های یک ماتریس دیدیم.

اعداد نقش بسته، را می‌توان با یک ۱۳−تایی مرتب از اعداد دانست:

$$(۷,۴,۶,۵,۰,۳,۵,۵,۴,۰,۹,۳,۰)$$

قبول دارید که جابجایی یا حذف اعداد در این نمونه، بارکد متمایز وابسته به محصول دیگری را نشان می‌دهد.

در حالت $n=۱$ و با در نظر گرفتن فضای $\mathbb{R}$، تجسم موضوعاتی همچون دامنه تعریف، حد و پیوستگی و مشتق توابع ۱−متغیره نسبتاً ساده و امکان‌پذیر است. ولی باید پذیرفت که اغلب موضوعات متعارف وابسته به علوم انسانی هنگام ارتباط با ریاضیات، کار با ابعاد بالاتر را ترجیح می‌دهند هرچند قابل تصور عینی و فیزیکی نباشند. برای نمونه به یک مثال ساده توجه کنید که در آن یک موضوع واقعی برای بیان خود به بُعد $n=۲$ نیاز دارد:

مثال ۱.۶. تولید کننده ای با فروش x واحد از کالایی در داخل با قیمت واحد $p_۱$ و فروش y واحد از همان کالا در خارج از کشور و با قیمت واحد $p_۲$ می‌تواند روی فرمول زیر به‌عنوان درآمد کل حساب کند:

$$TR=p_۱x+p_۲y$$

اکنون، تمام مؤلفه‌های n−تایی (۱.۶)، را متغیر گرفته و مفهوم زیر را که تعمیمی از یک تابع ۱−متغیره است معرفی می‌کنیم. توجه کنید که در مرز ورود به فضایی از ابعاد بالاتر از $n=۱$ هستیم.

تعریف ۱.۶. یک تابع n متغیره به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$z=f(x_۱,x_۲,\cdots,x_n)$$

که در آن f ضابطه تابع، z اسم آن و $x_{i(۱\leqslant i\leqslant n)}$ متغیرهای مستقل جدا از هم هستند.

مثال ۲.۶. فرمول و ضابطه مثال ۱.۶، یک تابع دو متغیره است. در واقع بواسطه این قاعده، انتظار داریم با مقادیر معینی از کالا در داخل و در خارج، یک مقدار درآمد مشخص عاید فروشنده شود.

مثال ۳.۶. نمونه های زیر توابعی بترتیب n متغیره و ۲ متغیره اند:

$$f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) = \frac{۱}{n}(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n) \qquad (\text{میانگین حسابی } n \text{ داده}),$$

$$IQ = \frac{m}{a} \times ۱۰۰ \qquad (m: \text{سن واقعی}\ ,\ a: \text{سن روانی}),$$

دو نکته درباره تعریف ۱.۶ قابل ذکر است:

الف) صفت استقلال برای مؤلفه‌ها را می‌توان به این شکل توضیح داد که تا وقتی خلاف آن ذکر نشده است، تغییرات هر یک روی تغییرات دیگری بلا اثر است. در واقع، این مهم است که متغیرها (فعلاً) وابستگی تغییراتی بهم نداشته باشند.[۲]

ب) حاصل اثر تابع کلی تعریف شده در تعریف، عددی حقیقی است. در واقع نمونه‌های دیگری از توابع هستند که در عین شباهت به تابع فوق، برای استفاده در این درس مناسب نیستند.

ج) در ساختن یک تابع در فرم ۱.۶، از هر آنچه برای یک تابع ۱-متغیره استفاده می‌شد، می‌توان کمک گرفت. مثلاً به نحوه شکل‌گیری توابع ۲-متغیره زیر توجه کنید که چگونه از عملیات جبری و توابع مقدماتی استفاده شده است:

$$z = x^۳y - y^۳x, \quad t = -xye^{-x^۲-y^۲}$$

$$w = (۰.۵(x^۲+y^۲) - \sqrt{x^۲+y^۲})^۲, \quad p = e^{-x^۲y^۲}$$

تا به اینجا، تقریباً اطلاعاتی درباره لزوم کار با ابعاد بالاتر و معرفی نمونه‌هایی از توابع وابسته به آنها ارائه شد. کار را با یادآوری زیر آغاز می‌کنیم:

یاد آوری ۱.۶ . در مباحث مربوط به ریاضی کاربردی ۱، بعد از تعاریف مقدماتی مربوط به تابع $y = f(x)$، محدوده‌ای مجاز برای تغییر x تعیین می‌شد که آنرا دامنه تعریف تابع y نامیده و این مجموعه D_y برای تابع ۱-متغیره، همواره زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. مثلاً:

$$D_{\sqrt{x-۱}} = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant ۱\} \equiv [۱, +\infty)$$

درباره توابع چند متغیره، احتیاج به تعمیم مناسب داریم. اگر f تابعی n متغیره باشد، برخلاف

[۲] مثلاً قیمت یک اتومبیل در کشور به عوامل مختلفی همچون تورم، قیمت ارز و غیره وابسته است.

اینکه x در یک متغیره به یک ناحیه از $\mathbb{R}$ تعلق داشت، این تابع با ناحیه ای بمراتب بزرگتر سروکار دارد. علت اینست که در واقع برای f، n-تایی

$$(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$$

به‌عنوان ورودی تابع باید مشخص شود به کجا تعلق دارد و در واقع، افزوده شدن متغیرها در یک تابع، مستقیماً موضوعات وابسته به آن تابع را (همانند دامنه تعریفش) تحت تاثیر قرار داده و تغییر می‌دهد. این نکته را فعلاً بدین صورت جمع و جور می‌کنیم که تغییرات ورودی برای یک تابع ۲-متغیره در مجموعه $\mathbb{R}^۲$، برای یک تابع ۳-متغیره در مجموعه $\mathbb{R}^۳$ و الی آخر خواهد بود. اگرچه هر متغیر در یک چندتایی تغییرات خود را دارد که آنهم در $\mathbb{R}$ است ولی در کل با توجه به ضابطه تابع، تغییرات و انتخاب مجموعه‌های معنی کننده مسئله صورت می‌گیرد. نکته دیگری که با توجه به مرتب بودن یک چند تایی بدیهی بنظر می‌رسد اینست که:

$$(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = (a_۱, a_۲, \dots, a_n) \Longleftrightarrow x_i = a_i, \quad (۱ \leqslant i \leqslant n) \qquad (۲.۶)$$

ایده‌های حل مسائل در کار با نوع تابع ارائه شده در تعریف ۱.۶ اغلب از همان ایده‌هایی هستند که درباره همنوع ۱-بُعدی خودش بکار می‌رفت. به مثال زیر توجه کنید تا تغییری که در افزایش بُعد و یافتن دامنه تعریف یک تابع ۲-متغیره پیش می‌آید ببینید.

قرارداد ۱.۶. با توجه به پیچیدگی که با انتخاب اعداد بزرگ بجای n حاصل می شود، ترجیح می دهیم با $n = ۲$ کار کنیم. البته در مواردی که مشکلی در بیان یا عملیات ریاضی پیش نیاید، برای n می توان اعداد بالاتر هم بکار گرفت.

مثال ۴.۶. تابع دو متغیره $f(x,y) = \dfrac{۳x^۲ + ۵y}{x-y}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ضمن یافتن توصیفی از دامنه تعریف تابع، مقدار $f(۱,-۲)$ را بیابیم.

با توجه به شکل تابع، مقدار $x - y$ نباید صفر شود و از این‌رو نباید اعدادی بجای دو متغیر قرار گیرند که **مساوی** باشند. یعنی:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ :\ x \neq y\}$$

دقت کنید مجموعه فوق زیر مجموعه‌ای از فضای ۲- بُعدی $\mathbb{R}^۲$ است. همچنین

$$f(۱,-۲) = \frac{۳(۱)^۲+۵(-۲)}{۱-(-۲)} = \frac{۷}{۳}$$

قبل از جدا شدن از مثال بالا، مجدداً به اهمیت رابطه (۲.۶) تاکید می‌کنیم. محاسبه زیر

$$f(-۲,۱) = \frac{۳(-۲)^۲+۵(۱)}{-۲-۱} = \frac{-۱۷}{۳} \neq f(۱,-۲)$$

نشان می دهد نمی‌توان جای متغیرها را بدلخواه عوض کرد[۳]. اما یک مثال کاربردی:

مثال ۵.۶. مقدار B ریال در طول t سال (بطور مرکب k بار در هر سال) و با نرخ سالانه r سرمایه گذاری شده است. در این‌صورت مقدار ارزش حال حاضر، از فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$P(B,r,k,t) = B\,(۱+{}^{r}/_{k})^{-kt}$$

در این‌صورت ارزش فعلی به ازای $B = ۱۰۰۰۰$، $t = ۵$، $r = ۶$ درصد و $k = ۴$ برابراست با:

$$P(۱۰۰۰۰, ۰.۰۶, ۴, ۵) = ۱۰۰۰۰(۱ + \frac{۰.۰۶}{۴})^{-۲۰} = ۷۴۲۴.۷$$

۱.۶ نمودار

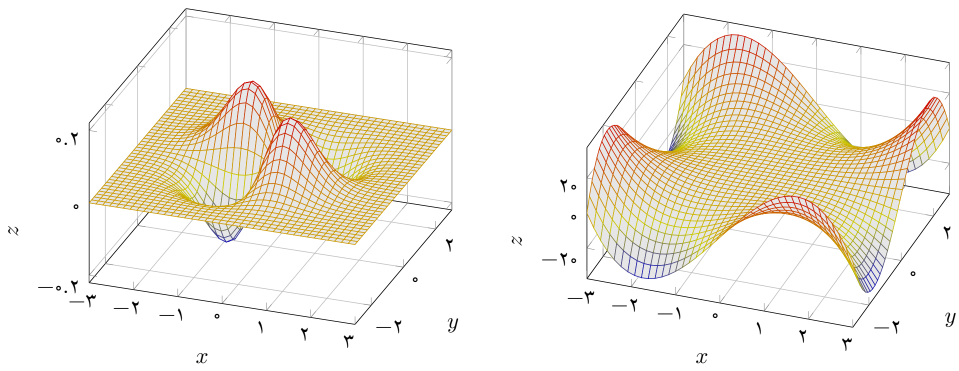
در دبیرستان، رسم تابع $y = f(x)$ در صفحه مختصاتی $\mathbb{R}^۲$ و با یافتن ویژگی‌های تابع و از جمله نقطه‌یابی امکان‌پذیر بود. در آنجا به x مقادیر مجاز و دلخواه داده تا مقادیر متناظر y و بالتبع نقاط (x,y) را پیدا و سپس بهم متصل کنیم. در یک تابع دو متغیره باید یک جفت مرتب و مجاز (x,y) را به تابع

$$z = f(x,y)$$

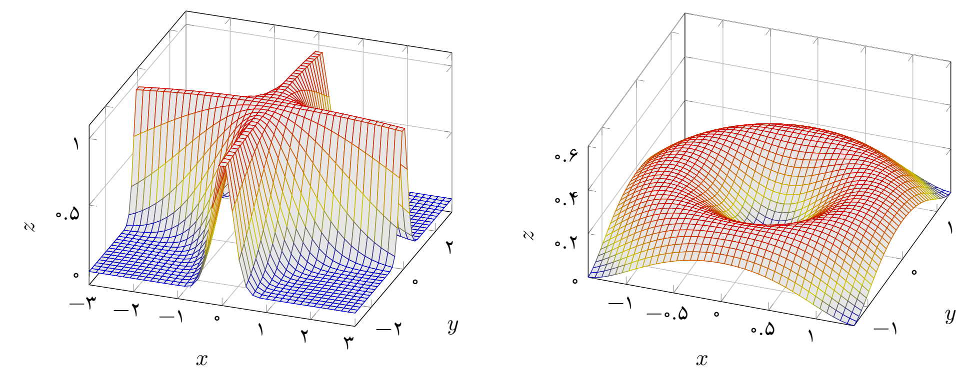
داده تا z نظیر و منحصر به‌فردی پیدا شده و بدنبال آن یک نقطه سه بُعدی (x,y,z) را پیداکنیم. به مجموعه‌ای از یک چنین بی‌شمار نقاطی در فضا که همگی بواسطه فرمول f با هم در ارتباطند؛ **رویه** می‌گویند. بعبارت دیگر رویه اسم اختصاصی‌تری از نمودار برای یک تابع دو متغیره است. در اشکال زیر، توابع مذکور ذیل مثال ۳.۶ و رویه متناظرشان را می‌بینید. به افزوده شدن محورهای مختصاتی با افزوده شدن متغیر وابسته z به بحث توجه کنید:

---

[۳] آیا می‌پذیرید فاصله بین دو جفت شهر با فواصل مختلف را با هم عوض کنیم؟ مسلماً نه!



رویه متناظر با تابع t 　　　　 رویه متناظر با تابع z

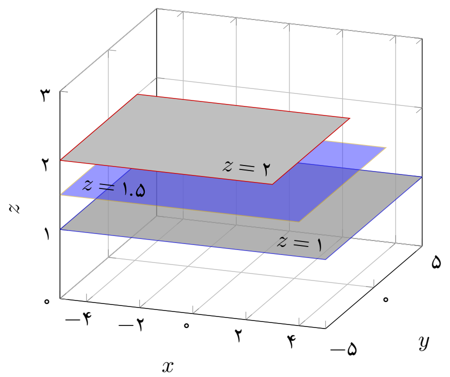


(ب) رویه متناظر با تابع p 　　　　 (آ) رویه متناظر با تابع w

تذکر ۱.۶. با توجه به‌شکل $z=f(x,y)$، ساده‌ترین تابعی که می‌توان مثال زد، تابع $z=k$ است که در آن $k\in\mathbb{R}$ دلخواه است. این رویه متشکل از همه نقاطی (x,y,k) است که همه هم ارتفاع هستند. این چنین توابعی را از نظر هندسی یک **صفحه** ۳-بُعدی می‌نامند. در شکل ۱.۶، سه صفحه در ارتفاع های $z=1$، $z=1.5$ و $z=2$ می بینید. این صفحات با سطح زمین $z=0$ موازی هستند.

۱.۱.۶ منحنی های تراز

تابع $z=f(x,y)$ را در نظر بگیرید. هر مقدار **مجازی** که به z بدهیم، نتیجه، رابطه‌ای بر حسب x,y است که ما آنرا در ریاضیات یک **منحنی** می‌نامیم. بعبارت روشن‌تر، با انتخاب $z=c$



شکل ۱.۶: سه صفحه موازی با صفحه $z = ۰$

که c مقداری دلخواه و مجاز است، داریم $f(x, y) = c$ که منحنی ۲-بُعدی است (چرا؟).

برای نمونه برای تابع $z = x^۲ + y^۲$، اگر $z = ۴$ آن‌گاه:

$$z = ۴ \longrightarrow x^۲ + y^۲ = ۴$$

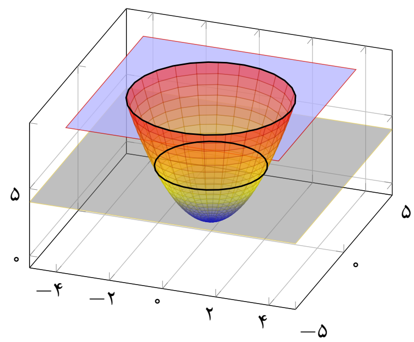
و معادله بدست آمده دایره‌ای است به‌شعاع ۲ و بمرکز $(۰, ۰)$ اگر آن‌را در فضای $\mathbb{R}^۲$ ببینید.

از آنجایی‌که این مقدار دهی به تابع و بجای z در صفحه $z = ۴$ صورت گرفته است، لذا دایره مذکور یک دایره نه در صفحه $z = ۰$ بلکه واقع در صفحه $z = ۴$ و از اینرو دایره‌ای بمرکز $(۰, ۰, ۴)$ و منحنی فضایی است.

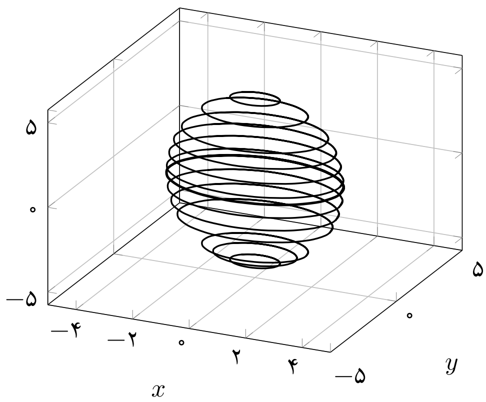
در شکل زیر این مقدار دهی را به z بتعداد ۳ بار تکرار و هر بار منحنی فضایی ایجاد شده است. در ریاضیات این نحوه کار را مقطع‌گیری و هر یک از منحنی‌های حاصل را یک **منحنی تراز** از آن رویه می‌نامند. پس منحنی‌های شکل زیر هر یک، یک منحنی تراز از رویه $z = x^۲ + y^۲$ است. جالب است بدانید این نوع بدست آوردن منحنی‌های تراز، منحصر به مقداردهی به z نیست. شما می‌توانید همین کار را با x و یا y بطور جداگانه انجام و نتایج دیگری بدست آورید. در ادامه بیشتر بر منحنی‌های تراز حاصل از $z = c$ تمرکز می‌کنیم.

