بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

دانشکده‌ی علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی گرایش جبر

عنوان:

مدول‌های اتمی

نگارش

محمد ماسچی زاده

استاد راهنمای اول	استاد راهنمای دوم	استاد مشاور
دکتر احمد حلالی	دکتر علیرضا آل‌هفت‌تن	دکتر نسرین شیرعلی

شهریور ۹۹

تاییدیه صحت و اصالت نتایج

بسمه تعالی

اینجانب **محمد ماسچی زاده** به شماره دانشجویی ۹۷۱۵۵۱۱۱۴ دانشجوي رشته **ریاضی** مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه‌ی نتایج این پایان‌نامه/رساله حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه‌برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر نموده‌ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقي و حقوقي و مراجع ذی‌صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده‌ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ‌گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی : محمد ماسچی زاده

امضا و تاریخ :

تقدیم به:

سردار دل‌ها، سپهبد شهید حاج قاسم سلیمانی

و

فرمانده بسیجی، کارمند دانشگاه صنعتی جندی شاپور

شهید مدافع حرم سید مجتبی ابوالقاسمی

به نام خدا

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حسابگران از شمارش نعمت‌های او ناتوان و تلاشگران از ادای حق او درمانده‌اند. خدایی که افکار ژرف اندیش ذات او را درک نمی‌کنند و دست غوّاصان دریای علوم به او نخواهد رسید. پروردگاری که برای صفات او حد و مرزی وجود ندارد و تعریف کاملی نمی‌توان یافت و برای خدا وقتی معیّن و سر آمدی مشخص نمی‌توان تعیین کرد.[۱]

از اساتید با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر احمد حلالی، جناب آقای دکتر علیرضا آل هفت‌تن و سرکار خانم دکتر نسرین شیرعلی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی و مشاوره این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر و قدردانی را دارم. هم‌چنین بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ همه‌ی اساتید گروه ریاضی که در این شش سال افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام سپاس‌گزاری کنم.

در پایان از پدر و مادرم به خاطر تمام مهر و محبت و زحمات بی‌انتهایشان قدردانی می‌کنم و بر دستانشان بوسه می‌زنم.

[۱] قسمتی از خطبه‌ی اول نهج البلاغه

چکیده

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. بعد نوتری M (دوگانِ بعد کرول) را با نماد $n-dim(M)$ نمایش می‌دهیم. R–مدول M را α–اتمی (α یک عدد ترتیبی) نامیم هرگاه $n-dim(M) = \alpha$ و برای هر زیرمدول سره مانند N از M داشته باشیم $n-dim(N) \prec n-dim(M)$. هم‌چنین M را اتمی نامیم هرگاه عدد ترتیبی α وجود داشته باشد به‌طوری که M یک مدول α–اتمی باشد. در این پژوهش، مدول‌های α–اتمی را به طور گسترده مورد بررسی قرار داده‌ایم و مدول‌های آرتینیِ اتمی روی حلقه‌های تعویض‌پذیر را دسته بندی نموده‌ایم.

کلید واژه : بعد نوتری، مدول اتمی، زنجیر اتمی، رادیکال α–اتمی

فهرست مطالب

فهرست نمادها

نماد	تعریف	اولین صفحه
$\subseteq$	زیرمجموعه	۵
$\subsetneq$	زیرمجموعه‌ی سره	۴۸
$\preceq$ و $\prec$	ترتیب اعداد ترتیبی	۹
$\leq$	زیرمدول	۱۴
$\lneq$	زیرمدول سره	۶۸
$\leq_e$	زیرمدول اساسی	۲۸
$\ll$	زیرمدول کوچک	۲۹
$\bigoplus$	جمع مستقیم مدول‌ها	۳۴
$\ker$	هسته‌ی یک همریختی	۱۸
Im	برد یک همریختی	۲۹
$\mathrm{Hom}_R(M,N)$	گروه R-همریختی‌های M به N	۳۷
$\mathrm{End}_R(M)$	حلقه درون‌ریختی‌های M	۴۴
$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعه ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R	۱۲
$\mathrm{Max}(M)$	مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R	۱۲
$U(R)$	مجموعه‌ی اعضای وارون پذیر حلقه‌ی R	۱۱
$\mathrm{Ann}_R(M)$	پوچ‌ساز مدول M در حلقه‌ی R	۲۱
$J(R)$	رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R	۱۳
$\mathrm{Rad}(M)$	رادیکال مدول M	۴۶

اولین صفحه	تعریف	نماد
۱۰۰	رادیکال α-اتمی مدول M	$\mathrm{Rad}_\alpha(M)$
۴۶	ساکل مدول M	$\mathrm{Soc}(M)$
۱۵	مشبکه‌ی زیرمدول‌های M	$\mathscr{L}(M)$
۵۰	طول مدول M	$l(M)$
۲۲	حلقه‌ی کسرها	$S^{-1}R$
۲۴	مدول کسرهای M نسبت به S	$S^{-1}M$
۱۴	حلقه‌ی تعویض‌پذیرِ موضعی R با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$	$(R, \mathfrak{m})$
۲۳	موضعی سازی حلقه‌ی R در ایده‌آل اول P	R_P
۲۶	مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به مدول M	$\mathrm{Ass}(M)$
۲۵	محمل مدول M	$\mathrm{Supp}(M)$
۵۴	بعد یکنواخت (گلدی) مدول M	$udim(M)$
۶۴	بعد پوچ مدول M	$hdim(M)$
۶۶	بعد کرول مدول M	$k-dim(M)$
۷۸	بعد نوتری مدول M	$n-dim(M)$
۱۰۷	زیرمدول $\mathfrak{m}$-تاب‌دار	$T_\mathfrak{m}(A)$

مقدّمه

مفهوم بُعد کرول برای یک R-مدول، هم‌اکنون یک ابزار مهم و اساسی در نظریه‌ی حلقه‌های نوتری راست می‌باشد (کتاب‌های [۱۲]، [۱۷] و [۲۹] را ببینید). این مفهوم برای نخستین بار توسط رنچلر[1] و گابریل[2] در [۳۲] تعریف شد. کراوز[3] در [۲۴] با استفاده از استقرای ترامتناهی بعد کرول را روی اعداد ترتیبی معرفی و بررسی کرد و گاردن[4] و رابسون[5] در [۱۳] با ارائه همین تعریف از بعد کرول، به‌طور اصولی و گسترده به بررسی آن پرداختند.

دوگان این بعد که درواقع میزان انحراف یک R-مدول از نوتری بودن آن می‌باشد، برای اولین بار توسط لمونیه[6] در [۲۷] با نام هم‌انحراف تعریف و مطالعه شد. بعدها چمبلس[7] در [۸] مفهوم دوگان بعد کرول را به‌طور اصولی مورد بررسی قرار داد و آن را N-بعد نامید. کرم‌زاده در رساله‌ی دکتری خود [۱۸] این مفهوم را به طور گسترده مورد بررسی قرار داد و آن را بُعد نوتری نامید. رابرت[8] مجددا این مفهوم را بعد کرول نامید و در [۳۳] ثابت کرد که این بعد برای مدول‌های آرتینی روی حلقه‌های شبه‌موضعی، متناهی است.

[1] Rentschler

[2] Gabriel

[3] Krause

[4] Gordon

[5] Robson

[6] Lemonnier

[7] Chambless

[8] Roberts

به‌علاوه، کربی[1] پس از رابرت این بعد را بعد نوتری نام‌گذاری کرد و در [۲۳] نشان داد، نتیجه‌ی رابرت برای مدول‌های آرتینی روی حلقه‌های تعویض‌پذیر نیز برقرار می‌باشد. بعد نوتری و بعد کرول یک مدول با هم ارتباط دارند، لمونیه در [۲۷] نشان داده بود که هر مدول دارای بعد کرول است اگر وتنها اگر دارای بعد نوتری باشد، برای اثبات متفاوت این گزاره، [۱۸] را ببینید. اما بعد نوتری در سالیان بعد نیز نیز توجه برخی از پژوهش‌گران را به خود جلب کرده است، برای نمونه [۵]، [۶]، [۱۹]، [۲۱] و [۲۳] را ببینید.

مفهوم مدول اتمی که در [۲۳] برای مطالعه مدول‌های آرتینی ارائه شده بود، توسط لمونیه در [۲۷] تحت عنوان α-کونوتیبل[2] معرفی شد، هم‌چنین در [۵] و [۸]، به ترتیب با نام‌های دوگان مدول بحرانی و مدول N-بحرانی مورد مطالعه قرار گرفته است. مدول‌های اتمی درواقع دوگان مدول‌های بحرانی می‌باشند و ثابت شده که مدول‌های اتمی در مطالعه مدول‌های آرتینی روی حلقه‌های تعویض‌پذیر مفید هستند، به مقاله‌های [۵]، [۸]، [۱۴]، [۱۶]، [۲۳] و [۳۹] مراجعه کنید. مفهوم مدول تقریبا متناهی مولد که در [۳۹] معرفی شد و در همین مقاله و [۱۴] کاوش شد، در واقع همان مدول ۱-اتمی است.

در فصل اول این پایان‌نامه ابتدا مقدماتی از مجموعه‌های مرتب، مشبکه و اعداد ترتیبی را بیان می‌کنیم، سپس به طور گذرا برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی و مورد نیاز حلقه‌ها و مدول‌ها را بیان خواهیم کرد و در بخش آخر حلقه‌ی کسرها و تعمیم آن مدول کسرها را تعریف و مفاهیمی مرتبط با آن‌ها را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم ابتدا زیرمدول‌های اساسی و کوچک که دوگان هم می‌باشند را بیان می‌کنیم چون این زیرمدول‌ها نقش مهمی را در بعدهای یکنواخت و پوچ ایفا می‌کنند، مفاهیم مرتبط و وابسته به آن‌ها از جمله خانواده‌های مستقل و هم‌مستقل، زیرمدول‌های مکمل و متمم، هم‌چنین زیرمدول‌های بسته و هم‌بسته را نیز بیان و بررسی خواهیم کرد. در بخش بعدی مدول‌های ساده و نیم‌ساده و ارتباط آن‌ها با مفاهیم قبل را بیان می‌کنیم. در بخش آخر نیز مفاهیم سری ترکیبی و طول یک مدول، مدول‌های تجزیه ناپذیر و تجزیه مدول‌ها را بررسی می‌کنیم.

[1] Kirby

[2] α-conotabel

در فصل سوم پایان نامه، چهار بعد مهم از مدول‌ها را بررسی می‌کنیم. در بخش اول پس از مفهوم مدول یکنواخت، بعد یکنواخت (گلدی) مدول‌ها را بیان می‌کنیم و سپس گزاره‌هایی در این زمینه نشان می‌دهیم. در بخش بعد پس از تعریف مدول پوچ، یکی از دوگان‌های ارائه شده برای بعد یکنواخت را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در دو بخش آخر این فصل نیز ابتدا بعد کرول یک مدول، مدول‌های بحرانی و مفاهیم وابسته به آن‌ها مطالعه می‌شوند و سپس بعد نوتری که دوگان بعد کرول است و ابزار ما برای تعریف مدول‌های اتمی است بررسی خواهد شد.

سرانجام در فصل چهارم ابتدا تعریف مدول α-اتمی و مدول تقریبا متناهی مولد را می‌آوریم و نشان می‌دهیم که مدول‌های ۱-اتمی دقیقاً همان مدول‌های تقریبا متناهی مولد هستند. در بخش بعد خواص مهم مدول‌های اتمی را بررسی می‌کنیم و بعضی از خواص مدول‌های تقریباً متناهی مولد که در [۳۹] بیان شده‌اند را به هر مدول اتمی تعمیم می‌دهیم. در این بخش نشان می‌دهیم هر مدول اتمی یک مدول پوچ است و ضمن بررسی ارتباط مدول‌های به‌روریخت و هم-فشرده با مدول‌های اتمی، مفاهیم مهم رادیکال α-اتمی و زنجیر اتمی و کاربرد آن‌ها را بیان می‌کنیم. برای مثال ثابت شده است که یک مدول آرتینی است اگر وتنها اگر هر زیرمدول آن دارای یک زنجیر اتمی باشد. در بخش آخر نیز مدول‌های اتمی روی حلقه‌های تعویض‌پذیر را بررسی می‌کنیم. در قضیه‌ی اصلی این بخش، مدول‌های اتمی که آرتینی هستند را به طور دقیق مشخص می‌کنیم و نتایج جالبی را به‌دست می‌آوریم. برای مثال، اگر A یک مدول با بعد نوتری یک باشد، آنگاه A دارای زیرمدولی سره مانند B است به طوری که $\frac{A}{B}$ آرتینی است یا یکریخت با خارج قسمتی از یک میدان است. در پایان حلقه‌های تعویض‌پذیری که مدول‌های n-اتمیِ آرتینی را می‌پذیرند، مشخص می‌کنیم. مطالب این فصل بر اساس مقاله‌ی [۲۰] نگاشته شده‌اند.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مشبکه و اعداد ترتیبی

به دلیل مقدماتی بودن بحث، تعاریف و قضایای مهم و پیشرفته‌تر که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم را به صورت خلاصه بیان می‌کنیم و اثبات همه‌ی گزاره‌ها را ارجاع خواهیم داد.

۱.۱.۱ تعریف. رابطه‌ی $\leqslant$ در مجموعه‌ی A را یک **ترتیب جزئی**[1] نامیم، هرگاه

۱. برای هر $a \in A$، $a \leqslant a$.

۲. برای هر $a, b \in A$، $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$ نتیجه دهد $a = b$.

۳. برای هر $a, b, c \in A$، $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ نتیجه دهد $a \leqslant c$.

مجموعه‌ی A که ترتیب جزئی $\leqslant$ روی آن تعریف شده باشد را یک **مجموعه‌ی مرتب جزئی** می‌نامیم.

[1] partial ordered

۲.۱.۱ تعریف. ترتیب جزئی $\leqslant$ روی مجموعه‌ی A را **ترتیب کلی** یا **ترتیب خطی** می‌نامیم، اگر هر دو عضو از A قابل مقایسه باشند، یعنی برای هر دو عضو a و b از A داشته باشیم $b \leq a$ یا $a \leq b$. در این صورت $(A, \leqslant)$ یک **مجموعه‌ی مرتب کلی** نامیده می‌شود. هم‌چنین هر زیرمجموعه‌ی مرتب کلی از یک مجموعه‌ی مرتب جزئی، **زنجیر** نام دارد.

۳.۱.۱ تذکر. روابط ترتیب جزئی را می‌توان با استفاده از نمودار نیز نشان داد، به این منظور برای نشان دادن $a \leqslant b$ از نماد $a \longrightarrow b$ استفاده می‌شود. هم‌چنین اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$، آن‌گاه نمودار به صورت $a \longrightarrow b \longrightarrow c$ خواهد شد. در نمودارهایی که برای روابط ترتیبی رسم می‌شود خاصیت بازتابی رابطه نمایش داده نمی‌شود. برای نمونه‌ای از این نمودارها مثال ۱۱.۱.۱ را ببینید.

۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(A, \leqslant)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد. در این صورت $a \in A$ را

- **بزرگ‌ترین عضو** A می‌نامیم، اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \leqslant a$.
- **کوچک‌ترین عضو** A می‌نامیم، اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $a \leqslant x$.
- **عضو ماکسیمال** A می‌نامیم، هرگاه $a \leqslant x$ نتیجه دهد $a = x$.
- **عضو مینیمال** A می‌نامیم، هرگاه $x \leqslant a$ نتیجه دهد $a = x$.

۵.۱.۱ تذکر. طبق تعریف قبل، واضح است که بزرگ‌ترین عضو و کوچک‌ترین عضو یک مجموعه به ترتیب اعضای ماکسیمال و مینیمال همان مجموعه می‌باشند ولی عکس این مطلب صحیح نیست.

۶.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(A, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد و $X \subseteq A$. عنصر $a \in A$ را در صورت وجود، یک **کران بالای**[1] (**کران پایین**[2]) X در A می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم $x \leqslant a$ $(a \leqslant x)$.

[1] upper bound

[2] lower bound

قبل از بیان مفهوم مشبکه، لم زُرن[1] (در واقع اصل موضوع زرن) را بیان می‌کنیم که کاربرد بسیار زیادی دارد.

۷.۱.۱ لم (لم زرن). فرض کنیم $(A, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. اگر هر زنجیر در A دارای کران بالا (کران پایین) در A باشد، آن‌گاه A دارای عضو ماکسیمال (مینیمال) است.

۸.۱.۱ تذکر. فرض کنیم $(A, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد و $X \subseteq A$. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین کران بالای X را در صورت وجود به ترتیب با $\sup(X)$ و $\inf(X)$ نمایش می‌دهیم.

۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(L, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. اگر برای هر دو عنصر دلخواه a و b از L، اعضای $\sup\{a, b\}$ و $\inf\{a, b\}$ در L وجود داشته باشند، آن‌گاه L را یک **مشبکه**[2] می‌نامیم. هم‌چنین L را یک **مشبکه‌ی کامل** نامیم اگر برای هر $X \subseteq L$، $\sup(X)$ و $\inf(X)$ در L وجود داشته باشند.

۱۰.۱.۱ نمادگذاری. فرض کنیم $(L, \leqslant)$ یک مشبکه باشد. $\sup\{a, b\}$ را با نماد $a \vee b$ و $\inf\{a, b\}$ را با نماد $a \wedge b$ نمایش می‌دهیم.

۱۱.۱.۱ مثال.

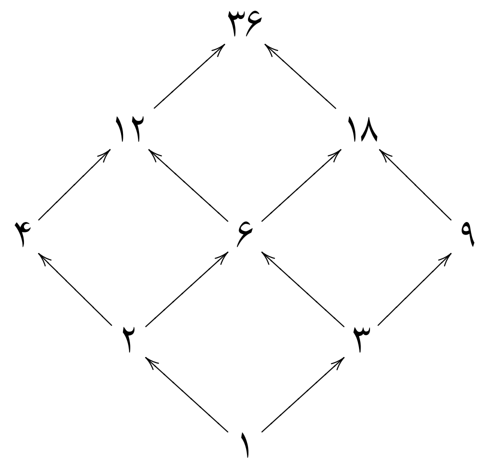
۱. واضح است که هر مجموعه‌ی مرتب کلی یک مشبکه است. بنابراین مجموعه‌ی اعداد حقیقی، گویا، صحیح و طبیعی به همراه ترتیب معمولی مشبکه هستند ولی هیچ‌کدام مشبکه‌ی کامل نیستند.

۲. فرض کنیم A مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های ۳۶ باشد. در این صورت واضح است که A با رابطه‌ی

[1] Zorn

[2] lattice

عاد کردن یک مجموعه‌ی مرتب جزئی می‌باشد. نمودار این رابطه به صورت زیر است:



به وضوح برای هر دو عضو a و b از A داریم:

$$a \vee b = \text{ک.م.م}[a,b] \in A \quad , \quad a \wedge b = \text{ب.م.م}(a,b) \in A$$

بنابراین $(A, |)$ یک مشبکه است. هم‌چنین طبق نمودار رابطه مشخص است که A یک مشبکه‌ی کامل می‌باشد.

۱۲.۱.۱ تعریف. فرض کنیم L یک مشبکه باشد. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو L را در صورت وجود، به ترتیب با ۰ و ۱ نشان می‌دهیم، هم‌چنین L را **کران‌دار**[1] می‌نامیم، هرگاه دارای ۰ و ۱ باشد. در این صورت واضح است که هر مشبکه‌ی کامل، کران‌دار می‌باشد.

۱۳.۱.۱ تعریف. مشبکه‌ی کران‌دار L را **مدولار**[2] نامیم، هرگاه برای هر $a, b, c \in L$ که $c \leq b$، داشته باشیم $c \vee (a \wedge b) = (c \vee a) \wedge b$.

[1] bounded

[2] modular

مثال مهمی از مشبکه‌های مدولار که در این پایان نامه مورد توجه است، مجموعه‌ی زیرمدول‌های یک R-مدول می‌باشد که در تذکر ۱۴.۲.۱ بیان و بررسی شده است.

۱۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ دو مجموعه مرتب جزئی باشند. تابع $\varphi : A \to B$ را یک **همریختی ترتیبی**[1] نامیم، هرگاه برای هر دو عضو a_1 و a_2 در A که $a_1 \leqslant_A a_2$ داشته باشیم $\varphi(a_1) \leqslant_B \varphi(a_2)$. هرگاه این تابع دوسویی باشد، آن را **یکریختی ترتیبی** می‌نامیم و می‌گوییم $(A, \leqslant_A)$ با $(B, \leqslant_B)$ یکریخت ترتیبی است و می‌نویسیم $(A, \leqslant_A) \approx (B, \leqslant_B)$. درصورتی که رابطه‌ها معلوم باشند به طور خلاصه می‌نویسیم $A \approx B$.

۱۵.۱.۱ نمادگذاری. اگر $(A, \leqslant)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $b \in A$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌هایی به صورت $\{a \in A \mid a < b\}$ را با نماد $A^{<b}$ نمایش می‌دهیم.

۱۶.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(A, \leqslant)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $A \subseteq X$ باشد. اگر $x \leqslant a$ و $a \in A$ نتیجه دهد $x \in A$، آن‌گاه A را یک **قطعه**[2] از X می‌نامیم.

۱۷.۱.۱ مثال. $A^{<b}$ و $\emptyset$ قطعه‌هایی از مجموعه مرتب جزئی A می‌باشند.

۱۸.۱.۱ تعریف. مجموعه مرتب کلی X را یک مجموعه **خوش ترتیب**[3] می‌نامیم، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از A دارای کوچک‌ترین عضو باشد.

۱۹.۱.۱ تعریف. برای هر مجموعه‌ی خوش ترتیب $(A, \leqslant)$ یک **عدد ترتیبی**[4] (یا **اوردینال**) که آن را با $\operatorname{ord}(A, \leqslant)$ نمایش می‌دهیم و با خواص زیر معین می‌گردد، ارائه می‌دهیم.

۱. برای هر مجموعه‌ی خوش ترتیب، یک عدد ترتیبی وجود دارد.

[1] ordinal homomorphism

[2] segment

[3] well ordered

[4] ordinal number

۲. متناظر هر عدد ترتیبی، یک مجموعه خوش ترتیب با آن عدد ترتیبی وجود دارد.

۳. $\mathrm{ord}(A, \leqslant) = k$ اگر وتنها اگر $A \approx k$؛ برای هر $k \in W$ (منظور از W مجموعه‌ی اعداد حسابی است).

۴. $\mathrm{ord}(A, \leqslant_A) = \mathrm{ord}(B, \leqslant_B)$ اگر وتنها اگر $A \approx B$.

۲۰.۱.۱ تذکر. هرگاه ترتیب روی مجموعه‌ی A مشخص باشد و امکان اختلاط معنا نباشد، عدد ترتیبی یک مجموعه با رابطه‌ی مورد نظر را به طور خلاصه با $\mathrm{ord}(A)$ نمایش می‌دهیم.

۲۱.۱.۱ تعریف. متناسب با اعداد ترتیبی α و β به ترتیب مجموعه‌های خوش ترتیب $(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ وجود دارند. اگر B با یک قطعه از A یکریخت ترتیبی باشد، می‌نویسیم $\alpha \preccurlyeq \beta$ و درصورتی که $\alpha \neq \beta$، آن‌گاه می‌نویسیم $\alpha \prec \beta$.

۲۲.۱.۱ قضیه. فرض کنیم α و β دو عدد ترتیبی باشند؛ هرگاه $\alpha \preccurlyeq \beta$ و $\beta \preccurlyeq \alpha$، آن‌گاه $\alpha = \beta$.

اثبات. به قضیه‌ی ۵.۲.۷ از [۱] مراجعه شود. □

۲۳.۱.۱ قضیه. هر دو عدد ترتیبی قابل مقایسه هستند. یا به عبارت دیگر، هرگاه α و β دو عدد ترتیبی باشند، آن‌گاه $\alpha \preccurlyeq \beta$ یا $\beta \preccurlyeq \alpha$.

اثبات. به قضیه‌ی ۹.۲.۷ از [۱] مراجعه شود. □

۲۴.۱.۱ تعریف. عدد ترتیبی α را اوردینال **تالی**[1] می‌نامند، هرگاه عدد ترتیبی β موجود باشد به طوری که $\alpha = \beta + 1$. در غیر این صورت α را اوردینال **حدی**[2] می‌نامند.

[1] successor

[2] limit

اکنون قضیه‌ای بیان می‌کنیم که در واقع تعمیم اصل استقرا به اعداد ترتیبی است و مبنای تعریف دو بُعد مهم مدول‌ها (بخش‌های ۳.۳ و ۴.۳) می‌باشد.

۲۵.۱.۱ قضیه (اصل **استقرای ترامتناهی**[1]). فرض کنیم $P(x)$ یک گزاره‌نما باشد و برای هر عدد ترتیبی α، گزاره‌ی زیر درست باشد:

«اگر $P(\beta)$ برای هر عدد ترتیبی $\beta \prec \alpha$ برقرار باشد، آن‌گاه $P(\alpha)$ برقرار است.»

در این صورت $P(\alpha)$ برای هر عدد ترتیبی α برقرار است.

اثبات. به قضیه‌ی ۴.۱ از فصل ششم [۱۵] مراجعه شود. □

قضیه‌ی زیر نیز در نظریه اعداد ترتیبی بسیار مهم است و در اثبات بعضی از قضایای فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲۶.۱.۱ قضیه.

۱. هر مجموعه‌ی ناتهی از اعداد ترتیبی نسبت به رابطه‌ی $\preceq$ دارای کوچک‌ترین عضو است. در نتیجه هر مجموعه‌ی ناتهی از اوردینال‌ها خوش ترتیب است.

۲. برای هر مجموعه‌ی دلخواه X از اعداد ترتیبی، عدد ترتیبی α وجود دارد به طوری که $\alpha \notin X$. به عبارت دیگر مجموعه‌ی تمام اعداد ترتیبی وجود ندارد.

۳. هر مجموعه از اعداد ترتیبی دارای کوچک‌ترین کران بالا (سوپریمم) است.

اثبات. به قضیه‌ی ۲.۶ از فصل ششم [۱۵] مراجعه شود. □

[1] transfinite induction

۲.۱ مقدماتی از نظریه‌ی حلقه و مدول

در این بخش مفاهیم مورد نیازی که برای بخش‌های بعد نیاز داریم ارائه خواهیم کرد. برای جلوگیری از زیاد شدن حجم مطالب از بیان برخی مفاهیم مقدماتی صرف نظر شده است یا به طور خلاصه به آن‌ها پرداخته شده است. برای اطلاعات جامع از این مفاهیم، مرجع [۳] مناسب است.

۱.۲.۱ قرارداد. در سراسر این پایان‌نامه تمامی حلقه‌ها را یکدار ($0 \neq 1$) و تمامی مدول‌ها را یکانی و چپ در نظر می‌گیریم.

۲.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت عضو a از R را:

- **مقسوم‌علیه صفر**[1] چپ (راست) گوییم، اگر $a \neq 0$ و عنصر ناصفری مانند $b \in R$ موجود باشد به‌طوری که $ab = 0$ ($ba = 0$). هم‌چنین مقسوم‌علیه صفر، عنصری از R است که هم مقسوم‌علیه صفر چپ و هم مقسوم‌علیه صفر راست باشد.

- **وارون پذیر**[2] چپ (راست) گوییم، اگر عضوی مانند $c \in R$ ($b \in R$) وجود داشته باشد که $ca = 1_R$ ($ab = 1_R$). عنصری از R که وارون پذیر چپ و راست باشد را وارون پذیر یا **یکه**[3] می‌نامیم. مجموعه‌ی تمام عناصر یکه‌ی R را با نماد $U(R)$ نمایش می‌دهیم.

- **خودتوان**[4] می‌نامیم، هرگاه $a^2 = a$.

- **پوچ‌توان**[5] نامیم، اگر $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $a^n = 0$.

[1] zero divisor
[2] invertible
[3] unit
[4] idempotent
[5] nilpotent

۳.۲.۱ تعریف. حلقه‌ی تعویض‌پذیر و یکدار R با خاصیت $1_R \neq 0$ و فاقد مقسوم‌علیه‌های صفر، یک **دامنه صحیح**[1] نامیده می‌شود.

۴.۲.۱ تعریف. حلقه‌ی یکدار D با خاصیت $1_D \neq 0$ که در آن هر عضو ناصفر یکه باشد **حلقه‌ی تقسیم**[2] نام دارد. هم‌چنین حلقه‌ی بخشیِ تعویض‌پذیر را **میدان**[3] می‌نامیم.