گاهی ترسیم توابع $z = f(x, y)$ ساده نیست[۴]. لذا برای تجسم شکل رویه، تعداد زیادی منحنی تراز را به‌ازای مقادیر مختلف و مجاز $z = kc$ را در نظر گرفته سپس تصویرسازی می‌کنند. به شکل ۳.۶ توجه کرده و دقت کنید که چگونه با مقطع‌گیری با تعداد بالا قادریم تا شکل کلی رویه

[۴] اگرچه نرم افزارهایی هستند که براحتی هر چه تمامتر این کار را برایتان انجام می‌دهند.



شکل ۶.۲: دو منحنی تراز از رویه $z = x^۲ + y^۲$



شکل ۶.۳: تعدادی منحنی تراز از رویه $\frac{x^۲}{۹} + \frac{y^۲}{۴} + \frac{z^۲}{۲۵} = ۱$

در فضا را حدس زد.

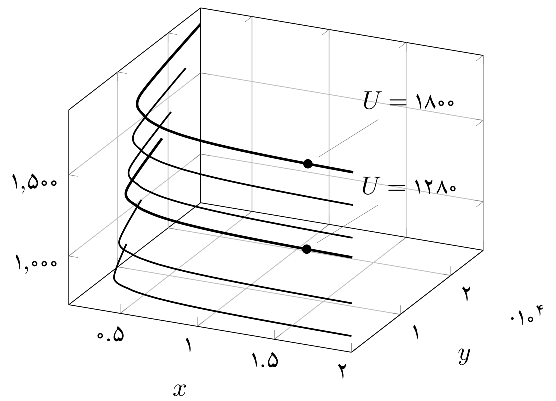
مثال ۶.۶. به مثالی کاربردی از منحنی‌های تراز توجه کنید. مصرف کننده ای را در نظر بگیرید که مطلوبیت خرید x واحد از کالای A و y واحد از کالای B خود را با توجه به تابع مطلوبیت $U(x,y) = x^{\frac{۳}{۲}}y$ می‌سنجد. بعلاوه فرض کنیم وی، هم اکنون دارای $x = ۱۶$ و $y = ۲۰$ واحد از دو کالاست. در اینصورت سطح مطلوبیت حال حاضر او به شکل:

$$U(۱۶, ۲۰) = (۱۶)^{\frac{۳}{۲}}(۲۰) = ۱۲۸۰$$

خواهد بود. به‌ازای این مقدار می‌توان یک منحنی تراز بنام منحنی **بی تفاوتی** بدست آورد:

$$U(x,y) = x^{\frac{۳}{۲}} y = ۱۲۸۰ \Longrightarrow y = ۱۲۸۰ x^{-\frac{۳}{۲}}$$

این منحنی شامل همه نقاط (x,y) ازصفحه $z = ۱۲۸۰$ است که سطح مطلوبیت آنها مساوی است با ۱۲۸۰. تعدادی از این منحنی‌ها را روی صفحات مختلف تصویر کردیم:



شکل ۴.۶: تعدادی منحنی تراز افقی از رویه $U(x,y) = yx^{۳/۲}$

۷

مشتق‌گیری نسبی

هنگام کار با مسائل شامل توابع چند متغیره، اغلب بدنبال یافتن نرخ تغییرات تابع نسبت به یک متغیر مشخص وقتی دیگر متغیرها ثابت‌اند، هستیم. به‌طور معادل و با زبان ریاضی، مشتق تابع **نسبت به یک متغیر** وقتی بقیه متغیرها ثابت نگه داشته شده‌اند چیست؟ در ادامه فرض می‌کنیم که خواننده با اصول و قواعد اصلی و تکنیک‌های مشتق آشناست.

تعریف ۱.۷. منظور از **مشتق گیری نسبی** (یا **جزیی**) از تابع چند متغیره

$$z = f(x_۱, \ldots, x_n)$$

با توجه به متغیر مشخص $x_{i(۱\leqslant i\leqslant n)}$ اینست که: از f نسبت به x_i مشتق بگیریم[1] با این شرط اضافه که بقیه متغیرهای $x_{j(۱\leqslant j\leqslant n)}$ و با فرض $i \neq j$ ثابت گرفته شوند.

برای توضیح لفظ **ثابت**، فرض کنید عبارتی به‌شکل $x^۲ + xy^۳$ داده شده است. اگر در این عبارت با x کار محاسباتی داریم، اسم y را از نوع عدد (یعنی اسکالر و یا ثابت) فرض می‌گیریم. به مثال زیر توجه کنید. در این مثال دقیقاً مفهوم مشتق نسبی با زبان روز بیان می‌شود.

مثال ۱.۷. تابع تولید کالایی به‌صورت $Q = ۵x^۲ + ۷xy + y^۲$ داده شده است که در آن x تعداد کارگران ماهر و y تعداد کارگران عادی است. اگر تعداد کارگران ماهر ثابت بماند آنگاه نرخ تغییر در Q هنگامی که

[1] در این قسمت، آزادید تا از همه فرمولهای مشتق با شرایطش کمک بگیرید.

y متغیر باشد همان معنی مشتق Q نسبت به y را می‌دهد.

نمادگذاری مشتق برای تابع ۱-متغیره $y = f(x)$ با یکی از موارد زیر انجام می‌شود:[۲]

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{df}{dx}$$

اما این نمادگذاری برای توابع چند متغیره همچون روند مشتق‌گیری باید بهینه شده و عوض شود.

نماد گذاری ۱.۷. تابع $z = f(x_۱, \ldots, x_n)$ مفروض است. از نمادهای متعارف زیر برای بیان مشتق f نسبت به $x_{i(۱\leqslant i\leqslant n)}$ استفاده می‌شود:

$$f_{x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_i$$

به این مشتقات، **مشتقات نسبی مرتبه اول** f می‌گویند[۳].

مثال ۲.۷. اکنون می‌خواهیم تا مشتقات نسبی مرتبه اول تابع Q مثال ۷.۶ را بدست آوریم. توجه کنید تمام قواعد مشتق در اختیار است تا در صورت برقراری شرایط، از آنها استفاده شود:

$$Q_x = (۵x^۲)_x + (۷xy)_x + (y^۲)_x = ۱۰x + ۷y(۱) + ۰ = ۱۰x + ۷y$$

توضیح اینکه: اگر a یک حرف از جنس ثابت و u عبارتی برحسب متغیر x باشد آن‌گاه:

$$(a \times u)' = a \times u', \quad (u \pm a)' = u' \pm ۰ = u'$$

هنگام مشتق از عبارت $(۷xy)$ بر حسب x، عدد ۷ و حرف y و در کل عبارت $۷y$ ثابت بوده و داریم:

$$(۷xy)_x = ۷y(x)_x = ۷y(۱) = ۷y$$

در تساوی فوق $u = x$ است. دقیقاً همین نگاه در جمله $(y^۲)_x$ وجود دارد. این جمله، اصلاً فاقد حرف (یا

[۲] توجه کنید در اینجا مشتق مرتبه اول به‌عنوان اولین نمادی که معرفی می‌شود، بیان شده است.
[۳] چون یکبار مشتق گرفته شده است.

عبارتی بر حسب) x بوده لذا ثابت گرفته شده[۴] و بنابر این مشتق‌اش صفر است. به‌طور مشابه:

$$Q_y = (۵x^۲)_y + (۷xy)_y + (y^۲)_y = ۰ + ۷x(y)_y + ۲y = ۷x + ۲y$$

مثال ۳.۷. برای محاسبه مشتقات نسبی مرتبه اول تابع $f = x^۲ + ۲xy^{-۲} + \frac{۲y}{۳x}$ داریم:

$$\begin{aligned} f_x &= (x^۲)_x && +(۲xy^{-۲})_x && +(\tfrac{۲y}{۳x})_x \\ &= ۲x && +۲y^{-۲}(۱) && +\tfrac{۲y}{۳}(\tfrac{۱}{x})_x \\ &= ۲x && +۲y^{-۲} && +\tfrac{۲y}{۳}(\tfrac{-۱}{x^۲}) \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} f_y &= (x^۲)_y && +(۲xy^{-۲})_y && +(\tfrac{۲y}{۳x})_y \\ &= ۰ && +۲x(-۲y^{-۳}) && +\tfrac{۲}{۳x}(y)_y \\ &= ۰ && -۶xy^{-۳} && +\tfrac{۲}{۳x}(۱) \end{aligned}$$

تمرین ۱.۷. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آورید در صورتی که $z = (x^۲ + xy + y)^۵$.

حل: در وحله اول و با توجه به شکل ظاهر تابع، فرمول اصلی در مبحث مشتق برای این تابع را به‌طوری بر می‌گردانیم که بر اساس مشتق نسبی نوشته و معنی شود:

$$[u^n]' = nu^{n-۱} \times u' \longrightarrow [u^n]_x = nu^{n-۱} \times \underbrace{u_x}_{\text{مشتق نسبی}}$$

لذا:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۵(x^۲ + xy + y)^۴ \times (x^۲ + xy + y)_x = ۵(x^۲ + xy + y)^۴ \times (۲x + y + ۰)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = ۵(x^۲ + xy + y)^۴ \times (x^۲ + xy + y)_y = ۵(x^۲ + xy + y)^۴ \times (۰ + x + ۱)$$

تمرین ۲.۷. حکم مسئله قبل را برای تابع $z = \ln\left(\dfrac{xy + y^۲}{e^{xy}}\right)$ انجام دهید.

---

[۴] در این مرحله، هنوز x را متغیر می‌دانیم.

حل: به‌ازای عبارتهای مناسب u,v داریم $\ln(u/v)=\ln(u)-\ln(v)$ پس z به‌شکل

$$z=\ln(xy+y^{2})-\underbrace{\ln(e^{xy})}_{xy}$$

قابل بازنویسی است. از طرفی $[\ln(u)]_x=\frac{u_x}{u}$ و لذا:

$$z_x=\frac{(xy+y^{2})_x}{xy+y^{2}}-(xy)_x=\frac{y+0}{xy+y^{2}}-y$$
$$z_y=\frac{(xy+y^{2})_y}{xy+y^{2}}-(xy)_y=\frac{x+2y}{xy+y^{2}}-x$$

همانطور که از یک تابع چند متغیره مشتقات نسبی مرتبه اول محاسبه شد، بدلخواه (البته با فرض برقراری شرایطی) می توان مشتقات نسبی مراتب بالاتر را نیز بدست آورد. این مشتقات را در شکل نماد جدید می‌توان نوشت. مثلاً اگر از تابع f دوبار پیاپی نسبت به x مشتق نسبی بگیریم، نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}=f_{xx}=(f_x)_x$$

اگر از تابع f دوبار پیاپی اول نسبت به x و بعد نسبت به y مشتق نسبی بگیریم، نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial x\partial y}=f_{xy}=(f_x)_y$$

در نمونه اخیر، به ترتیب مشتق گیری نسبی و آمدن اندیس متغیر دوباره نگاه کنید. در واقع اگر از تابع f بخواهیم به ترتیب نسبت به x، y، y و در آخر z به تعداد ۴ بار مشتق پیاپی بگیریم، می‌نویسیم:

$$\frac{\partial^{4} f}{\partial x\partial y\partial y\partial z}=f_{xyyz}=\left(\left(\left(f_x\right)_y\right)_y\right)_z$$

به نحوه مشتق‌گیری ها در هر مرحله و ترتیب متغیرها در روالی که در اندیس آمده‌اند توجه کنید.

مثال ۴.۷. تعدادی از مشتقات نسبی تابع $z=xy^{3}+5xy^{2}+2x^{-1}$ در نمودار درختی زیر آمده اند.

تذکر ۱.۷. مساوی شدن دو مشتق آمیخته (z_{xy},z_{yx}) در مثال قبل تصادفی نیست! در واقع، همه چند جمله هایی که از x و y ساخته می شوند، در تساوی $f_{xy}=f_{yx}$ صدق می‌کنند[5].

[5] این خاصیت نتیجه ای از قضیه کلرو درباره مشتقات آمیخته است.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & z \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & z_y = 3xy^2 + 10xy \arrow[dl] \arrow[d] & & z_x = y^3 + 5y^2 - 2x^{-2} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
z_{yy} = 6xy + 10x \arrow[d] & z_{yx} = 3y^2 + 10y \arrow[dd] & & z_{xx} = 4x^{-3} \arrow[d] & z_{xy} = 3y^2 + 10y \arrow[d] \\
z_{yyy} = 6x \arrow[d] & & & z_{xxy} = 0 & z_{xyy} = 6y + 10 \arrow[d] \\
z_{yyyx} = 6 \arrow[d] & z_{yxy} = 6y + 10 & & & z_{xyyy} = 6 \arrow[d] \\
z_{yyyxx} = 0 = z_{yyyxy} & & & & z_{xyyyy} = 0
\end{tikzcd}
$$

این نکته بررسی و بهینه کردن توابع دو متغیره را کمی ساده تر می کند.

۱.۷ قاعده زنجیره‌ای

تابع تقاضای کالایی را تصور کنید که به قیمت کالا و قیمت رقابتی آن کالا وابسته است. همچنین فرض کنید که هر دو قیمت با توجه به زمان، مقداری در حال افزایش دارند. اگر مطلوب نرخ تغییر تابع تقاضا نسبت به زمان باشد، در واقع بنوعی مشتق گیری مد نظر است. اما چه نوعی از مشتق گیری می تواند این تغییر را نشان دهد؟ در مواردی که تابع مورد نظر ترکیبی از چند تابع (که هر کدام تابعی از دیگری است) باشند، برای مشتق گیری از قاعده‌ای بنام **قاعده زنجیره‌ای** استفاده می شود. به نمونه هایی که در این باره آمده توجه کرده و قالب اصلی قاعده را بخاطر بسپارید[۶]:

نکات ۱.۷. نکات زیر قابلیت تعمیم دارند. در اینجا مشتق های نوشته شده همگی موجودند:

الف) اگر $z = f(x)$ بشرطی که $x = g(t)$ آن‌گاه $\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx} \times \frac{dg}{dt}$ که در آن $\frac{dg}{dt} = g'(t)$.

[۶] اولین نکته درباره توابع یک متغیره آمده که دراینجا موضوع ما نیست.

ب) اگر $z = f(x,y)$ بطوریکه $x = g(t)$ و $y = h(t)$ آن‌گاه[۷]

$$z'(t) = f_x \times x'(t) + f_y \times y'(t)$$

ج) اگر $z = f(x,y)$ بطوریکه $x = g(t,s)$ و $y = h(t,s)$ آن‌گاه

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s, \quad z_t = z_x x_t + z_y y_t$$

تمرین ۳.۷. یک دراگ استور دو نوع ویتامین A و B را عرضه می‌کند. نتایج بدست آمده از فروش نشان می‌دهد که تابع تقاضای زیر معنی‌دار است اگر از نوع A، x واحد و از دیگری y واحد فروخته شود:

$$d(x,y) = ۳۰۰ - ۲۰x^۲ + ۳۰y$$

همچنین مشخص شده است که در مدت t ماه از هم اکنون، قیمتهای A و B از دو رابطه $x = ۲ + ۰.۰۵t$ و $y = ۲ + ۰.۱\sqrt{t}$ تبعیت می‌کنند. معین کنید در طی ۴ ماه از هم اکنون، نرخ تغییرات تابع تقاضا نسبت به ویتامین A چقدر است؟

حل: هدف اینست که $d'(۴)$ را بدست آوریم. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای و اینکه تابع چندجمله‌ای و لذا همه مشتقات آن از هر مرتبه‌ای وجود دارد داریم:

$$d'(t) = d_x x'(t) + d_y y'(t) = -۴۰x(۰.۰۵) + ۳۰(۰.۰۵t^{-۰.۵})$$

چون مقدار $t = ۴$ مقدار $x = ۲.۲$ را نتیجه می‌دهد بنابراین

$$d'(۴) = -۴۰(۲.۲)(۰.۰۵) + ۳۰(۰.۰۵)(۰.۵) = -۳.۶۵$$

منفی شدن مشتق نشان می‌دهد در طی ۴ ماه اخیر، تقاضای متناظر با ویتامین A سیرنزولی با نرخ ۳.۶۵ داشته است.

نکته ۱.۷. قاعده زنجیره‌ای را می‌توان در موضوعات دیگری هم بکار گرفت. اگر $f(x,y) = C$ یک منحنی

[۷] جمله اول تساوی یعنی نرخ تغییر z نسبت به t وقتی y ثابت است.

تراز از رویه $z=f(x,y)$ باشد آنگاه، شیب خط مماس بر این منحنی از رابطه $y'(x)=-\dfrac{f_x}{f_y}$ بدست می‌آید[۸].

مثال ۵.۷. رویه $z=x^{۲}+xy+y^{۳}$ مفروض است. برای نوشتن معادله خط مماس بر منحنی تراز $z=۱$ را در نقطه $(-۱,۱)$، ابتدا شیب را از فرمول نکته اخیر بدست می‌آوریم:

$$m=-\frac{۲x+y}{x+۳y^{۲}}=-\frac{۲(-۱)+۱}{(-۱)+۳(۱)^{۲}}=۰.۵$$

بنابر این معادله خط مماس مورد نظر به‌صورت $y-۱=۰.۵(x+۱)$ در می‌آید.

۲.۷ بهینه سازی توابع دو متغیره

۱.۲.۷ توابع غیر مقید (اکسترمم های نسبی)

فرض کنید که تولید کننده‌ای دو نوع کالای ۱ و ۲ را تولید می‌کند و تابع هزینه کل مشترک این دو کالا $TC(x,y)$ است که درآن x تعداد تولید شده نوع ۱ و y تعداد تولید شده نوع ۲ است. سوال اینست که چگونه سطح تولید $x=a$ و $y=b$ از دوکالا را بیابیم تا هزینه به حداقل برسد؟

تعریف ۲.۷. تابع $z=f(x,y)$ در نقطه $P(a,b)$ دارای **ماکزیمم نسبی** است هرگاه در دامنه تعریف تابع و بازای هر نقطه دیگر $A(x,y)$ در اطراف آن[۹]:

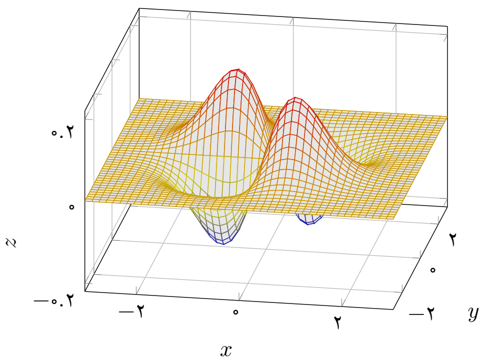
$$f(a,b)\geqslant f(x,y)$$

بهمین صورت **می‌نیمم نسبی** با رابطه $f(x,y)\geqslant f(a,b)$ به‌ازای هر نقطه در یک همسایگی از P تعریف می شود.

به‌معنی ساده تر، ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) یک تابع دو متغیره، بالاترین (کمترین) ارتفاعی است که برای رویه نسبت به اطرافش در روی رویه دیده می‌شود. در شکل زیر ماکزیمم

[۸] این همان مشتقی است که بنام **مشتق ضمنی** می‌شناسید.
[۹] منظور یک ناحیه دایره‌ای شکل بمرکز P است که به آن **همسایگی** P نیز می‌گویند.

و می‌نیمم نسبی را می‌بینید. دو قله و دو دَرّه. دو قله نسبت به اطراف خود بیشترین ارتفاع و دو دَرّه کمینه ارتفاع را نسبت به اطراف خود دارند:



تعریف ۳.۷. فرض کنیم $A(a,b) \in D_{f(x,y)}$ دارای این خاصیت است که همزمان دو معادله

$$f_x(A) = f_y(A) = 0$$

را برقرار می‌کند. در این‌صورت A را یک **نقطه بحرانی** $z = f(x,y)$ می‌نامند.

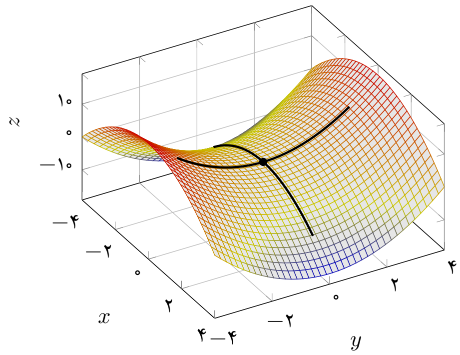
برای اینکه رابطه بین نقاط اکسترمم و نقاط بحرانی را نشان دهیم، فرض کنیم تا تابع f در یک نقطه مثلاً (a,b) دارای اکسترمم نسبی است. اگر $f_x,\ f_y$ در یک ناحیه در اطراف نقطه وجود داشته باشند آنگاه، نقاط اکسترمم فقط در نقاط بحرانی تابع اتفاق می افتند. مطلب اخیر به‌هیچ وجه نمی‌گوید که یک نقطه بحرانی حتماً یک اکسترمم را نتیجه می‌دهد. مثلاً نقطه $(0,0)$ نقطه‌ای بحرانی برای تابع $z = y^2 - x^2$ است (چرا؟) ولی یک نقطه اکسترمم نیست! [10] (شکل بعد)

بجهت یافتن نقاط اکسترمم نسبی تابع $z = f(x,y)$ فعلاً وجود تمام مشتقات زیر برای تابع را می‌پذیریم:

$$f_x, \quad f_y, \quad f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yy}$$

آزمون مشتقات مرتبه دوم

[10] حسی که در این نقطه داریم، نه بودن در ارتفاع و نه بودن در کمینه را می دهد. این نقطه را **نقطه زین اسبی** یا **زینی** می‌نامند.



فرض کنیم شرایط فوق برای تابع $f(x,y)$ وجود دارد. تعریف می‌کنیم:

$$\Delta_۱ = f_{xx}, \qquad \Delta_۲ = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^۲$$

اگر $A(a,b)$ نقطه ای بحرانی باشد که با حل همزمان $f_x = ۰$ و $f_y = ۰$ بدست آمده است آن‌گاه:

- در صورتی که $\Delta_۱(A) < ۰$ و $\Delta_۲(A) > ۰$، $f(A)$ ماکزیمم نسبی تابع است.
- در صورتی که $\Delta_۱(A) > ۰$ و $\Delta_۲(A) > ۰$، $f(A)$ می نیمم نسبی تابع است.
- در صورتی که $\Delta_۲(A) < ۰$ ، A نقطه زینی تابع است.
- و اگر $\Delta_۲(A) = ۰$ ، نتیجه‌ای از این آزمون برای A بدست نمی آید.[۱۱]

از جدول خلاصه زیر هم می‌توانید استفاده کنید:

نتیجه برای نقطه A	علامت $\Delta_۱$	علامت $\Delta_۲$
می نیمم نسبی	$+$	$+$
ماکزیمم نسبی	$-$	$+$
زینی		$-$

مثال ۶.۷. دو تابع $z = x^۲ + y^۲$ و $z = ۱۲x - x^۳ - ۴y^۲$ را از نظر داشتن نقاط اکسترمم و یا زینی بررسی می کنیم. هردو تابع چند جمله‌ای بوده و لذا آزمون فوق بسادگی برایشان قابل انجام است.

[۱۱] در این حالت A ممکن است اکسترمم نسبی باشد یا زینی باشد.

درباره تابع $z=x^{۲}+y^{۲}$ داریم:

$$\begin{cases} z_x = ۲x = ۰ \to x = ۰ \\ z_y = ۲y = ۰ \to y = ۰ \end{cases} \longrightarrow A(۰,۰) \text{ نقطه بحرانی تابع}$$

چون

$$\begin{cases} z_{xx} = ۲ \to \Delta_۱ > ۰ \\ z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^۲ = (۲\times ۲) - (۰)^۲ = ۴ \to \Delta_۲ > ۰ \end{cases}$$

لذا $f(A)=۰$ می نیمم نسبی تابع است.

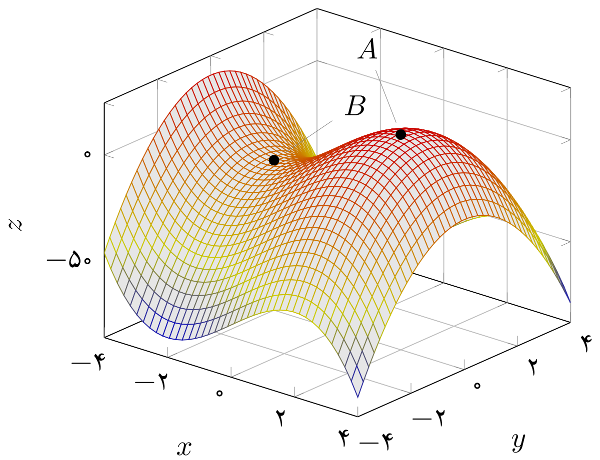
درباره تابع $z=۱۲x-x^{۳}-۴y^{۲}$ داریم:

$$\begin{cases} z_x = ۱۲ - ۳x^۲ = ۰ \to x = \pm ۲ \\ z_y = -۸y = ۰ \to y = ۰ \end{cases} \longrightarrow \underbrace{A(+۲,۰),\ B(-۲,۰)}_{\text{نقاط بحرانی تابع}}$$

چون

$$\begin{cases} z_{xx} = -۶x \to \Delta_۱(A) = -۱۲ < ۰,\ \Delta_۱(B) = -۱۲ > ۰ \\ z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^۲ = ۴۸x \to \Delta_۲(A) = ۹۶ > ۰,\ \Delta_۲(B) = -۹۶ < ۰ \end{cases}$$

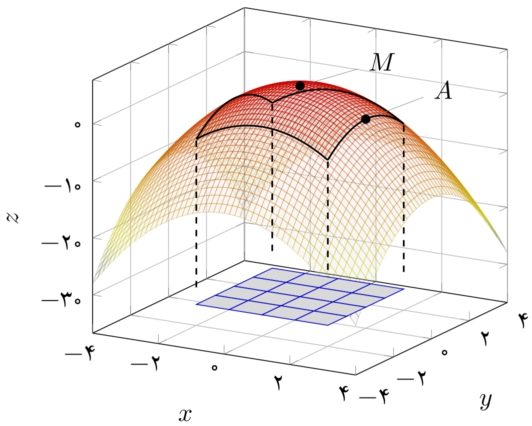
و لذا $f(A)=۱۶$ ماکزیمم نسبی و نقطه B یک نقطه زینی تابع است. (شکل بعد)



۲.۲.۷ توابع مقید و اکسترمم ها (روش لاگرانژ)

در ابتدای فصل بیان شد که در مواقعی تابع اگرچه دامنه تعریف گسترده‌ای داشته باشد اما مقید می‌شود. در بسیاری از مسائل کاربردی، مطلوب بهینه کردن تابعی دو متغیره است که بنوعی با یک **قید** (محدودیت یا شروط خاص) همراه است. مثلاً ناشری را در نظر بگیرید که با قید بودجه‌ای A ریال، می‌خواهد تصمیم بر نحوه تقسیم بودجه بر چاپ و نشر و همچنین بر تبلیغات بگیرد بطوری که فروش[۱۲] آتی کتابش ماکزیمم شود. اگر x مقدار پولی باشد که بر چاپ و نشر و y مقداری که بر تبلیغات اختصاص می‌دهد در این‌صورت او با قید $x+y=A$ کار می کند.

در شکل بعد رویه ای توسط یک ناحیه مربعی از پایین محدود شده است. این ناحیه بطور متناظر یک قسمت از رویه را همانطور که می‌خواهد جدا کرده و مقادیر ماکزیمم یا می‌نیمم جدیدی را بوجود می‌آورد. این ناحیه همان قید است[۱۳]. نقطه M ماکزیمم نسبی تابع و نقطه A ماکزیممی است که برای تابع تحت قید ایجاد شده است.



برای بهینه سازی تابع مقید $f(x,y)$، روشی بنام **ضرایب لاگرانژ** وجود دارد. در این روش یک پارامتر جدید λ را در مسئله وارد کرده و بکمک آن تابعی بنام تابع هدف:

$$F(x,y)=f(x,y)-\lambda[g(x,y)-k]$$

[۱۲] تابع فروش را $f(x,y)$ بگیرید.

[۱۳] در اینجا $-۲ \le x,y \le ۲$ قید است.

را می‌سازیم[۱۴] که در آن $g(x,y)=k$ قید تابع f است. ادعا می‌کنیم هر اکسترمم که برای تابع اصلی و با توجه به قید $g(x,y)=k$ وجود داشته باشد، دقیقاً در نقاط بحرانی تابع هدف F اتفاق می‌افتد. در واقع، هم اکنون و بمانند روشی که در قبل بیان شد، می‌بایستی $F(x,y)$ را بهینه کنیم[۱۵].

برای یافتن نقاط بحرانی تابع هدف، معادلات زیر:

$$F_x=f_x-\lambda g_x,\quad F_y=f_y-\lambda g_y,\quad F_\lambda=k-g(x,y)$$

را تشکیل داده و دستگاه $F_x=F_y=F_\lambda=۰$ را حل کرده و بعد از یافتن نقاط جواب، با محاسبه مقدارهای تابع f در این نقاط، مقادیر اکسترمم را جدا می‌کنیم[۱۶].

مثال ۷.۷. اکسترمم های تابع $f(x,y)=xy$ را همراه قید $x^۲+y^۲=۸$ بدست می‌آوریم. در اینجا $g(x,y)=x^۲+y^۲-۸=۰$ قید است و لذا تابع هدف عبارت است از $F=xy-\lambda(x^۲+y^۲-۸)$.

با حل دستگاه:

$$\Big\{F_x=y-۲\lambda x=۰, F_y=x-۲\lambda y=۰, F_\lambda=x^۲+y^۲-۸=۰\Big\}$$

و از دو معادله اول داریم: $\frac{y}{x}=۲\lambda$ و $\frac{x}{y}=۲\lambda$ که با حذف پارامتر λ نتیجه می‌شود $x^۲=y^۲$. با جایگذاری در معادله سوم $۲x^۲=۸$ و یا $x=\pm۲$ بدست می‌آیند. بهمین صورت $y=\pm۲$. لذا چهار نقطه بحرانی بدست می‌آیند که عبارتند از:[۱۷] $A(۲,۲)$، $B(-۲,-۲)$، $C(۲,-۲)$ و $D(-۲,۲)$. اکنون مقدار تابع را در آنها بدست می‌آوریم، داریم: $f(A)=f(B)=۴$ و $f(C)=f(D)=-۴$ که نشان می‌دهد مقدار ۴ ماکزیمم و -۴ می‌نیمم تابع مقید است.

تمرین ۴.۷. مطلوبست می‌نیمم تابع $z=x+y^۲+z^۲$ تحت قید $x+y+z=۱$.

حل: مراحل را برای این تابع سه متغیره تعمیم داده و بترتیب زیر انجام می‌دهیم. در این مسئله همچنین

---

[۱۴] این تابع را می‌توانید به‌صورت $F(x,y)=f(x,y)+\lambda[g(x,y)-k]$ هم بکار برید.

[۱۵] در تابع F به λ **ضریب لاگرانژ** می‌گویند.

[۱۶] این روش فقط تضمین می‌دهد که هر اکسترمم تحت قیدی که وجود داشته باشد، در نقاط بحرانی F اتفاق می‌افتد. نمی‌گوید که شما اکسترمم دارید یا نمی‌گوید از چه نوعی است.

[۱۷] این نقاط در تساوی قید صدق می‌کنند.

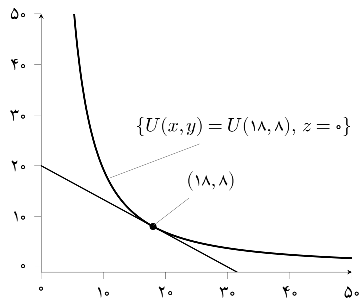
مایلیم از شکل معادل تابع هدف استفاده کنیم:

$$F = (x + y^۲ + z^۲) + \lambda(x + y + z - ۱)$$

دستگاه متناظر عبارت است از:

$$\Big\{F_x = ۱ + \lambda = ۰, F_y = ۲y + \lambda = ۰, F_z = ۲z + \lambda = ۰, F_\lambda = x + y + z - ۱ = ۰\Big\}$$

از معادله اول $\lambda = -۱$ و از معادلات بعدی مقادیر مجهول بدست می‌آیند که عبارتند از $x = ۰$، $y = \frac{۱}{۲}$ و $z = \frac{۱}{۲}$. بنابراین مقدار می‌نیمم تابع برابر است با $f_{min} = ۰ + (۱/۲)^۲ + (۱/۲)^۲ = ۱/۲$.



تمرین ۵.۷. مصرف کننده ای مبلغ ۶۰۰ دلار را بابت خرید دو کالای A و B می پردازد، A را باقیمت واحد ۲۰ و B را با قیمت واحد ۳۰ دلار. فرض کنید مطلوبیت او حاصل از خرید x واحد از کالای A و y واحد از کالای B بوسیله تابع کاب داگلاس $U(x, y) = ۱۰x^{۰.۶}y^{۰.۴}$ سنجیده می‌شود. معین کنید چه مقدار از هر دو کالا را بخرد تا مطلوبیت او به حداکثر برسد.

حل: در این مسئله قید بصورت $۲۰x + ۳۰y = ۶۰۰$ است. تابع هدف را تشکیل، مشتقات مورد نظر را محاسبه و مساوی با صفر حل می‌کنیم:

$$F = ۱۰x^{۰.۶}y^{۰.۴} - \lambda(۲۰x + ۳۰y - ۶۰۰) \to \begin{cases} F_x = ۶x^{-۰.۴}y^{۰.۴} - ۲۰\lambda = ۰ \\ F_y = ۶x^{۰.۶}y^{-۰.۶} - ۳۰\lambda = ۰ \\ F_\lambda = (۲۰x + ۳۰y - ۶۰۰) = ۰ \end{cases}$$

از معادلات اول و دوم داریم $\lambda = \frac{۴x^{۰.۶}y^{-۰.۶}}{۳۰} = \frac{۶x^{-۰.۴}y^{۰.۴}}{۲۰}$ و لذا $۹y = ۴x$. با قرار دادن در معادله سوم داریم: $۲۰x + ۳۰(\frac{۴x}{۹}) = ۶۰۰$ و بنابراین $x = ۱۸$ و $y = ۸$.

نتیجه اینکه برای ماکسیمم شدن مطلوبیت، خریدار باید مقادیر فوق را از هر کالا بخرد. در شکل بعد، توصیفی هندسی از محاسبات بالا آمده است. منحنی بالا تصویری از سطح تراز $U(x,y) = U(۱۸,۸)$ بروی صفحه زمین است. ملاحظه کنید که هیچ نقطه ای غیر از نقطه بحرانی بدست آمده نمی تواند با برقراری شرط قیدی، همزمان ماکزیمم تابع را نیز نتیجه دهد (خط رسم شده همان قید است).

۳.۷ تمرینات

۱. دامنه تعریف توابع زیر را توصیف کنید.