۵.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت:

- ایده‌آل P در R را **اول** گوییم، اگر $P \neq R$ و برای هر دو ایده‌آل A و B در R، $AB \subseteq P$ نتیجه دهد $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Spec}(R)$ نمایش می‌دهیم.
- ایده‌آل (ایده‌آل چپ) $\mathfrak{m}$[4] در R را **ماکسیمال** می‌نامیم، اگر $\mathfrak{m} \neq R$ و برای هر ایده‌آل (ایده‌آل چپ) I که $I \subset \mathfrak{m} \subset R$ داشته باشیم $I = \mathfrak{m}$ یا $I = R$. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Max}(R)$ نمایش می‌دهیم.
- ایده‌آل (ایده‌آل چپ) I از R را **پوچ**[5] می‌نامیم، اگر هر عضو از I پوچ‌توان باشد. هم‌چنین I را **پوچ‌توان** می‌نامیم، هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $I^n = (0)$.

۶.۲.۱ تذکر. فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ از حلقه‌ی R باشد. اگر به ازای عدد طبیعی n داشته باشیم $I^n = (0)$، آن‌گاه برای هر مجموعه‌ی $\{a_1, \dots, a_n\}$ از اعضای I داریم $a_1 \dots a_n = 0$. واضح است که شرط اخیر از این‌که هر عضو I پوچ‌توان باشد بسیار قوی‌تر است. بنابراین هر ایده‌آل پوچ‌توان یک ایده‌آل پوچ است ولی عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست؛ برای مثال، صفحه‌ی ۵۳ از [۲۶] را ببینید.

[1] integral domain

[2] division ring

[3] field

[4] معمولا ایده‌آل‌ها را با حروف بزرگ نشان می‌دهند، اما چون معمولا مدول‌ها را با M نمایش می‌دهیم برای جلوگیری از اشتباه، مانند برخی از منابع، در سراسر پایان نامه از نماد $\mathfrak{m}$ استفاده کرده‌ایم.

[5] nil

۷.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای از حلقه‌ی R باشد. هم‌چنین $\{A_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ی تمام ایده‌آل‌ها (ایده‌آل‌های چپ) در R باشد که شامل X هستند. در این‌صورت $\cap_{i\in I} A_i$ ایده‌آل (ایده‌آل چپ) تولید شده توسط X می‌نامیم. این ایده‌آل را با (X) نشان می‌دهیم. ایده‌آل تولید شده توسط یک عنصر، مانند x، **ایده‌آل اصلی**[1] نام دارد که به صورت (x) نشان داده می‌شود.

۸.۲.۱ تعریف. حلقه‌ای که هر ایده‌آل آن اصلی باشد را **حلقه‌ی ایده‌آل اصلی** یا به اختصار PIR[2] نامیم. یک حلقه‌ی ایده‌آل اصلی که دامنه صحیح باشد را **دامنه‌ی ایده‌آل اصلی** یا به‌طور خلاصه PID[3] می‌گوییم. هم‌چنین یک دامنه‌ی ایده‌آل اصلی که دقیقا یک ایده‌آل اول ناصفر داشته باشد را **حلقه‌ی ارزیابی گسسته** یا به اختصار DVR[4] می‌نامیم.

۹.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال R (یا اشتراک تمام ایده‌آل‌های راست ماکسیمال R، چون طبق [۴، قضیه‌ی ۳.۱۱] با هم معادل هستند) را **رادیکال جیکوبسن**[5] R می‌نامیم و با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

۱۰.۲.۱ گزاره. برای هر حلقه‌ی ناصفر R گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. R دارای یک ایده‌آل چپ ماکسیمال یکتا است.

۲. R دارای یک ایده‌آل راست ماکسیمال یکتا است.

۳. $\frac{R}{J(R)}$ یک حلقه‌ی تقسیم است.

۴. $R \setminus U(R)$ یک ایده‌آل از R است.

[1]principal ideal
[2]Principal Ideal Ring
[3]Principal Ideal Domain
[4]Discrete Valuation Ring
[5]Jacobson radical

اثبات. به قضیه‌ی ۱۹.۱ از [۲۶] مراجعه شود. □

۱۱.۲.۱ تعریف. حلقه‌ی ناصفر R را **موضعی**[۱] می‌نامیم، اگر در یکی از شرایط معادل قضیه‌ی بالا صدق کند. در حالت خاص، حلقه‌ی تعویض‌پذیرِ موضعی R با ایده‌آل ماکسیمال منحصر به فرد $\mathfrak{m}$ را با نماد $(R, \mathfrak{m})$ نمایش می‌دهیم.

مقدمات مدول‌ها

۱۲.۲.۱ تذکر. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. گاهی اوقات برای نشان دادن زیرمدول N از M از نماد $N \leq M$ استفاده خواهیم کرد. تکریختی $j : N \to M$ با ضابطه‌ی $j(x) = x$، برای هر $x \in N$، را تکریختی شمول می‌نامیم. همچنین بروریختی $\pi : M \to \frac{M}{N}$ که برای هر $m \in M$ به صورت $\pi(m) = m + N$ تعریف می‌شود را بروریختی طبیعی می‌نامیم.

لم زیر در عین سادگی کاربرد زیادی دارد.

۱۳.۲.۱ لم (قانون مدولار[۲]). اگر M یک R-مدول و A، B و C سه زیرمدول آن باشند به طوری که $B \subseteq A$، آن‌گاه $A \cap (B + C) = B + (A \cap C)$.

اثبات. واضح است. □

۱۴.۲.۱ تذکر. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر خانواده‌ی تمام زیرمدول‌های M را با $\mathscr{L}(M)$ نمایش دهیم، آن‌گاه واضح است که $\mathscr{L}(M)$ با رابطه‌ی زیرمدولی یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است. برای هر دو زیرمدول A و B از M به سادگی می‌توان دید که $A + B$ کوچک‌ترین زیرمدول شامل A و B و $A \cap B$ بزرگ‌ترین زیرمدول مشمول در A و B می‌باشد. پس با استفاده از نماد گذاری ۱۰.۱.۱، داریم

[۱] local

[۲] modular law

$A \vee B = A + B$ و $A \wedge B = A \cap B$. در نتیجه $(\mathscr{L}(M), \leq)$ یک مشبکه است که آن را مشبکه‌ی زیرمدول‌های M می‌نامیم. طبق لم قبل واضح است که $\mathscr{L}(M)$ یک مشبکه‌ی مدولار می‌باشد.

۱۵.۲.۱ تعریف. R-مدول M را **تک‌پیاپی**[1] می‌نامیم، هرگاه $\mathscr{L}(M)$ با رابطه‌ی شمول یک مشبکه‌ی مرتب کلی باشد. به عبارت ساده‌تر برای هر دو زیرمدول $N_۱$ و $N_۲$ از M داشته باشیم $N_۱ \subseteq N_۲$ یا $N_۲ \subseteq N_۱$.

در تذکر زیر، مدول مهم $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ و ساختار آن را یادآوری می‌کنیم.

۱۶.۲.۱ تذکر. فرض کنیم p یک عدد اول باشد. قرار می‌دهیم $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \left\{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \ : \ a \in \mathbb{Z}, n \geqslant ۱\right\}$. به سادگی می‌توان نشان داد که $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ زیرمدولی از $\mathbb{Z}$-مدول $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ است. طبق تعریف، واضح است که $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ را می‌توانیم به صورت زیر نشان دهیم:

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \left\{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \ : \ a \in \mathbb{Z}, n \geqslant ۱, ۰ \leqslant \frac{a}{p^n} < ۱, p \nmid a\right\}$$

طبق مثال ۳.۱۲ از [۴]، هر زیرمدول دلخواه سره از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به ازای عدد طبیعی k به صورت زیر است:

$$H_k = \left\{\mathbb{Z}, \frac{۱}{p^{k-۱}} + \mathbb{Z}, \frac{۲}{p^{k-۱}} + \mathbb{Z}, \ldots, \frac{p^{k-۱} - ۱}{p^{k-۱}} + \mathbb{Z}\right\}$$

لذا $H_۱ = \{\mathbb{Z}\}$، $H_۲ = \left\{\mathbb{Z}, \frac{۱}{p} + \mathbb{Z}, \ldots, \frac{p-۱}{p} + \mathbb{Z}\right\}$، $H_۳ = \left\{\mathbb{Z}, \frac{۱}{p^۲} + \mathbb{Z}, \ldots, \frac{p^۲-۱}{p^۲} + \mathbb{Z}\right\}$ و ... . بنابراین واضح است که $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک مدول تک‌پیاپی است. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ خواص مهم دیگری هم دارد که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود.

۱۷.۲.۱ تعریف. R-مدول M را **متناهی تولید شده** یا **متناهی مولد** (به اختصار، f.g.[2]) می‌نامیم، اگر برای هر خانواده‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M که $\sum_{i\in I} M_i = M$، زیرمجموعه‌ی متناهی J از I وجود

[1] uniserial

[2] finitely generated

داشته باشد به طوری که $\sum_{j\in J} M_j = M$.

۱۸.۲.۱ تذکر. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. با استفاده از تعریف قبل به سادگی می‌توان نشان داد که M متناهی مولد است اگر وتنها اگر زیرمجموعه‌ی متناهی X از M وجود داشته باشد که $M = RX$؛ یعنی اعضای $x_1, \ldots, x_n$ از M موجود باشند که $M = Rx_1 + \ldots + Rx_n$ که در بیشتر منابع این تعریف برای مدول متناهی مولد ارائه شده است.

مفهوم زیر، دوگان مدول متناهی مولد است که برای نخستین بار توسط واموس[1] در [۳۶] معرفی شد. البته او تعریف خود را با استفاده از پوش انژکتیو بیان کرد و تعریف زیر بر اساس [۷] می‌باشد که در آن دوگان بودن دو مفهوم به خوبی قابل ملاحظه است.

۱۹.۲.۱ تعریف. R-مدول M را **متناهی نشانده شده** (به اختصار، f.e.[2]) یا **متناهی هم تولید شده**[3] می‌نامیم، اگر برای هر خانواده‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M که $\bigcap_{i\in I} M_i = (0)$، زیرمجموعه‌ی متناهی J از I وجود داشته باشد به طوری که $\bigcap_{j\in J} M_j = (0)$.

۲۰.۲.۱ مثال. واضح است که گروه آبلی $\mathbb{Z}$ متناهی مولد است ولی $\mathbb{Z}$ متناهی نشانده شده نیست، زیرا برای خانواده‌ی $\{2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z}, \ldots\}$ از زیرگروه‌های $\mathbb{Z}$ داریم $\bigcap_{n=1}^{\infty} 2^n\mathbb{Z} = (0)$ ولی واضح است که اشتراک اعضای هر زیرخانواده‌ی متناهی از آن ناصفر است. برعکس، به سادگی می‌توان نشان داد $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول f.e. است، اما واضح است که f.g. نیست، چون فاقد مجموعه‌ی مولد متناهی است.

۲۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. زیرمدول سره‌ی N از M را **ماکسیمال** M می‌نامیم، درصورتی که به‌ازای هر زیرمدول از M مثل K، اگر $N \subsetneq K$ آن‌گاه $K = M$. هم‌چنین زیرمدول L از M را **مینیمال** می‌نامیم، هرگاه هیچ زیرمدولی به طور سره بین (0) و L نباشد.

[1] Vamos

[2] finitely embedded

[3] finitely cogenerated

۲۲.۲.۱ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. در این‌صورت:

۱. اگر M متناهی مولد و L زیرمدول سره‌ای از M باشد، آنگاه زیرمدول ماکسیمالی از M وجود دارد که شامل L است.

۲. اگر M متناهی مولد باشد، آن‌گاه M دارای زیرمدول ماکسیمال است.

۳. اگر M متناهی نشانده شده باشد، آن‌گاه M دارای زیرمدول مینیمال است.

اثبات. ۱. به قضیه‌ی ۳.۱ از [۴] مراجعه شود.

۲. کافی است در قسمت قبل قرار دهیم $L = (0)$.

۳. به نتیجه‌ی ۱۰.۵ از [۷] مراجعه شود. □

۲۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. گوییم M دارای **شرط زنجیر صعودی** (به اختصار، ACC[1]) روی زیرمدول‌های خود است، اگر برای هر زنجیر صعودی $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $k \geqslant i$ داشته باشیم $N_i = N_k$. M را یک **مدول نوتری**[۲] می‌نامیم، هرگاه دارای ACC روی زیرمدول‌های خود باشد.

۲۴.۲.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. گوییم M دارای **شرط زنجیر نزولی** (به اختصار، DCC[3]) روی زیرمدول‌های خود است، اگر برای هر زنجیر نزولی $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $k \geqslant i$ داشته باشیم $N_i = N_k$. M را یک **مدول آرتینی**[۴] می‌نامیم، هرگاه دارای DCC روی زیرمدول‌های خود باشد.

[1] Acending Chain Condition
[2] noetherian module
[3] Decending Chain Condition
[4] artinian module

۲۵.۲.۱ مثال. به سادگی می‌توان نشان داد که $\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول نوتری است که آرتینی نیست و برعکس $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول آرتینی است که نوتری نیست.

۲۶.۲.۱ قضیه. برای R-مدول M شرایط زیر معادل هستند:

۱. M نوتری است.

۲. هر خانواده‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضو ماکسیمال است.

۳. هر زیرمدول از M، $f.g.$ است.

اثبات. به گزاره‌ی ۱.۱ از [۱۲] مراجعه شود. □

۲۷.۲.۱ قضیه. برای R-مدول M شرایط زیر معادل هستند:

۱. M آرتینی است.

۲. هر خانواده‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضو مینیمال است.

۳. هر مدول خارج قسمتی از M، $f.e.$ است.

اثبات. به گزاره‌ی ۱۰.۱۰ از [۷] مراجعه شود. □

۲۸.۲.۱ قضیه. فرض کنیم M، N و K سه R-مدول و $(0) \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} K \to (0)$ یک دنباله دقیق کوتاه[1] (یعنی φ تکریختی، ψ بهروریختی و $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$) باشد. در این صورت N نوتری (آرتینی) است اگر وتنها اگر M و K نوتری (آرتینی) باشند.

اثبات. به قضیه‌ی ۲.۱۲ از [۴] مراجعه شود. □

[1] short exact sequence

از قضیه‌ی قبل نتیجه‌ی مهم زیر حاصل می‌شود.

۲۹.۲.۱ نتیجه. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. در این صورت M نوتری (آرتینی) است اگر وتنها اگر N و $\frac{M}{N}$ نوتری (آرتینی) باشند.

۳۰.۲.۱ تعریف. حلقه‌ی R را نوتری چپ (نوتری راست) می‌نامیم اگر R به عنوان R-مدول چپ (راست)، نوتری باشد. هم‌چنین R را آرتینی چپ (آرتینی راست) می‌نامیم اگر R به عنوان R-مدول چپ (راست)، آرتینی باشد. R نوتری (آرتینی) نامیده می‌شود اگر هم نوتری چپ (آرتینی چپ) و هم نوتری راست (آرتینی راست) باشد.

۳۱.۲.۱ تذکر. طبق تعریف قبل واضح است که همه‌ی گزاره‌های ذکر شده برای مدول‌های نوتری (آرتینی)، برای حلقه‌های نوتری چپ (آرتینی چپ) نیز برقرار هستند که از بیان دوباره‌ی آن‌ها پرهیز می‌کنیم.

۳۲.۲.۱ گزاره. اگر M مدولی متناهی مولد روی یک حلقه‌ی نوتری (آرتینی) چپ باشد، آن‌گاه M نیز یک مدول نوتری (آرتینی) است.

اثبات. به قضیه‌ی ۷.۱۳ از [۴] مراجعه شود. □

به کمک تعریف زیر حلقه‌های جالبی را می‌توان ساخت که مثال‌هایی برای بررسی حالات خاص حلقه‌های نوتری و آرتینی هستند که در ادامه بیان می‌شوند.

۳۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. گروه آبلی M را یک (R,S)-**دومدول**[1] می‌نامیم، اگر M، R-مدول چپ و S-مدول راست باشد و برای هر $r \in R$، $s \in S$ و $m \in M$ داشته باشیم $(rm)s = r(ms)$.

۳۴.۲.۱ مثال. اگر R یک حلقه و S یک زیرحلقه از R باشد، آن‌گاه واضح است که R یک (R,S)-دومدول است.

[1] bimodule

۳۵.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R و S دو حلقه و M یک (R,S)-دومدول باشد. در این صورت گروه آبلی $A = R \oplus M \oplus S = \{(r,s,m) \mid r \in R, s \in S, m \in M\}$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$A = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} \ : \ r \in R, s \in S, m \in M \right\}.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که A با اعمال جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها یک حلقه است که **حلقه‌ی مثلثی**[1] نامیده می‌شود. واضح است که R یک ایده‌آل چپ، S یک ایده‌آل راست و M یک ایده‌آل دوطرفه از A است.

۳۶.۲.۱ قضیه. فرض کنیم $A = \left[\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right]$ یک حلقه‌ی مثلثی باشد. در این صورت A نوتری چپ (راست) است اگر وتنها اگر R و S نوتری چپ (راست) باشند و M یک R-مدول چپ (راست) نوتری باشد. هم‌چنین این گزاره برای حالت آرتینی هم برقرار است.

اثبات. به قضیه‌ی ۱.۲۲ از [۲۶] مراجعه شود. □

از قضیه‌ی قبل نتیجه‌ی مهم زیر حاصل می‌شود که بیان می‌کند هر حلقه‌ی نوتری راست الزاما نوتری چپ نیست. نتیجه‌ی مشابهی هم برای حلقه‌های آرتینی وجود دارد البته به جز بند آخر نتیجه، چون طبق قضیه‌ی هاپکنیز-لویتزکی[2] (قضیه‌ی ۴.۱۵ از [۲۶]) هر حلقه‌ی آرتینی چپ، نوتری چپ است. لذا برخلاف مدول‌ها (مثال ۲۵.۲.۱)، هیچ حلقه‌ی آرتینی وجود ندارد که نوتری نباشد.

۳۷.۲.۱ نتیجه. فرض کنیم S یک دامنه‌ی صحیح نوتری و R میدان کسرهای S (قسمت ۳ از تذکر ۵.۳.۱ را ببینید) باشد که $R \neq S$. در این صورت حلقه‌ی مثلثی $A = \left[\begin{smallmatrix} R & R \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right]$ نوتری چپ است ولی نوتری راست نیست. به‌علاوه، A نه آرتینی راست است و نه آرتینی چپ.

[1] triangular ring

[2] Hopkins-Levitzki

۳۸.۲.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول و I یک ایده‌آل چپ از R باشد. برای هر $x \in M$، **پوچ‌ساز**[1] x در I را با نماد $\mathrm{Ann}_I(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت $\mathrm{Ann}_I(x) = \{r \in I \mid rx = 0\}$ تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید $\mathrm{Ann}_I(x)$ یک ایده‌آل چپ از R است. در حالت خاص اگر قرار دهیم $I = R$، آن‌گاه $\mathrm{Ann}_R(x)$ و $\mathrm{Ann}_R(M)$ را به‌ترتیب با نماد $\mathrm{Ann}(x)$ و $\mathrm{Ann}(M)$ نمایش می‌دهیم. به آسانی می‌توان نشان داد که $\mathrm{Ann}(M)$ یک ایده‌آل دوطرفه از R است.

۳۹.۲.۱ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. M را **بی‌تاب**[2] گوییم، اگر برای هر $0 \neq x \in M$ داشته باشیم $\mathrm{Ann}(x) = (0)$. همچنین M را **تاب‌دار**[3] گوییم درصورتی که برای هر $x \in M$، $\mathrm{Ann}(x) \neq (0)$.

۴۰.۲.۱ مثال. واضح است که $\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول بی‌تاب است. همچنین به سادگی می‌توان دید که برای هر عدد طبیعی n، $\mathbb{Z}_n$ به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول، تاب‌دار می‌باشد.

۳.۱ حلقه و مدول کسرها

در این بخش ابتدا حلقه‌ی کسرها و حالت خاص آن، میدان کسرها را تعریف و مفهوم مهم موضعی سازی را بیان می‌کنیم و در ادامه تعمیم آن، مدول کسرها را می‌آوریم و به بررسی بعضی از مفاهیم مرتبط با آن که در ادامه نیاز خواهیم داشت می‌پردازیم. در این بخش همه‌ی حلقه‌ها تعویض‌پذیر هستند.

۱.۳.۱ تعریف. زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R را **زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی** یا به اختصار m.c.s.[4] نامیم، هرگاه $1_R \in S$ و برای هر $s_1, s_2 \in S$ داشته باشیم $s_1 s_2 \in S$.

مثال زیر یکی از مهم‌ترین زیرمجموعه‌های بسته‌ی ضربی می‌باشد که کاربرد زیادی دارد.

---
[1] annihilator
[2] torsion free
[3] torsion
[4] multiplicatively closed subset

۲.۳.۱ مثال. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و $P \in \mathrm{Spec}(R)$. در این صورت به سادگی می‌توان نشان داد، $S = R \setminus P$ یک m.c.s. از R می‌باشد.

۳.۳.۱ تذکر. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و S یک m.c.s. از R باشد. روی مجموعه‌ی $R \times S$ رابطه‌ی $\sim$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a,s) \sim (b,t) \;\Leftrightarrow\; \exists u \in S \quad s.t \quad u(at-bs) = \circ.$$

در این صورت به سادگی می‌توان دید که $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی $R \times S$ می‌باشد. نماینده‌ی کلاس هم ارزی (a,s) را با $\frac{a}{s}$ نمایش می‌دهیم.

۴.۳.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و S یک m.c.s. از R باشد. قرار می‌دهیم:

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in R, s \in S \right\}.$$

روی مجموعه‌ی $S^{-1}R$، اعمال جمع و ضرب را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall \frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}R: \quad \frac{a}{s}\frac{b}{t} := \frac{ab}{st} \quad \text{و} \quad \frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at+bs}{st}.$$

در این صورت با صرف کمی زمان می‌توان دید، $S^{-1}R$ با اعمال جمع و ضرب فوق یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر است که **حلقه‌ی کسرها**[1] نامیده می‌شود.

۵.۳.۱ تذکر. اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و S یک m.c.s. از R باشد. آن‌گاه:

۱. در حلقه‌ی $S^{-1}R$، برای هر $s \in S$ داریم $\frac{\circ}{s} = \frac{\circ}{1} = \circ_{S^{-1}R}$ و $\frac{s}{s} = \frac{1}{1} = 1_{S^{-1}R}$. هم‌چنین برای هر

[1] ring of fractions

$a \in R$ داریم $\frac{a}{s} = 0_{S^{-1}R}$ اگر وتنها اگر $t \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $ta = 0_R$.

۲. همریختی $S^{-1}R$ ‏$\varphi : R \to S^{-1}R$ با ضابطه‌ی $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ همواره وجود دارد که همریختی طبیعی حلقه‌ی کسرها نامیده می‌شود.

۳. به سادگی می‌توان بررسی کرد که اگر D یک دامنه‌ی صحیح باشد، آنگاه $D \setminus \{0\}$ یک m.c.s. از D است. حال اگر در تعریف ۴.۳.۱، قرار دهیم $S = D \setminus \{0\}$ و $R = D$، آنگاه $S^{-1}R$ را **میدان کسرها**[1] یا **میدان خارج قسمتی**[2] دامنه‌ی صحیح D می‌نامیم.

حال با استفاده از مثال ۲.۳.۱، یک مفهوم بسیار مهم را معرفی می‌کنیم.

۶.۳.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و P یک ایده‌آل اول از R باشد. قرار می‌دهیم $S = R \setminus P$، در این صورت حلقه‌ی کسرهای $S^{-1}R$ را با نماد R_P نمایش می‌دهیم و **موضعی سازی**[3] R در ایده‌آل اول P می‌نامیم.

۷.۳.۱ لم. مجموعه‌ی $\mathfrak{m} := \left\{\frac{a}{s} \mid a \in P, s \in S\right\}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی R_P می‌باشد. بنابراین $(R_P, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی است.

اثبات. به لم ۵.۲۰ از [۲] مراجعه شود. □

۸.۳.۱ نمادگذاری. ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی R_P را با نماد PR_P نمایش می‌دهیم و لذا حلقه‌ی موضعی R_P را با نماد (R_P, PR_P) نمایش می‌دهیم.

۹.۳.۱ مثال. قرار می‌دهیم $S = \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$، واضح است که S یک m.c.s. از $\mathbb{Z}$ است. در این صورت

[1] field of fractions

[2] quotient field

[3] localization

موضعی سازی حلقه‌ی $\mathbb{Z}$ در ایده‌آل اول $۲\mathbb{Z}$ عبارت است از:

$$\mathbb{Z}_{۲\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \;,\; \text{فرد باشد } n \right\}$$

که با توجه به نمادگذاری قبل ایده‌آل ماکسیمال یکتای آن عبارت است از

$$۲\mathbb{Z}\mathbb{Z}_{۲\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in ۲\mathbb{Z} \;,\; \text{فرد باشد } n \right\}.$$

اکنون به طور خلاصه مدول کسرها را تعریف می‌کنیم که در واقع تعمیم طبیعی حلقه‌ی کسرها می‌باشد.

۱۰.۳.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر، S یک m.c.s. از R و M یک R-مدول باشد. در این صورت روی مجموعه‌ی $M \times S$، رابطه‌ی $\sim$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(m_۱, s_۱) \sim (m_۲, s_۲) \Leftrightarrow \exists u \in S \quad s.t \quad u(m_۱ s_۲ - m_۲ s_۱) = ۰.$$

در این صورت می‌توان دید که $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی $M \times S$ است. برای هر $m \in M$ و $s \in S$، کلاس هم ارزی (m, s) را با نماد $\frac{m}{s}$ نمایش داده و قرار می‌دهیم $S^{-۱}M = \left\{ \frac{m}{s} \mid m \in M \;,\; s \in S \right\}$. روی $S^{-۱}M$ اعمال جمع و ضرب اسکالرِ $. : S^{-۱}R \times S^{-۱}M \to S^{-۱}M$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \forall \frac{m_۱}{s_۱}, \frac{m_۲}{s_۲} \in S^{-۱}M : &\quad \frac{m_۱}{s_۱} + \frac{m_۲}{s_۲} := \frac{m_۱ s_۲ + m_۲ s_۱}{s_۱ s_۲} \\ \forall \frac{r}{s_۱} \in S^{-۱}R \;,\; \forall \frac{m}{s_۲} \in S^{-۱}M : &\quad \frac{r}{s_۱} . \frac{m}{s_۲} := \frac{rm}{s_۱ s_۲}. \end{aligned}$$

در این صورت می‌توان نشان داد $S^{-۱}M$ با اعمال فوق یک $S^{-۱}R$-مدول است که **مدول کسرهای**[۱] M

[1] module of fractions

نسبت به S نامیده می‌شود.

۱۱.۳.۱ تذکر. اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و S یک m.c.s. از R و M یک R-مدول باشد. آن‌گاه:

۱. واضح است که صفرِ مدول $S^{-1}M$، $\frac{0_M}{1}$ است که برای هر $s \in S$ با $\frac{0_M}{s}$ برابر است. هم‌چنین اگر $m \in M$ و $s \in S$، آن‌گاه $\frac{m}{s} = 0_{S^{-1}M}$ اگر وتنها اگر $t \in S$ وجود داشته باشد که $tm = 0$.

۲. همریختی $\psi : M \to S^{-1}M$ با ضابطه‌ی $\psi(m) = \frac{m}{1}$ همواره وجود دارد که همریختی طبیعی مدول کسرها نامیده می‌شود.

۳. فرض کنیم $P \in \operatorname{Spec}(R)$ و $S = R \setminus P$. در این صورت $S^{-1}R$-مدولِ $S^{-1}M$ را با نماد M_P نمایش می‌دهیم و آن را **مدول حاصل از موضعی سازی** M در P می‌نامیم که در واقع تعمیم مفهوم موضعی سازی حلقه‌ی R در ایده‌آل اول P می‌باشد.

۱۲.۳.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و M یک R-مدول باشد. **محمل**[1] مدول M را با نماد $\operatorname{Supp}(M)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{Supp}(M) = \{P \in \operatorname{Spec}(R) \mid M_P \neq (0)\}.$$

لم زیر اهمیت مفهوم محمل یک مدول را نشان می‌دهد.

۱۳.۳.۱ لم. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و M یک R-مدول باشد. گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. $M = (0)$.

۲. برای هر $P \in \operatorname{Spec}(R)$ داریم $M_P = (0)$؛ یعنی $\operatorname{Supp}(M) = \emptyset$.

[1] support

۳. برای هر $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ داریم $M_{\mathfrak{m}} = (\circ)$.