الف) $f(x,y) = \dfrac{5x+2y}{4x+3y}$ ب) $f(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$

ج) $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{\sqrt{x-2y}}$ د) $f(x,y) = \ln(x+y-4)$

ه) $z = \dfrac{x^2-3y^2}{x^2-y^2}$ و) $z = e^{\frac{x-y}{x+y}}$ ز) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

۲. تولیدکننده ای قادر است تا دو نوع ماشین حساب مهندسی A و B را از قرار ۴۰ دلار و ۲۰ دلار در واحد تولید کند. تابع هزینه کل تولید وی را تشکیل داده و سپس میزان هزینه را در صورتی بدست آورید که از نوع A، ۵۰۰ عدد و از نوع B، ۸۰۰ عدد تولید کند.

۳. فرض کنید تابع تولید یک واحد تولیدی با تابع $Q = 30K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$ که در آن K، سرمایه گذاری ثابت و L بزرگی نیروی کار (به ساعت) شناخته می‌شود. نشان دهید اگر مقادیر K و L دو برابر شوند Q نیز دو برابر می‌شود.

۴. فرض کنید تابع مطلوبیت دو کالای x و y به وسیله $U = xy^2$ داده می‌شود. به‌علاوه یک مصرف‌کننده به خرید ۹ واحد از x و ۶ واحد از کالای y اقدام می‌کند. اگر همین خریدار ۹ واحد از y را خریداری کند چه مقدار از کالای x باید بخرد تا سطح مطلوبیت قبلی‌اش تکرار شود؟

۵. تابع تقاضای دو کالا به‌صورت

$$d_1(x,y) = 50 - 5x - 2y, \quad d_2(x,y) = 100 - 3x - 8y$$

داده شده است. مقدار تقاضا چیست اگر قیمت کالای اول ۵ دلار و کالای دوم ۸ دلار باشد؟ کدام تقاضا بیشتر است؟ (این مسئله فقط یک جایگذاری ساده است).

۶. چه رابطه‌ای بین x و y برقرار خواهد شد اگر در مسئله قبل مقادیر تقاضای دو کالا یکی شود؟

۸. بررسی کنید کدامیک از توابع زیر همگن هستند؟ بعلاوه مرتبه همگنی را بدست آورید.

الف) $f(x,y)=x+y$ ب) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

ج) $f(x,y)=\dfrac{x^۲+y^۲}{x^۳y^۳}$ د) $f(x,y)=\dfrac{x^۲+y^۳}{x^۳y^۳}$

ه) $f(x,y)=Cx^{\alpha}y^{\beta}$ و) $f(x,y)=\dfrac{۳xy^۲z^۳}{\sqrt{x^۲+۲y^۲+۳z^۲}}$

برای هریک از توابع زیر مشتقات جزئی مرتبه اول را بدست آورید.

۹. $f(x,y)=۵x^۲y+۳x^{-۲}y^۳$

۱۰. $f(x,y,z)=۲xe^{x^۲-xyz+z^۳}$

۱۱. $f(x,y)=(۳x+۲y)^۵$

۱۲. $z=(x+y+xy)^۳$

۱۳. $f(x,y)=\ln(\sqrt{x}\sqrt{y-۱})$

۱۴. $z=\dfrac{۳t}{۲s}$

۱۵. $f(x,y)=x^۲y^{-۳}$

۱۶. $f(x,y)=xye^x$

۱۷. $f(x,y)=e^{۲-x}y^{-۲}$

۱۸. $f(x,y)=\dfrac{۲x+۳y}{y-x}$

۱۹. $z=\dfrac{ty^۲}{t^۲y^۳-۱}$

۲۰. $z=u\ln v$

۲۱. $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+۲y)}{y^۲}$

۲۲. $z=\ln\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$

۲۳. $z=\ln(sy+y^۲)$

۲۴. $z=۲x\sqrt{y-۱}+x^۲y^۳$

۲۵. $f(x,y)=\ln(x^۲+y^۲)$

۲۶. $z=\dfrac{\ln(x^۲+۵)}{y}$

۲۷. $z=(xy+۱)^{-۲}$

۲۸. $z=e^{xy}+y\ln x$

۲۹. $z=e^{\ln(x^۲+y^۲+xy^۳+۵)}$

۳۰. $f(x,y)=y\sqrt{x}-x\sqrt{y}+x^۲$

۳۱. $t=e^{y^۲z}+(x^۲+xy^۳)$

۳۲. $u=x^{۴/۳}+(xy-y^۲)^{-۷/۳}$

۳۳. $z=x^{y^۲+۱}$

۳۴. $z=۲x^۲+۳y^۲+۴x^۳y^۴$

۳۵. $z=\dfrac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$

۳۶. $z=۳x^۲y^۳e^{-۴x^۳y^۲}$

۳۷. $z=\ln(۲x^۲+۳y^۲)$

۳۸. $z=\ln(\sqrt{x^۳+۲xy^{-۵}})$

۳۹. $z=\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

۴۰. $z=\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^۲$

۴۱. $z=\ln\left((x^۲-y)^x(x-y^۲)^y\right)$

۴۲. $z=\ln\left(\dfrac{xy}{x+۳y}\right)$

۴۳. $z=\ln(۱+e^{xy})$

۴۴. برای هریک از توابع زیر مقدار مشتق‌های جزئی خواسته شده (و یا عبارت) را در نقاط داده شده بدست آورید.

الف) $f(x,y,z)=۷,\ \ f_{yxx}(۴,۳,-۲)$

ب) $f(x,y,z)=z^۲(۳x^۲-۴xy^۳),\ \ f_{xyz}(۱,۳,-۲)$

ج) $f(x,y)=y^۲e^x+\ln(xy),\ \ (f_{xyy}+f_y)(۱,۱)$

د) $f(x,y)=x^۳-۶xy^۲+x^۲-y^۳,\ \ [f_{yx}(۱,-۱)]^۲$

ه) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y},\ \ e^{f_x(۱,۱)}$

و) $f(x,y)=\ln(x^۲+y^۲),\ \ [\exp(f(x,y))]_{xxyy}(۲,۲)$

برای هرکدام از توابع زیر مطلوب است محاسبه f_{xx}، f_{yy} و f_{xy} (z را ثابت بگیرید).

۴۵. $f(x,y)=۵x^۴y^۳+۲xy$

۴۶. $f=x^۳+۳xy^۲z^۲+۲y+\ln(yz^۳)$

۴۷. $f(x,y)=\dfrac{x+۱}{y-۱}$

۴۸. $f(x,y)=\sqrt{x^۲+y^۲}$

۴۹. $f(x,y)=x^۲ye^x$

۵۰. $z=x^۵-۶x+۴y^۳-y$

۵۱. $z=x\sqrt{y-x}$

۵۲. $f(x,y)=\ln(\sqrt{x^۲-y^۲})$

۵۳. $z=۹e^{۲xy^۳}-x$

۵۴. $f(x,y)=2x^3y^2+6x^2y^3-3xy$

۵۵. $f(x,y)=(x^2+xy+y^2)(yx+x+y)$

۵۶. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)+2$

۵۷. $z=\ln(\sqrt{x^2+y^2})$

۵۸. $z=x^2e^{y^2}$

۵۹. $z=\ln(e^{xy})(x^3-y^3)$

۶۰. $z=(5x^2-y)^3$

۶۱. $z=e^{x^2+y^2}$

۶۲. $f(x,y)=e^{2x-y}+\ln(y^2-2x)$

۶۳. شیب خط مماس بر منحنی توابع زیر را با توجه به محور مذکور و در نقطه داده شده بیابید.

الف) $f(x,y)=5x^3-4xy$ محور x ها $A(1.2,-3)$

ب) $z=x^3-5xy$ محور y ها $B(2.1,-2)$

ج) $z=x^2y-x/y$ محور x ها $C(1,-2)$

د) $z=(x-5y)^3$ محور x ها $D(1,-3)$

با فرض توابع زیر، درستی هر کدام از تساوی های متناظر را بررسی کنید.

۶۴. $f_{xyx}=f_{xxy},\ f(x,y)=x^4y^4+3x^3y^2-7x+4$

۶۵. $f_{xy}=f_{yx},\ f(x,y)=e^{x^2+xy+y^2}$

۶۶. $f_{xx}+f_{xy}+f_{yx}+f_{yy}=f(x,y)\left((x+y)^2+2\right),\ f(x,y)=e^{xy}$

۶۷. $f_{xyx}=f_{xxy},\ f(x,y)=x^4y^4+3x^3y^2-7x+4$

۶۸. $9z_{xx}-z_{tt}=0,\ z=5(x-3t)^3$

۶۹. $f_{xy}-f_{yx}=0,\ f(x,y)=e^{x^2+xy+y^2}$

۷۰. $z_{yy} = ۱۶ z_{xx},\ z = (x-۴y)^{۲}$

۷۱. $۴z_{xx} - z_{tt} = ۰,\ z = ۴e^{۲x-۴t}$

۷۲. $۴z_{xx} - z_{tt} = ۰,\ z = ۴e^{۲x+۴t}$

۷۳. $xw_x + yw_y + zw_z = (a+b+c)w,\ w(x,y,z) = kx^a y^b z^c$

۷۴. $xz_x = z_y,\ z = xe^y$

۷۵. $xz_x + yz_y = ۰,\ z = \dfrac{x+y}{x-y}$

۷۶. $xw_x + yw_y + zw_z = ۲w,\ w = x^{۲} + yz$

۷۷. مشتقات z_{xxyx} و s_{xyy} را با فرض توابع زیر بدست آورید.

$$z = x^{۲}y^{۳} + ye^x - y^{۲}, \quad s = x^{۴} + x\ln(y+۱) + y^{۲}$$

۷۸. اگر $\ln(x+y+z) + xyz = ze^{x+y+z}$ باشد، مطلوب است z_x در نقطه $(۰,۱,۰)$.

۷۹. کدامیک از توابع زیر در معادله لاپلاس $z_{xx} + z_{yy} = ۰$ صدق می‌کنند؟

الف) $z = x^{۲} + y^{۲}$ ب) $z = xy$ ج) $z = xe^y - ye^x$

د) $z = x^{۲} - y^{۲}$ ه) $z = \ln(x^{۲} + y^{۲})$

و) $z = \left((x-۱)^{۲} + (y+۳)^{۲}\right)^{\frac{-۱}{۲}}$

۸۰. کدامیک از توابع زیر در معادله $z_{xy} - z_{yx} = ۰$ صدق می‌کنند؟

الف) $z = x^{۲} + ۲x + ۱/y$ ب) $z = xy$ ج) $z = xe^y - ye^x$

د) $z = ۱۶x^{\frac{۱}{۴}}y^{\frac{۳}{۴}}$ ه) $z = \dfrac{y}{x^{۲}} + \dfrac{x}{y}$ و) $z = \exp(x)y$

۸۱. کدامیک از توابع زیر در معادله $z_{xxxx} + ۲z_{xxyy} + z_{yyyy} = ۰$ صدق می‌کنند؟

الف) $z = x^{۴} - ۳x^{۲}y^{۲}$ ب) $z = xy + ۳۶$ ج) $z = y\ln(x^{۲}+y^{۲})$
د) $z = x^{۲} + ۲xy + y^{۳}$

۸۲. تحقیق کنید که برای تابع $f = \dfrac{x_{۱}x_{۳}^{۲}}{x_{۲}} + \ln(x_{۲}x_{۳})$ هر سه تساوی زیر برقرار است.

$$f_{۱۲} = f_{۲۱}, \quad f_{۱۳} = f_{۳۱}, \quad f_{۲۳} = f_{۳۲}$$

۸۳. مقدار $\sqrt{(۴.۱)^{۳} - (۲.۹۵)^{۳} - (۱.۰۲)^{۳}}$ را به کمک دیفرانسیل تقریب بزنید.

۸۴. در مسائل زیر مشتقات خواسته شده را به کمک قاعده زنجیره‌ای بدست آورید.

الف) $z = ۵x + ۳y,\ x = ۲r + ۳s,\ y = r - ۲s,\ \ z_r, z_s$

ب) $z = ۲x^{۲} + ۳xy + ۲y^{۲},\ x = r^{۲} - s^{۲},\ y = r^{۲} + s^{۲},\ \ z_r, z_s$

ج) $w = x^{۲}yz + xy^{۲}z + xyz^{۲},\ x = e^{t},\ y = te^{t}, z = t^{۲}e^{t},\ \ w_t$

د) $w = \ln(xyz),\ x = r^{۲}s,\ y = rs,\ z = rs^{۲},\ \ w_r$

هـ) $y = x^{۲} - ۷x + ۵,\ x = ۱۹rs + ۲s^{۲}r^{۲},\ \ y_r$

و) $y = ۴ - x^{۲},\ x = ۲r + ۳s - ۴t,\ \ y_t$

ز) $z = ۲x + ۳y,\ x = t^{۲},\ y = ۵t,\ \ z_t$

ح) $z = x^{\frac{۱}{۲}}y^{\frac{۱}{۲}},\ x = ۲t,\ y = ۲t^{۲},\ \ z_t$

ط) $z = \dfrac{x+y}{x-y},\ x = t^{۳} + ۱,\ y = ۱ - t^{۲},\ \ z_t$

ی) $z = ۳xy^{۲} + ۲x,\ x = -۳t^{۲},\ y = ۴t^{۳} + t,\ \ z_t$

ک) $z = \dfrac{۵t^{۲} + ۳xy}{۲w^{۲}y},\ x = t^{۲} + ۱,\ y = \sqrt{t^{۲}+۱},\ w = e^{t} + ۱,\ \ z_t$

۸۵. در مسائل زیر $u(x,y)$ یک تابع مطلوبیت است. تعدادی از منحنی‌های بی‌تفاوتی تابع (و یا همان منحنی‌های تراز) را رسم کنید.

الف) $u(x,y) = ۲x + ۳y$ ب) $u(x,y) = ۴x^{۳}y$

ج) $u(x,y) = x^{۲} + y^{۲}$ د) $u(x,y) = ۴x^{۰.۵}y^{۰.۵}$

ه) $u(x,y)=۴x^۲y^۲$ و) $u(x,y)=۴x^{\frac{۲}{۵}}y^{\frac{۳}{۵}}$

۸۶. شیب خط مماس بر منحنی با فرمول $x^۲y+۲y^۳-۲e^{-x}=۱۴$ را در نقطه‌ای با مختصات $(۰,۲)$ یافته و سپس معادله این خط مماس را بنویسید.

۸۷. اگر $z^۳-y^۳-x^۲y-xy^۲-y^۳=۰$ باشد، مطلوب است z_{xx}.

۸۸. اگر $z^۲-۳x^۲+y^۲=۰$ باشد، مطلوب است z_{yy}.

۸۹. اگر $z=(۴x+۳y)^۳$ که در آن $x=r^۲s$ و $y=r-۲s$، مطلوب است $z_r|_{r=۰,s=۱}$.

۹۰. اگر $w=e^{x+y+z}(x^۲+y^۲+z^۲)$ که در آن

$$x=(r-s)^۲,\quad y=(r+s)^۲,\quad z=(s-r)^۲$$

مطلوب است w_s بازای $r=۱,s=۱$.

۹۱. اگر $y=x/(x-۵)$ که در آن $x=۲t^۲-۳rs-r^۲t$ است، مقدار y_r را وقتی $r=۰,s=۲,t=-۱$ محاسبه کنید.

۹۲. با فرض $w=۲x^۲\ln|۳x-۵y|$ که $x=s\sqrt{t^۲+۲}$ و $y=t-۳e^{۲-s}$، مطلوب است w_t بازای $s=۱,t=۰$.

۹۳. تابع هزینه تولید q_A واحد از کالای A و q_B واحد از کالای B به شکل مشترک

$$TC(q_A,q_B)=(۳q_A^۲+q_B^۳+۴)^{\frac{۱}{۲}}$$

داده شده است. اگر تابع تقاضای هریک از دو کالا به صورتهای

$$q_A=۱۰-d_A+d_B^۲,\ \ q_B=۲۰+d_A-۱۱d_B$$

مفروض باشند، با کمک قاعده زنجیره‌ای مطلوب است محاسبه مقدار $TC_{q_Aq_B}$ و مقادیر TC_{q_A} و TC_{q_B} وقتی که $d_A=۲۵$ و $d_B=۴$.

۹۴. با استفاده از فرمول مشتق ضمنی، مشتق‌های خواسته شده را بیابید.

الف) $۲x^۲ + ۳y^۲ + ۵z^۲ = ۵۰۰,\ z_x$

ب) $e^x + e^y + e^z = ۱۰,\ z_y$

ج) $xyz + xy^۲z^۳ - \ln(z^۴) = ۰,\ z_y$

د) $(z^۲ + ۶xy)\sqrt{x^۳ + ۵} = ۲,\ z_y$

هـ) $f(x,y) = ۵x^۲y + ۳x^۲y,\ z_y$

و) $\dfrac{x^۲}{a^۲} - \dfrac{y^۲}{b^۲} - ۱ = ۰, (y > ۰),\ y_x$

ز) $x^y - \ln(xy) + x^۲y = ۰,\ y_x$

۹۵. تقاضای ماهیانه یک نمونه خاص از پنکه بوسیله تابع $f(x,y)$ داده می‌شود که در آن x حجم پول مصرف شده جهت تبلیغات و y قیمت فروش به دلار است. یک تعبیر اقتصادی از f_x و f_y ارائه دهید.