اثبات. به لم ۱۵.۹ از [۲] مراجعه شود. □

۱۴.۳.۱ گزاره. اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و M یک R-مدول متناهی مولد باشد، آن‌گاه:

$$\operatorname{Supp}(M) = \{P \in \operatorname{Spec}(R) \mid P \supseteq \operatorname{Ann}(M)\}.$$

اثبات. به لم ۹.۲۰ از [۲] مراجعه شود. □

۱۵.۳.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و M یک R-مدول باشد. ایده‌آل اول P از حلقه‌ی R را یک **ایده‌آل اول وابسته**[1] به M می‌نامیم، هرگاه عضو ناصفر x از M وجود داشته باشد به طوری که $P = \operatorname{Ann}(x)$. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های وابسته به M را با نماد $\operatorname{Ass}(M)$ نمایش می‌دهیم.

۱۶.۳.۱ لم. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر نوتری و M یک R-مدول باشد. در این صورت $\operatorname{Ass}(M) \neq \emptyset$ اگر وتنها اگر $M \neq (\circ)$.

اثبات. به نتیجه‌ی ۳۵.۹ از [۲] مراجعه شود. □

۱۷.۳.۱ گزاره. اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و M یک R-مدول باشد، آن‌گاه $\operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Supp}(M)$.

اثبات. فرض کنیم $P \in \operatorname{Ass}(M)$، پس $\circ \neq x \in M$ وجود دارد به طوری که $P = \operatorname{Ann}(x)$. اکنون به خلاف فرض کنیم $P \notin \operatorname{Supp}(M)$؛ یعنی $M_P = \circ$. بنابراین برای هر $s \in R \setminus P = S$ داریم $\frac{x}{s} = \circ$. در نتیجه طبق قسمت اول تذکر ۱۱.۳.۱، $t \in S$ وجود دارد به طوری که $tx = \circ$، لذا $t \in \operatorname{Ann}(x) = P$ که تناقض است. □

[1] associated prime ideal

۱۸.۳.۱ مثال. اگر $\mathbb{Z}$ را به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول در نظر بگیریم، آنگاه واضح است که $\mathrm{Supp}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ و $\mathrm{Ass}(\mathbb{Z}) = \{(0)\}$. هم‌چنین اگر $\mathbb{Z}_2$ را به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول در نظر بگیریم، آنگاه طبق گزاره‌ی ۱۴.۳.۱، به سادگی می‌توان دید $\mathrm{Supp}(\mathbb{Z}_2) = \mathrm{Ass}(\mathbb{Z}_2) = \{2\mathbb{Z}\}$. بنابراین در گزاره‌ی قبل ممکن است تساوی هم رخ بدهد ولی حالت کلی $\mathrm{Supp}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M)$ برقرار نیست.

فصل ۲

بعضی از مدول‌ها و زیرمدول‌های مهم

۱.۲ زیرمدول‌های اساسی و کوچک

در این بخش زیرمدول‌های اساسی و کوچک را تعریف و بررسی می‌کنیم. این زیرمدول‌ها دوگان یکدیگر هستند و به این دلیل سعی شده پس از تعریف یک مفهوم یا ذکر گزاره‌ای برای زیرمدول‌های اساسی، دوگان آن برای زیرمدول‌های کوچک بیان شود. از آن‌جا که زیرمدول اساسی ابزاری مهم و کلیدی برای تعریف بعد گلدی مدول و به تبع آن زیرمدول کوچک وسیله‌ای کاربردی برای تعریف دوگان بعد گلدی می‌باشد، مفاهیم مرتبط با آن‌ها از جمله خانواده‌ی مستقل از زیرمدول‌ها، زیرمدول مکمل و زیرمدول بسته برای زیرمدول‌های اساسی و دوگان آن‌ها خانواده‌ی هم‌مستقل، زیرمدول متمم و زیرمدول هم‌بسته برای زیرمدول‌های کوچک را نیز بیان کرده‌ایم.

۱.۱.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. زیرمدول N از M را یک **زیرمدول اساسی**[2] در M نامیم و با نماد $N \leq_e M$ نمایش می‌دهیم، اگر برای هر زیرمدول ناصفر مانند K از M داشته باشیم

[2] essential submodule

$N \cap K \neq (0)$. به عبارت دیگر، برای هر زیرمدول K از M، $N \cap K = (0)$ نتیجه دهد $K = (0)$. اگر $N \leq_e M$، آن‌گاه M را یک **توسیع اساسی**[1] از N می‌نامیم.

۲.۱.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. زیرمدول N از M را یک **زیرمدول کوچک**[2] در M نامیم و با نماد $N \ll M$ نمایش می‌دهیم، اگر به ازای هر زیرمدول سره‌ی K از M داشته باشیم $N + K \neq M$. به عبارت دیگر، به ازای هر زیرمدول K از M، $N + K = M$ نتیجه دهد $K = M$. اگر $N \ll M$، آن‌گاه M را یک **پوش کوچک**[3] از $\frac{M}{N}$ می‌نامیم.

۳.۱.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول و N و K زیرمدول‌هایی از آن باشند. تکریختی $f : N \to M$ را **تکریختی اساسی**[4] می‌نامیم، اگر $\operatorname{Im} f \leq_e M$. بروریختی $g : M \to K$ را **بروریختی کوچک**[5] می‌نامیم، هرگاه $\ker f \ll M$.

ابتدا مثال‌هایی از زیرمدول‌های اساسی و کوچک بیان می‌کنیم.

۴.۱.۲ مثال. ۱. هر زیرمدول ناصفر از $\mathbb{Z}$-مدولِ $\mathbb{Q}$ اساسی است. زیرا اگر A_1 و A_2 زیرمدول‌های ناصفری از $\mathbb{Q}$ باشند، آن‌گاه اعضای ناصفر $\frac{a_1}{b_1} \in A_1$ و $\frac{a_2}{b_2} \in A_2$ وجود دارند، لذا $a_2 b_1 \frac{a_1}{b_1} = a_2 a_1 \in A_1$ و $a_1 b_2 \frac{a_2}{b_2} = a_1 a_2 \in A_2$. درنتیجه $0 \neq a_1 a_2 \in A_1 \cap A_2$.

۲. اگر I یک ایده‌آل ناصفر در دامنه‌ی صحیح R باشد، آن‌گاه I یک زیرمدول اساسی از R-مدول R می‌باشد. زیرا اگر $I \neq (0)$ و J دو ایده‌آل (زیرمدول) دلخواه از R باشند که $I \cap J = (0)$، آن‌گاه داریم $IJ = (0)$. اکنون عضو ناصفر a از I را در نظر می‌گیریم، برای هر $x \in J$ داریم $ax = 0$، چون R دامنه‌ی صحیح است داریم $x = 0$ و لذا $J = (0)$.

[1] essential extension

[2] small submodule

[3] small cover

[4] essential monomorphism

[5] small epimorphism

۳. اگر I یک ایده‌آل چپ پوچ‌توان در حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه I یک زیرمدول کوچک از R-مدول چپ R است، زیرا اگر J ایده‌آلی از R باشد که $I + J = R$، آن‌گاه $i \in I$ و $j \in J$ وجود دارند به طوری که $i + j = ۱$. اما I پوچ‌توان است، لذا عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که $I^k = (۰)$. بنابراین $۱ - j' = (۱ - j)^k = i^k = ۰$ که در آن $j' \in J$. در نتیجه $۱ \in J$ و $J = R$.

۵.۱.۲ تذکر. ممکن است یک زیرمدول هم اساسی باشد و هم کوچک، برای مثال به راحتی می‌توان نشان داد هر زیرمدول نابدیهی از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ این چنین است.

در ادامه بعضی از خواص زیرمدول‌های اساسی و کوچک را بیان می‌کنیم. برای مشاهده‌ی ویژگی‌های بیشتری از این زیرمدول‌ها، مراجع [۷]، [۲۲] و [۴۰] را ببینید.

۶.۱.۲ گزاره. فرض کنیم M و M' دو R-مدول و K، N و H زیرمدول‌هایی از M باشند.

۱. اگر $K \subseteq N$، آن‌گاه $K \leq_e M$ اگر وتنها اگر $K \leq_e N$ و $N \leq_e M$.

۲. اگر $N' \leq_e N$ و $K' \leq_e K$، آن‌گاه $N' \cap K' \leq_e N \cap K$.

۳. $H \cap K \leq_e M$ اگر وتنها اگر $H \leq_e M$ و $K \leq_e M$.

۴. اگر $N \leq_e M$، آن‌گاه $N \cap K \leq_e K$.

۵. اگر $K \subseteq N$ و $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$، آن‌گاه $N \leq_e M$.

۶. اگر $f : M' \to M$ یک همریختی باشد و $N \leq_e M$، آن‌گاه $f^{-۱}(N) \leq_e M'$.

اثبات. ۱. فرض کنیم $K \leq_e M$ و L زیرمدول ناصفری از M باشد، لذا داریم $L \cap K \neq (۰)$ و در حالت خاص اگر L زیرمدولی از M باشد نیز رابطه‌ی اخیر برقرار است، بنابراین $K \leq_e N$. از طرفی طبق فرض چون $K \subseteq N$، نتیجه می‌گیریم $L \cap N \neq (۰)$. بنابراین $N \leq_e M$.

برعکس، اگر L یک زیرمدول ناصفر از M باشد، آنگاه چون $N \leq_e M$، داریم $N \cap L \neq (0)$. از طرفی $K \leq_e N$ و $N \cap L \leq N$، لذا داریم $K \cap (N \cap L) \neq (0)$. پس $K \cap L \neq (0)$ و بنابراین $K \leq_e M$.

۲. چون $N' \leq_e N$، پس برای هر زیرمدول ناصفرِ D از $N \cap K$ داریم $N' \cap L \neq (0)$. از طرفی $K' \leq_e K$ و $(0) \neq N' \cap L \subseteq N \cap K \subseteq K$. بنابراین $(N' \cap L) \cap K' = L \cap (N' \cap K') \neq (0)$. در نتیجه $N' \cap K' \leq_e N \cap K$.

۳. اگر $H \cap K \leq_e M$، آنگاه $H \cap K \subseteq K$ و $H \cap K \subseteq H$. پس طبق قسمت (۱)، واضح است که $H \leq_e M$ و $K \leq_e M$.

برعکس، اگر $H \leq_e M$ و $K \leq_e M$، آنگاه طبق قسمت قبل، حکم واضح است.

۴. طبق قسمت قبل بدیهی است.

۵. به خلاف فرض کنیم L زیرمدول ناصفری از M باشد که $N \cap L \neq (0)$. در این صورت با استفاده از قانون مدولار (لم ۱.۲.۱۳) می‌توان نوشت:

$$\frac{N}{K} \cap \frac{K+L}{K} = \frac{N \cap (K+L)}{K} = \frac{K+(N \cap L)}{K} = \bar{0}$$

که این با اساسی بودن $\frac{N}{K}$ در $\frac{M}{K}$ متناقض است. پس $N \leq_e M$.

۶. فرض کنیم A زیرمدول ناصفری از M' باشد. اگر $f(A) = (0)$، آنگاه $f(A) \subseteq N$ و لذا $A \subseteq f^{-1}(N)$، در نتیجه $A \cap f^{-1}(N) = A \neq (0)$. بنابراین $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(N)$ و $A \cap f^{-1}(N) = A \neq (0)$. اگر $f^{-1}(A) \neq (0)$، آنگاه چون $N \leq_e M$ داریم $N \cap f(A) \neq (0)$. بنابراین $f^{-1}(N) \cap A \neq (0)$. پس در هر دو حالت داریم $f^{-1}(N) \leq_e M'$. □

قبل از بیان خواص زیرمدول‌های کوچک ابتدا لم ساده و کاربردی زیر را بیان می‌کنیم.

۷.۱.۲ لم. فرض کنیم M یک R-مدول و N، L و P زیرمدول‌هایی از M باشند که $P \subseteq L \subseteq P+N$. در این صورت $L = P + (N \cap L)$.

اثبات. واضح است که $P + (N \cap L) \subseteq L$، لذا کافی است عکس این رابطه را نشان دهیم:

$$l \in L \Rightarrow l \in P+N \Rightarrow \exists p \in P, n \in N \quad s.t \quad l = p+n.$$

اما در رابطه‌ی اخیر، $l \in l$ و طبق فرض داریم $p \in l$، بنابراین $n \in N \cap L$ و $l \in P + (N \cap L)$. در نتیجه $L \subseteq P + (N \cap L)$ و اثبات تمام است. $\square$

۸.۱.۲ گزاره. فرض کنیم M و M' دو R-مدول و K، N و H زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت:

۱. اگر $K \subseteq N$، آن‌گاه $N \ll M$ اگر وتنها اگر $K \ll M$ و $\frac{N}{K} \ll \frac{M}{K}$.

۲. $H + K \ll M$ اگر وتنها اگر $H \ll M$ و $K \ll M$.

۳. اگر $f : M \to M'$ یک همریختی باشد و $N \ll M$، آن‌گاه $f(N) \ll M'$.

۴. اگر $K \ll N$، آن‌گاه $K \ll M$.

۵. اگر $N \ll M$، آن‌گاه M متناهی مولد است اگر وتنها اگر $\frac{M}{N}$ متناهی مولد باشد.

اثبات. ۱. فرض کنیم $N \ll M$ و A زیرمدولی از M باشد که $A + K = M$. پس طبق فرض داریم $A + N = M$ و چون $N \ll M$، داریم $A = M$. بنابراین $K \ll M$. حال اگر $\frac{N'}{K} \le \frac{M}{K}$ و $\frac{N'}{K} + \frac{N}{K} = \frac{M}{K}$، آن‌گاه $\frac{N'+N}{K} = \frac{M}{K}$ و در نتیجه $N' + N = M$. چون $N \ll M$، داریم $N' = M$. بنابراین $\frac{N}{K} \ll \frac{M}{K}$.

برعکس، فرض کنیم $K \ll M$ و $\frac{N}{K} \ll \frac{M}{K}$ و L زیرمدولی از M باشد که $N + L = M$. لذا $\frac{N}{K} + \frac{L+K}{K} = \frac{M}{K}$ و چون $\frac{N}{K} \ll \frac{M}{K}$، نتیجه می‌گیریم $\frac{L+K}{K} = \frac{M}{K}$. پس $L + K = M$ که چون $K \ll M$،

داریم $L = M$. بنابراین $N \ll M$.

۲. ابتدا فرض کنیم $H+K \ll M$. اگر H' و K' زیرمدول‌های M باشند. به طوری که $H+H' = M$ و $K + K' = M$، آن‌گاه داریم $H + H' + K = M + K = M$ و چون $H + K \ll M$، در نتیجه $H' = M$. یعنی $H \ll M$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد $K \ll M$.

برعکس، فرض کنیم H و K زیرمدول‌های کوچک M باشند و L زیرمدولی از M باشد که $H+K+L = M$. چون $H \ll M$، $K+L = M$ و چون $K \ll M$، نتیجه می‌گیریم $L = M$. بنابراین $H+K \ll M$.

۳. فرض کنیم A زیرمدولی از M باشد که $f(N) + A = M'$. چون $f(M) \subseteq M' = f(N) + A$، نتیجه می‌گیریم $M \subseteq N + f^{-1}(A) \subseteq M$، لذا $M = N + f^{-1}(A)$. اما چون $N \ll M$، داریم $N \supseteq M = f^{-1}(A)$. پس $f(N) \subseteq A$ از طرفی طبق فرض $f(N) + A = M'$، لذا داریم $A = M'$. بنابراین $f(N) \ll M'$.

۴. فرض کنیم $K \ll N$ و $j : N \to M$ تکریختی شمول باشد. در این صورت با استفاده از قسمت قبل داریم $j(K) = K \ll M$.

۵. واضح است که اگر M متناهی مولد باشد، آن‌گاه $\frac{M}{N}$ نیز متناهی مولد است. برعکس، فرض کنیم $N \ll M$ و $\frac{M}{N}$ متناهی مولد باشد. در این صورت می‌توانیم قرار دهیم $\frac{M}{N} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_iR+N\right)}{N}$. پس $M = \sum_{i=1}^{n} a_iR + N$. اما $N \ll M$، بنابراین $M = \sum_{i=1}^{n} a_iR$ و اثبات تمام است. □

۱.۱.۲ خانواده مستقل و هم‌مستقل از زیرمدول‌ها

۹.۱.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های ناصفر M باشد. اگر به‌ازای هر زیرمجموعه‌ی متناهی J از I و برای هر $i \in I \setminus J$ داشته باشیم $M_i \cap \left(\sum_{j\in J} M_j\right) = (0)$،

آن‌گاه $\{M_i\}_{i\in I}$ را یک **خانواده‌ی مستقل**[۱] و مجموع $\sum_{i\in I} M_i$ را **مجموع مستقیم**[۲] زیرمدول‌های M می‌نامیم و آن را با $\bigoplus_{i\in I} M_i$ نمایش می‌دهیم.

۱۰.۱.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. زیرمدول N از M را یک **جمعوند مستقیم**[۳] M می‌نامیم، اگر زیرمدولی مانند K از M وجود داشته باشد به طوری که $M = N \oplus K$. واضح است که در این حالت K نیز یک جمعوند مستقیم M است.

۱۱.۱.۲ لم. فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ یک خانواده‌ی مستقل و از R-مدول M و A زیرمدولی از M باشد. اگر برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی J از I داشته باشیم $A \cap \left(\sum_{i\in I} M_i\right) = (\circ)$، آن‌گاه $\{A\} \cup \{M_i\}_{i\in I}$ یک خانواده‌ی مستقل است.

اثبات. طبق تعریف واضح است. □

قضیه‌ی زیر به نوعی ارتباط زیرمدول‌های اساسی و خانواده‌های مستقل از زیرمدول‌ها را بیان می‌کند که در فصل بعد کاربرد دارد.

۱۲.۱.۲ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول و $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده‌ی مستقل از زیرمدول‌های M باشد. اگر $\{B_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمدول‌های M باشد به طوری که برای هر $i \in I$ داشته باشیم $A_i \leq_e B_i$، آن‌گاه $\{B_i\}_{i\in I}$ نیز یک خانواده‌ی مستقل است و داریم $\bigoplus_{i\in I} A_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} B_i$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $|I|$ متناهی باشد. حکم را با استفاده از استقراء طبیعی روی $|I|$ نشان می‌دهیم. اگر $|I| = ۱$ که چیزی برای اثبات وجود ندارد. حال فرض می‌کنیم $I = \{i, j\}$، $A_i \leq_e B_i$ و $A_j \leq_e B_j$. در این صورت طبق قسمت (۲) از گزاره‌ی قبل داریم $A_i \cap A_j \leq_e B_i \cap B_j$؛ یعنی $\{B_i, B_j\}$ مستقل است.

---
[1] independet family

[2] direct sum

[3] direct summand

حال به‌روریختی $f : B_i \oplus B_j \to B_i$ را در نظر می‌گیریم. چون $A_i \leq_e B_i$، بنا به قسمت (۵) گزاره‌ی قبل داریم $f^{-1}(A_i) = A_i \oplus B_j \leq_e B_i \oplus B_j$. به طور مشابه می‌توانیم نشان دهیم $B_i \oplus A_j \leq_e B_i \oplus B_j$. بنابراین با استفاده از قسمت (۲) گزاره‌ی قبل داریم $(A_i \oplus B_j) \cap (B_i \oplus A_j) \leq_e B_i \oplus B_j$؛ یعنی $A_i \oplus A_j \leq_e B_i \cap B_j$. بنابراین برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی J از I داریم $\bigoplus_{i\in J} A_i \leq_e \bigoplus_{i\in J} B_i$ و $\{B_i\}_{i\in J}$ مستقل است.

حال نشان می‌دهیم در حالتی که I نامتناهی می‌باشد نیز حکم برقرار است. واضح است که برای هر $(\circ) \neq D \leq \bigoplus_{i\in I} B_i$، زیرمجموعه‌ی متناهی J از I وجود دارد به طوری که $D \cap \left(\bigoplus_{j\in J} B_j\right) \neq (\circ)$. اما $\bigoplus_{i\in J} A_i \leq_e \bigoplus_{i\in J} B_i$، پس $D \cap \left(\bigoplus_{i\in J} A_i\right) \neq (\circ)$. لذا با استفاده از لم ۱۱.۱.۲، به آسانی می‌توان نشان داد $D \cap \left(\bigoplus_{i\in I} A_i\right) \neq (\circ)$؛ یعنی $\bigoplus_{i\in I} A_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} B_i$. سرانجام برای اتمام اثبات فرض می‌کنیم $J \subseteq I$ متناهی باشد. برای هر $j \in I \setminus J$، $A_j \leq_e B_j$ و همچنین $\bigoplus_{i\in J} A_i \leq_e \bigoplus_{i\in J} B_i$. اما بنا به قسمت (۲) گزاره‌ی قبل داریم:

$$(\circ) = A_j \cap \left(\bigoplus_{i\in J} A_i\right) \leq_e B_j \cap \left(\bigoplus_{i\in J} B_i\right) \Rightarrow B_j \cap \left(\bigoplus_{i\in J} B_i\right) = (\circ).$$

بنابراین $\{B_i\}_{i\in I}$ یک خانواده‌ی مستقل است. $\square$

تعریف زیر در واقع دوگان مفهوم خانواده‌ی مستقل از زیرمدول‌ها می‌باشد که برای نخستین بار توسط تاکیوچی[1] در [۳۵] معرفی شد.

۱۳.۱.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. خانواده‌ی ناتهی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های سره‌ی M را یک **خانواده‌ی هم‌مستقل**[2] می‌نامیم، اگر برای هر $i \in I$ و هر زیر مجموعه‌ی متناهی J از $I \setminus \{i\}$ داشته باشیم $M_i + \bigcap_{j\in J} M_j = M$. همچنین قرارداد می‌کنیم که اشتراک روی مجموعه‌ی تهی ($J = \emptyset$)، برابر

[1] Takeuchi

[2] coindependent family

M است.

۱۴.۱.۲ تذکر. ۱. بنا به قرارداد تعریف قبل، واضح است که $\{N\}$، برای هر زیرمدول سره‌ی N از R-مدول M، یک خانواده‌ی هم‌مستقل است.

۲. هر خانواده‌ی هم‌مستقلِ $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M که بیش از یک عضو داشته باشد، گردایه‌ای از زیرمدول‌های هم‌ماکسیمال است؛ یعنی برای هر $i,j \in I$ که $i \neq j$ داریم $M_i + M_j = M$.

۱۵.۱.۲ لم. فرض کنیم M یک R-مدول و $\{K_i\}_{i\in I}$ یک خانواده‌ی هم‌مستقل از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱. هر زیرخانواده‌ی $\{K_j\}_{j\in J}$ که J یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از I است نیز هم‌مستقل می‌باشد.

۲. فرض کنیم $\{N_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمدول‌های سره‌ی M باشد به‌طوری که به ازای هر $i \in I$، $K_i \subseteq N_i$، آنگاه $\{N_i\}_{i\in I}$ نیز هم‌مستقل است.

۳. اگر L زیرمدول سره‌ای از M باشد به طوری که برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی J از I داشته باشیم $L + \bigcap_{j\in J} K_j = M$، آن‌گاه $\{K_i\}_{i\in I} \cup \{L\}$ یک خانواده‌ی هم‌مستقل است.

اثبات. به گزاره‌ی ۱.۴.۱ از [۲۸] مراجعه شود. $\square$

اکنون با استفاده از مفاهیم تکریختی اساسی و به‌روریختی کوچک، شروط معادلی برای زیرمدول‌های اساسی و کوچک به دست می‌آوریم.

۱۶.۱.۲ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول و K زیرمدولی از آن باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. $K \leq_e M$.

۲. نگاشت شمول $j; K \to M$ یک تکریختی اساسی است.

۳. برای هر R-مدول دلخواه N و برای هر $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$، $(\ker h) \cap K = (\circ)$ نتیجه دهد $\ker h = \circ$.

اثبات. (۲ ⇔ ۱) و (۳ ⇒ ۱) واضح هستند.

(۱ ⇒ ۳): فرض کنیم L زیرمدولی از M باشد که $K \cap L = (\circ)$. به‌روریختی طبیعی $\pi : M \to \frac{M}{L}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $\ker \pi = L$ و لذا $\ker \pi \cap K = (\circ)$. بنابراین طبق (۳)، $\ker \pi = L = (\circ)$. در نتیجه $K \leq_e M$. □

۱۷.۱.۲ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول و K زیرمدولی از آن باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. $K \ll M$.

۲. به‌روریختی طبیعی $\pi : M \to \frac{M}{K}$ یک به‌روریختی کوچک است.

۳. برای هر R-مدول دلخواه N و برای هر $h \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$، $(\mathrm{Im}\, h) + K = M$ نتیجه می‌دهد $\mathrm{Im}\, h = M$.

اثبات. (۲ ⇔ ۱) و (۳ ⇒ ۱) واضح هستند.

(۱ ⇒ ۳): فرض کنیم L زیرمدولی از M باشد که $K + L = M$. تکریختی شمول $j : L \to M$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $\mathrm{Im}\, j = L$ و لذا $\mathrm{Im}\, j + K = M$. بنابراین طبق قسمت ۳، $\mathrm{Im}\, j = L = M$. در نتیجه $K \ll M$. □

۲.۱.۲ زیرمدول‌های مکمل و متمم

۱۸.۱.۲ تذکر. فرض کنیم M یک R−مدول و $N \leq M$. قرار می‌دهیم $\mathcal{A} = \{A \leq M \mid A \cap N = (\circ)\}$. در این صورت $(\circ) \in \mathcal{A}$، پس $\mathcal{A} \neq \emptyset$. حال فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر در $\mathcal{A}$ باشد. قرار می‌دهیم $A' = \bigcup_{i\in I} A_i$، در این صورت واضح است که برای هر $i \in I$، $A_i \subseteq A'$. هم‌چنین

$$A' \cap N = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap N = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap N) = (\circ).$$

بنابراین $A' \in \mathcal{A}$ و در نتیجه طبق لم زرن، $\mathcal{A}$ دارای یک عضو ماکسیمال است.

۱۹.۱.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R−مدول و N زیرمدولی از آن باشد، طبق تذکر قبل زیرمدول K از M وجود دارد به طوری که $K \cap N = (\circ)$ و K نسبت به این خاصیت ماکسیمال است. در این صورت K را مکملِ N در M می‌نامیم. زیرمدول P از M را **زیرمدول مکمل**[1] می‌نامیم، اگر مکمل یک زیرمدول از M باشد.

۲۰.۱.۲ گزاره. فرض کنیم M یک R−مدول و N زیرمدولی از آن باشد. در این‌صورت زیرمدول A از M وجود دارد به‌طوری که $N \oplus A \leq_e M$.

اثبات. اگر $N \leq_e M$، آن‌گاه به وضوح حکم برقرار است، پس فرض کنیم $N \nleq_e M$، لذا زیرمدول سره‌ی A از M وجود دارد به‌طوری که $A\cap N \neq (\circ)$. طبق تذکر ۱۸.۱.۲، زیرمدول A از M وجود دارد که نسبت به خاصیت $A \cap N = (\circ)$ ماکسیمال است. ادعا می‌کنیم $A \oplus N \leq_e M$. به خلاف فرض کنیم زیرمدول ناصفر B از M وجود دارد به‌طوری که $B \cap (A \oplus N) = (\circ)$. لذا $\{A, B, N\}$ یک مجموعه مستقل از زیرمدول‌های M می‌باشد و درنتیجه $(A+B)\cap N = (\circ)$ که این با ماکسیمال بودن A تناقض دارد. $\square$

[1] complement submodule

۲۱.۱.۲ نتیجه. اگر M یک R-مدول و N زیرمدول آن باشد، آن‌گاه زیرمدول A از M وجود دارد به طوری که $\frac{A\oplus N}{A} \leq_e \frac{M}{A}$.

اثبات. طبق لم قبل زیرمدول A از M وجود دارد به طوری که $A \oplus N \leq_e M$ و A نسبت به خاصیت $A \cap N = (0)$ ماکسیمال است. ادعا می‌کنیم $\frac{A\oplus N}{A} \leq_e \frac{M}{A}$. برای اثبات، فرض کنیم $\frac{L}{A} \leq \frac{M}{A}$ و $\frac{L}{A} \cap \frac{A\oplus N}{M} = \bar{0} = A$. بنابراین $A \subseteq L$ و $L \cap (A \oplus N) \subseteq A$. پس بنا به قانون مدولار (لم ۱۳.۲.۱) داریم $A \oplus (L \cap N) = L \cap (A \oplus N) \subseteq A$. بنابراین $L \cap N = (0)$ و چون A نسبت به این خاصیت ماکسیمال است داریم $L = A$ و اثبات تمام است. □

اکنون به زیرمدول‌های کوچک برمی‌گردیم و دوگان زیرمدول مکمل را بیان می‌کنیم.

۲۲.۱.۲ تعریف. فرض کنیم N و L زیرمدول‌هایی از R-مدول M باشند. N را متممِ L در M می‌نامیم، اگر $M = N + L$ و N نسبت به این خاصیت مینیمال باشد. زیرمدول K از M را **زیرمدول متمم**[1] می‌گوییم، اگر متممِ یک زیرمدول از M باشد.