۹۶. یک فروشنده ماشین‌های هیبریدی (بنزینی-برقی) می‌داند اگر هر ماشین با قیمت x دلار فروخته شود در حالی‌که y دلار قیمت هر واحد بنزین است، آنگاه تابع تقاضا به شکل

$$D(x,y) = ۳۵۰۰ - ۱۹x^{\frac{۱}{۲}} + ۶\left(\frac{۱}{۱۰}y + ۱۶\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

خواهد بود. او برآورد می‌کند از هم اکنون تا t سال بعد ماشین‌های هیبریدی با شکل متغیر

$$x(t) = ۳۵/۰۵۰ + ۳۵۰t\ ,\ y(t) = ۳۰۰(۳t)^{\frac{۱}{۲}}$$

سر و کار خواهد داشت. با چه آهنگی تابع تقاضا تغییر می کند وقتی از الان تا ۳ سال بعدی فروش صورت گیرد؟

۹۷. فرض کنید $y = h(x)$ تابعی دارای مشتق نسبت به x و بعلاوه $f(x,y) = c$ که در آن c مقدار ثابتی است. اگر x تابعی برحسب t باشد با کمک قاعده زنجیره‌ای نشان دهید $f_x + f_y y_x = ۰$. با استفاده از این نتیجه شیب خط مماس بر منحنی با فرمول $x^۲ + xy + y^۳ = ۱$ را در نقطه $(۱,۱)$ بدست آورید.

۹۸. تابع $TC(x,y) = ۲۵ + ۲x^۲ + ۳y^۲$ هزینه مشترک دو کالا است که در آن x هزینه (به

دلار) مواد اولیه و y هزینه (به ساعت) نیروی کار است . اگر هزینه مواد ثابت نگه داشته شود، مقدار تغییر (افزایش) در TC بازای افزایش یک ساعت در نیروی کار با چه تابعی شناخته می‌شود؟

۹۹. تابع هزینه کل تولید یک کالا با ضابطه

$$TC(x,y) = ۲۰x + ۷۰y + \frac{x^۲}{۱۰۰۰} + \frac{xy^۲}{۱۰۰}$$

که در آن x هزینه هر واحد مواد اولیه در خط تولید و y هزینه هر ساعت نیروی کار است شناخته می شود. معین کنید که آیا افزایش یک واحد از مواد اولیه با فرض ثابت نگه داشتن y بر TC اثر می‌گذارد؟

۱۰۰. اگر تساوی $c + \sqrt{c} = ۱۲ + x\sqrt{۹ + y^۲}$ توصیف کننده رابطه بین تابع هزینه کل $c(x,y)$ و مقادیر دو کالای x و y باشد مطلوب است هزینه نهایی با توجه به کالای اول وقتی بدانیم $x = ۶$ و $y = ۴$. هزینه نهایی با توجه به کالای دوم در مقادیر قبلی چه عددی است؟

۱۰۱. فرض کنید $TC(x) = (۳x^۲ + y^۳ + ۴)^{\frac{۱}{۲}}$ تابع هزینه کل دو کالای A و B با مقادیر به ترتیب x و y نشان دهد، به‌علاوه می‌دانیم تابع تقاضای هر کالا به‌طور ادغامی

$$d_A(x,y) = ۱۰ - x + y^۲, \quad d_B(x,y) = ۲۰ + x - ۱۱y$$

است. مطلوب است $\frac{\partial}{\partial x \partial y} TC|_{(x=۲۵, y=۴)}$.

وجود ماکزیمم، می‌نیمم یا نقاط زین اسبی را برای توابع زیر بررسی کنید.

۱۰۲. $z = ۹ - x^۲ - y^۲$

۱۰۳. $z = x^۲ + y^۲ + ۴$

۱۰۴. $z = x^۲ + ۶xy + y^۲ + ۱۶x$

۱۰۵. $z = x^۳ - y^۳ - ۶xy$

۱۰۶. $z = x^۲ + y^۲ - ۴$

۱۰۷. $z = ۴۶ - x^۲ + ۲xy - ۴y^۲$

۱۰۸. $z = x^۲ + ۵xy + ۱۰y^۲ + ۸x - ۴۰y$

۱۰۹. $z = x^۲ + ۲y^۲ - xy + ۱۴y$

۱۱۰. $z = (x - ۴)\ln(xy)$

۱۱۱. $z = xy^۲ - ۶x^۲ - ۳y^۲$

۱۱۲. $z = ۴۰x + ۸۰y - x^۲ - y^۲$

۱۱۳. $f(x,y) = x^۲ + ۳y^۲ + ۴x - ۹y + ۳$

۱۱۴. $f(x,y) = -۲x^۲ + ۸x - ۳y^۲ + ۲۴y + ۷$

۱۱۵. $f(x,y) = y - y^۲ - ۳x - ۶x^۲$

۱۱۶. $f(x,y) = (x-۳)(y-۳)(x+y-۳),\ (x > ۰, y > ۰)$

۱۱۷. $f(x,y) = \ln(xy) + ۲x^۲ - xy - ۶x$

۱۱۸. $f(x,y) = e^{-x^۲ - y^۲ + ۶y}$

۱۱۹. $f(x,y) = ۳x^۲ - ۲xy + ۳y^۲ + ۸x - ۸y + ۵$

۱۲۰. a و b چیست وقتی نقطه بحرانی تابع $z = ax^۲ + xy + by^۲$ یک نقطه زین اسبی باشد؟

۱۲۱. نقاط بحرانی تابع‌های ذیل را پیدا کنید.

الف) $f = x^۲ - ۳y^۲ - ۸x + ۹y + ۳xy$

ب) $f = x^۲ + ۴y^۲ - ۶x + ۱۶y$

ج) $f = xy - x + y$

د) $f = \frac{5x^3}{3} + \frac{2}{3}y^3 - \frac{15}{2}x^2 + y^2 - 4y + 7$

ماکزیمم و می‌نیمم هر کدام از توابع مقید به شرط متناظر زیر را بدست آورید.

۱۲۲. $f(x,y) = xy$, و با قید $x^2 + y^2 = 8$.

۱۲۳. $f(x,y) = xy$, و با قید $4x + 2y = 12$.

۱۲۴. $f(x,y) = xy$, و با قید $x + y = 1$.

۱۲۵. $f(x,y) = x^2 + y^2$, و با قید $xy = 1$.

۱۲۶. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$, و با قید $x^2 + y^2 = 1$.

۱۲۷. $f(x,y) = xy^2$, و با قید $x^2 + y^2 = 1$.

۱۲۸. $f(x,y) = e^{xy}$, و با قید $x^2 + y^2 = 4$.

۱۲۹. $f(x,y) = x^2 y$, و با قید $5x + 20y = 80$.

۱۳۰. $f(x,y) = x^4 y^2$, و با قید $x + y = 9$ $(x, y \geqslant 0)$.

۱۳۱. $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$, و با قید $y = \sqrt{x}$.

۱۳۲. $f(x,y) = xy$, و با قید $x^2 + y^2 = 16$.

۱۳۳. $f(x,y) = 2x + 3y$, و با قید $xy = 24$.

۱۳۴. یک واحد تولیدی دو نوع کالا با قیمتهای p_1 و p_2 تولید می کند. اگر تابع هزینه کل مشترک دو کالا $TC(x,y)$ به‌صورت زیر باشد، مطلوبست مقادیری از دو کالا که سود را به حداکثر می‌رساند.

الف) $p_1 = 4,\ p_2 = 8,\ TC = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2$

ب) $p_1 = 20 - 4x,\ p_2 = 80 - 8y,\ TC = x^2 + 2y^2 + 50$

ج) $p_1 = 50 - 5x,\ p_2 = 30 - 2y,\ TC = 10(x+y) + 6$

۱۳۵. تولیدکننده‌ای دو نوع تلویزیون A و B تولید می‌کند. مشخصاً وقتی تعداد x واحد (به صد) و y واحد (به صد) به‌ترتیب از A و B در یک‌سال با موفقیت به فروش می‌رسد، سود سالانه به‌فرم

$$p(x,y) = -0.3x^2 - 0.5xy - 0.4y^2 + 85x + 125y - 2500$$

هزار دلار خواهد شد. کارخانه او تنها قادر است جمعاً ۳۰,۰۰۰ تلویزیون در سال تولید کند. با این فرض معین کنید چه تعداد از دو نوع A و B در سال باید تولید شود تا سود سالانه ماکزیمم شود؟

۱۳۶. مسئله فوق را موقعی حل کنید که $x + y = 700$ و در آن:

$$p(x,y) = -0.02x^2 - 0.03xy - 0.05y^2 + 15x + 40y - 3000$$

۱۳۷. با روش ضرایب لاگرانژ تابع تولید CES

$$Q(k,l) = 55\left(0.6k^{-1/4} + 0.4l^{-1/4}\right)^{-4}$$

را ماکزیمم کنید وقتی $2k + 5l = 150$ است.

۱۳۸. با روش ضرایب لاگرانژ مسئله قبل را برای تابع تولید CES

$$Q(k,l) = 50\left(0.3k^{-1/5} + 0.7l^{-1/5}\right)^{-5}$$

با توجه به قید $5k + 2l = 140$ انجام دهید.

۱۳۹. تابع $f(x,y) = \ln(x+y)$ را با فرض قید $x + y = 5$ ماکزیمم کنید.

۱۴۰. تولیدکننده‌ای دو نوع کالای I و II تولید می‌کند، توابع تقاضای هرکدام به‌صورت

$$d_{\mathrm{I}} = 10 - x, \quad d_{\mathrm{II}} = 40 - 2y,$$

داده می‌شود که در آن x و y به ترتیب تعداد کالای تولید شده است. اگر $TC(x,y) = xy$ تابع هزینه مشترک باشد. مطلوب است تعدادی از هر دو کالا که سود را ماکزیمم می‌کند.

۱۴۱. ماکزیمم مقدار تابع $w(x,y,z)=xz+y$ را همراه قید $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ بیابید.

۱۴۲. یک کشاورز دو نوع محصول A و B را کشت می‌کند. هزینه تولید x واحد از محصول A، $۱۲۰۰+x^{۲}$ و برای y واحد از محصول B، $۸۰۰+۳y^{۲}$ است. اگر او مجبور به تولید ۲۰۰ واحد محصول باشد، چه مقدار باید برداشت کند تا تابع هزینه می‌نیمم مقدار گردد؟

۱۴۳. برای دو کالای A و B تابع هزینه مشترک به فرم $TC(q_A,q_B)=\frac{۳}{۲}q_A^{۲}+۳q_B^{۲}$ و تابع تقاضای $d_A=۶۰-q_A^{۲}$ و $d_B=۷۲-۲q_B^{۲}$ داده شده است. سطحی از تولید را بدست آورید که سود را ماکزیمم کند.

۱۴۴. یک انحصارگر دو نوع کالای A و B را تولید می‌کند. تابع هزینه مشترک دو کالا به‌صورت $TC(q_A,q_B)=۲(q_A+q_B+q_Aq_B)$ و تابع تقاضاهای $d_A=۲۰-۲p_A$ و $d_B=۱۰-p_B$ داده شده‌اند. مقادیری از p_A و p_B را طوری بدست آورید که سود را ماکزیمم کند. مقادیر دو کالا متناظر به این قسمت‌ها کدامند؟ سود ماکزیمم چقدر است؟

۱۴۵. فرض کنید $P=f(l,k)=۲.۱۸l^{۲}-۰.۰۲l^{۳}+۱.۹۷k^{۲}-۰.۰۳k^{۳}$ تابع تولید یک واحد تولیدی است. مقادیری از l و k را پیدا کنید که خروجی P را ماکزیمم می‌کند.

۱۴۶. در یک محیط اداری خاص، دو نوع کامپیوتر C و D برای به ترتیب c و d ساعت مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر تابع خروجی Q به شکل

$$Q(c,d)=۱۸c+۲۰d-۲c^{۲}-۴d^{۲}-cd$$

مفروض باشد، چه تعداد ساعت از c و d مقدار Q را ماکزیمم می‌کند؟

۱۴۷. یک کارخانه آبنبات سازی دو نوع آبنبات A و B را بصورتی تولید می‌کند که هزینه متوسط ثابت A و B به‌ترتیب به میزان ۶۰ و ۷۰ دلار است. توابع تقاضای A و B به‌شکل

$$d_A=۵(p_B-p_A),\quad d_B=۵۰۰+۵(p_A-۲p_B)$$

مفروض است. مطلوب است مقادیری از p_A و p_B که سود تولیدکننده را ماکزیمم می‌کند.

۱۴۸. یک انحصارگر دو نوع کالای رقابتی A و B می‌فروشد که در آن

$$d_A = ۱۶ - p_A + p_B$$

و $d_B = ۲۴ + ۲p_A - ۴p_B$ توابع تقاضای متناظر هستند. اگر هزینه متوسط ثابت تولید هر واحد دو کالا به‌ترتیب ۲ و ۴ دلار باشد. چه مقدار از A و B فروخته شود تا سود انحصارگر بیشترین مقدار گردد؟

۱۴۹. یک تولیدکننده به اختصاص ۱۰۰ واحد از کالای تولیدی خودش به دو مزرعه ۱ و ۲ اقدام می‌کند. اگر $q_۱$ و $q_۲$ به ترتیب تعداد واحد کالای اختصاصی به مزرعه ۱ و ۲ و

$$TC(q_۱, q_۲) = ۰.۱q_۱^۲ + ۷q_۱ + ۱۵q_۲ + ۱۰۰۰$$

هزینه باشد، چه مقدار $q_۱$ و $q_۲$ باید بین دو مزرعه تقسیم شود تا هزینه می‌نیمم گردد؟

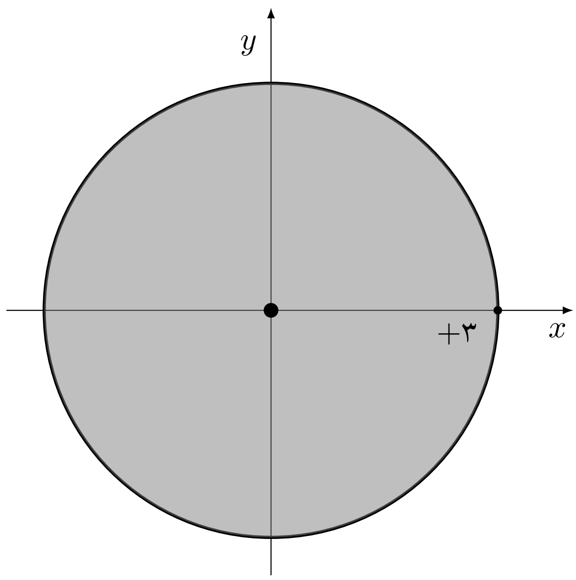
۱۵۰. تابع تولید یک واحد اقتصادی به‌صورت $f(l,k) = ۱۲l + ۲۰k - l^۲ - ۲k^۲$ داده می‌شود. هزینه تولید l و k به ترتیب ۴ و ۸ دلار در واحد است. اگر تولیدکننده بخواهد سطح هزینه کل را در ۸۸ دلار نگه دارد مطلوب است بیشترین خروجی ممکن با توجه به این قید بودجه‌ای.

۱۵۱. مسئله قبل را انجام دهید، هرگاه $f(l,k) = ۲۰l + ۲۵k - l^۲ - ۳k^۲$ و قید بودجه‌ای $۲l + ۴k = ۵۰$ باشد.

۱۵۲. تولیدکننده ای با استفاده از x کارگر ماهر و y کارگر معمولی میزان $Q(x,y) = ۱۰x^۲y$ واحد در روز تولید می‌کند. در حال حاضر ۲۰ کارگر معمولی مشغول به کار هستند. اولاً معین کنید هم اکنون چه میزان در هر روز تولید می‌شود و ثانیاً تولید روزانه چه تعداد تغییر می‌کند اگر یک نفر کارگر ماهر حین کار اضافه شود؟ ثالثاً علاوه بر حالت قبل اگر یک نفر کارگر معمولی نیز بکارگیری کند، تولید روزانه چقدر تغییر خواهد کرد؟

۱.۳.۷ جواب و راهنمایی‌ها

۱. درباره **الف**، تابع f یک تابع گویا بر حسب x و y است. دامنه f نمی‌تواند (x,y)هایی را بپذیرد که $۴x+۳y=۰$. از این رو تمام (x,y)هایی جواب اند که روی خط $y=\frac{-۴}{۳}x$ واقع **نباشند**. در مورد **ب**، دامنه f تمام (x,y)هایی است که به‌ازای آن $x^۲+y^۲\leqslant ۹$. این مجموعه نقاط، دقیقاً تمام نقاط داخل و روی دایره‌ای به شعاع ۳ و مرکز مبدأ است:



صورت تابع کسری f در مورد **ج**، همه ازواج (x,y) از $\mathbb{R}^۲$ را می‌پذیرد اما مخرج آن‌هایی را حذف می‌کند که برای آن‌ها $x-۲y\leqslant ۰$. دامنه z در **ز**، همه نقاط صفحه $\mathbb{R}^۲$ است.

۲. اگر از نوع A تعداد x واحد و از کالای B تعداد y واحد تولید شود آن‌گاه تابع هزینه نهایی برابر است با $TC(x,y)=۴۰x+۲۰y$. برای قسمت بعدی کافی است $TC(۵۰۰,۸۰۰)$ را بدست آورید.