۲۳.۱.۲ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول و N و L دو زیرمدول از M باشند. در این صورت N متممِ L در M است اگر وتنها اگر $M = N + L$ و $N \cap L \ll N$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم N متممِ L در M باشد. بنابراین $M = N + L$ و N نسبت به این خاصیت مینیمال است. حال فرض کنیم $N' \leq M$ و $N = (N \cap L) + N'$. با جایگذاری N در $N + L = M$ داریم $(N \cap L) + N' + L = M$. بنابراین $N' + L = M$ و مینیمال بودن N نتیجه می‌دهد $N' = N$. یعنی $N \cap L \ll N$.

برعکس، فرض کنیم $N + L = M$ و $N \cap L \ll N$. اگر $N' \leq N$ باشد که $N' + L = M$، آن‌گاه $(N'+L)\cap N = N$. در این صورت طبق لم ۷.۱.۲، داریم $N'+(L\cap N) = N$. اما چون $N\cap L \ll N$،

[1] supplement submodule

نتیجه می‌گیریم $N = N'$. لذا N نسبت به خاصیت $N + L = M$ مینیمال است. بنابراین N متممِ L در M است. □

۲۴.۱.۲ تذکر. طبق تذکر ۱۸.۱.۲، زیر مدول مکمل در یک R-مدول دلخواه همیشه وجود دارد ولی زیرمدول متمم این گونه نیست و لزوماً وجود ندارد. برای مثال، هیچ زیرمدول سره‌ی ناصفری از $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$، متمم نیست. زیرا اگر به خلاف فرض کنیم زیرمدول سره و ناصفر N از $\mathbb{Z}$ دارای مکمل L باشد، آن‌گاه طبق گزاره‌ی ۲۳.۱.۲ داریم $N + L = \mathbb{Z}$ و $N \cap L \ll \mathbb{Z}$. اما $\mathbb{Z}$ فاقد زیرمدول ناصفر کوچک است، لذا $N \cap L = (0)$ که این یک تناقض است، زیرا هر دو زیرمدولِ ناصفر از $\mathbb{Z}$ با هم اشتراک غیر صفر دارند.

۳.۱.۲ زیرمدول‌های بسته و هم‌بسته

۲۵.۱.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول و $N \leq M$. N را **زیرمدول بسته‌ی**[1] M می‌نامیم، اگر N فاقد توسیع اساسی در M باشد. یعنی، اگر $N \leq_e B \leq M$، آن‌گاه $N = B$.

۲۶.۱.۲ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. N زیرمدول بسته‌ی M است.

۲. برای یک زیرمدول A از M، N مکملِ A است.

۳. اگر A مکمل N در C باشد، آن‌گاه N مکملِ A در M است.

۴. اگر $N \leq K \leq_e M$، آن‌گاه $\frac{K}{N} \leq_e \frac{M}{N}$.

[1] closed submodule

اثبات. (۳ $\Rightarrow$ ۱) فرض کنیم N زیرمدول بسته‌ی M و A مکملِ N در M باشد. بنابراین A نسبت به خاصیت $A \cap N = (\circ)$ ماکسیمال است. اکنون فرض کنیم D زیرمدولی از M باشد به طوری که $D \cap A = (\circ)$ و $N \subseteq D$. همچنین $K \leq D$ به طوری که $K \cap N = (\circ)$. پس $N \cap (K \oplus A) = (\circ)$. با توجه به ماکسیمال بودن A، $K \oplus A = A$ و در نتیجه $K = (\circ)$؛ یعنی، $N \leq_e D$. اما N زیرمدول بسته‌ی M است، بنابراین $D = N$.

(۲ $\Rightarrow$ ۳) بدیهی است.

(۱ $\Rightarrow$ ۲) فرض کنیم N مکملِ A باشد و $N \leq_e D \leq M$. با توجه به این‌که N نسبت به خاصیت $A \cap N = (\circ)$ ماکسیمال است، داریم $D \cap A \neq (\circ)$. اما $N \leq_e D$، بنابراین $N \cap (A \cap D) = (N \cap A) \cap D \neq (\circ)$ که این یک تناقض است، زیرا $A \cap N = (\circ)$.

(۴ $\Rightarrow$ ۱) فرض کنیم N در M بسته باشد و $N \leq K \leq_e M$. حال فرض کنیم P زیرمدولی از M باشد که $N \subseteq P$ و $\frac{K}{N} \cap \frac{P}{N} = \overline{\circ}$. پس $K \cap P = N$. طبق قسمت (۴) از گزاره‌ی ۶.۱.۲، $K \cap P \leq_e P$؛ یعنی، $N \leq_e P$. اما N بسته است، لذا $N = P$ و در نتیجه $\frac{N}{P} = \overline{\circ}$.

(۱ $\Rightarrow$ ۴) فرض کنیم زیرمدول L از M موجود باشد که $N \leq_e L$ و N' مکملِ N در M باشد. پس $N \oplus N' \leq_e M$. طبق فرض داریم $\frac{N \oplus N'}{N} \leq_e \frac{M}{N}$. چون $N \cap B' \leq_e L \cap N'$ و $N \cap N' = (\circ)$، داریم $L \cap N' = (\circ)$. در نتیجه $\frac{N \oplus N'}{N} \cap \frac{L}{N} = \overline{\circ}$. بنابراین $L = N$؛ یعنی N بسته است. $\square$

۲۷.۱.۲ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول و N، K و L زیرمدول‌هایی از M باشند که $K \subset L$. در این صورت:

۱. زیرمدول بسته‌ی H در M وجود دارد به طوری که $N \leq_e H$.

۲. اگر L در M بسته باشد، آن‌گاه $\frac{L}{K}$ در $\frac{M}{K}$ بسته است.

اثبات. (۱) فرض کنیم H در بین زیرمدول‌های M مانند K' که $N \leq_e K'$ ماکسیمال باشد. به وضوح H بسته است. زیرا اگر $H' \leq M$ موجود باشد که $H \leq_e H'$، آن‌گاه $N \leq_e H'$ که این با ماکسیمال بودن H تناقض دارد.

۲. اگر L زیرمدولی از M باشد که $K \leq H$ و $\frac{H}{K} \leq_e \frac{L}{K}$، آن‌گاه طبق قسمت (۵) از گزاره‌ی ۶.۱.۲، $H \leq_e L$. اما L بسته است پس $L = H$؛ یعنی $\frac{L}{K} = \frac{H}{K}$. □

برای بیان دوگان زیرمدول بسته برای زیرمدول‌های کوچک، ابتدا به تعریف مهم زیر نیاز داریم.

۲۸.۱.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد و $K \leq N \leq M$. در این صورت می‌گوییم N یک **فرابری**[1] از K در M است، هرگاه $\frac{M}{K}$ یک پوش کوچک از $\frac{M}{N}$ باشد. به عبارت دیگر، $\frac{N}{K} \ll \frac{M}{K}$. به وضوح N یک زیرمدول کوچک از M است اگر وتنها اگر N یک فرابری از زیرمدول (۰) باشد یا به طور معادل M یک پوش کوچک از $\frac{M}{N}$ باشد.

۲۹.۱.۲ گزاره. برای زیرمدول‌های $L \subseteq N$ از M، گزاره‌های زیر برقرار هستند:

۱. N یک فرابری از L در M است اگر وتنها اگر برای هر زیرمدول K از M که $K + N = M$، داشته باشیم $K + L = M$. در این حالت برای همه‌ی زیرمدول‌های K از M که $K + N = M$، $N \cap K$ یک فرابری از $L \cap K$ است.

۲. $N \ll M$ اگر وتنها اگر N یک فرابری از L باشد و $L \ll M$.

۳. برای زیرمدول‌های $K \subseteq L \subseteq N$ از M، N یک فرابری از K است اگر وتنها اگر N یک فرابری از L و L یک فرابری از K باشد.

۴. فرض کنیم $G \subseteq H$ زیرمدول‌های M باشند. اگر N یک فرابری از L و H یک فرابری از G باشد، آن‌گاه $G + L = M$. در این حالت $H \cap N$ یک فرابری از $G \cap L$ است.

[1] lies above

اثبات. به گزاره‌ی ۱.۱.۲ از [۲۸] مراجعه شود. □

اکنون آماده‌ایم دوگان مفهوم زیرمدول بسته را بیان کنیم.

۳۰.۱.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. N را زیرمدول **زیرمدول هم‌بسته**[1] می‌نامیم، اگر هیچ زیرمدول سره‌ای، مانند K، از N وجود نداشته باشد که N یک فرابری از K باشد. به عبارت دیگر اگر K زیرمدولی از N باشد که $\frac{N}{K} \ll \frac{M}{K}$، آن‌گاه نتیجه بگیریم $N = K$.

در گزاره‌ی زیر ارتباط بین زیرمدول‌های متمم و هم‌بسته بیان می‌شود.

۳۱.۱.۲ گزاره. فرض کنیم N زیرمدولی از R-مدول M باشد. گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. N یک زیرمدول متمم در M است.

۲. N زیرمدول هم‌بسته است.

۳. برای هر $K \subseteq N$، اگر $K \ll M$، آن‌گاه $K \ll N$.

در این صورت ۳ ⇐ ۲ ⇐ ۱.

اثبات. به گزاره‌ی ۱.۲.۱ از [۲۸] مراجعه شود. □

۲.۲ مدول‌های ساده و نیم‌ساده

۱.۲.۲ تعریف. R-مدول ناصفر M را **ساده**[2] می‌نامند، هرگاه (0) و M تنها زیرمدول‌های M باشند.

[1] coclosed submodule

[2] simple

۲.۲.۲ مثال. فرض کنیم p یک عدد اول باشد. می‌دانیم $\mathbb{Z}_p \cong \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$، در نتیجه $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$-مدول است که زیرمدول‌های آن دقیقا همان ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_p$ هستند. واضح است که $\mathbb{Z}_p$ زیرمدول غیر بدیهی ندارد، لذا $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$-مدول ساده است.

۳.۲.۲ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند:

۱. M یک R-مدول ساده است.

۲. M دوری است و هر عضو ناصفرش مولدی از آن است.

۳. ایده‌آل چپ ماکسیمالی از R مثل $\mathfrak{m}$ وجود دارد به طوری که $M \cong \frac{R}{\mathfrak{m}}$.

اثبات. به قضیه‌ی ۱.۱۴ از [۴] مراجعه شود. □

۴.۲.۲ تذکر. طبق مثال ۲.۲.۲، اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$-مدول ساده است. با توجه به قسمت ۳ قضیه‌ی قبل می‌توان نتیجه گرفت که هر $\mathbb{Z}$-مدول ساده، به ازای عددی اول مثل p، با $\mathbb{Z}_p$ یکریخت است.

یکی از دلایلی که کار کردن با مدول‌های ساده را آسان می‌کند، کم بودن تعداد همریختی‌های بین آن‌ها است. این موضوع در قضیه‌ی زیر بیان شده است که اثبات آن نیز ساده است.

۵.۲.۲ قضیه. فرض کنیم M و N دو R-مدول ساده باشند. در این صورت، هر R-همریختی ناصفر بین M و N، یکریختی است.

از قضیه‌ی قبل فوراً نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

۶.۲.۲ نتیجه (لم شور[1]). اگر M یک R-مدول ساده باشد، آن‌گاه $\mathrm{End}_R(M)$ یک حلقه‌ی تقسیم است.

[1] Schur's lemma

۷.۲.۲ قضیه. فرض کنیم M یک R–مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های ساده‌ی M، با این ویژگی که $M = \sum_{i\in I} M_i$ باشد. در این صورت، به ازای هر زیرمدول K از M، زیرمجموعه‌ای از I مثل I' موجود است که $M = K \oplus \left(\bigoplus_{i\in I'} M_i\right)$.

اثبات. به قضیه‌ی ۴.۱۴ از [۴] مراجعه شود. □

اگر در قضیه‌ی قبل قرار دهیم $K = (0)$، آن‌گاه نتیجه‌ی مهم زیر بدست می‌آید که در واقع تعمیم گزاره‌ای از جبر خطی است که بیان می‌کند: «در هر فضای برداری، هر مجموعه‌ی مولدِ فضا، شامل پایه‌ای برای آن فضاست.»

۸.۲.۲ نتیجه. فرض کنیم M یک R–مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های ساده‌ی M باشد که $M = \sum_{i\in I} M_i$. در این صورت زیرمجموعه‌ای مثل I' از I موجود است که $M = \bigoplus_{i\in I'} M_i$.

۹.۲.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R–مدول باشد. M را **نیم‌ساده**[1] می‌نامیم، اگر هر زیرمدول از M یک جمعوند مستقیم از M باشد. یعنی، به ازای هر زیرمدول N از M، زیرمدولی مانند K از M موجود باشد که $M = N \oplus K$.

۱۰.۲.۲ مثال. هر مدول ساده، نیم‌ساده است. همچنین، مدول (0) که ساده نیست، نیم‌ساده است.

۱۱.۲.۲ گزاره. فرض کنیم M یک R–مدول نیم‌ساده باشد. در این صورت، هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمتی از M نیز نیم‌ساده است.

اثبات. به قضیه‌ی ۵.۱۴ از [۴] مراجعه شود. □

۱۲.۲.۲ قضیه. فرض کنیم M یک R–مدول نیم‌ساده و ناصفر باشد. در این صورت، M شامل زیرمدولی ساده است.

[1] semisimple

اثبات. به قضیه‌ی ۶.۱۴ از [۴] یا لم ۲.۳ از [۲۶] مراجعه شود. □

۱۳.۲.۲ قضیه. فرض کنیم M یک R–مدول ناصفر باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.

۱. M مجموعی از زیرمدول‌های ساده‌ی خود است.

۲. M مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های ساده‌ی خود است.

۳. M نیم‌ساده است.

اثبات. به قضیه‌ی ۷.۱۴ از [۴] یا قضیه‌ی ۲.۴ از [۲۶] مراجعه شود.

□

۱۴.۲.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R–مدول باشد. مجموع زیرمدول‌های ساده‌ی M را **ساکل**[۱] M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Soc}(M)$ نمایش می‌دهیم.

۱۵.۲.۲ تذکر. طبق قضیه‌ی ۱۳.۲.۲، M نیم‌ساده است اگر وتنها اگر $\mathrm{Soc}(M) = M$. در برخی از منابع، مانند [۲۹]، مدول نیم‌ساده به این صورت تعریف شده است. هم‌چنین طبق تعریف، واضح است که $\mathrm{Soc}(M)$ بزرگ‌ترین زیرمدول نیم‌ساده‌ی M است.

۱۶.۲.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R–مدول باشد. اشتراک تمام زیرمدول‌های ماکسیمال M را **رادیکال** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Rad}(M)$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که مفهوم ساکل و رادیکال یک مدول دوگان هم هستند. قضیه‌ی زیر که ارتباط ساکل و رادیکال یک مدول را به ترتیب با زیرمدول‌های اساسی و کوچک یک مدول بیان می‌کند نیز دوگان بودن این دو مفهوم را به خوبی نشان می‌دهد.

[1] socle

۱۷.۲.۲ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول و $\mathrm{Min}(M)$ و $\mathrm{Max}(M)$ به ترتیب، نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های مینیمال و ماکسیمال M باشند. در این صورت:

$$\mathrm{Soc}(M) = \sum_{N \in \mathrm{Min}(M)} N = \bigcap_{K \leq_e M} K$$

و

$$\mathrm{Rad}(M) = \bigcap_{L \in \mathrm{Max}(M)} L = \sum_{P \ll M} P.$$

اثبات. ابتدا برای ساکل ثابت می‌کنیم. طبق تعریف $\mathrm{Soc}(M)$ کافی است تساوی دوم را ثابت کنیم. فرض کنیم N یک زیرمدول مینیمال و K یک زیرمدول اساسی از M باشند. چون N زیرمدولی ناصفر است داریم $N \cap K \leq N$ ≠ (۰). اما N ساده است پس $N \cap K = N$، لذا $N \subseteq K$. بنابراین $\mathrm{Soc}(M) \subseteq \bigcap_{K \leq_e M} K$.

برعکس، فرض کنیم $\bigcap_{K \leq_e M} K = B$. در این صورت طبق تذکر ۱۵.۲.۲، کافی است نشان دهیم B نیم‌ساده است. به این منظور فرض کنیم U زیرمدول دلخواهی از B باشد. واضح است که U زیرمدولی از M است، در نتیجه بنا به گزاره‌ی ۲۰.۱.۲، زیرمدول V از M وجود دارد به طوری که $U \oplus V \leq_e M$. اما $B \subseteq U \oplus V$، پس طبق قانون مدولار می‌توان نوشت:

$$B \subseteq B \cap (U \oplus V) = U \oplus (B \cap V) \xRightarrow{U \subseteq B} B = U \oplus (B \cap V).$$

پس هر زیرمدول از B یک جمعوند مستقیم است و لذا B نیم‌ساده است. بنابراین $\bigcap_{K \leq_e M} K \subseteq \mathrm{Soc}(M)$ و اثبات قسمت اول قضیه تمام است.

برای قسمت دوم، فرض کنیم $P \ll M$ و $L \in \mathrm{Max}(M)$. اگر $P \nsubseteq L$، آن‌گاه $P + L = M$. اما چون $P \ll M$ نتیجه می‌گیریم $L = M$ که با ماکسیمال بودن L در تناقض است. بنابراین برای هر

زیرمدول کوچک P در M و هر زیرمدول ماکسیمال L از M داریم $P \subseteq L$؛ یعنی، $\sum_{P \ll M} \subseteq \mathrm{Rad}(M)$.

اکنون فرض کنیم $x \in M$. اگر $A \leq M$ وجود داشته باشد به طوری که $Rx + A = M$، آن‌گاه می‌توان زیرمدول ماکسیمال B از M را یافت که شامل A است و $x \notin B$. البته در صورتی که A زیرمدول سره‌ای از M باشد. بنابراین اگر $x \in \mathrm{Rad}(M)$، آن‌گاه برای هر زیرمدول ماکسیمال L از M، $x \in L$. پس وضعیت بالا رخ نمی‌دهد. در نتیجه برای هر زیرمدول سره‌ی A از M داریم $Rx + A \neq M$؛ یعنی، Rx زیرمدول کوچک M است. پس $\mathrm{Rad}(M) \subseteq \sum_{P \ll M}$. □

۱۸.۲.۲ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت:

۱. M متناهی مولد است اگر وتنها اگر $\frac{M}{\mathrm{Rad}(M)}$ متناهی مولد باشد و $\mathrm{Rad}(M) \ll M$.

۲. M متناهی نشانده شده است اگر وتنها اگر $\mathrm{Soc}(M)$ متناهی نشانده شده باشد و $\mathrm{Soc}(M) \leq_e M$.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۰.۴ از [۷] مراجعه شود. □

۱۹.۲.۲ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول نیم‌ساده باشد. در این صورت M، $f.g.$ است اگر وتنها اگر $f.e.$ باشد.

اثبات. به گزاره‌ی ۱۰.۶ از [۷] مراجعه شود. □

۳.۲ مدول‌های تجزیه ناپذیر و تجزیه‌ی مدول‌ها

۱.۳.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. زنجیر $(0) = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ از زیرمدول‌های M را که از (0) شروع می‌شود و به M ختم می‌شود یک **زنجیر سره**[1] از زیرمدول‌های M

[1] proper chain

می‌نامیم و n را طول زنجیر تعریف می‌کنیم. اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$، R-مدول‌های خارج قسمتی $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ ساده باشند (یا به طور معادل هر M_i در M_{i+1} ماکسیمال باشد)، زنجیر فوق را یک **سری ترکیبی**[1] برای M می‌نامیم.

۲.۳.۲ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول باشد که یک سری ترکیبی به طول n دارد. در این صورت:

۱. هیچ زنجیر سره‌ای از M وجود ندارد که طولی بیشتر از n داشته باشد.

۲. هر زنجیر سره از زیرمدول‌های M را می‌توانیم با افزودن زیرمدول‌هایی از M به یک سری ترکیبی برای M به طول n توسعه دهیم.

۳. هر زنجیر سره از زیرمدول‌های M که طولی برابر با n داشته باشد، یک سری ترکیبی برای M است.

اثبات. به قضیه‌ی ۴ از فصل ۱۲ کتاب [۴] مراجعه شود. $\square$

۳.۳.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. دو سری ترکیبی

$$(0) = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M \quad , \quad (0) = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_m = M$$

از M را **هم‌ارز**[2] می‌نامیم در صورتی که $n = m$ و جایگشت[3] σ روی $\{1, 2, \ldots, n\}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $\frac{M_{i+1}}{M_i} \cong \frac{N_{\sigma(i)+1}}{N_{\sigma(i)}}$.

۴.۳.۲ قضیه (جردن-هلدر[4]). اگر R-مدول M دارای یک سری ترکیبی باشد، آن‌گاه هر دو سری ترکیبی برای M با هم هم‌ارز هستند.

---
[1] composition series
[2] equivalent
[3] permutation
[4] Jordan-Hölder

اثبات. به قضیه‌ی ۱۱.۳ از [۷] مراجعه شود. □

۵.۳.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. می‌گوییم M **با طول متناهی** است اگر M دارای یک سری ترکیبی باشد. در این صورت طول این سری ترکیبی برای M (یا طول هر سری ترکیبی دیگر M، زیرا طبق قضیه‌ی قبل تمام این طول‌ها با هم مساوی‌اند) را **طول مدول**[1] M می‌نامیم و با نماد $l(M)$ نمایش می‌دهیم. اگر M فاقد سری ترکیبی باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم $l(M) = \infty$.

۶.۳.۲ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت، M با طول متناهی است اگر وتنها اگر M هم نوتری و هم آرتینی باشد.

اثبات. به قضیه‌ی ۵.۱۲ از [۴] مراجعه شود. □

۷.۳.۲ نتیجه. فرض کنیم $(0) \to M \to N \to K \to (0)$ دنباله‌ای دقیق کوتاه از R-مدول‌های ناصفر و R-همریختی‌ها باشد. در این صورت:

۱. N با طول متناهی است اگر وتنها اگر M و K با طول متناهی باشند.

۲. $l(N) = l(M) + l(K)$.

اثبات. ۱. طبق قضیه‌ی قبل و قضیه‌ی ۲۸.۲.۱ واضح است.

۲. به نتیجه‌ی ۱۱.۴ از [۷] مراجعه شود. □

۸.۳.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. M را **تجزیه ناپذیر**[2] نامیم، هرگاه نتوان M را به صورت جمع مستقیم دو زیرمدول ناصفر از M نوشت. به عبارت دیگر M فاقد جمعوند مستقیم غیربدیهی باشد.

[1] length of module

[2] indecomposable

۹.۳.۲ مثال. واضح است که $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول، تجزیه ناپذیر است.

۱۰.۳.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M باشد. اگر $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$، آن‌گاه $\bigoplus_{i\in I} M_i$ را یک **تجزیه‌ی مستقیم**[1] از M می‌نامیم. در صورتی که برای هر $i \in I$، M_i تجزیه ناپذیر باشد، آن‌گاه $\bigoplus_{i\in I} M_i$ را یک **تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر**[2] از M می‌گوییم.

۱۱.۳.۲ مثال. طبق گزاره‌ی ۱۳.۲.۲، هر مدول نیم‌ساده دارای یک تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر است.

۱۲.۳.۲ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد که دارای ACC یا DCC روی جمعوندهای مستقیم خود است. در این صورت M یک تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر متناهی مانند $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ دارد.

اثبات. به گزاره‌ی ۱۰.۱۴ از [۷] مراجعه شود. □

۱۳.۳.۲ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. دو تجزیه‌ی مستقیم $M = \bigoplus_{i\in I} M_i = \bigoplus_{j\in J} N_j$ از M هم‌ارز هستند در صورتی که تابع دوسویی $f : I \to J$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \in I$ داشته باشیم $M_i \cong N_{f(i)}$.

۱۴.۳.۲ مثال. هر دو تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر از یک مدول نیم‌ساده با یکدیگر هم‌ارز هستند.

۱۵.۳.۲ تذکر. به سادگی می‌توان بررسی کرد که رابطه معرفی شده در تعریف قبل روی مجموعه‌ی تمام تجزیه‌های مستقیم R-مدول M، یک رابطه‌ی هم‌ارزی[3] است.

۱۶.۳.۲ گزاره. فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ و $\{N_j\}_{j\in J}$ دو خانواده از زیرمدول‌های ناصفر M باشند به طوری که $M = \bigoplus_{i\in I} M_i = \bigoplus_{j\in J} N_j$ و $\sigma : I \to J$ یک نگاشت باشد. در این صورت دو تجزیه‌ی مستقیم فوق هم‌ارز هستند اگر وتنها اگر خودریختی f از M وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \in I$ داشته باشیم $f(M_i) = N_{\sigma(i)}$.

[1] direct decomposition

[2] indecomposable decomposition

[3] equivalence relation

اثبات. به گزاره‌ی ۱۲.۱ از [۷] مراجعه شود. □

۱۷.۳.۲ تذکر. از گزاره‌ی قبل نتیجه می‌گیریم که دو تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر از یک R-مدول ، الزاما هم‌ارز نیستند، برای مثال [۷، تمرین ۱۲.۴] را ببینید. بنابراین به دنبال شرایطی هستیم که تحت آن‌ها، تجزیه‌های تجزیه ناپذیر یک R-مدول با یکدیگر هم‌ارز باشند و قضیه‌ی بعد در همین راستا است.

۱۸.۳.۲ قضیه (کرول-اشمیت[1]). فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر با طول متناهی باشد. در این صورت M دارای تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر متناهی $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ است به طوری که برای هر تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k$ داریم $n = k$ و جایگشت σ از $\{1, 2 \ldots, n\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $M_{\sigma(i)} \cong N_i$. هم‌چنین برای هر $1 \leq l \leq n$ داریم:

$$M = M_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus M_{\sigma(l)} \oplus N_{l+1} \oplus \cdots \oplus N_n.$$

در واقع تجزیه‌ی $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ مکمل جمعوندهای مستقیم است.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۲.۹ از [۷] مراجعه شود. □

کرول در [۲۵] این سوال را مطرح کرد که آیا قضیه‌ی قبل برای مدول‌های آرتینی برقرار است؟ وارفیلد[2] در [۳۸] نشان داد در صورتی که R یک حلقه‌ی نوتری چپ یا حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه برای هر R-مدول M پاسخ مثبت خواهد بود. اما بعدها نویسندگان [۱۰] نشان دادند که قضیه کرول-اشمیت در حالت کلی برای مدول‌های آرتینی برقرار نیست. در پایان بخش ۲.۴، برای مدول‌های اتمی گزاره‌ای شبیه به قضیه‌ی کرول-اشمیت بیان و اثبات خواهیم کرد.

[1] Krull-Schmidt

[2] Warfield

فصل ۳

بررسی بعدهای یک مدول

۱.۳ بعد یکنواخت

۱.۱.۳ تعریف. R-مدول ناصفرِ M را **مدول یکنواخت**[2] نامیم، در صورتی که هر زیرمدول ناصفر از M اساسی باشد یا به طور معادل اشتراک هر دو زیرمدول ناصفر از M، ناصفر باشد.

۲.۱.۳ مثال. ۱. در مثال ۴.۱.۲ نشان دادیم که هر ایده‌آل ناصفر در یک دامنه‌ی صحیح اساسی است، لذا هر دامنه‌ی صحیح به عنوان یک مدول روی خودش یکنواخت است. برای نمونه، $\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول یکنواخت است.

۲. واضح است که مدول‌های تک‌پیاپی، یکنواخت هستند. برای نمونه $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک مدول یکنواخت است.

۳.۱.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد که هر زیرمدول ناصفر آن دارای یک زیرمدول یکنواخت باشد. در این صورت زیرمدول اساسی N از M وجود دارد که به شکل مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های یکنواخت است؛ یعنی $N = \bigoplus_{i\in I} U_i$ که در آن هر U_i یکنواخت است.

[2] uniform module

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{S}$ در بین مجموعه‌های مستقل از زیرمدول‌های یکنواخت، ماکسیمال باشد. نشان می‌دهیم $\bigoplus_{V\in\mathcal{S}} V$ یک زیرمدول اساسی از M است. فرض کنیم K زیرمدول ناصفری از M باشد. طبق فرض K دارای زیرمدول یکنواخت K' است. اگر $K' \cap \bigoplus_{V\in\mathcal{S}} V = (0)$، آنگاه $\mathcal{S} \cap \{K'\}$ مستقل خواهد بود و این با ماکسیمال بودن $\mathcal{S}$ تناقض دارد. پس $K' \cap \bigoplus_{V\in\mathcal{S}} V \neq (0)$ و در نتیجه $K \cap \bigoplus_{V\in\mathcal{S}} V \neq (0)$؛ یعنی $\bigoplus_{V\in\mathcal{S}} V \leq_e M$. □

۴.۱.۳ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد یکنواخت**[1] یا **بعد گلدی**[2] M را که با نماد $udim(M)$ نمایش می‌دهیم، کوچک‌ترین عدد اصلی تعریف می‌کنیم که بزرگتر یا مساوی عدد اصلی تمام خانواده‌های مستقل از زیرمدول‌های M است.

۵.۱.۳ تذکر. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. طبق تعریف قبل واضح است که M دارای بعد یکنواخت متناهی است، اگر M شامل هیچ جمع مستقیمِ نامتناهی از زیرمدول‌های خود نباشد. به عبارت دیگر اگر $\bigoplus_{i\in I} M_i$ مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های M باشد، آنگاه $|I|$ متناهی باشد. هم‌چنین واضح است که اگر M دارای بعد یکنواخت متناهی باشد، آنگاه هر زیرمدول از M نیز دارای بعد یکنواخت متناهی است.

۶.۱.۳ مثال. هر مدول نوتری (آرتینی) ناصفر دارای بعد یکنواخت متناهی است، زیرا اگر $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های ناصفر مدول نوتری (آرتینی) M باشد، آنگاه زنجیرهای نامتناهی

$$M_1 \subsetneq M_1 \oplus M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \subsetneq \cdots ,$$

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i \supsetneq \bigoplus_{i=2}^{\infty} M_i \supsetneq \cdots \supsetneq \bigoplus_{i=n}^{\infty} M_i \supsetneq \cdots\right)$$

را خواهیم داشت که با نوتری (آرتینی) بودن M تناقض دارند. بنابراین M شامل هیچ حاصل جمع نامتناهی

[1] uniform dimension

[2] Goldie dimension

از زیرمدول‌های ناصفر خود نیست. لذا M دارای بعد یکنواخت متناهی است.

۷.۱.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت $udim(M) = 1$ اگر وتنها اگر M یکنواخت باشد.

اثبات. واضح است. □

۸.۱.۳ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. اگر M دارای بعد یکنواخت متناهی باشد، آن‌گاه یک زیرمدول یکنواخت دارد.

اثبات. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. به خلاف فرض کنیم M فاقد زیرمدول یکنواخت باشد. چون M یکنواخت نیست، زیرمدول‌های ناصفر N_1 و N'_1 از M وجود دارند به طوری که $N_1 \oplus N'_1 \subseteq M$.

چون N'_1 یکنواخت نیست، زیرمدول‌های ناصفر N_2 و N'_2 از N'_1 وجود دارند که $N_2 \oplus N'_2 \subseteq N'_1$ و در نتیجه داریم $N_1 \oplus N_2 \oplus N'_2 \subseteq M$.

چون N'_2 یکنواخت نیست، زیرمدول‌های ناصفر N_3 و N'_3 از N'_2 وجود دارند که $N_3 \oplus N'_3 \subseteq N'_2$ و در نتیجه داریم $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus N'_3 \subseteq M$. با ادامه این روند مجموع مستقیم نامتناهی $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus \cdots$ از زیرمدول‌های ناصفر M را به دست می‌آوریم که تناقض است. بنابراین M شامل یک زیرمدول یکنواخت است. □

۹.۱.۳ نتیجه. اگر M یک R-مدول دارای بعد یکنواخت متناهی باشد، آن‌گاه هر زیرمدول ناصفر از M دارای زیرمدول یکنواخت است.

اثبات. فرض کنیم M دارای بعد یکنواخت متناهی باشد. پس M شامل هیچ مجموع مستقیم نامتناهی از زیرمدول‌های ناصفر نیست. واضح است که هر زیرمدول ناصفر مانند N از M نیز این خاصیت را دارد، یعنی N دارای بعد یکنواخت متناهی است. پس طبق قضیه‌ی قبل، N دارای زیرمدول یکنواخت است. □

۱۰.۱.۳ نتیجه. هر R-مدول آرتینی (نوتری) ناصفر دارای یک زیرمدول یکنواخت است.

اثبات. طبق مثال ۶.۱.۳ و قضیه‌ی ۸.۱.۳ واضح است. □

قضیه‌ی زیر که در واقع محکی برای زیرمدول‌های اساسی است، بیان می‌کند که اگر شرط قضیه برای یک R-مدول مانند M برقرار باشد، آن‌گاه برای نشان دادن اساسی بودن یک زیرمدول N در M، به جای این‌که اشتراک N با تمام زیرمدول‌های ناصفر M را بررسی کنیم، کافی است اشتراک N با زیرمدول‌های یکنواخت آن را در نظر بگیریم و نشان دهیم این اشتراک ناصفر است.

۱۱.۱.۳ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول باشد که شامل یک زیرمدول اساسی به شکل $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ باشد که در آن هر U_λ یک زیرمدول یکنواخت از M است. در این صورت زیرمدول دلخواه N از M اساسی است اگر وتنها اگر برای هر $\lambda \in \Lambda$ داشته باشیم $N \cap U_\lambda \neq (\circ)$.

اثبات. به قضیه‌ی ۵.۶ از [۹] مراجعه شود. □

اکنون قضیه‌ای مهم برای بعد یکنواخت متناهی بیان می‌کنیم که در ادامه به آن نیاز خواهیم داشت.

۱۲.۱.۳ قضیه. گزاره‌های زیر برای R-مدول M معادل هستند:

۱. $udim(M) < \infty$.

۲. عدد طبیعی n و زیرمدول‌های یکنواخت $U_۱, U_۲, \ldots, U_n$ وجود دارند به طوری که $\{U_۱, U_۲, \ldots, U_n\}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M هستند و $U_۱ \oplus U_۲ \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$.

۳. $udim(M) = n$.

۴. برای هر زنجیر صعودی $A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geqslant k$ داریم $A_k \leq_e A_i$.

۵. M دارای ACC روی زیرمدول‌های مکمل خود است.

۶. برای هر زنجیر نزولی $A_۱ \supseteq A_۲ \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geqslant k$ داریم $A_i \leq_e A_k$.

اثبات. (۱ $\Rightarrow$ ۲) با توجه به نتیجه‌ی ۹.۱.۳ و گزاره‌ی ۳.۱.۳، واضح است.

(۲ $\Rightarrow$ ۳) به خلاف فرض کنیم M شامل مجموع مستقیم $K_۱ \oplus \cdots \oplus K_{n+۱}$ از زیرمدول‌های ناصفر باشد. در این صورت $K_۱ \cap (K_۲ \oplus \cdots \oplus K_{n+۱}) = (۰)$، لذا $K_۲ \oplus \cdots \oplus K_{n+۱}$ زیرمدولی اساسی نیست. بنابراین طبق قضیه‌ی ۱۱.۱.۳، عدد $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود دارد به طوری که $U_i \cap (K_۲ \oplus \cdots \oplus K_{n+۱}) = (۰)$. بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد $i = ۱$؛ یعنی، $U_۱ \cap (K_۲ \oplus \cdots \oplus K_{n+۱}) = (۰)$. پس داریم $K_۲ \cap (U_۱ \oplus K_۳ \oplus \cdots \oplus K_{n+۱}) = (۰)$. بنابراین $U_۱ \oplus K_۳ \oplus \cdots \oplus K_{n+۱}$ زیرمدول اساسی نیست. مجدداً طبق قضیه‌ی ۱۱.۱.۳، عدد $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود دارد به طوری که $U_i \cap (U_۱ \oplus K_۳ \oplus \cdots \oplus K_{n+۱}) = (۰)$، به طور مشابه بدون کاستن از کلیت قرار می‌دهیم $i = ۲$. در این صورت با ادامه این روند و پس از n مرحله مجموع مستقیم $U_۱ \oplus U_۲ \oplus \cdots \oplus K_{n+۱}$ را خواهیم داشت. اما $U_۱ \oplus U_۲ \oplus \cdots \oplus U_n$ زیرمدولی اساسی است، پس داریم $(U_۱ \oplus U_۲ \oplus \cdots \oplus U_n) \cap K_{n+۱} \neq (۰)$ که این یک تناقض است. بنابراین هر زیرمجموعه‌ی مستقل از زیرمدول‌های ناصفر M حداکثر n عضو دارد؛ یعنی $udim(M) = n$.

(۳ $\Rightarrow$ ۱) واضح است.

تا کنون ثابت کردیم قسمت‌های ۱، ۲ و ۳ با یکدیگر هم‌ارز هستند. در ادامه نشان می‌دهیم موارد ۴ و ۵ نیز با سه گزاره اول هم‌ارز هستند.

(۳ $\Rightarrow$ ۴) فرض کنیم $A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M باشد به طوری که برای هر i، $A_i \nleq_e M$. طبق قضیه‌ی ۱۱.۱.۳، برای هر i، عدد $۱ \leqslant j_i \leqslant n$ وجود دارد به طوری که $A_i \cap U_{j_i} = (۰)$. پس برای هر j_i داریم $A_۱ \cap U_{j_i} = (۰)$. بنابراین واضح است که

$A_1 \cap (U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n) = (0)$. در نتیجه M شامل مجموع مستقیم $A_1 \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$ است که تناقض است.

(۵ $\Rightarrow$ ۴) فرض کنیم $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های مکمل M باشد. بنا به فرض عدد طبیعی k وجود دارد که برای هر $i \geqslant k$، $A_k \leq_e A_i$. اما طبق گزاره‌ی ۲۶.۱.۲، هر A_i زیرمدولی بسته است. بنابراین برای هر $i \geqslant k$، $A_i = A_k$.

(۱ $\Rightarrow$ ۵) به خلاف فرض کنیم $N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots$ زیرمدولی از M باشد و H_1 مکمل $N_2 \oplus N_3 \oplus \cdots$ شامل N_1 باشد. پس $H_1 \cap (N_2 \oplus N_3 \oplus \cdots) = (0)$ و به وضوح $(H_1 \oplus N_2) \cap (N_3 \oplus N_4 \oplus \cdots) = (0)$.

حال فرض کنیم H_2 مکمل $N_3 \oplus N_4 \oplus \cdots$ شامل $H_1 \oplus N_2$ باشد واضح است که داریم $(H_2 \oplus N_3) \cap (N_4 \oplus N_5 \oplus \cdots) = (0)$. بنابراین با ادامه‌ی این روند زنجیر صعودی نامتناهی $H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq \cdots$ از زیرمدول‌های مکمل را به دست می‌آوریم که با فرض متناقض است.

اکنون نشان می‌دهیم ۶ با ۱ هم‌ارز است.

(۶ $\Rightarrow$ ۱) فرض کنیم $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ یک زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M باشد هم‌چنین فرض کنیم A'_1 مکمل A_1 باشد و $A_1 \cap A'_1 = (0)$. بدیهی است که $A_2 \cap A'_1 = (0)$. اکنون A'_1 را به زیرمدول A'_2؛ یعنی، مکمل A_2 توسیع می‌دهیم. پس $A_2 \cap A'_2 = (0)$. اگر این روش را ادامه دهیم یک زنجیر صعودی از زیرمدول‌های مکمل داریم که طبق قسمت (۵)، عدد طبیعی k وجود دارد که برای هر $i \geqslant k$ داریم $A'_i = A'_k$. حال ثابت می‌کنیم برای هر $i \geqslant k$، $A_i \leq_e A_k$. فرض کنیم چنینی نباشد، بنابراین عددی مانند $j \geqslant k$ و زیرمدول ناصفر B_k از A_k وجود دارند به طوری که $B_k \cap A_j = (0)$. بنابراین $B_k \subseteq A'_j = A'_k$، زیرا A'_j مکمل A_j است. پس $B_k = B_k \cap A_k \subseteq A'_k \cap A_k = (0)$. در نتیجه $B_k = (0)$ که تناقض است.

(۱ $\Rightarrow$ ۶) فرض کنیم بعد یکنواخت M متناهی نباشد. بنابراین M شامل یک مجموع مستقیم نامتناهی

مثل $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ از زیرمدول‌های ناصفر خود است. بنابراین زنجیر

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \supsetneq \sum_{i=2}^{\infty} A_i \supsetneq \sum_{i=3}^{\infty} A_i \supsetneq \cdots$$

را خواهیم داشت که واضح است این زنجیر با قسمت (۶) تناقض دارد. □

۱۳.۱.۳ گزاره. فرض کنیم M، M_1 و M_2 یک R-مدول دارای بعد یکنواخت متناهی باشد. در این صورت:

۱. اگر $A \leq M$، آن‌گاه $udim(A) \leqslant udim(M)$ و تساوی برقرار است اگر وتنها اگر $A \leq_e M$.

۲. $udim(M_1 \oplus M_2) = udim(M_1) + udim(M_2)$.

۳. برای هر زنجیر صعودی $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geqslant k$ داریم $udim(A_i) = udim(A_k)$.

۴. اگر A یک زیرمدول M و $f : A \to A$ یک تکریختی باشد، آن‌گاه $f(A) \leq_e A$.

اثبات. (۱) واضح است که اگر M شامل هیچ مجموع مستقیم نامتناهی از زیرمدول‌های خود نباشد، آن‌گاه هر زیرمدول A از M نیز این‌گونه است، یعنی $udim(A) \leqslant udim(M)$.

اکنون فرض کنیم M دارای بعد یکنواخت متناهی و A یک زیرمدول اساسی در M باشد. پس طبق بند اول اثبات و قضیه‌ی ۱۲.۱.۳، A شامل یک زیرمدول اساسی $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$ است که در آن هر U_i زیرمدولی یکنواخت است. همچنین $udim(A) = n$. چون A نیز در M اساسی است، پس طبق قسمت (۱) گزاره‌ی ۶.۱.۲، $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$. در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۱۲.۱.۳ داریم $udim(M) = n$.

برعکس، فرض کنیم $udim(A) = udim(M) = n$. بنابراین A شامل زیرمدول اساسی $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ است که هر V_i یکنواخت است. همچنین زیرمدول اساسی $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$ از M وجود دارد که هر U_i

یکنواخت است. اگر $M \not\leq_e A$، آنگاه طبق قضیه‌ی ۱۱.۱.۳، $1 \leqslant i \leqslant n$ وجود دارد که $A \cap U_i = (0)$. پس $U_i \cap (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) = (0)$. بنابراین $U_1 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \leq M$ و این با فرض $udim(M) = n$ تناقض دارد. پس $A \leq_e M$.

(۲) اگر M_1 یا M_2 دارای بعد یکنواخت نامتناهی باشد، آنگاه به وضوح حکم برقرار است. پس فرض کنیم $udim(M_1) = n < \infty$ و $udim(M_2) = m < \infty$. طبق قضیه‌ی ۱۲.۱.۳، $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M_1$ و $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m \leq_e M_2$ وجود دارند به طوری که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ و $1 \leqslant j \leqslant m$، U_i و U_j یکنواخت هستند. بنا به قضیه‌ی ۱۲.۱.۲، داریم:

$$U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_m \leq_e M_1 \oplus M_2.$$

بنابراین از قضیه‌ی ۱۲.۱.۳، نتیجه می‌گیریم $M_1 \oplus M_2$ دارای بعد یکنواخت متناهی است و همچنین $udim(M_1 \oplus M_2) = n + m$.

(۳) چون $udim(M) < \infty$، طبق قضیه‌ی ۱۲.۱.۳، برای هر زنجیر صعودی $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد که برای هر $i \geqslant k$، $A_k \leq_e A_i$. در نتیجه طبق قسمت (۱)، برای هر $i \geqslant k$ داریم $udim(A_i) = udim(A_k)$.

(۴) بنا به قسمت (۱)، $udim(A) < \infty$. چون $A \cong f(A)$ داریم $udim(A) = udim(f(A))$. بنابراین مجددا طبق قسمت (۱)، $f(A) \leq_e A$. □

۱۴.۱.۳ نتیجه. فرض کنیم M یک R-مدول و A زیرمدولی اساسی از M باشد. M دارای بعد یکنواخت متناهی است اگر وتنها اگر A دارای بعد یکنواخت متناهی باشد و در این صورت $udim(A) = udim(M)$.

اثبات. بنا به قسمت (۱) گزاره‌ی قبل، کافی است اثبات عکس قضیه را نشان دهیم. پس فرض کنیم $A \leq_e M$ و $udim(A) = n$. طبق قضیه‌ی ۱۲.۱.۳، مجموع مستقیم $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \leq_e A$

وجود دارد به طوری که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، A_i یک زیرمدول یکنواخت A است. چون $M \leq_e A$، طبق قسمت (۱) گزاره‌ی ۶.۱.۲ داریم $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \leq_e M$. بنابراین طبق قضیه‌ی ۱۲.۱.۳ داریم $udim(M) = n = udim(A)$. □

۱۵.۱.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول و $N \leq M$. اگر N و $\frac{M}{N}$ دارای بعد یکنواخت متناهی باشند. آن‌گاه M نیز دارای بعد یکنواخت متناهی است و $udim(M) \leqslant udim\left(\frac{M}{N}\right) + udim(N)$.

اثبات. فرض کنیم K مکمل N در M باشد. پس طبق گزاره‌ی ۲۰.۱.۲، $N \oplus K \leq_e M$ و داریم:

$$K \cong \frac{N \oplus K}{N} \subseteq \frac{M}{N} \Rightarrow udim(K) \leqslant udim\left(\frac{M}{N}\right).$$

چون $N \oplus K \leq_e M$، طبق قسمت‌های (۱) و (۲) از گزاره‌ی ۱۳.۱.۳ و نتیجه‌ی قبل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} udim(M) = udim(N \oplus K) &= udim(N) + udim(K) \\ &\leqslant udim(N) + udim\left(\frac{M}{N}\right). \end{aligned}$$

بنابراین اثبات تمام است. □

۱۶.۱.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول با بعد یکنواخت متناهی باشد. زیرمدول K از M بسته است اگر وتنها اگر K و $\frac{M}{K}$ دارای بعد یکنواخت متناهی باشند و $udim(M) = udim(K) + udim\left(\frac{M}{K}\right)$.

اثبات. به قسمت (۱) قضیه‌ی ۵.۱۰ از [۹] مراجعه شود. □

۲.۳ دوگان بعد یکنواخت

یکی از اولین تلاش‌ها برای تعریف دوگان بعد یکنواخت توسط فلوری[۱] در سال ۱۹۷۴ انجام شد. او در [۱۱] دوگان خود از بعد یکنواخت را بعد پوششی[۲] نامید و مفهوم مدول پوچ را به عنوان دوگان مدول یکنواخت تعریف کرد. پس از او ریاضی‌دانان دیگری مانند تاکیوچی [۳۵]، ورادارانجان[۳] [۳۷]، ریتر[۴] [۳۱] و ... به مطالعه‌ی دوگان بعد یکنواخت پرداخته‌اند و مقالات بسیاری در این زمینه وجود دارد. اما در نهایت کریستین لامپ[۵] در رساله دکتری خود [۲۸]، با بررسی رویکردهای مختلف به دوگان بعد یکنواخت، بعد پوچ را به عنوان دوگان بعد یکنواخت معرفی کرد که مطالب این بخش با استفاده از این مرجع گردآوری شده است. در فصل بعد نشان می‌دهیم هر مدول اتمی یک مدول پوچ می‌باشد لذا در این بخش به طور اجمالی به بررسی مدول‌های پوچ و بعد پوچ مدول‌ها می‌پردازیم.

۱.۲.۳ تعریف. R-مدول ناصفر M را **مدول پوچ**[۶] می‌نامیم، اگر هر زیرمدول سره از M در آن کوچک باشد یا به طور معادل M را نتوان به صورت مجموع دو زیرمدول سره‌اش نوشت.

۲.۲.۳ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. M را **مدول موضعی**[۷] می‌نامیم، اگر M دقیقا یک زیرمدول ماکسیمال داشته باشد.

۳.۲.۳ تذکر.

۱. با استفاده از تذکر ۱۴.۱.۲، به سادگی می‌توان ثابت کرد که M یک R-مدول پوچ است اگر وتنها اگر هر خانواده‌ی هم‌مستقل از زیرمدول‌های M تک عضوی باشد.

۲. طبق تعریف ۸.۳.۲، واضح است که هر مدول پوچ، تجزیه ناپذیر است.

[1] Fleury

[2] spanning dimension

[3] Varadarajan

[4] Reiter

[5] Christian Lomp

[6] hollow module

[7] local module

۳. هر مدول موضعی یک مدول پوچ است، زیرا اگر M یک مدول موضعی و N زیرمدول ماکسیمال آن باشد، آنگاه N شامل تمام زیرمدول‌های سره‌ی M است پس واضح است که $N \ll M$ و در نتیجه هر زیرمدول سره از M نیز در M کوچک است. بنابراین M یک مدول پوچ است.

۴. مدول‌های ساده و مدول‌های تک‌پیاپی مانند $\mathbb{Z}_{p^\infty}$، مثال‌های دیگری از مدول‌های پوچ هستند.

۴.۲.۳ لم. اگر M یک R-مدول پوچ باشد، آنگاه هر مدول خارج قسمتی از M نیز پوچ است.

اثبات. فرض کنیم N یک زیرمدول دلخواه از M باشد. نشان می‌دهیم $\frac{M}{N}$ یک مدول پوچ است. به این منظور فرض کنیم $\frac{K}{N}$ زیرمدول سره‌ای از $\frac{M}{N}$ باشد و $\frac{L}{N}$ زیرمدولی از $\frac{M}{N}$ باشد که $\frac{K}{N} + \frac{L}{N} = \frac{M}{N}$. پس $\frac{K+L}{M} = \frac{M}{N}$ و در نتیجه $K + L = M$. اما چون M پوچ است، $K \ll M$ و لذا $L = M$؛ یعنی $\frac{L}{N} = \frac{M}{N}$. بنابراین $\frac{K}{N} \ll \frac{M}{N}$ و $\frac{M}{N}$ یک مدول پوچ است. □

۵.۲.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت:

۱. M پوچ است اگر وتنها اگر هر مدول خارج قسمتی از M تجزیه ناپذیر باشد.

۲. گزاره‌های زیر معادل هستند:

الف. M موضعی است.

ب. M پوچ و دوری است.

ج. M پوچ است و $\mathrm{Rad}(M) \neq M$.

اثبات. به گزاره‌ی ۱.۱.۳ از [۲۸] مراجعه شود. □

گزاره‌ی زیر که در واقع دوگان گزاره‌ی ۳.۱.۳ می‌باشد، سه مفهوم خانواده‌ی هم‌مستقل، مدول پوچ و زیرمدول کوچک را به هم مرتبط می‌سازد.

۶.۲.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد به طوری که هر مدول خارج قسمتی ناصفرِ M دارای یک مدول خارج قسمتی پوچ باشد. در این صورت M شامل یک مجموعه‌ی هم‌مستقل $\{K_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های خود می‌باشد به طوری که $\bigcap_{i\in I} K_i \ll M$ و برای هر $i \in I$، $\frac{M}{K_i}$ یک مدول پوچ است.

اثبات. به گزاره‌ی ۳.۱.۶ از [۲۸] مراجعه شود. □

۷.۲.۳ قضیه. برای R-مدول ناصفر M گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. M شامل هیچ خانواده‌ی هم‌مستقل نامتناهی از زیرمدول‌هایش نیست.

۲. M دارای یک خانواده‌ی هم‌مستقل متناهیِ $\{N_1, \ldots, N_n\}$ است به طوری که $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \ll M$ و برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $\frac{M}{N_i}$ یک مدول پوچ است.

۳. $\sup\{k \mid$ شامل یک خانواده‌ی هم‌مستقل با عدد اصلی k است $M\} = n < \infty$.

۴. برای هر زنجیر نزولی $N_1 \supset N_2 \supset \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی j وجود دارد به طوری که برای هر $k \geq j$، N_j یک فرابری از N_k در M است.

۵. یک به‌روریختی کوچک از M به مجموع مستقیمی از n مدول خارج قسمتی پوچ، وجود دارد.

اثبات. به گزاره‌ی ۳.۱.۲ از [۲۸] مراجعه شود. □

۸.۲.۳ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. گوییم M دارای **بعد پوچ**[1] متناهی است، اگر در یکی از شرایط معادل قضیه‌ی قبل صدق کند. هم‌چنین عدد n در قضیه‌ی قبل را بعد پوچ M می‌نامیم و با نماد $hdim(M)$ نمایش می‌دهیم. اگر $M = (0)$، آن‌گاه می‌نویسیم $hdim(M) = 0$ و اگر M دارای بعد پوچ متناهی نباشد، قرار می‌دهیم $hdim(M) = \infty$.

[1] hollow dimension

۹.۲.۳ تذکر. ۱. طبق قسمت (۱) از تذکر ۳.۲.۳، مدول M پوچ است اگر وتنها اگر هر خانواده‌ی هم‌مستقل از زیرمدول‌های M تک عضوی باشد. بنابراین طبق قضیه‌ی ۷.۲.۳، واضح است که M پوچ است اگر وتنها اگر $hdim(M) = ۱$.

۲. هر مدول آرتینی دارای بعد پوچ متناهی است، زیرا اگر M یک مدول آرتینی و $N_۱ \supset N_۲ \supset \cdots$ یک زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M باشد، آن‌گاه عدد طبیعی j وجود دارد به طوری که برای هر $k \geq j$، $N_k = N_j$. بنابراین واضح است که $\frac{M}{N_k} \ll N_k = \frac{N_j}{N_k}$؛ این یعنی N_j یک فرابری از N_k در M است. در نتیجه بنا به قسمت (۴) از قضیه‌ی قبل، M دارای بعد پوچ متناهی است.

درگزاره‌ی زیر به برخی از خواص بعد پوچ اشاره می‌شود. این گزاره، دوگان گزاره‌ی ۱۵.۱.۳ و دو قسمت اول گزاره‌ی ۱۳.۱.۳ می‌باشد.

۱۰.۲.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت:

۱. اگر $N \ll M$، آن‌گاه $hdim(M) = hdim\left(\frac{M}{N}\right)$. برعکس، اگر M دارای بعد پوچ متناهی باشد و $hdim(M) = hdim\left(\frac{M}{N}\right)$، آن‌گاه $N \ll M$.

۲. اگر $M = M_۱ \oplus \cdots \oplus M_k$، آن‌گاه $hdim(M) = hdim(M_۱) + \cdots + hdim(M_k)$.

۳. اگر N و $\frac{M}{N}$ دارای بعد پوچ متناهی باشند، آن‌گاه M نیز دارای بعد پوچ متناهی است.

۴. اگر M دارای بعد پوچ متناهی باشد، آن‌گاه M دارای ACC و DCC روی زیرمدول‌های هم‌بسته است.

اثبات. برای قسمت‌های ۱ تا ۳ به گزاره‌ی ۳.۱.۱۰ و برای قسمت ۴ به قضیه‌ی ۳.۵.۳ از [۲۸] مراجعه شود. □

۳.۳ بعد کرول

۱.۳.۳ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بُعد کرول**[1] M را با نماد $k\!-\!dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $k\!-\!dim(M) = -۱$ اگر وتنها اگر $M = (۰)$.
- فرض کنیم بعد کرول مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $k\!-\!dim(M) = \alpha$ درصورتی که $k\!-\!dim(M) \not\prec \alpha$ و برای هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M مانند $M_۱ \supseteq M_۲ \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geqslant k$ داشته باشیم $k\!-\!dim\left(\frac{M_n}{M_{n+۱}}\right) \prec \alpha$.

ممکن است عدد ترتیبی α با خاصیت $k\!-\!dim(M) = \alpha$ وجود نداشته باشد، در این صورت گوییم M دارای بعد کرول نیست.

۲.۳.۳ قرارداد. اگر R یک حلقه باشد، آن‌گاه $k\!-\!dim(R)$ به معنی بعد کرول حلقه‌ی R به عنوان یک R-مدول می‌باشد.

۳.۳.۳ تذکر. اثبات همه‌ی موارد زیر ساده هستند و به آسانی از تعریف نتیجه می‌شوند:

۱. عدد ترتیبی α در تعریف بعد کرول، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $k\!-\!dim(M) = \alpha$ است.

۲. R-مدول M آرتینی است اگر وتنها اگر $k\!-\!dim(M) = ۰$. برای مثال $k\!-\!dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = ۰$.

۳. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $k\!-\!dim(M)$ وجود داشته باشد آن‌گاه $k\!-\!dim(N) \preceq k\!-\!dim(M)$ و $k\!-\!dim\left(\frac{M}{N}\right) \preceq k\!-\!dim(M)$.

[1] Krull dimension

۴. اگر M یک R-مدول باشد و $k-dim(M) = ۱$، آن‌گاه برای هر زنجیر $M_۱ \supseteq M_۲ \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geqslant k$، $\frac{M_i}{M_{i+۱}}$ آرتینی است. برای مثال $k-dim(\mathbb{Z}) = ۱$.

اکنون بعضی از خواص مهم بعد کرول بیان خواهیم کرد. ابتدا از گزاره‌ی زیر آغاز می‌کنیم که ارتباط بین بعد یکنواخت و بعد کرول یک مدول را نشان می‌دهد.