۳. اگر K و L دو برابر شوند آن‌گاه Q_N جدید برابر خواهد بود با $۳۰(۲K)^{\frac{۱}{۴}}(۲L)^{\frac{۳}{۴}}$ که با ساده کردن آن به $Q_N=۲Q$ که همان حکم مسئله است می‌رسیم.

۴. سطح مطلوبیت به ازای خرید ۹ واحد x از x و ۶ واحد از y برابر است با: $U = ۹ \times (۶)^۲ = ۳۲۴$. در حالتی که ۹ واحد خرید از y انجام شود و سطح مطلوبیت همان ۳۲۴ باقی بماند آن‌گاه لزوماً

$$۳۲۴ = x(۹)^۲ \xrightarrow{\text{یعنی}} x = ۴$$

۶. با مساوی قرار دادن دو تابع تقاضا داریم $۵۰ - ۵x - ۲y = ۱۰۰ - ۳x - ۸y$ که نهایتاً به رابطه $۲x - ۶y + ۵۰ = ۰$ می‌رسد.

۸. برای اینکه بفهمیم آیا تابعی همگن است یا خیر و اینکه اگر همگن است از چه مرتبه‌ای، بجای x قرار می‌دهیم αx و بجای y قرار می‌دهیم αy. سپس عبارت را تا جایی ساده می‌کنیم تا توانی از α را به‌عنوان فاکتوری از اصل ضابطه تابع بیرون آوریم:

درباره **الف** داریم:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha x + \alpha y = \alpha(x+y) = \alpha^۱ f(x,y)$$

پس f تابعی همگن از مرتبه ۱ است.

برای **ج** داریم:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha^۲ x^۲ + \alpha^۲ y^۲}{(\alpha^۳ x^۳)(\alpha^۳ y^۳)} = \frac{\alpha^۲ (x^۲ + y^۲)}{\alpha^۶ (x^۳ y^۳)} = \alpha^{-۴} f(x,y)$$

پس f تابعی همگن از مرتبه ۴− است. مورد **د** همگن نیست زیرا با جای‌گذاری، توانی از α از عبارت بیرون نمی‌آید (چرا؟)

۹. برای تابع f داریم:

$$f_x = ۱۰xy - ۶x^{-۳}y^۳, \quad f_y = ۵x^۲ + (۳x^{-۲})(۳y^۲)$$

۱۰.

$$\begin{aligned}
f_x =& (۲x)_x e^{x^۲ - xyz + z^۳} + (۲x)\left(e^{x^۲ - xyz + z^۳}\right)_x \\
=& ۲ \times e^{x^۲ - xyz + z^۳} + (۲x)\Big(e^{x^۲ - xyz + z^۳} \times (x^۲ - xyz + z^۳)_x\Big) \\
=& ۲ \times e^{x^۲ - xyz + z^۳} + (۲x)\Big(e^{x^۲ - xyz + z^۳} \times (۲x - yz + ۰)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y =&(۲x)_y e^{x^۲-xyz+z^۳}+(۲x)\left(e^{x^۲-xyz+z^۳}\right)_y \\ =&۰\times e^{x^۲-xyz+z^۳}+(۲x)\Big(e^{x^۲-xyz+z^۳}\times(x^۲-xyz+z^۳)_y\Big) \\ =&۰+(۲x)\Big(e^{x^۲-xyz+z^۳}\times(۰-xz+۰)\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_z =&(۲x)_z e^{x^۲-xyz+z^۳}+(۲x)\left(e^{x^۲-xyz+z^۳}\right)_z \\ =&۰\times e^{x^۲-xyz+z^۳}+(۲x)\Big(e^{x^۲-xyz+z^۳}\times(x^۲-xyz+z^۳)_z\Big) \\ =&۰+(۲x)\Big(e^{x^۲-xyz+z^۳}\times(۰-xy+۳z^۲)\Big) \end{aligned}$$

۱۱. برای تابع f داریم $f_x=۵(۳x+۲y)^۴\times ۳$ و $f_y=۵(۳x+۲y)^۴\times ۲$.

۱۳. چون تابع f را می‌توان به‌شکل $\underbrace{\ln(\sqrt{x})}_{\frac{۱}{۲}\ln(x)}+\underbrace{\ln(\sqrt{y-۱})}_{\frac{۱}{۲}\ln(y-۱)}$ نوشت لذا $f_x=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x})$ و بعلاوه $f_y=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{y-۱})$.

۱۷. برای تابع f داریم:

$$\begin{aligned} f_x =&y^{-۲}e^۲(e^{-x})_x=y^{-۲}e^۲(-e^{-x}) \\ f_y =&e^{۲-x}(y^{-۲})_y=e^{۲-x}(-۲y^{-۳}) \end{aligned}$$

۱۹. تحت شرایط مناسب می‌توان نوشت: $z=ty^۲(t^۲y^۳-۱)^{-۱}$ و لذا:

$$\begin{aligned} z_t =&\underbrace{(ty^۲)_t}_{y^۲}(t^۲y^۳-۱)^{-۱}+(ty^۲)\ \overbrace{\left[(t^۳y^۳-۱)^{-۱}\right]_t}^{-۱(t^۲y^۳-۱)^{-۲}(۳t^۲y^۳)} \\ z_y =&\underbrace{(ty^۲)_y}_{t(۲y)}(t^۲y^۳-۱)^{-۱}+(ty^۲)\ \underbrace{\left[(t^۲y^۳-۱)^{-۱}\right]_y}_{-۱(t^۲y^۳-۱)^{-۲}(۳t^۲y^۲)} \end{aligned}$$

۲۲. قرار می‌دهیم $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ و از فرمول $[\ln(u)]'=u'/u$ به‌نحو مناسب کمک می‌گیریم:

$$z_x=\frac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)_x}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}=\frac{\left(\frac{۱}{y}-\frac{y}{x^۲}\right)}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)},\qquad z_y=\frac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)_y}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}=\frac{\left(\frac{-x}{y^۲}+\frac{۱}{x}\right)}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}$$

۲۴. برای تابع z داریم $z_x = ۲\sqrt{y-۱} + ۲xy^۳$ و $z_y = \frac{۲x}{۲\sqrt{y-۱}} + ۳x^۲y^۲$.

۲۷. داریم: $z_x = -۲(xy+۱)^{-۳}\underbrace{(xy+۱)_x}_{y}$ و $z_y = -۲(xy+۱)^{-۳}\underbrace{(xy+۱)_y}_{x}$.

۲۹. اگر u عبارتی با شرایط مناسب باشد، آنگاه $e^{\ln(u)} = u$ و لذا $z = x^۲ + y^۲ + xy^۳ + ۵$. بقیه حل آسان است.

۳۱. برای تابع t داریم:

$$t_x = \underbrace{(e^{y^۲z})_x}_{۰} + \underbrace{(x^۲ + xy^۳)_x}_{۲x+y^۳}, \quad t_y = \underbrace{(e^{y^۲z})_y}_{۲yze^{y^۲z}} + \underbrace{(x^۲ + xy^۳)_y}_{۰+۳xy^۲}$$

$$t_z = \underbrace{(e^{y^۲z})_z}_{y^۲e^{y^۲z}} + \underbrace{(x^۲ + xy^۳)_z}_{۰}$$

۳۵. وقتی $(x,y) \neq (۰,۰)$ باشد، $z = (x^۲ - y^۲)(x^۲ + y^۲)^{-۱}$ و بنابر این:

$$z_x = \underbrace{(x^۲ - y^۲)_x}_{۲x}(x^۲ + y^۲)^{-۱} + (x^۲ - y^۲)\underbrace{\left[(x^۲+y^۲)^{-۱}\right]_x}_{-۱(x^۲+y^۲)^{-۲}(۲x)}$$

به همین روش z_y قابل محاسبه است.

۳۹. تابع را به صورت $z = (yx^{-۱})^{\frac{۱}{۲}} + (xy^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}$ نوشته و توجه داریم مبدأ نباید در دامنه z قرار گیرد. با این فرض:

$$z_x = \underbrace{\left[(yx^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}\right]_x}_{(۱/۲)(yx^{-۱})^{-\frac{۱}{۲}}(-yx^{-۲})} + \overbrace{\left[(xy^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}\right]_x}^{(۱/۲)(xy^{-۱})^{-\frac{۱}{۲}}(y)}$$

۴۱. از خاصیت لگاریتم استفاده کنید تا z را به‌صورت زیر نوشته و سپس مشتق‌گیری کنید:

$$z = \underbrace{\ln\left[(x^۲ - y^۲)^x\right]}_{x\ln(x^۲-y)} + \underbrace{\ln\left[(x - y^۲)^y\right]}_{y\ln(x-y^۲)}$$

۴۳. برای تابع z داریم:

$$z_x = \frac{(۱+e^{xy})_x}{۱+e^{xy}} = \frac{ye^{xy}}{۱+e^{xy}}, \quad z_y = \frac{(۱+e^{xy})_y}{۱+e^{xy}} = \frac{xe^{xy}}{۱+e^{xy}}$$

۴۴. برای **الف**، به‌ازای هر سه تایی (x,y,z)، $f_y=0$ لذا $f_{yx}=0$ و بنابر این $f_{yxy}=0$.
برای **ب** داریم $f_x = z^2(2x^2-4xy^3)_x = z^2(4x-4y^3)$. پس

$$f_{xy} = [z^2(4x-4y^3)]_y = z^2(4x-4y^3)_y = -12z^2y^2$$

و از آنجا $f_{xyz} = (-12z^2y^2)_z = -24zy^2$. لذا

$$f_{xyz}(1,3,-2) = -24(-2)(3^2)$$

برای قسمت **ه**، f_x برابر است با:

$$\frac{(x-y)_x(x+y)-(x-y)(x+y)_x}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

بنابراین $\frac{1}{2} = \frac{2}{2^2} = f_x(1,1)$ و همچنین $\sqrt{e} = e^{f_x(1,1)}$. برای مورد **و**، چون با حفظ شرایط $e^{\ln(u)}=u$ پس در غیر مبدأ:

$$e^{f(x,y)} = e^{\ln(x^2+y^2)} = x^2+y^2$$

حال در ادامه مشتق‌های مورد نظر را به‌ترتیب روی x^2+y^2 اعمال کنید (جواب صفر است).

۴۵. برای تابع f داریم:

$$f_x = 20x^3y^3+2y \longrightarrow f_{xx} = 60x^2y^3, \quad f_{xy} = 60x^3y^2+2$$

و بعلاوه $f_y = 15x^4y^2+2x$ که نتیجه می‌دهد $f_{yy} = 30x^4y$.

۴۷. فرض کنیم $y \neq 1$ و بنابر این، $\left(\frac{x+1}{y-1}\right) = (x+1)(y-1)^{-1}$. اکنون:

$$\left(\frac{x+1}{y-1}\right)_x = (y-1)^{-1} \longrightarrow \left(\frac{x+1}{y-1}\right)_{xx} = [(y-1)^{-1}]_x = 0$$

$$\left(\frac{x+1}{y-1}\right)_x = (y-1)^{-1} \longrightarrow \left(\frac{x+1}{y-1}\right)_{xy} = \underbrace{[(y-1)^{-1}]_y}_{-1(y-1)^{-2}} = 0$$

۵۲. $f(x,y) = \ln\left((x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2-y^2)$.

۵۷. به ۵۲ توجه کنید. **۵۸.** برای تابع z داریم:

$$z_x = 2xe^{y^2} \longrightarrow z_{xx} = 2e^{y^2}, \quad z_{xy} = 2x(2ye^{y^2})$$

و بعلاوه $z_y = x^{۲}(۲ye^{y^{۲}})$ که نتیجه می‌دهد:

$$z_{yy} = x^{۲}\big((۲y)_y e^{y^{۲}} + ۲y(e^{y^{۲}})_y\big) = x^{۲}\big(۲e^{y^{۲}} + ۴y^{۲}e^{y^{۲}}\big)$$

۶۳. برای **الف**، منظور از $f_x(A)$ و برای **ب**، منظور $z_y(B)$ است.

۶۴. برای تابع f داریم: $f_x = ۴x^{۳}y^{۴} + ۹x^{۲}y^{۲} - ۷$ و لذا:

$$f_{xy} = ۱۶x^{۳}y^{۳} + ۱۸x^{۲}y \longrightarrow f_{xyx} = ۴۸x^{۲}y^{۳} + ۳۶xy \qquad (۱.۷)$$

همچنین:

$$f_{xx} = ۱۲x^{۲}y^{۴} + ۱۸xy^{۲} \longrightarrow f_{xxy} = ۴۸x^{۲}y^{۳} + ۳۶xy \qquad (۲.۷)$$

ملاحظه می‌کنیم تفاضل (۱) و (۲) صفر است.

۶۶. با توجه به استدلال بیان شده درستی تساوی را بررسی کنید. چون $f_x = ye^{xy}$ پس داریم $f_{xx} = y^{۲}e^{xy}$ و $f_{xy} = xye^{xy} + e^{xy}$. از طرفی $f_y = xe^{xy}$ و لذا حاصل f_{yx} برابر است با $xye^{xy} + e^{xy}$ و بعلاوه $f_{yy} = x^{۲}e^{xy}$.

۶۸. چون $\big(۵(x-۳t)^{۳}\big)_x = ۱۵(x-۳t)^{۲}$ و لذا

$$\big(۵(x-۳t)^{۳}\big)_{xx} = ۳۰(x-۳)$$

به‌طور مشابه، چون $\big(۵(x-۳t)^{۳}\big)_t = -۴۵(x-۳t)^{۲}$ و لذا

$$\big(۵(x-۳t)^{۳}\big)_{tt} = ۲۷۰(x-۳t)$$

حال تساوی داده شده برقرار است.

۶۹. داریم:

$$\begin{aligned}
\big(e^{x^{۲}+xy+y^{۲}}\big)_x &= (۲x+y)e^{x^{۲}+xy+y^{۲}} \\
\big(e^{x^{۲}+xy+y^{۲}}\big)_{xy} &= \underbrace{(۲x+y)}_{۱}\,e^{x^{۲}+xy+y^{۲}} + (۲x+y)\,\underbrace{\big(e^{x^{۲}+xy+y^{۲}}\big)_y}_{(۲y+x)e^{x^{۲}+xy+y^{۲}}} \\
\big(e^{x^{۲}+xy+y^{۲}}\big)_y &= (۲y+x)e^{x^{۲}+xy+y^{۲}} \\
\big(e^{x^{۲}+xy+y^{۲}}\big)_{yx} &= e^{x^{۲}+xy+y^{۲}} + (۲y+x)(۲x+y)e^{x^{۲}+xy+y^{۲}}
\end{aligned}$$

به وضوح دو عبارت نهایی در هر محاسبه، مساویند. **۷۲.** چون $\left(۴e^{۲x+۴t}\right)_x = ۸e^{۲x+۴t}$ لذا با دیگر مشتق‌گیری بر حسب x داریم $z_{xx} = ۱۶e^{۲x+۴t}$. همچنین

$$\left(۴e^{۲x+۴t}\right)_t = ۱۶e^{۲x+۴t}$$

و با مشتق‌گیری دیگر بر حسب t داریم $z_{tt} = ۶۴e^{۲x+۴t}$ که از اینجا درستی رابطه $۴z_{xx} = z_{tt}$ ساده و واضح است.

۷۶. با محاسبه مشتقات مراتب اول داریم:

$$w_x = ۲x, \quad w_y = z, \quad w_z = y$$

و لذا تساوی زیر برقرار است:

$$xw_x + yw_y + zw_z = ۲x^۲ + ۲yz = ۲(x^۲ + yz) = ۲w$$

۷۷.

$$\overbrace{۲xy^۳ + ye^x}^{z_x} \xrightarrow{(\ )_x} \overbrace{۲y^۳ + ye^x}^{z_{xx}} \xrightarrow{(\ )_y} \overbrace{۶y^۲ + e^x}^{z_{xxy}} \xrightarrow{(\ )_x} \overbrace{e^x}^{z_{xxyx}}$$

$$\underbrace{۴x^۳ + \ln(y+۱)}_{s_x} \xrightarrow{(\ )_y} \underbrace{\frac{۱}{y+۱}}_{s_{xy}} \xrightarrow{(\ )_y} \underbrace{\frac{-۱}{(y+۱)^۲}}_{s_{xyy}}$$

۷۹. جواب برای مورد **الف** منفی است. چون $z_x = ۲x$ پس $z_{xx} = ۲$ و چون $z_y = ۲y$ پس $z_{yy} = ۲$ که نشان می‌دهد: $z_{xx} + z_{yy} = ۴ \neq ۰$. درباره مورد **ه** جواب مثبت است. درواقع جمع مشتقات مرتبه دوم زیر در قسمتی از صفحه که شامل مبدا نیست، صفر است:

$$z_{xx} = \frac{۲}{x^۲+y^۲} - \frac{۴x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}, \qquad z_{yy} = \frac{۲}{x^۲+y^۲} - \frac{۴y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

جواب مسئله برای قسمت **و** مجدداً منفی است.

$$z_x = \frac{-x+۲}{\left((x-۱)^۲ + (y+۳)^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}} \longrightarrow z_{xx} = \frac{۲x^۲ - y^۲ - ۴x - ۶y - ۷}{\left((x-۱)^۲ + (y+۳)^۲\right)^{\frac{۵}{۲}}}$$

$$z_y = \frac{-y-۳}{\left((x-۱)^۲ + (y+۳)^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}} \longrightarrow z_{yy} = \frac{۲y^۲ - x^۲ + ۲x + ۱۲y - ۱۷}{\left((x-۱)^۲ + (y+۳)^۳\right)^{\frac{۵}{۲}}}$$

به وضوح دو عبارت محاسبه شده نهایی قرینه نیستند.

۸۰. برای قسمت **ج** جواب مثبت است: $z_{xy} = e^y + e^x \to z_x = e^y + ye^x$ و $z_y = xe^y -$ $z_{yx} = e^y + e^x \to e^x$. و برای قسمت **ه** جواب مثبت است، زیرا از $z_x = \frac{-۲y}{x^۳} + \frac{۱}{y}$ داریم $z_{xy} = \frac{-۲}{x^۳} - \frac{۱}{y^۲}$ و از $z_y = \frac{۱}{x^۲} - \frac{x}{y^۲}$ داریم $z_{yx} = \frac{-۲}{x^۳} - \frac{۱}{y^۲}$. برای قسمت **و** جواب مثبت است زیرا $z_x = e^x y$ داریم $z_{xy} = e^x$ و از $z_y = e^x$ داریم $z_{yx} = e^x$.

۸۱. برای مورد **د** داریم:

$$z_x = ۲x + ۲y \to z_{xx} = ۲ \to z_{xxx} = ۰ \to z_{xxxx} = z_{xxyy} = ۰$$
$$z_y = ۲x + ۳y^۲ \to z_{yy} = ۶y \to z_{yyy} = ۶ \to z_{yyyy} = ۰$$

۸۲. برای تابع f داریم: $f_۱ = \left(\frac{x_۱ x_۳^۲}{x_۲}\right)_۱ + \left(\ln(x_۲ x_۳)\right)_۱ = \frac{x_۳^۲}{x_۲} + ۰$ و بنابراین $f_{۱۲}$ برابر است با $\frac{-x_۳^۲}{x_۲^۲} =$. بعلاوه $f_۲ = \frac{-x_۱ x_۳^۲}{x_۲^۲} + \frac{x_۳}{x_۲ x_۳} = \frac{-x_۱ x_۳^۲}{x_۲^۲} + \frac{۱}{x_۲}$ وقتی $x_۳ \neq ۰$ و لذا
$$f_{۲۱} = \left(\frac{-x_۱ x_۳^۲}{x_۲^۲}\right)_۱ + \left(\frac{۱}{x_۲}\right)_۱ = \frac{-x_۳^۲}{x_۲^۲} + ۰$$
مشاهده می‌شود که $f_{۱۲} = f_{۲۱}$. به روال مشابه، دو تساوی دیگر تحقیق می‌شوند.

۸۴. به تساوی‌های $z_r = z_x \cdot x_r + z_y \cdot y_r$ و $z_s = z_x \cdot x_s + z_y \cdot y_s$ توجه کنید. این‌ها روابطی هستند که با توجه به قاعده زنجیره‌ای نوشته می‌شوند. حال در **الف** داریم:

$$z_x = ۵, z_y = ۳, x_r = ۲, y_r = ۱, x_s = ۳, y_s = -۲$$

برای قسمت **ج** داریم:

$$w_t = w_x \cdot x_t + w_y y_t + w_z \cdot z_t = (۲xyz + y^۲ z + z^۲ y)(e^t) +$$
$$(x^۲ z + ۲xyz + xz^۲)(te^t + e^t) + (x^۲ y + xy^۲ + ۲xyz)(۲te^r + t^۲ e^t)$$

برای قسمت **ه** داریم $y_r = y_x \cdot x_r$. برای **و**، به‌شکل مشابه **ه**، $y_t = y_x \cdot x_t$. برای قسمت **ز** داریم $z_t = z_x x_t + z_y y_t = ۲(۲t) + ۳(۵) = ۴t + ۱۵$. برای قسمت **ک**، از رابطه زیر کمک

بگیرید:

$$z_t = z_x \cdot x_t + z_y \cdot y_t + z_w \cdot w_t = z_x(۲t) + z_y\left(\frac{۲t}{\sqrt{t^۲+۱}}\right) + z_w(e^t)$$

۸۵. برای راحتی قرار می‌دهیم $z = u(x,y)$ (توجه داریم z یعنی ارتفاع است). حال با توجه به مفهوم منحنی تراز عمل می‌کنیم. برای مورد **الف**، به $z = ۲x + ۳y$ تعدادی عدد می‌دهیم و حاصل را رسم می‌کنیم.

$$z = ۱ \to ۲x + ۳y = ۱$$

حاصل یک خط است $(y = \frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۳}x)$ خطی که روی صفحه $z = ۱$ قرار دارد. به همین‌صورت مقادیر دیگر:

$$z = ۲ \to ۲x + ۳y = ۲ \to y = \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳}y \quad (\text{روی صفحه } z = ۲)$$

$$z = -۴ \to ۲x + ۳y = -۴ \to y = -۲ - \frac{۲}{۳}y \quad (\text{روی صفحه } z = ۴)$$

برای مورد **ب**، مانند مسئله قبل به z مقادیر دلخواه داده و رابطه حاصل را رسم می‌کنیم. هر رابطه روی همان صفحه z (خودش که عدد دادیم) قرار گرفته و رسم می‌شود (شکل ۱.۵ را در آخر ببینید).

$$z = ۱ \longrightarrow ۴x^۳y = ۱ \to y = \frac{۱}{۴x^۳} \quad (\text{روی صفحه } z = ۱)$$

$$z = ۲ \longrightarrow ۴x^۳y = ۲ \to y = \frac{۲}{۴x^۳} = \frac{۱}{۲x^۳} \quad (\text{روی صفحه } z = ۲)$$

$$z = +۴ \longrightarrow ۴x^۳y = ۴ \to y = \frac{۱}{x^۳} \quad (\text{روی صفحه } z = ۴)$$

دقت داریم به z مقادیری می‌دهیم که عبارت با معنی درست شود. مثلاً در نمونه **د**، **ه** و **ج** قطعاً نمی‌توان به z مقدار منفی داد (چرا؟). برای قسمت **ج** داریم:

$$z = ۱ \longrightarrow x^۲ + y^۲ = ۱ \quad \left(\text{دایره‌ای به شعاع ۱ به مرکز } (۰,۰,۱)\right)$$

$$z = ۲ \longrightarrow x^۲ + y^۲ = ۲ \quad \left(\text{دایره‌ای به شعاع } \sqrt{۲} \text{ به مرکز } (۰,۰,۲)\right)$$

$$z = ۳ \longrightarrow x^۲ + y^۲ = ۸ \quad \left(\text{دایره‌ای به شعاع } \sqrt{۳} \text{ به مرکز } (۰,۰,۳)\right)$$

شکل ۲.۵ را در آخر ببینید.

۸۶. فرض می‌کنیم $z = x^{۲}y + ۲y^{۳} - ۲e^{-x} - ۱۴$. برای یافتن شیب خط مماس بر z در امتداد محور x، z_x و z_y و را یافته و سپس مقدار $y' = \dfrac{-z_x}{z_y}$ را در نقطه $(۰, ۲, ۱۴)$ پیدا می‌کنیم.

$$z_x = ۲xy + ۲e^{-x}, z_y = x^{۲} + ۶y^{۲} \longrightarrow y' = \frac{-(۲xy + ۲e^{-x})}{x^{۲} + ۶y^{۲}}\bigg|_{(۰,۲,۱۴)} = \tfrac{-۱}{۱۲}$$

پس معادله خط مماس به‌صورت زیر است (شکل ۳.۵ را در آخر ببینید)

$$y - ۲ = \frac{-۱}{۱۲}(x - ۰)$$

۸۷. فرض می‌کنیم x و y نسبت به هم مستقل‌اند. از دو طرف بر حسب x مشتق نسبی انجام می‌دهیم توجه داریم $(z^{۳})_x = ۳z^{۲}z_x$. چون z تابعی از x و y است، پس

$$\underbrace{(z^{۳})_x}_{۳z^{۲}z_x} - \underbrace{(y^{۳})_x}_{۰} - \underbrace{(x^{۲}y)_x}_{۲xy} - \underbrace{(xy^{۲})_x}_{y^{۲}} - \underbrace{(y^{۳})_x}_{۰} = ۰$$

که نتیجه می‌دهد $۳z^{۲}z_x - ۲xy - y^{۲} = ۰$. و از آنجا

$$z_x = \frac{۲xy - y^{۲}}{۳z^{۲}} \to z_{xx} = \frac{(۲xy + y^{۲})_x(۳z^{۳}) - (۲xy + y^{۲})(۳z^{۲})_x}{(۳z^{۲})^{۲}}$$

و برابر است با $z_{xx} = \dfrac{(۲y)(۳z^{۲}) - (۲xy + y^{۲})(۶zz_x)}{(۳z^{۲})^{۲}}$. اکنون کافی است به جای z_x مقدار بدست آمده قبلی را جانشین کنیم.

۸۹. با توجه به نمونه‌های قبلی، در این مسئله هم می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} z_{۱} &= z_x \cdot x_{۱} + z_y \cdot y_r = \big(۳(۴x + ۳y)^{۲}(۴)\big)(۲rs) + \big(۳(۴x + ۳y)^{۲}(۳)\big)(۱) \\ &= \Big(۲۴\left(۴r^{۲}s + ۳(r - ۳s)\right)^{۲}(rs)\Big) + \Big(۹\left(۴r^{۲}s + ۳(r - ۲s)\right)^{۲}\Big) \end{aligned}$$

و لذا $z_r(۰, ۱) = ۹ \times ۳۶$.

۹۱. به‌ازای $r = ۰$، $t = -۱$ و $s = ۲$ مقدار x غیر از ۵ است $(x = ۲)$ و لذا می‌توانیم y را به فرم $y = x(x - ۵)^{-۱}$ بنویسیم:

$$y_r = y_x \cdot x_r = \Big((x - ۵)^{-۱} - x(x - ۵)\Big)(-۳s - ۲rt)$$

و بنابراین y_r به‌ازای مقادیر سه‌گانه فوق به‌سادگی بدست می‌آید.

۹۲. قاعده زنجیره‌ای مناسب را نوشته و استفاده کنید. **۹۴.** در این مسئله x و y را مستقل از هم

می‌گیریم. درباره **الف** داریم:

$$(۲x^۲)_x + (۳y^۲)_x + (۵z^۲)_x = (۵۰۰)_x \longrightarrow ۴x + ۰ + ۱۰zz_x = ۰$$

و لذا $z_x = \dfrac{-۴x}{۱۰z} = \dfrac{-۲x}{۵z}$. برای **ب** داریم:

$$(e^x)_y + (e^y)_y + (e^z)_y = (۱۰)_y \longrightarrow ۰ + e^y + e^z z_y = ۰$$

و لذا $z_y = -e^{y-z}$. درباره **و** داریم:

$$\left(\frac{x^۲}{a^۲}\right)_x - \left(\frac{y^۲}{b^۲}\right)_x - (۱)_y = ۰ \longrightarrow \frac{۲x}{a^۲} - \frac{۲yy_x}{b^۲} = ۰$$

و لذا $y_x = \dfrac{xb^۲}{ya^۲}$. البته با فرض گرفتن $F = \left(\dfrac{x^۲}{a^۲}\right) - \left(\dfrac{y^۲}{b^۲}\right) - ۱$ و محاسبه نسبت $\dfrac{-F_x}{F_y}$ هم می‌توانستیم y_x را بدست آورید. در اینجا چون y تابعی از x فرض می‌شود بهتر بود بجای نماد y_x از همان y' استفاده شود.

۹۵. تفسیری که از f_x می‌توانیم بدهیم این است که میزان آهنگ تغییر در تقاضای ماهیانه کالا با فرض ثابت بودن y (قیمت فروش) همان f_x است.

۹۶. به‌وضوح حکم مسئله $D_x|_{t=۳}$ را دنبال می‌کند. با کمک قاعده زنجیره‌ای داریم $D_t = D_x \cdot x_t + D_y \cdot y_t$ که برابر است با

$$\left(\frac{-۱۹}{x}x^{-\frac{۱}{۲}}\right)(۳۵۰) + \left(\frac{۹}{۱۰}(\frac{۱}{۱۰}y + ۱۶)^{\frac{۱}{۲}}\right)\left(۴۵۰(۳t)^{-\frac{۱}{۲}}\right)$$

حال کافی است مقدار $x(۳)$ و $y(۳)$ را همراه با $t = ۳$ در D_t قرار دهید.

۹۷. چون $f(x,y) = C$ پس $f_x + f_y y_x = f(x,y)_x = C_x = ۰$. نتیجه‌ای که تساوی فوق می‌دهد همان رابطه معروف و آشنای $y' = \dfrac{-f_x}{f_y}$ است. درباره‌ی منحنی داده شده داریم $f(x,y) = (x^۲ + xy + y^۲) = ۱$ که از آن $f_x = ۲x + y$ و $f_y = x + ۳y^۲$ بدست آمده و لذا شیب خط مماس $m = y_x(۱,۱)$ برابر است با $\dfrac{-۳}{۴} = \left.\dfrac{-(۲x+y)}{x+۳y^۲}\right|_{(۱,۱)}$.

۹۹. تابع $(TC)_x$ را بدست آورده و بررسی کنید. **۱۰۰.** تابع TC_x را یافته و به‌ازای $x = ۶$ و $y = ۴$ مقدار آن را بدست آورید. روند قبلی را برای TC_y تکرار کنید. **۱۰۲.** برای یافتن انواع نقاط

بحرانی و بررسی انواع آن‌ها از حل دستگاه $\{f_x = ۰, f_y = ۰\}$ شروع کرده و سپس علامت‌های $\Delta_۱ = f_{xx}$ و $\Delta_۲ = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ را در نقاط حاصل از حل دستگاه فوق چک می‌کنیم. توجه داریم برای چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x و y، $f_{yx} = f_{xy}$ و البته مشکلی از لحاظ وجود مشتق جزئی ندارند. برای بقیه انواع توابع تساوی اخیر ممکن است برقرار نبوده و بعلاوه رعایت ناحیه مناسب برای x و y هم لازم و ضروری است.

$$\begin{cases} z_x = -۲x \overset{\text{قرار می‌دهیم}}{=\!=\!=\!=} ۰ \\ z_y = -۲y \overset{\text{قرار می‌دهیم}}{=\!=\!=\!=} ۰ \end{cases} \Rightarrow (x = ۰, y = ۰) \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$$z_{xx} = -۲, z_{xy} = ۰, z_{yy} = -۲ \longrightarrow \begin{cases} \Delta_۱ = ۲ < ۰ \\ \Delta_۲ = (-۲)(-۲) - (۰)^۲ = ۴ > ۰ \end{cases}$$

لذا فقط $(۰, ۰)$ یک ماکزیمم نسبی z است. شکلی از z به‌صورت زیر است. نقطه نشان داده شده در شکل ۴.۵ مقدار ماکزیمم z را که $z\big|_{(۰,۰)} = ۹$ است را نشان می‌دهد.

۱۰۴. با توجه به نکات بیان شده:

$$\begin{cases} z_x = ۲x + ۶y + ۱۶ = ۰ \\ z_y = ۶x + ۲y = ۰ \end{cases} \Rightarrow (x = ۱, y = -۳) \ \text{نقطه بحرانی}$$

لذا نقطه $(۱, -۳)$ یک نقطه بحرانی از نوع زین اسبی را برای z بهمراه دارد (شکل ۵.۵ ببینید).

۱۰۵. با حل همزمان معادلات دیفرانسیلی $z_x = ۳x^۲ - ۶y = ۰$ و بعلاوه $z_y = -۳y^۲ - ۶x = ۰$ داریم $x = \frac{-y^۲}{۲}$ و $y = \frac{x^۲}{۲}$. جوابهایی که از حل این معادلات بدست می‌آیند عبارتند از دو نقطه

$$A(x = ۰, y = ۰), \quad B(x = -۲, y = ۲)$$

با محاسبه داریم:

$$z_{xx} = ۶x|_A = ۰, \quad z_{xx} = ۶x|_B = -۱۲, \quad z_{xy} = -۶$$

$$z_{yy} = -۶y|_A = ۰, \quad z_{yy} = -۶y|_B = ۱۲$$

لذا در نقطه $(۰, ۰)$ داریم:

$$\Delta_۱ = ۰, \Delta_۲ = -(-۶)^۲ = -۳۶ < ۰$$

و لذا مبدا یک نقطه زین اسبی z را می‌سازد و در نقطه دیگر:

$$\Delta_۱ = -۱۲ < ۰, \Delta_۲ = (-۱۲)(-۱۲) - (-۶)^۲ > ۰$$

و لذا نقطه بحرانی دوم یک $\max$ نسبی برای z می‌سازد (شکل نقاط و نوع آنها را در ۶.۵ ببینید).

۱۱۰. در این مسئله لازم است اولاً $(x,y) \neq (۰,۰)$ و هیچوقت x و y غیر هم علامت نمی‌شوند:

$$\begin{cases} z_x = \ln(xy) + (x-۴)(\frac{۱}{x}) = ۰ \Rightarrow \ln(xy) = ۰ \Rightarrow xy = ۱ \Rightarrow y = \dfrac{۱}{۴} \\ z_y = (x-۴)(\frac{۱}{y}) = ۰ \Rightarrow x = ۴ \end{cases}$$

و لذا $(۴, \frac{۱}{۴})$ نقطه بحرانی تابع است. چون مقادیر عددی $z_{xx} = \dfrac{۱}{x} + \dfrac{۴}{x^۲}$ و عبارتهای $z_{yy} = \dfrac{(۴-x)}{y^۲}$ و $z_{xy} = \dfrac{۱}{y}$ در این نقطه به‌ترتیب مثبت، صفر و مثبت است، لذا داریم $\Delta_۱ > ۰$ و $\Delta_۲ < ۰$ است. این نقطه هم یک نقطه زینی برای z می‌سازد.