۴.۳.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر بعد کرول M وجود داشته باشد، آن‌گاه M دارای بعد یکنواخت متناهی است.

اثبات. فرض کنیم M یک R-مدول باشد و $k-dim(M) = \alpha$. با استفاده از استقرای ترامتناهی روی α، حکم را اثبات می‌کنیم. اگر $\alpha = -۱$، آن‌گاه $M = (۰)$ و حکم واضح است. اکنون فرض کنیم هر مدول با بعد کرول کمتر از α، دارای بعد یکنواخت متناهی باشد. اگر M دارای بعد یکنواخت متناهی نباشد، آن‌گاه یک مجموع مستقیم نامتناهی از زیرمدول‌های M مانند $\bigoplus_{i=۱}^{\infty} M_i$ وجود دارد. برای هر عدد طبیعی n قرار می‌دهیم $N_n = \bigoplus_{i=۱}^{\infty} M_{i.۲^n}$. بنابراین زنجیر نزولی $N_۱ \supseteq N_۲ \supseteq \cdots \supseteq N_n \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M را خواهیم داشت. چون M دارای بعد کرول است، پس عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq k$ داریم $k-dim\left(\frac{N_n}{N_{n+۱}}\right) \prec \alpha$. لذا طبق فرض استقرا، $\frac{N_n}{N_{n+۱}}$ دارای بعد یکنواخت متناهی است. اما

$$\frac{N_n}{N_{n+۱}} = \frac{\left(\bigoplus_{i=۱}^{\infty} M_{(۲i-۱)۲^n}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=۱}^{\infty} M_{i.۲^{n+۱}}\right)}{\bigoplus_{i=۱}^{\infty} M_{i.۲^{n+۱}}} \cong \bigoplus_{i=۱}^{\infty} M_{(۲i-۱)۲^n}$$

یعنی $\frac{N_n}{N_{n+۱}}$ شامل یک جمع مستقیم نامتناهی است که تناقض است. $\square$

۵.۳.۳ لم. اگر هر زیرمدول سره از R-مدول M دارای بعد کرول باشد آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است و $k-dim(M) = \sup\{k-dim(N) \mid N \subsetneq M\}$.

اثبات. قرار می‌دهیم $\alpha = \sup\{k-dim(N) \mid N \lneq M\}$. اکنون فرض کنیم

$$M \supsetneq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

یک زنجیر نزولی دلخواه از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت $M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$ یک زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M_1 خواهد بود. چون طبق فرض M_1 دارای بعد کرول است، پس عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $n \geqslant k$ داریم $k-dim\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right) \prec k-dim(M_1) \preceq \alpha$؛ پس طبق تعریف، $k-dim(M) \preceq \alpha$. از طرفی طبق قسمت ۳ از تذکر ۳.۳.۳ داریم $\alpha \preceq k-dim(M)$، بنابراین $k-dim(M) = \alpha$. □

۶.۳.۳ لم. اگر هر مدول خارج قسمتی سره از R-مدول M دارای بعد کرول باشد آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است و $k-dim(M) \preceq \sup\left\{k-dim\left(\frac{M}{N}\right) \mid (0) \neq N \leq M\right\} + 1$.

اثبات. فرض کنیم $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$ یک زنجیر نزولی دلخواه از زیرمدول‌های M باشد. بنابراین برای هر i داریم $\frac{M_i}{M_{i+1}} \subsetneq \frac{M}{M_{i+1}}$. درنتیجه:

$$k-dim\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right) \preceq k-dim\left(\frac{M}{M_{i+1}}\right) \preceq \sup\left\{k-dim\left(\frac{M}{N}\right) \;\middle|\; (0) \neq N \leq M\right\}.$$

بنابراین طبق تعریف ۱.۳.۳ داریم $k-dim(M) \preceq \sup\left\{k-dim\left(\frac{M}{N}\right) \mid (0) \neq N \leq M\right\} + 1$. □

۷.۳.۳ گزاره. هر مدول نوتری دارای بعد کرول است.

اثبات. به خلاف فرض کنیم M یک R-مدول نوتری باشد که دارای بعد کرول نیست. قرار می‌دهیم $\mathcal{A} = \left\{A \lneq M \mid \nexists k-dim\left(\frac{M}{A}\right)\right\}$. در این‌صورت چون M نوتری است، $\mathcal{A}$ دارای عضو ماکسیمالی چون N است. یعنی $\frac{M}{N}$ بعد کرول ندارد و نسبت به این خاصیت ماکسیمال است. بنابراین به سادگی می‌توان

دید که هر مدول خارج قسمتی از $\frac{M}{N}$ دارای بعد کرول است و درنتیجه طبق لم ۶.۳.۳، $\frac{M}{N}$ دارای بعد کرول است که این یک تناقض می‌باشد. □

۸.۳.۳ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. در این‌صورت

$$k-dim(M) = \sup\left\{k-dim(N), k-dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}.$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

اثبات. طبق قسمت ۳ از تذکر ۳.۳.۳، $k-dim(N) \preceq k-dim(M)$ و $k-dim(\frac{M}{N}) \preceq k-dim(M)$، بنابراین $\sup\left\{k-dim(N), k-dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\} \preceq k-dim(M)$. حال با استفاده از استقرای ترامتناهی روی عدد ترتیبی $\sup\left\{k-dim(N), k-dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}$، عکس نامساوی اخیر را ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $\sup\left\{k-dim(N), k-dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\} = ۰$، در این صورت N و $\frac{M}{N}$ آرتینی هستند و درنتیجه M نیز آرتینی است و لذا $k-dim(M) = ۰$. فرض کنیم حکم برای $\alpha \prec \sup\left\{k-dim(N), k-dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}$ برقرار باشد و گیریم $\sup\left\{k-dim(N), k-dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\} = \alpha$. نشان می‌دهیم $k-dim(M) \preceq \alpha$. اکنون فرض کنیم $M_۱ \supseteq M_۲ \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$ یک زنجیر نزولی نامتناهی در M باشد در این‌صورت

$$M_۱ \cap N \supseteq M_۲ \cap N \supseteq \cdots \supseteq M_n \cap N \supseteq \cdots$$

و

$$\frac{M_۱ + N}{N} \supseteq \frac{M_۲ + N}{N} \supseteq \cdots \supseteq \frac{M_n + N}{N} \supseteq \cdots$$

به‌ترتیب دو زنجیر نزولی از زیرمدول‌های N و $\frac{M}{N}$ می‌باشند. بنابراین عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که

برای هر $n \geqslant k$ داریم $k\!-\!dim\left(\frac{M_n \cap N}{M_{n+1} \cap N}\right) \prec \alpha$ و $k\!-\!dim\left(\frac{M_n + N}{M_{n+1} + N}\right) \prec \alpha$. از طرفی می‌توان نوشت:

$$\frac{M_n \cap N}{M_{n+1} \cap N} = \frac{M_n \cap N}{M_{n+1} \cap (M_n \cap N)} \cong \frac{M_{n+1} + (M_n \cap N)}{M_{n+1}}$$

و طبق قانون مدولار،

$$\frac{M_n + N}{M_{n+1} + N} = \frac{M_n + (M_{n+1} + N)}{M_{n+1} + N} \cong \frac{M_n}{M_n \cap (M_{n+1} + N)} = \frac{M_n}{M_{n+1} + (M_n \cap N)}.$$

بنابراین

$$k\!-\!dim\left(\frac{M_{n+1} + (M_n \cap N)}{M_{n+1}}\right) \prec \alpha \quad , \quad k\!-\!dim\left(\frac{M_n}{M_{n+1} + (M_n \cap N)}\right) \prec \alpha.$$

و در نتیجه

$$\sup\left\{k\!-\!dim\left(\frac{M_{n+1} + (M_n \cap N)}{M_{n+1}}\right), k\!-\!dim\left(\frac{M_n}{M_{n+1} + (M_n \cap N)}\right)\right\} \prec \alpha.$$

اما واضح است که $\frac{M_{n+1} + (M_n \cap N)}{M_{n+1}}$ و $\frac{M_n}{M_{n+1} + (M_n \cap N)}$ به ترتیب یک زیرمدول و یک مدول خارج قسمتی از $\frac{M_n}{M_{n+1}}$ هستند، پس بنا به فرض استقرا داریم:

$$k\!-\!dim\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right) \preceq \sup\left\{k\!-\!dim\left(\frac{M_{n+1} + (M_n \cap N)}{M_{n+1}}\right), k\!-\!dim\left(\frac{M_n}{M_{n+1} + (M_n \cap N)}\right)\right\} \prec \alpha.$$

لذا طبق تعریف داریم $k\!-\!dim(M) \preceq \alpha$ و در نتیجه $k\!-\!dim(M) = \alpha$. □

۹.۳.۳ نتیجه. $k-dim\left(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n\right) = \sup\left\{k-dim(M_1), \ldots, k-dim(M_n)\right\}$. هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

اثبات. به کمک قضیه‌ی قبل و با استفاده از استقراء روی n به آسانی اثبات می‌شود. □

۱۰.۳.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول متناهی مولد و R دارای بعد کرول باشد، در این‌صورت $k-dim(M) \preceq k-dim(R)$.

اثبات. گیریم $M = x_1R + \cdots + x_nR$. لذا R-مدول آزاد $F = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$ که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $R_i \cong R$، وجود دارد به‌طوری که $M \cong \frac{F}{N}$. بنابراین با استفاده از تذکر ۳.۳.۳ و نتیجه‌ی ۹.۳.۳ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} k-dim(M) = k-dim\left(\frac{F}{N}\right) &\preceq k-dim(F) \\ &= k-dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} R_i\right) \\ &= \sup\left\{k-dim(R), \ldots, k-dim(R)\right\} = k-dim(R). \end{aligned}$$

بنابراین $k-dim(M) \preceq k-dim(R)$. □

حالت نامساوی گزاره‌ی اخیر نیز ممکن است اتفاق بیفتد، برای نشان دادن این حالت مثال زیر را آورده‌ایم.

۱۱.۳.۳ مثال. در گزاره‌ی ۱۰.۳.۳ قرار می‌دهیم $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ و $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$. در این صورت می‌دانیم $k-dim(\mathbb{Z}) = 1$ و $k-dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0$، لذا بنا به نتیجه‌ی ۹.۳.۳،

$$k-dim(R) = k-dim(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}) = \sup\left\{k-dim(\mathbb{Z}), k-dim(\mathbb{Z}_{p^\infty})\right\} = 1.$$

چون $M=\mathbb{Z}_{p^\infty}$ ایده‌آلی از R است، پس M یک R-مدول است و داریم

$$\circ = k\!-\!dim(M) \prec k\!-\!dim(R) = ۱.$$

۱۲.۳.۳ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدولِ دارای بعد کرول باشد. اگر $M=\sum_{i\in I}N_i$ و برای هر $i\in I$، $k\!-\!dim(N_i)\preceq\alpha$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $k\!-\!dim(M)\preceq\alpha$.

اثبات. به لم ۲.۱۷ از فصل ششم کتاب [۲۹] مراجعه شود. □

۱۳.۳.۳ نتیجه. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت اگر M و R دارای بعد کرول باشند، آن‌گاه $k\!-\!dim(M)\preceq k\!-\!dim(R)$.

اثبات. برای هر $x\in M$، $Rx\cong\frac{R}{\mathrm{Ann(x)}}$. لذا $k\!-\!dim(Rx)=k\!-\!dim\left(\frac{R}{\mathrm{Ann(x)}}\right)\preceq k\!-\!dim(R)$. از طرفی می‌دانیم $M=\sum_{x\in M}Rx$، بنابراین طبق قضیه‌ی ۱۲.۳.۳، $k\!-\!dim(M)\preceq k\!-\!dim(R)$. □

۱۴.۳.۳ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر برای هر زیرمدول نابدیهی N از M، N یا $\frac{M}{N}$ دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است.

اثبات. فرض کنیم $M\supseteq M_۱\supseteq M_۲\supseteq\cdots$ یک زنجیر نزولی نامتناهی از زیرمدول‌های M باشد. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر برای هر i، $k\!-\!dim\left(\frac{M}{M_i}\right)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $k\!-\!dim\left(\frac{M_i}{M_{i+۱}}\right)$ نیز برای هر i وجود دارد و لذا طبق تعریف ۱.۳.۳، M دارای بعد کرول است.

۲. اگر عدد k وجود داشته باشد به‌طوری که $\frac{M}{M_k}$ فاقد بعد کرول باشد، آن‌گاه طبق فرض بعد کرولِ M_k وجود دارد، لذا برای هر $k\geqslant i$، $\frac{M_k}{M_i}$ دارای بعد کرول است. بنابراین برای هر $k\geqslant i$، $\frac{M_i}{M_{i+۱}}$ دارای بعد کرول است و در نهایت بنا به تعریف ۱.۳.۳، M دارای بعد کرول است.

بنابراین، طبق دو حالت فوق اثبات تمام است. □

۱.۳.۳ مدول‌های بحرانی

در این قسمت مدول‌های بحرانی را تعریف می‌کنیم و به بعضی از خواص مهم آن‌ها اشاره خواهیم کرد. از آن‌جا که تعریف و خواص این مدول‌ها در بعضی از کتاب‌های مرجع مانند [۲۹] و [۱۲] یافت می‌شوند و موضوع اصلی این پایان نامه بررسی دوگان این مدول‌هاست از تفصیل این بخش خودداری کرده و دوگان این مدول‌ها و خواص آن‌ها را در فصل بعد به طور گسترده‌تر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱۵.۳.۳ تعریف. فرض کنیم α یک عدد ترتیبی باشد. R-مدول M را α-**بحرانی**[۱] می‌نامیم، هرگاه $k\text{–}dim(M) = \alpha$ و برای هر زیرمدول ناصفر مانند N از M داشته باشیم $k\text{–}dim\left(\frac{M}{N}\right) \prec k\text{–}dim(M)$. هم‌چنین R-مدول M را بحرانی نامیم، هرگاه عدد ترتیبی α وجود داشته باشد به‌طوری که M یک مدول α-بحرانی باشد.

۱۶.۳.۳ تذکر. اگر M یک R-مدول ۰-بحرانی باشد، آن‌گاه طبق تعریف واضح است که $k\text{–}dim(M) = 0$ و برای هر زیرمدول سره‌ی N از M داریم $k-dim\left(\frac{M}{N}\right) = -1$. بنابراین $\frac{M}{N} = \bar{0}$؛ یعنی $M = N$. پس M یک R-مدول ساده است. برعکس، واضح است که اگر M ساده باشد، آن‌گاه آرتینی است و لذا $k\text{–}dim(M) = 0$. هم‌چنین بدیهی است که برای هر هر زیرمدول سره‌ی N از M، $k\text{–}dim\left(\frac{M}{N}\right) = -1$. پس M، ۰-بحرانی است. بنابراین مدول‌های ۰-بحرانی دقیقاً همان مدول‌های ساده هستند.

۱۷.۳.۳ تعریف. R-مدول M را **تقریبا متناهی نشانده شده** (به اختصار a.f.e.[2]) می‌نامیم، هرگاه M، f.e. نباشد ولی هر مدول خارج قسمتی سره‌ی آن f.e. باشد.

---
[1] critical

[2] almost finitely embedded

۱۸.۳.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R–مدول باشد. در این صورت M، ۱–بحرانی است اگر وتنها اگر $a.f.e.$ باشد.

اثبات. فرض کنیم M یک مدول ۱–بحرانی باشد. در این صورت M آرتینی نیست ولی به وضوح هر مدول خارج قسمتی سره از M آرتینی است. پس بنا به قضیه‌ی ۲۷.۲.۱، M، f.e. نیست ولی هر مدول خارج قسمتی سره از آن f.e. است. بنابراین M یک مدول a.f.e. است.

برعکس، فرض کنیم M یک مدول a.f.e. و $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_n \supseteq \cdots$ یک زنجیر نزولی دلخواه از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت برای هر $i \geqslant 1$ داریم $k\!-\!dim\left(\frac{N_i}{N_{i+1}}\right) \preceq k\!-\!dim\left(\frac{M}{N_{i+1}}\right)$. اما طبق فرض برای هر i، $\frac{M}{N_{i+1}}$ و هر مدول خارج قسمتی از آن متناهی نشانده شده است پس بنا به قضیه‌ی ۲۷.۲.۱، $\frac{M}{N_{i+1}}$ آرتینی است؛ یعنی $k\!-\!dim\left(\frac{M}{N_{i+1}}\right) = 0$. بنابراین برای هر i داریم $k\!-\!dim\left(\frac{N_i}{N_{i+1}}\right) \prec 1$ و در نتیجه $k\!-\!dim(M) \preceq 1$. از طرفی چون M، f.e. نیست، آرتینی نیز نمی‌باشد، لذا $k\!-\!dim(M) \succeq 1$. پس نتیجه می‌گیریم $k\!-\!dim(M) = 1$. هم‌چنین طبق چیزی که نشان دادیم، واضح است که بعد کرول هر مدول خارج قسمتی سره‌ی M، اکیداً از M کمتر است. بنابراین M یک مدول ۱–بحرانی می‌باشد. □

۱۹.۳.۳ لم. فرض کنیم M یک R–مدول α–بحرانی باشد. در این صورت هر زیرمدول ناصفر از M نیز α–بحرانی است.

اثبات. فرض کنیم M یک R–مدول α–بحرانی و N زیرمدولی ناصفر از آن باشد. پس طبق تعریف داریم $k\!-\!dim\left(\frac{M}{N}\right) \prec \alpha$ و بنا به قضیه‌ی ۸.۳.۳ واضح است که $k\!-\!dim(N) = \alpha$. حال اگر A زیرمدول ناصفری از N باشد، آنگاه $k\!-\!dim\left(\frac{N}{A}\right) \preceq k\!-\!dim\left(\frac{M}{A}\right) \prec \alpha$. □

۲۰.۳.۳ قضیه. هر R–مدول ناصفر که بعد کرول داشته باشد، دارای زیرمدول بحرانی است.

اثبات. فرض کنیم M یک R–مدول ناصفر باشد که دارای بعد کرول است. پس هر زیرمدول از M نیز دارای بعد کرول است. حال طبق قضیه‌ی ۲۶.۱.۱، زیرمدول ناصفری از M مانند N وجود دارد که دارای

کمترین بعد کرول α است. اگر N، α-بحرانی نباشد، آن‌گاه زیرمدول ناصفر $N_۱$ از N وجود دارد به طوری که $k\text{–}dim\left(\frac{N}{N_۱}\right) = \alpha$. چون N در بین زیرمدول‌های M دارای کمترین بعد α است، پس $k\text{–}dim(N_۱) = \alpha$. اگر $N_۱$، α-بحرانی نباشد، آن‌گاه زیرمدول ناصفر $N_۲$ از $N_۱$ وجود دارد که $k-dim\left(\frac{N_۱}{N_۲}\right) = \alpha$. در نتیجه مجددا بنا به مینیمال بودن بعد N داریم $k-dim(N_۲) = \alpha$. با ادامه‌ی این روند زنجیر نامتناهی

$$N \supsetneqq N_۱ \supsetneqq N_۲ \supsetneqq \cdots$$

از زیرمدول‌های M را به دست می‌آوریم که برای هر i داریم $k-dim\left(\frac{N_i}{N_{i+۱}}\right) = \alpha$ که این یک تناقض است، زیرا $k-dim(N) = \alpha$ و در نتیجه عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که برای هر $n \geqslant i$ داریم $k-dim\left(\frac{N_i}{N_{i+۱}}\right) \prec \alpha$. $\square$

۲۱.۳.۳ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. M را **مدول تکریخت**[1] می‌نامیم، اگر برای هر زیرمدول N از M، هر همریختی $f : N \to M$ تکریختی باشد.

۲۲.۳.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول α-بحرانی باشد. در این صورت:

۱. M یکنواخت است.

۲. M تجزیه ناپذیر است.

۳. M تکریخت است.

اثبات. (۱) فرض کنیم M یک مدول α-بحرانی باشد که یکنواخت نیست. پس زیرمدول‌های ناصفر $A_۱$ و $A_۲$ از M وجود دارند به طوری که $A_۱ \oplus A_۲ \leq M$. از طرفی طبق لم ۱۹.۳.۳ و نتیجه‌ی ۹.۳.۳ داریم:

$$k-dim(A_۱) = k-dim(A_۲) = k-dim(A_۱ \oplus A_۲).$$

[1] monoform module

هم‌چنین $A_2 \oplus A_1$، یک مدول α-بحرانی است. در نتیجه $k-dim\left(\frac{A_1\oplus A_2}{A_1}\right) \prec \alpha$. اما $A_2 \cong \frac{A_1\oplus A_2}{A_1}$، پس $k-dim\left(\frac{A_1\oplus A_2}{A_1}\right) = \alpha$ که این یک تناقض است. بنابراین M مدولی یکنواخت است.

(۲) طبق قسمت قبل واضح است.

(۳) فرض کنیم M یک مدول α-بحرانی، N زیرمدولی از M و $f : N \to M$ یک همریختی دلخواه باشد. اگر $\ker f \neq (0)$، آن‌گاه $\frac{N}{\ker f} \cong f(N)$ و $k-dim\left(\frac{N}{\ker f}\right) = k-dim(f(N))$. اما طبق لم ۱۹.۳.۳، N یک زیرمدول α-بحرانی است، پس $k-dim\left(\frac{N}{\ker f}\right) \prec k-dim(N)$ که تناقض است. بنابراین M مدولی تکریخت است. □

۲۳.۳.۳ نتیجه. هر R-مدول که بعد کرول داشته باشد، دارای زیرمدول تکریخت است.

اثبات. طبق قضیه‌ی ۲۰.۳.۳، هر R-مدول با بعد کرول، دارای زیرمدول بحرانی است و طبق گزاره‌ی قبل هر زیرمدول بحرانی، تکریخت است. □

۲۴.۳.۳ تعریف. R-مدول ناصفر M را **فشرده**[1] می‌نامیم، اگر برای هر زیرمدول ناصفر N از M، تک‌ریختی $f : M \to N$ وجود داشته باشد.

۲۵.۳.۳ گزاره. هر مدول فشرده که دارای بعد کرول باشد، بحرانی است.

اثبات. فرض کنیم M یک مدول فشرده باشد و $k-dim(M) = \alpha$. در این صورت بنا به قضیه‌ی ۲۰.۳.۳، M دارای یک زیرمدول بحرانی مانند N است. چون $N \neq (0)$، طبق فرض، تک‌ریختی $\varphi : M \to N$ وجود دارد. پس داریم $M \cong \varphi(M)$. اما چون $\varphi(M)$ یک زیرمدول ناصفر از N می‌باشد طبق لم ۱۹.۳.۳، $\varphi(M)$ یک زیرمدول بحرانی است. بنابراین M یک مدول α-بحرانی است. □

۲۶.۳.۳ لم. فرض کنیم R یک حلقه‌ی دارای بعد کرول و I یک ایده‌آل چپ بحرانی از R باشد. در این صورت $I^2 = (0)$ یا عضو ناصفر x از I وجود دارد که $\mathrm{Ann}(x) \cap I = (0)$.

[1] compressible

اثبات. اگر $I^{2} \neq (0)$، آن‌گاه $0 \neq x \in I$ وجود دارد به طوری که $Ix \neq (0)$. واضح است که نگاشت $f : I \to R$ با ضابطه‌ی $f(a) = ax$ یک همریختی است. طبق گزاره‌ی ۲۲.۳.۳، I به عنوان یک زیرمدول از R-مدول R، تکریخت است و لذا f تکریختی است. بنابراین $\ker f = \mathrm{Ann}(x) \cap I = (0)$. □

۲۷.۳.۳ گزاره. هر خانواده از زیرمدول‌های بحرانیِ R-مدول M که دارای بعد کرول متمایز باشند، یک خانواده‌ی مستقل هستند.

اثبات. طبق تعریف خانواده‌ی مستقل، کافی است نشان دهیم هر خانواده‌ی متناهی از زیرمدول‌های بحرانی، مستقل است. فرض کنیم $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ یک خانواده‌ی متناهی دلخواه از زیرمدول‌های بحرانی M باشد به طوری که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $k\text{–}dim(C_i) = \alpha_i$ و $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \cdots \prec \alpha_n$. با استفاده از استقراء روی n حکم را نشان می‌دهیم. اگر $n = 1$، واضح است. اکنون فرض کنیم هر خانواده‌ی از زیرمدول‌های بحرانی که حداکثر دارای $n-1$ عضو باشد، خانواده‌ای مستقل است و $C = C_n \cap \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} C_i\right)$. اگر $C \neq (0)$، آن‌گاه $C \leq C_n$. اما C_n یک زیرمدول α_n-بحرانی است، پس $k-dim(C) = k-dim(C_n) = \alpha_n$. از طرفی $C \leq \bigoplus_{i=1}^{n-1} C_i$، لذا $\alpha_n = k-dim(C) \prec k-dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} C_i\right) = \alpha_{n-1}$ که تناقض است. بنابراین $\{C_1, \ldots, C_n\}$ یک خانواده مستقل از زیرمدول‌های بحرانی است. □

۲۸.۳.۳ قضیه. فرض کنیم بعد کرول R-مدول M وجود داشته باشد. در این صورت M دارای یک زیرمدول اساسی است که به شکل جمع مستقیم تعدادی متناهی از زیرمدول‌های بحرانی می‌باشد.

اثبات. فرض کنیم $\{C_i \mid i \in I\}$ مجموعه‌ی مستقلِ ماکسیمال از زیرمدول‌های بحرانی باشد (با استفاده از لم زرن می‌توان نشان داد که این مجموعه وجود دارد)؛ یعنی برای هر $i \in I$، $C_i \cap \sum_{i \neq j} C_j = (0)$. ادعا می‌کنیم $E = \bigoplus_{i \in I} C_i \leq_e M$. به خلاف فرض کنیم E در M اساسی نباشد. در این صورت زیرمدول ناصفر N از M وجود دارد به طوری که $E \cap N = (0)$. اما N دارای بعد کرول است، پس طبق قضیه‌ی ۲۰.۳.۳، زیرمدول بحرانی C' در N وجود دارد که طبق فرض $C' \cap \bigoplus_{i \in I} C_i = (0)$. بنابراین واضح است

که $\{C_i \mid i \in I\} \cup \{C'\}$ یک مجموعه‌ی مستقل از زیرمدول‌های بحرانی است که تناقض است. اکنون چون بعد کرول M وجود دارد طبق گزاره‌ی ۴.۳.۳، M دارای بعد یکنواخت متناهی است، پس $\bigoplus_{i\in I} C_i$ یک مجموع مستقیم متناهی است. $\square$

۴.۳ بعد نوتری

در این بخش بعد نوتری یک R-مدول را تعریف می‌کنیم که دوگان بعد کرول می‌باشد.

۱.۴.۳ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بُعد نوتری**[1] M را با نماد $n-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $n-dim(M) = -1$ اگر وتنها اگر $M = (0)$.
- فرض کنیم بعد نوتری مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $n-dim(M) = \alpha$ در صورتی که $n-dim(M) \not\prec \alpha$ و برای هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M مانند $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $n \geqslant k$، داشته باشیم $n-dim\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right) \prec \alpha$.

اگر عدد ترتیبی α با خاصیت فوق وجود نداشته باشد، آن‌گاه می‌گوییم M فاقد بعد نوتری است.

۲.۴.۳ قرارداد. اگر R یک حلقه باشد، آن‌گاه $n-dim(R)$ به معنی بعد نوتری حلقه‌ی R به عنوان یک R-مدول می‌باشد.

۳.۴.۳ تذکر. اثبات همه‌ی موارد زیر ساده هستند و به آسانی از تعریف نتیجه می‌شوند:

[1] Noetherian dimension

۱. عدد ترتیبی α در تعریف بعد نوتری، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $n-dim(M) = \alpha$ است.

۲. R-مدول M نوتری است اگر وتنها اگر $n-dim(M) = ۰$. برای مثال $n-dim(\mathbb{Z}) = ۰$.

۳. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $n-dim(M)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $n-dim(N)$ و $n-dim\left(\frac{M}{N}\right)$ نیز وجود دارند. به علاوه $n-dim(N) \leq n-dim(M)$ و $n-dim\left(\frac{M}{N}\right) \preceq n-dim(M)$.

۴. اگر M یک R-مدول باشد و $n-dim(M) = ۱$، آن‌گاه برای هر زنجیر $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geqslant k$، $\frac{M_{i+۱}}{M_i}$ نوتری است.

۴.۴.۳ مثال. $n-dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = ۱$، زیرا اگر $N_۱ \subseteq N_۲ \subseteq \cdots \subseteq N_n \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی دلخواه از زیرمدول‌های $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی i داریم $n-dim\left(\frac{N_{i+۱}}{N_i}\right) = ۰ < ۱$. از طرفی می‌دانیم $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ نوتری نیست لذا $n-dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \not< ۱$. بنابراین $n-dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = ۱$.

اکنون ویژگی‌های بعد نوتری را بیان می‌کنیم. با حکم زیر آغاز می‌کنیم که دوگان لم ۵.۳.۳ می‌باشد.

۵.۴.۳ لم. اگر هر مدول خارج قسمتی سره از R-مدول M دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد نوتری است و $n-dim(M) = \sup\left\{n-dim\left(\frac{M}{N}\right) \mid ۰ \neq N \leq M\right\}$.

اثبات. قرار می‌دهیم $\alpha = \sup\left\{n-dim\left(\frac{M}{N}\right) \mid ۰ \neq N \leq M\right\}$. بنا به قسمت (۳) از تذکر ۳.۴.۳، اگر بعد نوتری M وجود داشته باشد، آن‌گاه بزرگتر یا مساوی α است. حال فرض می‌کنیم

$$(۰) \neq M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq M_۳ \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

یک زنجیر صعودی نامتناهی از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت $\frac{M_۲}{M_۱} \subseteq \frac{M_۳}{M_۱} \subseteq \cdots \subseteq \frac{M_n}{M_۱} \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی نامتناهی از زیرمدول‌های $\frac{M}{M_۱}$ می‌باشد. پس طبق فرض عدد طبیعی k وجود دارد به

طوری که برای هر $i \geqslant k$ و با استفاده از قسمت (۳) تذکر ۳.۴.۳، داریم:

$$n\!-\!dim\left(\frac{\frac{M_{i+1}}{M_1}}{\frac{M_i}{M_1}}\right) = n\!-\!dim\left(\frac{M_{i+1}}{M_i}\right) \preceq n\!-\!dim\left(\frac{M}{M_1}\right) \prec \alpha.$$

بنابراین بعد نوتری M وجود دارد و $n\!-\!dim(M) = \alpha$. □

لم زیر نیز دوگان لم ۶.۳.۳ می‌باشد

۶.۴.۳ لم. اگر هر زیرمدول سره از R-مدول M دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد نوتری است و $n\!-\!dim(M) \preceq \sup\{n\!-\!dim(N) \mid N \lneq M\} + 1$.

اثبات. قرار می‌دهیم $\alpha = \sup\{n\!-\!dim(N) \mid N \lneq M\} + 1$. فرض کنیم $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی دلخواه از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت طبق قسمت (۳) تذکر ۳.۴.۳، برای هر i داریم $n\!-\!dim\left(\frac{N_{i+1}}{N_i}\right) \preceq n\!-\!dim(N_{i+1}) \prec \alpha$. بنابراین طبق تعریف بعد نوتری، $n\!-\!dim(M) \preceq \alpha$. □

۷.۴.۳ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. در این‌صورت

$$n\!-\!dim(M) = \sup\left\{n\!-\!dim(N), n\!-\!dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

اثبات. طبق قسمت (۳) از تذکر ۳.۴.۳، $n\!-\!dim(N) \preceq n\!-\!dim(M)$ و $n\!-\!dim(\frac{M}{N}) \preceq n\!-\!dim(M)$، بنابراین $n\!-\!dim(M) \succeq \sup\left\{n\!-\!dim(N), n\!-\!dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}$. حال با استفاده از استقرای ترامتناهی روی عدد ترتیبی $\sup\left\{n\!-\!dim(N), n\!-\!dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}$، عکس نامساوی اخیر را ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $\sup\left\{n\!-\!dim(N), n\!-\!dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\} = 0$، در این صورت N و $\frac{M}{N}$ نوتری هستند و درنتیجه M نیز

نوتری است و لذا $n{-}dim(M) = 0$. فرض کنیم حکم برای $\sup\left\{n{-}dim(N), n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\} \prec \alpha$ برقرار باشد و گیریم $\sup\left\{n{-}dim(N), n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\} = \alpha$. نشان می‌دهیم $n{-}dim(M) \preceq \alpha$. اکنون فرض کنیم $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی نامتناهی از زیرمدول‌های M باشد در این‌صورت

$$M_1 \cap N \subseteq M_2 \cap N \subseteq \cdots \subseteq M_n \cap N \subseteq \cdots$$

و

$$\frac{M_1 + N}{N} \subseteq \frac{M_2 + N}{N} \subseteq \cdots \subseteq \frac{M_n + N}{N} \subseteq \cdots$$

به ترتیب دو زنجیر صعودی از زیرمدول‌های N و $\frac{M}{N}$ می‌باشند. بنابراین عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $n \geqslant k$ داریم $n{-}dim\left(\frac{M_{n+1} \cap N}{M_n \cap N}\right) \prec \alpha$ و $n{-}dim(\frac{M_{n+1}+N}{M_n+N}) \prec \alpha$. از طرفی می‌توان نوشت:

$$\frac{M_{n+1} \cap N}{M_n \cap N} = \frac{M_{n+1} \cap N}{M_n \cap (M_{n+1} \cap N)} \cong \frac{M_n + (M_{n+1} \cap N)}{M_n}$$

و طبق قانون مدولار،

$$\frac{M_{n+1} + N}{M_n + N} = \frac{M_{n+1} + (M_n + N)}{M_n + N} \cong \frac{M_{n+1}}{M_{n+1} \cap (M_n + N)} = \frac{M_{n+1}}{M_n + (M_{n+1} \cap N)}.$$

بنابراین

$$n{-}dim\left(\frac{M_n + (M_{n+1} \cap N)}{M_n}\right) \prec \alpha \quad , \quad n{-}dim\left(\frac{M_{n+1}}{M_n + (M_{n+1} \cap N)}\right) \prec \alpha.$$

و در نتیجه

$$\sup\left\{n\text{−}dim\left(\frac{M_n+(M_{n+1}\cap N)}{M_n}\right), n\text{−}dim\left(\frac{M_{n+1}}{M_n+(M_{n+1}\cap N)}\right)\right\}\prec\alpha.$$

اما واضح است که $\frac{M_n+(M_{n+1}\cap N)}{M_n}$ و $\frac{M_{n+1}}{M_n+(M_{n+1}\cap N)}$ به ترتیب یک زیرمدول و یک مدول خارج قسمتی از $\frac{M_{n+1}}{M_n}$ هستند، پس بنا به فرض استقرا داریم:

$$n\text{−}dim\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right)\preceq\sup\left\{n\text{−}dim\left(\frac{M_{n+1}+(M_n\cap N)}{M_{n+1}}\right), n\text{−}dim\left(\frac{M_n}{M_{n+1}+(M_n\cap N)}\right)\right\}$$
$$\prec\alpha.$$

لذا طبق تعریف داریم $n\text{−}dim(M)\preceq\alpha$ و در نتیجه $n\text{−}dim(M)=\alpha$. □

۸.۴.۳ نتیجه. اگر $M=\bigoplus_{i=1}^n M_i$، آن‌گاه $n\text{–}dim\,(M)=\sup\{n\text{−}dim(M_1),\ldots,n\text{−}dim(M_n)\}$. در صورتی که یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

اثبات. به کمک قضیه‌ی قبل و با استفاده از استقراء روی n به آسانی اثبات می‌شود. □

۹.۴.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R−مدول متناهی مولد و R دارای بعد نوتری باشد. در این‌صورت $n\text{−}dim(M)\prec n\text{−}dim(R)$.

اثبات. کافی است در اثبات گزاره‌ی ۱۰.۳.۳، به جای $k\text{−}dim(M)$، قرار دهیم $n\text{−}dim(M)$. □

۱۰.۴.۳ قضیه. فرض کنیم M یک R−مدول باشد. اگر برای هر زیرمدول نابدیهی N از M، N یا $\frac{M}{N}$ دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد نوتری است.

اثبات. مشابه با اثبات قضیه‌ی ۱۴.۳.۳. □

۱۱.۴.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر M دارای بعد یکنواخت متناهی باشد، آن‌گاه

$$n\text{-}dim(M) = \sup \left\{ n\text{-}dim\left(\frac{M}{E}\right) \,\middle|\, E \leq_e M \right\}.$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

اثبات. قرار می‌دهیم $\alpha = \sup\left\{n\text{-}dim\left(\frac{M}{E}\right) \mid E \leq_e M\right\}$، در این صورت طبق قسمت (۳) از تذکر ۳.۳.۳، کافی است نشان دهیم M دارای بعد نوتری است و $n-dim(M) \preceq \alpha$. اکنون فرض کنیم $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_i \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی نامتناهی از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت چون M دارای بعد یکنواخت متناهی است، طبق قضیه‌ی ۱۲.۱.۳، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geqslant k$ داریم $N_i \leq_e N_{i+1}$. این یعنی برای هر $i \geqslant k$، زیرمدول P از M وجود دارد به‌طوری که $N_i \oplus P \leq_e M$. ازطرفی برای هر $i \geqslant k$ داریم $\frac{N_{i+1}}{N_i} \cong \frac{N_{i+1}\oplus P}{N_i \oplus P}$. بنابراین عدد طبیعی $m \geqslant k$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geqslant m$، $n\text{-}dim\left(\frac{N_{i+1}}{N_i}\right) < \alpha$. لذا $n\text{-}dim(M) \preceq \alpha$. □

در ادامه یک قضیه‌ی اساسی را بیان و اثبات می‌کنیم که به نوعی دو مفهوم بعد کرول و بعد نوتری را به هم پیوند می‌دهد و نتایج مهمی را در پی دارد.

۱۲.۴.۳ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول دلخواه باشد. M دارای بعد نوتری است اگر وتنها اگر دارای بعد کرول باشد.

اثبات. فرض کنیم M دارای بعد نوتری باشد و $n\text{-}dim(M) = \alpha$. با استفاده از استقرای ترامتناهی روی α ثابت می‌کنیم M دارای بعد کرول است. اگر $\alpha = -1$، آن‌گاه $M = (0)$ و حکم واضح است. پس فرض کنیم هر R-مدول با $n\text{-}dim \prec \alpha$ دارای بعد کرول باشد و $n\text{-}dim(M) = \alpha$. اکنون به خلاف فرض کنیم M فاقد بعد کرول باشد، در این‌صورت بنا به عکس نقیض قضیه‌ی ۱۴.۳.۳، زیرمدول غیربدیهی A_1

از M وجود دارد به‌طوری که $A_۱$ و $\frac{M}{A_۱}$ فاقد بعد کرول هستند. چون $\frac{M}{A_۱}$ بعد کرول ندارد، مجددا با استفاده از قضیه‌ی ۱۴.۳.۳، زیرمدول غیربدیهی $\frac{A_۲}{A_۱}$ از $\frac{M}{A_۱}$ وجود دارد به‌طوری که $\frac{A_۲}{A_۱}$ و $\frac{M}{A_۲}$ فاقد بعد کرول هستند. با ادامه همین روند زنجیر صعودی نامتناهی $A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \cdots$ وجود دارد به‌طوری که برای هر i، $\frac{A_{i+۱}}{A_i}$ فاقد بعد کرول است. از طرفی چون $n-dim(M) = \alpha$، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geqslant k$، $n-dim\left(\frac{A_{i+۱}}{A_i}\right) \prec \alpha$. در نتیجه بنا به فرض استقرا برای هر $i \geqslant k$، $\frac{A_{i+۱}}{A_i}$ دارای بعد کرول است که تناقض است. بنابراین M دارای بعد کرول است. اثبات عکس قضیه نیز مشابه می‌باشد. □

۱۳.۴.۳ نتیجه. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت:

۱. اگر M دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه M دارای بعد یکنواخت متناهی است.

۲. اگر M آرتینی باشد، آن‌گاه M دارای بعد نوتری است.

۱۴.۴.۳ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول و $A_۱, A_۲, \ldots, A_k$ زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت اگر برای هر $۱ \leqslant i \leqslant k$ داشته باشیم $n-dim\left(\frac{M}{A_i}\right) = \alpha_i$، آن‌گاه

$$n-dim\left(\frac{M}{\bigcap_{i=۱}^{k} A_i}\right) = \sup\{\alpha_i \mid i = ۱, ۲, \ldots, k\}.$$

اثبات. فرض کنیم $\alpha_۱ \preceq \alpha_۲ \preceq \cdots \preceq \alpha_n$، $N_k = \cap_{i=۱}^{k} A_i$ و $N_{k-۱} = \cap_{i=۱}^{k-۱} A_i$. با استفاده از استقرا روی k نشان می‌دهیم $n-dim\left(\frac{M}{N_k} = \alpha_k\right)$. اگر $k = ۱$، حکم واضح است. فرض کنیم حکم برای اعداد طبیعی کمتر از k برقرار باشد. زیرمدول $\frac{N_{k-۱}}{N_k}$ از $\frac{M}{N_k}$ را در نظر می‌گیریم. لذا طبق فرض استقرا $n-dim\left(\frac{M}{N_{k-۱}}\right) = \alpha_{k-۱}$ و طبق قضیه‌ی ۷.۴.۳ داریم:

$$n-dim\left(\frac{M}{N_k}\right) = \sup\left\{n-dim\left(\frac{N_{k-۱}}{N_k}\right), \alpha_{k-۱}\right\}.$$

ازطرفی با استفاده از قضیه‌ی دوم یکریختی می‌توان نوشت:

$$\frac{N_{k-۱}}{N_k} = \frac{N_{k-۱}}{N_{k-۱} \cap A_k} \cong \frac{N_{k-۱} + A_k}{A_k} \subseteq \frac{M}{A_k}.$$

درنتیجه

$$n\!-\!dim\left(\frac{N_{k-۱}}{N_k}\right) = n\!-\!dim\left(\frac{N_{k-۱} + A_k}{A_k}\right) \preceq n\!-\!dim\left(\frac{M}{A_k}\right) = \alpha_k.$$

بنابراین $\alpha_k \preceq \sup\left\{n\!-\!dim\left(\frac{N_{k-۱}}{N_k}\right), \alpha_{k-۱}\right\} = n\!-\!dim\left(\frac{M}{N_k}\right)$.

چون $N_k \subseteq A_k$، داریم $n\!-\!dim\left(\frac{M}{N_k}\right) \preceq n\!-\!dim\left(\frac{M}{A_k}\right) = \alpha_k$. لذا از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم $\alpha_k = n\!-\!dim\left(\frac{M}{N_k}\right)$. □

فصل ۴

مدول‌های اتمی

۱.۴ تعریف و مثال‌هایی از مدول‌های اتمی

۱.۱.۴ تعریف. فرض کنیم α یک عدد ترتیبی باشد. R-مدول M را α-**اتمی**[۲] نامیم اگر $n\text{–}dim(M) = \alpha$ و برای هر زیرمدول سره مانند N از M داشته باشیم $n-dim(N) \prec n-dim(M)$. هم‌چنین R-مدول M را اتمی نامیم، هرگاه عدد ترتیبی α وجود داشته باشد به طوری که M یک مدول α-اتمی باشد.

قبل از بیان نمونه‌هایی از مدول‌های اتمی، مدول تقریباً متناهی مولد را تعریف می‌کنیم. این مدول‌ها برای نخستین بار توسط ویلیام ویکلی[۳] در [۳۹] تعریف شدند که در ادامه ارتباط آن‌ها با مدول‌های اتمی را بیان می‌کنیم.

۲.۱.۴ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. M را **تقریباً متناهی مولد** (یا به اختصار a.f.g.[4]) می‌نامیم، هرگاه M متناهی مولد نباشد ولی هر زیرمدول سره از آن متناهی مولد باشد.

[2]atomic

[3]William Weakley

[4]almost finitely generated

واضح است که تنها مدول (۱-)-اتمی، مدول صفر می‌باشد. در گزاره‌ی زیر با استفاده از تعریف قبل، مدول‌های ۰-اتمی و ۱-اتمی را به طور دقیق مشخص می‌کنیم.

۳.۱.۴ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت:

۱. M ۰-اتمی است اگر وتنها اگر ساده باشد.

۲. M ۱-اتمی است اگر وتنها اگر $a.f.g.$ باشد.

اثبات. ۱. همانند تذکر ۱۶.۳.۳، به آسانی اثبات می‌شود.

۲. اگر M یک مدول ۱-اتمی باشد، آنگاه $n-dim(M) = ۱$ و برای هر زیرمدول نابدیهی N از M داریم $n-dim(N) = ۰$. این یعنی هر زیرمدول سره از M نوتری است ولی M نوتری نیست. در نتیجه طبق قضیه‌ی ۲۶.۲.۱، مدول M متناهی مولد نیست ولی ولی هر زیرمدول سره‌ی آن متناهی مولد است، بنابراین M یک مدول a.f.g. است.

برعکس، فرض کنیم M یک مدول a.f.g. و $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی نامتناهی از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت، چون هر زیرمدول سره از M نوتری است، برای هر $i \geqslant ۱$ داریم:

$$n-dim\left(\frac{M_{i+۱}}{M_i}\right) \preceq n-dim\left(M_{i+۱}\right) \prec ۱.$$

بنابراین $n-dim(M) \preceq ۱$. از طرفی طبق فرض M نوتری نیست، پس $n-dim(M) \succeq ۱$. در نتیجه $n-dim(M) = ۱$. همچنین واضح است که برای هر زیرمدول سره‌ی N از M داریم $n-dim(N) \prec n-dim(M)$. بنابراین M یک مدول ۱-اتمی است. □

۴.۱.۴ مثال. نمونه‌هایی متنوع و نابدیهی از مدول‌های اتمی را ارائه و اثبات می‌کنیم:

۱. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول ۱-اتمی است. است، زیرا طبق مثال ۴.۴.۳، می‌دانیم $n{-}dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = ۱$ و هر زیرمدول سره از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ متناهی است، لذا دارای بعد نوتری صفر است.

۲. فرض کنیم M یک R-مدول آرتینی باشد که نوتری نیست و P در بین زیرمدول‌های غیر نوتریِ M مینیمال باشد. در این صورت P یک R-مدول ۱-اتمی است. زیرا طبق فرض واضح است که P نوتری نیست ولی هر زیرمدول سره از آن نوتری است، پس طبق قضیه‌ی ۲۶.۲.۱، به سادگی می‌توان دید که P یک R-مدول .a.f.g است. بنابراین طبق قسمت ۲ گزاره‌ی قبل، P یک R-مدول ۱-اتمی است.

یک R-مدول آرتینیِ ۱-اتمی را می‌توان به روش طبیعی دیگری نیز ساخت. فرض کنیم V یک فضای برداری روی حلقه‌ی تقسیم D باشد که دارای پایه‌ی نامتناهی و شمارای $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_n, \ldots\}$ است. برای هر i، زیرفضای V_i از V که توسط $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_i\}$ تولید می‌شود را در نظر می‌گیریم. تبدیل خطی T روی V را با ضابطه‌ی $T(v_۱) = ۰$ و برای هر $i \geq ۲$، $T(v_i) = v_{i-۱}$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $R = D[T]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های تولید شده توسط T روی D باشد. حال اگر V را به عنوان یک $D[T]$-مدول راست در نظر بگیریم، آن‌گاه به سادگی می‌توان دید که R-زیرمدول‌های V دقیقا زیرمدول‌های V_i $(i = ۱, ۲, \ldots)$ هستند. بنابراین V یک R-مدول ۱-اتمیِ آرتینی است.

۳. فرض کنیم M یک مدول آرتینی با بعد نوتری α باشد. در این صورت برای هر $\beta \preceq \alpha$، M دارای یک زیرمدول β-اتمی است. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم N زیرمدولی از M باشد که نسبت به خاصیت $n{-}dim(N) \succeq \beta$ مینیمال باشد، نشان می‌دهیم N یک مدول β-اتمی است. به این منظور، زنجیر صعودی نامتناهی $N_۱ \subseteq N_۲ \subseteq \cdots \subseteq N_n \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های N در نظر می‌گیریم. بنا به مینیمال بودن N نسبت به خاصیت مذکور، برای هر i داریم:

$$n{-}dim\left(\frac{N_{i+۱}}{N_i}\right) \preceq n{-}dim(N_{i+۱}) \prec \beta.$$

در نتیجه $n\text{–}dim(N) \preceq \beta$. از طرفی طبق فرض داریم $n\text{–}dim(N) \succeq \beta$، پس $n\text{–}dim(N) = \beta$.
هم‌چنین واضح است که برای هر زیرمدول سره‌ی K از N داریم $n\text{–}dim(K) \prec \beta$. در نتیجه N یک زیرمدول β–اتمی از M است.

۴. فرض کنیم R یک حلقه‌ی ارزیابی گسسته و Q میدان کسرهای آن باشد. نشان می‌دهیم Q یک R–مدول ۱–اتمی است. ابتدا ثابت می‌کنیم Q یک R–مدول متناهی مولد نیست. به خلاف فرض کنیم $\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \dots, \frac{r_n}{s_n}$ عناصری از Q باشند که $Q = \frac{r_1}{s_1}R + \frac{r_2}{s_2}R + \dots + \frac{r_n}{s_n}R$. به سادگی می‌توان دید که $Q = \frac{1}{s}R$ که در آن $s = s_1 s_2 \dots s_n \neq 0$. از طرفی چون $\frac{1}{s^2} \in Q$. عنصر $a \in R$ وجود دارد به طوری که $\frac{1}{s^2} = \frac{a}{s}$ و در نتیجه $1 - as = 0$ و s در R وارون پذیر است. بنابراین $Q = \frac{1}{s}R = R$ که تناقض است زیرا R میدان نیست. اکنون فرض کنیم $\mathfrak{m} = tR$ ایده‌آل ماکسیمال R باشد و A یک زیرمدول سره‌ی Q باشد. ادعا می‌کنیم عدد صحیح t وجود دارد به طوری که $A = t^n R$. برای اثبات ادعا، قرار می‌دهیم $F = \{n \in \mathbb{Z} \mid t^{-n} \in R\}$. لذا F دارای عضو مینیمال است، زیرا در غیر این صورت برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم $t^{-n} \in A$. از طرفی $q \in Q \setminus A$ وجود دارد به طوری که برای عدد صحیح i و عضو وارون پذیر u در R داریم $q = t^i uR$. بنابراین $q \in A$ که تناقض است. حال اگر k عضو مینیمال F باشد می‌توان نشان داد که $A = g^k R$. بنابراین Q یک R–مدول a.f.g. است و طبق گزاره‌ی ۳.۱.۴، Q، ۱–اتمی می‌باشد.

۵. فرض کنیم K یک میدان، $R = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ و $A = K[x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_m^{-1}]$ که $m \leq n$. در این صورت A یک R–مدول m–اتمی است. برای اثبات این مطلب [۲۳] و [۳۰] را ببینید.

۲.۴ خواص مدول‌های اتمی

در این بخش ویژگی‌های مدول‌های اتمی را به طور گسترده بررسی خواهیم کرد و بعضی از خواص مدول‌های ۱-اتمی (مدول‌های تقریبا متناهی مولد) که در [۳۹] بیان شده‌اند را به هر مدول اتمی تعمیم می‌دهیم. با گزاره‌ی زیر شروع می‌کنیم که در واقع دوگان لم ۱۹.۳.۳ می‌باشد.

۱.۲.۴ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول α-اتمی باشد. در این صورت هر مدول خارج قسمتی ناصفر از M نیز α-اتمی است.

اثبات. فرض کنیم M یک R-مدول α-اتمی باشد. پس طبق تعریف ۱.۱.۴، برای هر زیرمدول سره‌ی N از M داریم $n{-}dim(N) \prec \alpha$، لذا طبق قضیه‌ی ۷.۴.۳ داریم $n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right) = n{-}dim(M) = \alpha$. حال فرض کنیم $\frac{K}{N}$ یک زیرمدول سره از $\frac{M}{N}$ باشد، لذا K زیرمدولی سره از M است، پس $n{-}dim(K) \prec \alpha$. از طرفی طبق تذکر ۳.۴.۳ داریم:

$$n{-}dim\left(\frac{K}{N}\right) \preccurlyeq n{-}dim(K) \prec \alpha \Rightarrow n{-}dim\left(\frac{K}{N}\right) \prec \alpha$$

بنابراین هر مدول خارج قسمتی ناصفر از M، α-اتمی است. □

در ادامه نشان می‌دهیم هر مدولی که بعد نوتری داشته باشد دارای یک مدول خارج قسمتی اتمی ناصفر است. اما قبل از ارائه این قضیه، ابتدا تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

۲.۲.۴ تعریف. فرض کنیم α یک عدد ترتیبی باشد، زیرمدول سره‌ی N از R-مدول M را α-**هم-اتمی**[1] نامیم هرگاه $\frac{M}{N}$ یک R-مدول α-اتمی باشد، همچنین N را هم-اتمی نامیم هرگاه $\frac{M}{N}$ اتمی باشد.

[1] co-atomic

۳.۲.۴ قضیه. اگر M یک R-مدول با بعد نوتری α باشد، آن‌گاه M دارای یک مدول خارج قسمتی ناصفر اتمی (یک زیرمدول هم-اتمی) است. به‌علاوه، لزومی ندارد که بعد نوتری این مدول خارج قسمتی با M یکسان باشد.

اثبات. به خلاف فرض کنیم هر مدول خارج قسمتی ناصفر از M اتمی نباشد و $\frac{M}{P}$ یک مدول خارج قسمتی ناصفر باشد که دارای کم‌ترین بعد نوتری است (طبق قضیه‌ی ۲۶.۱.۱، $\frac{M}{P}$ وجود دارد). اگر $\frac{M}{P}$ دارای یک زیرمدول هم-اتمی مانند $\frac{K}{P}$ باشد، آن‌گاه $\frac{M}{K} \cong \frac{\frac{M}{P}}{\frac{K}{P}}$، اتمی است و در نتیجه K یک زیرمدول هم-اتمی از M است. بنابراین وجود زیرمدول هم-اتمی برای $\frac{M}{P}$ و M معادل است. پس بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم M در بین مدول‌های خارج قسمتی خود دارای کمترین بعد است. چون طبق فرض M اتمی نیست، زیرمدول سره‌ی P_1 از M وجود دارد به طوری که $n\!-\!dim(P_1) = \alpha$. اما $\frac{M}{P_1}$ اتمی نیست و M دارای کمترین بعد در بین مدول‌های خارج قسمتی خود بود، پس باید داشته باشیم $n\!-\!dim\left(\frac{M}{P_1}\right) = \alpha$. به طور مشابه چون $\frac{M}{P_1}$ اتمی نیست، زیرمدول سره‌ی $\frac{P_2}{P_1}$ از $\frac{M}{P_1}$ وجود دارد به طوری که $n\!-\!dim\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \alpha$. هم‌چنین $\frac{M}{P_2}$ غیر اتمی است و داریم $n\!-\!dim\left(\frac{M}{P_2}\right) = \alpha$. به همین ترتیب زیرمدول سره‌ی $\frac{P_3}{P_2}$ از $\frac{M}{P_2}$ وجود دارد به طوری که $n\!-\!dim\left(\frac{P_3}{P_2}\right) = \alpha$. با ادامه‌ی این روند زنجیر نامتناهی

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \subseteq \cdots \subseteq P_n \subseteq \cdots$$

را در M به دست می‌آوریم که در آن برای هر i داریم $n\!-\!dim\left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right) = \alpha$ که این یک تناقض است.

برای اثبات قسمت دوم قضیه، از قسمت ۲ مثالِ بخش قبل استفاده می‌کنیم. به این منظور فرض کنیم V یک $D[T]$-مدول آرتینی ۱-اتمی باشد. قرار می‌دهیم $S = \left[\begin{smallmatrix} D & V \\ \circ & R \end{smallmatrix}\right]$ که $R = D[T]$ و $M = \left[\begin{smallmatrix} D & V \\ \circ & R \end{smallmatrix}\right]$. در این صورت به سادگی می‌توان نشان داد هر زیرمدول از M به شکل $\left[\begin{smallmatrix} D & W \\ \circ & R \end{smallmatrix}\right]$ که W یک R-زیرمدول از V است. در نتیجه برای عدد i داریم $W = V_i$ یا $W = V$. اگر $N = \left[\begin{smallmatrix} \circ & W \\ \circ & \circ \end{smallmatrix}\right]$، آن‌گاه واضح است که $\frac{M}{N}$

نمی‌تواند اتمی باشد، زیرا $n\text{–}dim\left(\frac{M}{N}\right) = ۱$ و $n\text{–}dim\left(\frac{P}{N}\right) = ۱$ که $P = \left[\begin{smallmatrix} ۰ & V \\ ۰ & ۰ \end{smallmatrix}\right]$. بنابراین $N = \left[\begin{smallmatrix} ۰ & V \\ ۰ & ۰ \end{smallmatrix}\right]$ تنها زیرمدول هم-اتمی M می‌باشد هم‌چنین توجه داریم که $\frac{M}{N}$ ساده است، لذا $n-dim\left(\frac{M}{N}\right) = ۰$، اما $n-dim(M) = ۱$. □

۴.۲.۴ گزاره. هر مدول اتمی یک مدول پوچ است.