۱۱۶. با ضرب معمولی داریم:

$$f(x,y) = x^۲y + xy^۲ - ۳x^۲ - ۹xy - ۳y^۲ + ۱۸x + ۱۸y - ۲۷$$

حل همزمان دو معادله $f_x = ۲xy + y^۲ - ۶x - ۹y + ۱۸ = ۰$ و $f_y = ۰$ نتیجه می‌دهد

$$(x-y)(x+y+۳) = ۰ \to x = y, \text{ یا } y + x = -۳$$

اگر $x = y$، از معادله اول داریم:

$$\underbrace{۲y^۲ + y^۲ - ۵y - ۹y + ۱۸ = ۰}_{۳y^۲ - ۱۵y + ۱۸ = ۰ \to y = ۳, y = ۲}$$

و لذا در اینجا دو نقطه بحرانی $A(۲,۲)$ و $B(۳,۳)$ خواهیم داشت. اگر $y + x = -۳$ آنگاه $x = -۳ - y$ و با جایگذاری در $f_x = ۰$ به معادله $۰y^۲ - ۹y + ۳۶ = ۰$ می‌رسیم که دارای جواب‌های $y = -۱۲, ۳$ است. مقادیر اخیر یکی منفی و دیگری x منفی نتیجه می دهد. چون مقادیر منفی مورد نظر مسئله نیست پس این مقادیر استفاده نیستند. اکنون f_{xx} و f_{xy} و f_{yy} را محاسبه و $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ را با توجه به نقاط بحرانی بدست می‌آوریم:

$$\Delta_۱ = f_{xx} = ۲y - ۶|_A = -۲ < ۰, \quad \Delta_۱ = f_{xx} = ۲y - ۶|_B = ۰$$

$$f_{xy} = ۲x + ۲y - ۹|_A = -۱, \quad f_{xy} = ۲x + ۲y - ۹|_B = ۳$$

$$f_{yy} = ۲x - ۶|_A = -۲, \quad f_{yy} = ۲x - ۶|_B = ۰$$

و لذا نتایج زیر بدست می‌آید:

$$\Delta_۱|_A = -۲ < ۰, \quad \Delta_۲|_A = (-۲)(-۲) - (-۱)^۲ > ۰$$

$$\Delta_۱|_B = ۰, \quad \Delta_۲|_B = ۰ - (-۳)^۲ < ۰$$

و بنابر این A ماکزیمم نسبی و B یک نقطه زینی را برای تابع می سازند.

۱۱۸. توابعی به‌شکل e^u که u یک چندجمله‌ای بر حسب x و y است،از هر مرتبه دارای مشتق نسبی هستند (ضمن اینکه می‌دانیم e^u تابعی همواره مثبت و ناصفر است). اولاً

$$f_x = -۲xe^{-x^۲-y^۲+۶y}$$
$$f_{xx} = \left(-۲e^{-x^۲-y^۲+۶y} + ۴x^۲e^{-x^۲-y^۲+۶y}\right)$$
$$f_{xy} = -۲xe^{-x^۲-y^۲+۶y} \times (-۲y+۶)$$

و دیگر اینکه

$$f_y = (-۲y+۶)e^{-x^۲-y^۲+۶y}$$
$$f_{yy} = \left(-۲e^{-x^۲-y^۲+۶y} + e^{-x^۲-y^۲+۶y}(-۲y+۶)^۲\right)$$

با حل دستگاه $\{f_x = ۰, f_y = ۰\}$ تنها نقطه بحرانی $(۰,۳)$ بدست می‌آید. مفسرهای $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ در این نقطه دارای مقادیر و علامت‌های زیر هستند:

$$\Delta_۱ = f_{xx}(۰,۳) = -۲ < ۰, \quad \Delta_۲ = ۴e^{۱۸} > ۰$$

و لذا $(۰,۳,e^۹)$ نقطه‌ای است که در آن max نسبی f اتفاق می‌افتد.

۱۲۰. شرایط را فراهم می‌کنیم تا $\Delta_۲ > ۰$ شود. توجه داریم تمام مشتقات نسبی از مرتبه دلخواه برای z وجود دارند و $z_x = ۲ax + y$، $z_y = x + ۲by$، $z_{xx} = ۲a$، $z_{xy} = ۱$ و $z_{yy} = ۲b$، و لذا $z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^۲ = ۴ab - ۱$. حال برای برقراری حکم مسئله لزوماً $۴ab - ۱ > ۰$.

۱۲۱. برای **الف**، و با حل دستگاه زیر، نقطه $(۱,۲)$ نقطه بحرانی تابع است:

$$\left\{۲x - ۸ + ۳y = ۰, -۶y + ۹ + ۳x = ۰\right\}$$

برای **ج**، و با حل دستگاه زیر، نقطه $(-۱,۱)$ نقطه بحرانی تابع است:

$$\Big\{y-۱=۰, x+۱=۰\Big\}$$

۱۲۲. بنابر آنچه می‌دانیم ابتدا تابع هدف $F=f+\lambda g$ را که در آن $g=۰$ قید داده شده به‌همراه تابع f است را بدست می‌آوریم: $F=f+\lambda g=xy+\lambda(x^۲+y^۲-۸)$. سپس دستگاه معادلات $\{F_x=۰, F_y=۰, g=۰\}$ را تشکیل داده و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y+۲\lambda x=۰ \longrightarrow \lambda=\dfrac{-y}{۲x} \quad (x\neq ۰)\\ x+۲\lambda y=۰ \longrightarrow x+۲\left(\dfrac{-y}{۲x}\right)y=۰ \rightarrow \dfrac{x^۲-y^۲}{x}=۰ \rightarrow x^۲-y^۲=۰ \end{cases}$$

از حل معادله آخر و شرط $g=۰$ داریم

$$\begin{cases} x^۲-y^۲=۰\\ x^۲+y^۲=۸ \end{cases} \longrightarrow ۲x^۲=۸ \rightarrow x=\pm۲ \rightarrow y=\pm۲$$

در کل چهار نقطه حاصل شده است.

$$A(۲,۲), \quad B(۲,-۲), \quad C(-۲,۲), \quad D(-۲,-۲)$$

حال مقدار تابع را باز روی هر چهار نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$f(A)=۴, \quad f(B)=-۴=f(C), \quad f(D)=۴$$

پس با توجه به شرط $x^۲+y^۲=۸$ در نقطه max و در نقطه min تابع را حاصل کرده‌اند.

۱۲۳. تابع هدف عبارت است از $F(x,y)=f+\lambda g=xy+\lambda(۴x+۲y-۱۲)$ و باید دستگاه زیر حل شود. با جایگذاری دو معادله آخر برحسب λ و معادله سوم دستگاه مقادیر $x=\frac{۳}{۲}$ و $y=۳$ بدست می‌آید.

$$\Big\{F_x=y+۴\lambda=۰, F_y=x+۲\lambda=۰, ۴x+۲y=۱۲\Big\}$$

که از دو معادله ابتدایی آن داریم: $\lambda=\dfrac{-y}{۴}$ و $\lambda=\dfrac{-x}{۲}$. از آنجا اکسترمم f تحت قید داده شده برابر است با $۳\times\dfrac{۳}{۲}=\dfrac{۹}{۲}$.

۱۲۶. تابع هدف عبارت است از

$$F=f+\lambda g=(x^۲-y^۲-۲y)+\lambda(x^۲+y^۲-۱)$$

و لذا دستگاه زیر حاصل می‌گردد:

$$\left\{F_x = ۲x + ۲\lambda x = ۰, F_y = -۲y - ۲ + ۲\lambda y = ۰, x^۲ + y^۲ = ۱\right\}$$

از معادله اول $x(۱+\lambda) = ۰$ و لذا یا $x = ۰$ و یا $\lambda = -۱$. از معادله دوم $y(۱-\lambda) = ۱$. اگر $x = ۰$ آنگاه معادله سوم مقادیر $y = \pm ۱$ را نتیجه می‌دهد یعنی دو نقطه $(۰,۱)$ و $(۰,-۱)$ به عنوان اکسترمم خواهیم داشت. اگر $\lambda = -۱$ از معادله دوم $y = -\frac{۱}{۲}$ و با کمک معادله سوم داریم: $x^۲ + (\frac{-۱}{۲})^۲ = ۱$ که نتیجه می‌دهد $x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. در این‌صورت دو نقطه دیگر $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{-۱}{۲})$ و $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{-۱}{۲})$ موجود می‌شوند. حال مقدار f را به ازای این چهار نقطه محاسبه می‌کنیم

$$f(۰,۱) = -۳, \quad f(۰,-۱) = ۱, \quad f(\sqrt{۳}/۲, -۱/۲) = \frac{۳}{۲} = f(-\sqrt{۳}/۲, -۱/۲)$$

و بنابراین دو نقطه آخر مقادیر max و نقطه $(۰,۱)$، min تابع را می‌دهند.

۱۲۸. تابع هدف عبارت است از $F = f + \lambda g = e^{xy} + \lambda(x^۲ + y^۲ - ۴)$ حال دستگاه زیر را حل می‌کنیم

$$\left\{F_x = ye^{xy} + ۲\lambda x = ۰, F_y = xe^{xy} + ۲\lambda y = ۰, x^۲ + y^۲ = ۴\right\}$$

که معادلات اول و دوم نتیجه می‌دهند $\lambda = \frac{-ye^{xy}}{۲x}$ و $\lambda = \frac{-xe^{xy}}{۲y}$. با حل این نتایج در معادله سوم $x = \pm\sqrt{۲}$ بدست می‌آید. در اینجا $y = \pm\sqrt{۲}$ و لذا چهار نقطه

$$A(\sqrt{۲}, \sqrt{۲}), \quad B(\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}), \quad C(-\sqrt{۲}, \sqrt{۲})$$

و $D(-\sqrt{۲}, -\sqrt{۲})$ به عنوان نقاط اکسترمم ساده حاصل می‌شوند. مقدار تابع به ازای نقاط عبارت است از

$$f(B) = e^{-۲} = f(C), \quad f(A) = e^{۲} = f(D)$$

که نشان می‌دهد B و C مقادیر min و A و D و max، f را می‌سازند.

۱۳۱. تابع هدف را می‌سازیم:

$$F = f + \lambda g = (x-۲)^۲ + y^۲ + \lambda(y - \sqrt{x})$$

با توجه به روش، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} F_x = ۲(x-۲) - \dfrac{\lambda}{۲\sqrt{x}} = ۰ \longrightarrow \lambda = ۴x^{۳/۲} - ۸\sqrt{x} \\ F_y = ۲y + \lambda = ۰ \longrightarrow y = \dfrac{-\lambda}{۲} = ۴\sqrt{x} - ۲x^{۳/۲} \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

با حل حاصل از معادله دوم و معادله سوم داریم:

$$۴\sqrt{x} - ۲x^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt{x} \longrightarrow ۳\sqrt{x} = ۲x\sqrt{x}\ (x > ۰) \to x = ۳/۲ \to y = \sqrt{۳/۲}$$

لذا نقطه $(\frac{۳}{۲}, \sqrt{\frac{۳}{۲}})$ یک اکسترمم برای f با توجه به قید ایجاد می‌کنید.

۱۳۴. برای **الف**: بنابه تعریف تابع درآمد کل TR به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\mathrm{TR}(x,y) = xP_۱ + yP_۲ = ۹x + ۸y$$

حال تابع سود کل $P(x,y) = TR - TC$ را تشکیل داده و اکسترمم می‌کنیم:

$$P = (۴x + ۸y) - (x^۲ - ۲xy + ۳y^۲ + ۲) = -x^۲ - ۳y^۲ + ۲xy + ۴x + ۸y - ۲$$

حال داریم:

$$\Big\{P_x = -۲x + ۴y + ۴ = ۰, P_y = -۶y + ۲x + ۸ = ۰\Big\}$$

که با حل دستگاه نقطه بحرانی $(x = ۵, y = ۳)$ را بدست می‌دهد. برای اینکه ثابت شود مقادیر بدست آمده فوق، سود را ماکزیمم می‌کند، $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ را تشکیل داده و در نقطه بحرانی تغییر علامت $\Delta_۱ < ۰$ و $\Delta_۲ > ۰$ را می‌سنجیم:

$$\Delta_۱ = P_{xx} = -۲ < ۰$$
$$\Delta_۲ = P_{xx} \times P_{yy} - (P_{xy})^۲ = (-۲)(-۶) - (۲)^۲ = ۱۲ - ۴ = ۸ > ۰$$

۱۳۵. روش لاگرانژ را برای تابع هدف $F = P(x,y) + \lambda g(x,y)$ که در آن $x + y = ۳۰.۰۰۰$ قید g است، انجام دهید.

۱۳۶. قرار می‌دهیم $F = P + \lambda(x + y - ۷۰۰)$ و با حل دستگاه زیر، مقادیر اکسترمم‌ساز P

بدست می‌آیند:

$$\left\{F_x=-۰.۰۴x-۰.۰۳y+(۱۵+\lambda)=۰, F_y=-۰.۱y-۰.۰۳x+(۴۰+\lambda)=۰\right\}$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی اول و دوم مقادیر x و y بر حسب λ به‌شکل

$$x=\frac{۳۰۰۰}{۳۱}+\frac{۷۰۰}{۳۱}\lambda, \quad y=\frac{۱۱۵۰۰}{۳۱}+\frac{۱۰۰}{۳۱}\lambda$$

محاسبه می‌شوند. با جایگذاری این مقادیر در معادله $x+۷=۷۰۰$ مقدار $\lambda=۹$ بدست می‌آید لذا $(x=۳۰۰۰, y=۴۰۰)$ تعداد کالاهایی است که با قید داده شده سود را ماکزیمم می‌کند.

۱۳۷. مقدار ماکزیمم تابع تولید CES تقریباً ۱۳۹۸ واحد است.

۱۳۸. مقدار ماکزیمم تابع تولید CES تقریباً ۱۳۶۴ واحد است.

۱۳۹. مقدار ماکزیمم تابع f با قید $x+y=۵$ عدد $\ln(۵)$ است.

۱۴۰. تابع سود کل $P=xd_I+yd_{II}-xy$ را تشکیل داده و بدنبال مقادیر اکسترمم‌ساز بگردید. (این مقادیر $x=۰$ و $y=۱۰$ هستند).

۱۴۱. ماکزیمم تابع $W(x,y,z)$ مقدار ۲۶ است. توجه کنید در حالت ۳ متغیره می‌بایست بعد از تشکیل تابع هدف $F(x,y,z)$ دستگاه معادلات زیر حل شود:

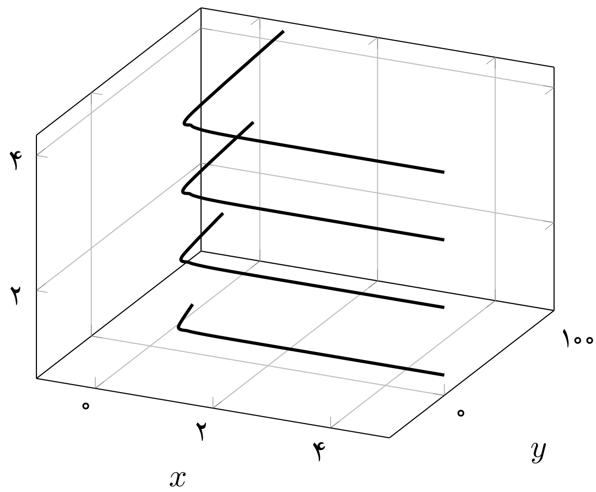
$$\left\{F_x=۰, F_y=۰, F_z=۰, g=۰\right\}$$

که در آن $g=x^۲+y^۲+z^۲-۱=۰$ است.

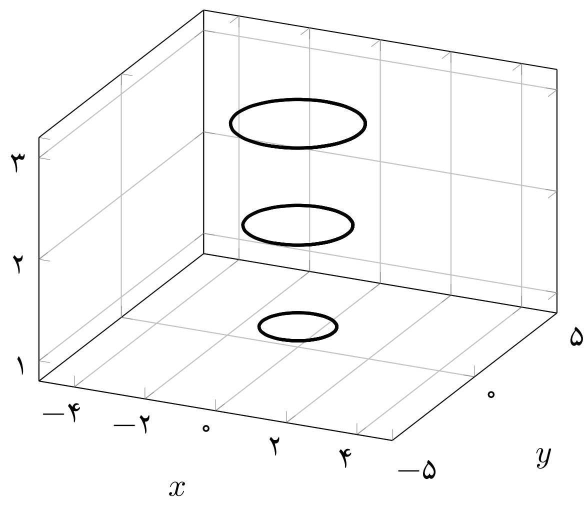
۱۴۲. تابع هزینه مشترک دو کالای مورد نظر $TC(x,y)=(x^۲+۱۲۰۰)+(۳y^۲+۸۰۰)$ و قید

$$g(x,y)=x+y-۲۰۰=۰$$

را در نظر گرفته، تابع هدف مناسب ساخته و به دنبال اکسترمم بگردید. مقدار هزینه‌ی مینیمم عدد ۲۳۰۰ واحد است.



شکل ۲.۵: چند سطح تراز (مسئله ۸۵-الف)



شکل ۲.۵: چند سطح تراز (مسئله ۸۵-ب)