اثبات. فرض کنیم M یک R-مدول α-اتمی ، N یک زیرمدول سره و K یک زیرمدول دلخواه از M باشند که $N + K = M$. در این صورت داریم:

$$(۰) \neq \frac{M}{N} = \frac{N+K}{M} \cong \frac{K}{N \cap K} \Rightarrow n-dim\left(\frac{K}{N \cap K}\right) = n-dim\left(\frac{M}{N}\right) = \alpha.$$

از طرفی چون $M \precneqq N \cap K$، بنا به گزاره‌ی ۱.۲.۴، $n-dim\left(\frac{M}{N\cap K}\right) = \alpha$ و لذا داریم:

$$n-dim\left(\frac{K}{N \cap K}\right) = n-dim\left(\frac{M}{N \cap K}\right) = \alpha. \qquad (۱.۴)$$

ادعا می‌کنیم $K = M$. زیرا اگر $K \precneqq M$، آن‌گاه $n-dim(K) \prec \alpha$. از طرفی داریم

$$n-dim\left(\frac{K}{N \cap K}\right) \preceq n-dim(K) \prec \alpha.$$

در نتیجه $n-dim\left(\frac{K}{N\cap K}\right) \prec \alpha$ که با رابطه‌ی (۱.۴) در تناقض است. بنابراین $K = M$ و در نتیجه هر زیرمدول سره از M کوچک است: این یعنی M یک مدول پوچ است. □

۵.۲.۴ نتیجه. اگر M یک R-مدول اتمی باشد، آن‌گاه $hdim(M) = ۰$ و M تجزیه ناپذیر است.

نتیجه‌ی زیر در واقع شرایطی را برای برقرار شدن عکس گزاره‌ی قبل مطرح می‌کند.

۶.۲.۴ نتیجه. فرض کنیم M یک R-مدول باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. M اتمی است.

۲. هر زیرمدول سره‌ی M کوچک است و M دارای مدول خارج قسمتی اتمی $\frac{M}{N}$ می‌باشد، به طوری که $n{-}dim(N) \prec n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right)$.

اثبات. ۲ $\Leftarrow$ ۱) طبق گزاره‌ی ۱.۲.۴ و قضیه‌ی ۴.۲.۴، واضح است. در واقع N هر زیرمدول سره‌ای می‌تواند باشد.

۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنیم $N \neq (0)$ زیرمدولی از M باشد که $n{-}dim(N) \prec n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right)$. در این صورت طبق قضیه‌ی ۷.۴.۳، داریم $n{-}dim(M) = n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right)$. حال به خلاف فرض کنیم M اتمی نباشد، پس زیرمدول نابدیهی P از M وجود دارد به طوری که $n{-}dim(P) = n{-}dim(M)$. اکنون طبق فرض $N + P \neq M$، پس $\frac{N+P}{N}$ زیرمدول سره‌ای از $\frac{M}{N}$ است، اما $\frac{M}{N}$ اتمی است، لذا داریم:

$$n{-}dim\left(\frac{N+P}{N}\right) = n{-}dim\left(\frac{P}{N\cap P}\right) \prec n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right).$$

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۷.۴.۳، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n{-}dim(M) = n{-}dim(P) &= \sup\left\{n{-}dim(N\cap P), n{-}dim\left(\frac{P}{N\cap P}\right)\right\} \\ &\prec n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right). \end{aligned}$$

این یعنی برای هر زیرمدول سره‌ی P از M داریم $n{-}dim(P) \prec n{-}dim(M)$، که این یک تناقض است. بنابراین M اتمی است. □

۷.۲.۴ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول α-اتمی و $T = \mathrm{End}_R(M)$ حلقه‌ی درون‌ریختی‌های M باشد، در این صورت داریم:

۱. برای هر درون‌ریختی ناصفر $h \in T$ داریم $h(M) = M$.

۲. T یک دامنه صحیح است.

۳. اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه برای هر $r \in R$ داریم $rM = (0)$ یا $rM = M$.

۴. اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه $\mathrm{Ann}(M)$ یک ایده‌آل اول از R است و M یک مدول بخش پذیر روی دامنه‌ی صحیح $\frac{R}{\mathrm{Ann}(M)}$ است.

اثبات. ۱. فرض کنیم $0 \neq h \in T$، در این صورت $h(M) \cong \frac{M}{\ker h}$. اما چون $h \neq 0$، $\ker h$ زیرمدول سره‌ای از M است و لذا طبق گزاره‌ی ۱.۲.۴، $n-dim(h(M)) = n-dim\left(\frac{M}{\ker h}\right) = \alpha$. لذا $h(M)$ نمی‌تواند یک زیرمدول سره باشد، بنابراین $h(M) = M$.

۲. فرض کنیم $h_1, h_2 \in T$ و $h_1 h_2 = 0$. در این صورت با استفاده از قسمت قبل، $h_2 \neq 0$ نتیجه می‌دهد

$$(h_1 h_2)(M) = h_1(h_2(M)) = h_1(M) = 0.$$

بنابراین $h_1 = 0$ و T یک دامنه‌ی صحیح است.

۳. فرض کنیم $rM \neq (0)$، در این صورت طبق قسمت ۱، همریختی $\varphi : M \to M$ با ضابطه‌ی $\varphi(m) = rm$ یک بهروریختی است. بنابراین $\varphi(M) = rM = M$.

۴. فرض کنیم $a, b \in R$، $ab \in \mathrm{Ann}(M)$ و $a \notin \mathrm{Ann}(M)$. بنابراین $aM \neq (0)$ و طبق قسمت

قبل $aM = M$. در این صورت با استفاده از خاصیت تعویض‌پذیر بودن R داریم:

$$ab \in \mathrm{Ann}(M) \Rightarrow (ab)M = (\circ) \Rightarrow b(aM) = (\circ) \Rightarrow bM = (\circ) \Rightarrow b \in \mathrm{Ann}(M).$$

بنابراین $\mathrm{Ann}(M)$ یک ایده‌آل اول از R است و لذا $\frac{R}{\mathrm{Ann}(M)}$ یک دامنه‌ی صحیح است. اکنون فرض کنیم $\circ \neq r + \mathrm{Ann}(M) \in \frac{R}{\mathrm{Ann}(M)}$. در این صورت $rM \neq (\circ)$ و طبق قسمت ۳ داریم $rM = M$. بنابراین M یک $\frac{R}{\mathrm{Ann}(M)}$-مدول بخش پذیر است. □

۸.۲.۴ نتیجه. حلقه‌ی R به عنوان R-مدول اتمی است اگر وتنها اگر R یک حلقه‌ی تقسیم باشد.

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنیم R یک R-مدول اتمی باشد. برای هر $\circ \neq a \in R$ درون‌ریختی ناصفر $f_a : R \to R$ را با ضابطه‌ی $f_a(r) = ra$ تعریف می‌کنیم. بنا به قسمت ۱ از گزاره‌ی قبل، $f_a(R) = R$، یعنی برای هر $\circ \neq a \in R$، داریم $Ra = R$. می‌دانیم زیرمدول‌های R به عنوان R-مدول دقیقا همان ایده‌آل‌های چپ R می‌باشند. لذا فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ ناصفر از R باشد، پس $\circ \neq x \in I$ وجود دارد و برای این عضو داریم:

$$(\circ) \neq Rx \subseteq I \Rightarrow R = Rx \subseteq I \subseteq R \Rightarrow I = R.$$

بنابراین R ایده‌آل چپ غیربدیهی ندارد و لذا یک حلقه‌ی تقسیم است.

($\Rightarrow$) فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقسیم باشد، لذا R یک R-مدول ساده است و در نتیجه یک R-مدول اتمی (۰-اتمی) است. □

تعریف زیر که در واقع دوگان مدول تک‌ریخت است با مدول‌های اتمی ارتباط دارد.

۹.۲.۴ تعریف. R-مدول M را **به‌روریخت**[1] نامیم، هرگاه هر همریختی ناصفر از M به هر مدول خارج

[1] epiform

قسمتی از M، به‌روریختی باشد.

۱۰.۲.۴ گزاره. هر مدول اتمی یک مدول به‌روریخت است.

اثبات. فرض کنیم M یک مدول اتمی باشد، پس عدد ترتیبی α وجود دارد به طوری که M یک R-مدول α-اتمی باشد. حال فرض کنیم $N \lneq M$ و $\varphi : M \to \frac{M}{N}$ یک همریختی ناصفر باشد. باید نشان دهیم φ یک به‌روریختی است. اگر φ پوشا نباشد، آن‌گاه $\varphi(M) \lneq \frac{M}{N}$. اما چون M، α-اتمی است پس طبق گزاره‌ی ۱.۲.۴، $\frac{M}{N}$ نیز α-اتمی است؛ لذا $n{-}dim(\varphi(M)) \prec \alpha$. از طرفی داریم:

$$\frac{M}{\ker(\varphi)} \cong \varphi(M) \Rightarrow n{-}dim\left(\frac{M}{\ker(\varphi)}\right) = n{-}dim(\varphi(M)).$$

پس $n{-}dim(\varphi(M)) = \alpha$ که تناقض است، پس φ پوشا و M یک مدول به‌روریخت است. $\square$

۱۱.۲.۴ گزاره. فرض کنیم M یک مدول به‌روریخت باشد. در این صورت:

۱. اگر N زیرمدول سره‌ای از M باشد، آن‌گاه $\mathrm{Hom}_R(M,N) = (0)$.

۲. M تجزیه ناپذیر است.

۳. هر مدول خارج قسمتی از M یک مدول به‌روریخت است.

اثبات. ۱. فرض کنیم N زیرمدول سره‌ای از M باشد. اگر $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$، آن‌گاه $f : M \to N \subsetneq \frac{M}{(0)}$ که چون M به‌روریخت است باید f پوشا باشد؛ یعنی $M = f(M) \subsetneq N$ که غیر ممکن است، زیرا N زیرمدول سره‌ی M می‌باشد. بنابراین داریم $f = 0$.

۲. به خلاف فرض کنیم زیرمدول‌های ناصفر N و K از M وجود داشته باشند به طوری که $M = N \oplus K$. در این صورت به‌روریختی $f : N \oplus K \to N$ را خواهیم داشت و لذا $f(N \oplus K) = f(M) = N \neq (0)$ که تناقض است، زیرا طبق قسمت قبل باید داشته باشیم $f(M) = (0)$.

۳. فرض کنیم N زیرمدولی از M باشد. باید نشان دهیم برای هر زیرمدول $\frac{P}{N}$ از $\frac{M}{N}$ و هر همریختی ناصفر $f : \frac{M}{N} \to \frac{M}{P}$، f پوشاست. اما طبق فرض هر همریختی ناصفر مانند $g : M \to \frac{M}{N}$ و نیز همریختی $f \circ g : M \to \frac{M}{P}$ پوشا می‌باشند، لذا به آسانی می‌توان نشان داد f نیز پوشا است. $\square$

۱۲.۲.۴ تذکر. فرض کنیم M یک R-مدول و $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_n \subseteq \cdots$ یک زنجیر دلخواه از زیرمدول‌های M باشد. در این صورت منظور از مدول خارج قسمتی در زنجیر فوق، خارج قسمت دو مولفه‌ی متوالی از زنجیر، یعنی $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ می‌باشد.

۱۳.۲.۴ نتیجه. فرض کنیم M مدول اتمی و P یک مدول با زنجیری از زیرمدول‌های $(0) = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = P$ باشد به طوری که هر مدول خارج قسمتی از این زنجیر یک تصویر به‌روریخت[1] از M باشد. در این صورت هر تظریف از این زنجیر دارای n مدول خارج قسمتی ناصفر می‌باشد که تصویر به‌روریخت M هستند.

اثبات. به نتیجه‌ی ۲.۶ از [۲۰] مراجعه شود. $\square$

مفهوم زیر که دوگان مدول فشرده می‌باشد نیز با مدول‌های اتمی ارتباط دارد.

۱۴.۲.۴ تعریف. R-مدول M را **هم-فشرده**[2] نامیم، در صورتی که M تصویر به‌روریخت هر مدول خارج قسمتی ناصفرش باشد. به عبارت دیگر، برای هر زیرمدول سره‌ی N از M، به‌روریختی $f : \frac{M}{N} \to M$ وجود داشته باشد.

۱۵.۲.۴ گزاره. هر مدول هم-فشرده که بعد نوتری داشته باشد، اتمی است.

اثبات. اگر $M = (0)$ که حکم بدیهی است. پس فرض کنیم M یک مدول هم-فشرده‌ی ناصفر باشد و $n\text{–}dim(M) = \alpha$. در این صورت بنا به قضیه‌ی ۳.۲.۴، M دارای یک خارج قسمت اتمیِ ناصفر مانند $\frac{M}{N}$

[1] epimorphic image
[2] co-compressible

است. پس طبق فرض، به‌روریختی $f : \frac{M}{N} \to M$ وجود دارد. پس داریم $M \cong \frac{\frac{M}{N}}{\ker f}$. اما چون $M \neq (0)$ و f پوشاست، $\ker f$ زیر مدولی سره از $\frac{M}{N}$ است و در نتیجه طبق گزاره‌ی ۱.۲.۴، $\frac{\frac{M}{N}}{\ker f}$ اتمی است. بنابراین M یک مدول α-اتمی است. □

۱۶.۲.۴ تذکر. عکس گزاره‌ی قبل در حالت کلی برقرار نیست، برای مشاهده این مطلب، فرض کنیم R یک DVR و Q میدان کسرهای آن باشد. در این صورت طبق قسمت ۴ از مثال ۴.۱.۴، Q یک R-مدول ۱-اتمی است. درگزاره ۱.۴ از [۳۹] (ما نیز در بخش بعد ثابت خواهیم کرد) ثابت شده که $\frac{Q}{R}$ یک R-مدول آرتینی است. بنابراین Q نمی‌تواند یک تصویر همریخت از $\frac{Q}{R}$ باشد؛ این یعنی Q هم-فشرده نیست.

دوباره به مدول‌های اتمی برمی‌گردیم و نتایج بیشتری را ارائه می‌کنیم.

۱۷.۲.۴ گزاره. اگر M یک R-مدول دارای بعد نوتری باشد، آنگاه M دارای زیرمدولی اساسی مانند $E = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ است، به طوری که هر A_i در یک زیرمدول M هم-اتمی است.

اثبات. طبق قضیه‌ی ۳.۲.۴، M دارای یک زیرمدول هم-اتمی مانند A_1 است. اگر A_1 در M اساسی باشد که چیزی برای اثبات وجود ندارد. در غیر این صورت زیرمدول ناصفر B_1 از M وجود دارد به طوری که $A_1 \cap B_1 = (0)$. مجددا بنا به قضیه‌ی ۳.۲.۴، B_1 دارای یک زیرمدول هم-اتمی مانند A_2 است. در این صورت اگر $A_1 \oplus A_2$ در M اساسی باشد که اثبات تمام است. در غیر این صورت به طور مشابه، زیرمدول ناصفر B_2 از M وجود دارد به طوری که $(A_1 \oplus A_2) \cap B_2 = (0)$ و B_2 دارای یک زیرمدول هم-اتمی مانند A_3 است. بنابراین مجموع مستقیم $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ را به دست می‌آوریم. اما طبق گزاره‌ی ۴.۳.۳، بعد گلدی M متناهی است، پس بنا به تذکر ۵.۱.۳، روند فوق نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد و عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $E = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ زیرمدولی اساسی در M است و هر A_i یک زیرمدول هم-اتمی در یکی از زیرمدول‌های M است. □

۱۸.۲.۴ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول دارای بعد نوتری باشد. در این صورت مجموع مستقیمِ گزاره‌ی قبل را **ساکل هم-اتمی**[1] می‌نامیم.

قضیه‌ی بعد نشان می‌دهد که در هر مدول آرتینی مانند M، یک زنجیر نامتناهی از زیرمدول‌های M وجود دارد به طوری که همه‌ی مدول خارج قسمتیِ این زنجیر، α-اتمی هستند و α هر عدد ترتیبی کمتر از $n{-}dim(M)$ می‌تواند باشد.

۱۹.۲.۴ قضیه. فرض کنیم M یک R-مدول آرتینی باشد که نوتری نیست، بنابراین $n{-}dim(M) \succeq ۱$. در این صورت برای هر عدد ترتیبی $n{-}dim(M) \succ \alpha \neq -۱$ که $\alpha \neq -۱$، زنجیر نامتناهی

$$(\circ) = N_\circ \subsetneq N_۱ \subsetneq \cdots \subsetneq N_n \subsetneq \cdots$$

از زیرمدول‌های M وجود دارد به طوری که برای هر i، $\frac{N_{i+۱}}{N_i}$ مدولی α-اتمی است.

اثبات. فرض کنیم $n{-}dim(M) \succ \alpha \neq -۱$ یک عدد ترتیبی دلخواه باشد. چون M یک مدول آرتینی است، بنا به قضیه‌ی ۲۷.۲.۱، زیرمدول $N_۱$ از M وجود دارد به طوری که نسبت به خاصیت $n{-}dim(N_۱) \succeq \alpha$ مینیمال باشد. نشان می‌دهیم $N_۱$ یک زیرمدول α-اتمی است. فرض کنیم $K_۱ \subseteq K_۲ \subseteq \cdots$ یک زنجیر صعودی نامتناهی از زیرمدول‌های $N_۱$ باشد. در این صورت چون $N_۱$ نسبت به خاصیت $n{-}dim(N_۱) \succeq \alpha$ مینیمال است، برای هر i داریم:

$$n{-}dim\left(\frac{K_{i+۱}}{K_i}\right) \preceq n{-}dim\left(K_{i+۱}\right) \prec \alpha \Rightarrow n{-}dim(N_۱) \preceq \alpha.$$

بنابراین $n{-}dim(N_۱) = \alpha$. همچنین واضح است که بعد نوتری هر زیرمدول سره‌ی $N_۱$ نیز اکیداً کمتر از α است. پس $N_۱$ یک زیرمدول α-اتمی از M است. از طرفی چون طبق فرض $n{-}dim(M) \succ \alpha$،

[1] co-atomic socle

از قضیه‌ی ۷.۴.۳ نتیجه می‌گیریم $n-dim(M) = n-dim\left(\frac{M}{N_1}\right)$. طبق نتیجه‌ی ۲۹.۲.۱، $\frac{M}{N_1}$ آرتینی است، پس مشابه با ابتدای اثبات می‌توانیم نشان دهیم $\frac{M}{N_1}$ دارای زیرمدول α-اتمی $\frac{N_2}{N_1}$ می‌باشد و لذا داریم $n-dim(M) = n-dim\left(\frac{M}{N_2}\right)$. به همین ترتیب $\frac{M}{N_2}$ دارای زیرمدول α-اتمی $\frac{N_3}{N_2}$ می‌باشد و با تکرار این روند زنجیر نامتناهی $(0) = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n \subsetneq \cdots$ به‌دست می‌آوریم که هر مدول خارج قسمتی از آن، α-اتمی است. □

۲۰.۲.۴ تعریف. اگر M یک R-مدول و α یک عدد ترتیبی باشد، آنگاه **رادیکال α-اتمی**[1] M را با نماد $\mathrm{Rad}_\alpha(M)$ نمایش داده و برابر با اشتراک تمام زیرمدول‌های α-هم-اتمی M تعریف می‌کنیم؛ یعنی:

$$\mathrm{Rad}_\alpha(M) = \bigcap_{N\text{، }\alpha\text{-هم-اتمی است.}} N \qquad \text{یا} \qquad \mathrm{Rad}_\alpha(M) = \bigcap_{\frac{M}{N}\text{، }\alpha\text{-اتمی است.}} N.$$

اگر M فاقد زیرمدول α-هم-اتمی باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $\mathrm{Rad}_\alpha(M) = M$.

۲۱.۲.۴ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول و $\alpha \succeq 0$ یک عدد ترتیبی باشد. اگر α کوچک‌ترین عدد ترتیبی باشد که $\mathrm{Rad}_\alpha(M) \neq M$، آنگاه $\mathrm{Rad}_\alpha(M)$ را **α-رادیکال جیکوبسن**[2] M می‌نامیم.

۲۲.۲.۴ تذکر. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت

۱. واضح است که $\mathrm{Rad}_{-1}(M) = M$.

۲. $\mathrm{Rad}_0(M) = \mathrm{Rad}(M)$، زیرا $\mathrm{Rad}_0(M)$ برابر با اشتراک تمام زیرمدول‌هایی است که خارج قسمت آن‌ها 0-اتمی (ساده) باشند؛ این یعنی اشتراک تمام زیرمدول‌های ماکسیمال M که همان رادیکال مدول M می‌باشد.

[1] α-atomic radical
[2] α-Jacobson radical

۳. اگر M دارای بعد نوتری باشد، آنگاه طبق قضیه‌ی ۳.۲.۴، M حداقل یک زیرمدول سره‌ی α-هم-اتمی (لزومی ندارد که α برابر با بعد M باشد) دارد. لذا α-رادیکال جیکوبسن M سره است.

۲۳.۲.۴ گزاره. فرض کنیم M یک R-مدول دارای بعد نوتری باشد. در این صورت:

۱. هر رادیکال α-اتمی، تحت هر بەرویختی روی M پایا[1] است.

۲. اگر $\mathrm{Rad}_{\alpha}(M)$، α-رادیکال جیکوبسن M باشد، آن‌گاه هر زیرمدول متناهی مولد از $\mathrm{Rad}_{\alpha}(M)$ در M کوچک است.

۳. اگر M آرتینی باشد، آن‌گاه برای اعداد ترتیبی مختلف α، M فقط دارای تعداد متناهی رادیکال α-اتمی است. به علاوه، برای هر α داریم:

$$n\!-\!dim\left(\frac{M}{\mathrm{Rad}_{\alpha}(M)}\right)=\alpha \quad , \quad \mathrm{Rad}_{\alpha}\left(\frac{M}{\mathrm{Rad}_{\alpha}(M)}\right)=(\circ).$$

اثبات. ۱. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر عدد ترتیبی α داریم $\mathrm{Rad}_{\alpha}(M)=\bigcap\limits_{f\in\mathcal{A}}\ker f$، که در آن $\mathcal{A}$ خانواده‌ی همه‌ی بەروریختی‌های $f: M\to P$ است که P یک R-مدول α-اتمی است. می‌دانیم $P\cong\frac{M}{\ker f}$، لذا $\frac{M}{\ker f}$ یک R-مدول α-اتمی است. در نتیجه $\ker f$ یک از مولفه‌های اشتراک $\mathrm{Rad}_{\alpha}(M)$ است. اکنون نشان می‌دهیم هر مولفه‌ی این اشتراک (هر زیرمدول α-هم-اتمی) به فرم $\ker f$ می‌باشد. فرض کنیم K یک زیرمدول α-هم-اتمی از M باشد، پس $\frac{M}{K}$، α-اتمی است. بەروریختی طبیعی $\pi: M\to\frac{M}{K}$ را در نظر می‌گیریم، واضح است که $\pi\in\mathcal{A}$ و $\frac{M}{K}\cong\frac{M}{\ker\pi}$. لذا $K\cong\ker\pi$ و بنابراین $\mathrm{Rad}_{\alpha}(M)=\bigcap\limits_{f\in\mathcal{A}}\ker f$.
حال فرض کنیم $g: M\to M$ یک بەروریختی باشد. در این صورت به سادگی می‌توان نشان داد که $f\circ g: M\to P$ نیز یک بەروریختی است. بنابراین برای هر $f\in\mathcal{A}$ داریم $g\left(\mathrm{Rad}_{\alpha}(M)\right)\subseteq\ker f$. در نتیجه $g\left(\mathrm{Rad}_{\alpha}(M)\right)\subseteq\mathrm{Rad}_{\alpha}(M)$ و اثبات تمام است.

[1] invariant

۲. ابتدا فرض کنیم $\alpha = ۰$. در این صورت $\mathrm{Rad}_۰(M)$ همان رادیکال M است. به خلاف فرض کنیم N زیرمدولی متناهی مولد از $\mathrm{Rad}_۰(M)$ باشد که در M کوچک نیست. بنابراین زیرمدول سره‌ی K از M وجود دارد به طوری که $N + K = M$ و داریم $\frac{M}{K} = \frac{N+K}{K} \cong \frac{N}{N\cap K}$. بنابراین از متناهی مولد بودن N نتیجه می‌گیریم $\frac{M}{K} \neq (۰)$ نیز متناهی مولد است، لذا بنا به قضیه ۲۲.۲.۱، $\frac{M}{K}$ زیرمدول ماکسیمالی مانند $\frac{A}{K}$ دارد که در آن A یک زیرمدول ماکسیمال از M و $K \subseteq A$. از طرفی $N \subseteq \mathrm{Rad}_۰(M) \subseteq A$، در نتیجه داریم $M = N + K \subseteq N + A = A$ که یک تناقض است.

حال اگر $\alpha \neq ۰$، آن‌گاه طبق تعریف ۲۱.۲.۴، M نمی‌تواند دارای زیرمدول ماکسیمال باشد. زیرا اگر N زیرمدولی ماکسیمال از M باشد، آن‌گاه $\frac{M}{N}$، ۰-اتمی است و در نتیجه $\mathrm{Rad}_۰(M) \neq ۰$ که تناقض است. اکنون اگر B یک زیرمدول متناهی مولد از $\mathrm{Rad}_\alpha(M)$ و C یک زیرمدول سره از M باشد که $B+C = M$، آن‌گاه مشابه روند $\alpha = ۰$، M دارای یک زیرمدول ماکسیمال است که تناقض است. بنابراین هر زیرمدول متناهی مولد از α-رادیکال جیکوبسن M در M کوچک است.

ابتدا توجه داریم که هر اشتراک دلخواه از زیرمدول‌های یک مدول آرتینی را می‌توان به یک اشتراک متناهی از آن‌ها کاهش داد، بنابراین طبق گزاره‌ی ۱۴.۴.۳، برای هر α داریم $n\text{–}dim\left(\frac{M}{\mathrm{Rad}_\alpha(M)}\right) = \alpha$. اکنون به خلاف فرض کنیم، برای $i = ۱, ۲, \ldots$، Rad_{α_i} رادیکال‌های α_i-اتمی باشند که $\alpha_۱ \prec \alpha_۲ \prec \cdots \prec \alpha_n \prec \cdots$.

قرار می‌دهیم $A_n = \mathrm{Rad}_{\alpha_۱} \cap \mathrm{Rad}_{\alpha_۲} \cap \ldots \cap \mathrm{Rad}_{\alpha_n}$. در این صورت برای زنجیر نزولی

$$A_۱ \supseteq A_۲ \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$$

عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $A_n = A_{n+۱} = \cdots$. بنابراین با استفاده از گزاره‌ی ۱۴.۴.۳ داریم $n-dim\left(\frac{M}{A_n}\right) = \alpha_n$ و $n-dim\left(\frac{M}{A_{n+۱}}\right) = \alpha_{n+۱}$ که تناقض است. سرانجام برای حکم آخر، می‌دانیم هر زیرمدول α-هم-اتمی از $\frac{M}{\mathrm{Rad}_\alpha(M)}$ به صورت $\frac{N}{\mathrm{Rad}_\alpha(M)}$ است که در آن N یک زیرمدول α-هم-اتمی از

M است، بنابراین $\mathrm{Rad}_\alpha\left(\frac{M}{\mathrm{Rad}_\alpha(M)}\right) = (0)$. □

۲۴.۲.۴ تعریف. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت زنجیر متناهی

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n = (0)$$

از زیرمدول‌های M را یک **زنجیر اتمی**[1] می‌نامیم، اگر هر مدول خارج قسمتی از زنجیر فوق اتمی باشد؛ یعنی برای هر $1 \leqslant i \leqslant n-1$، $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ یک R-مدول اتمی باشد.

با استفاده از زنجیرهای اتمی، یک رده‌بندی از مدول‌های آرتینی ارائه می‌کنیم که در واقع دوگان نتیجه‌ی ۹.۵ از [۱۳] می‌باشد. قسمت آسان‌تر قضیه‌ی زیر در [۲۳، قضیه ۴.۲] برای مدول‌های آرتینی روی حلقه‌های تعویض‌پذیر و هم‌چنین در [۸، قضیه ۴۰] آورده شده است.

۲۵.۲.۴ قضیه. R-مدول M آرتینی است اگر وتنها اگر هر زیرمدول M دارای زنجیر اتمی باشد.

اثبات. فرض کنیم M یک R-مدول آرتینی باشد. در این صورت بنا به قضیه‌ی ۳.۲.۴، M دارای یک زیرمدول سره‌ی α-هم-اتمی مانند M_1 است. اگر $M_1 \neq (0)$، آن‌گاه مجددا قضیه‌ی ۳.۲.۴ نتیجه می‌دهد که M_1 دارای یک زیرمدول سره‌ی α-هم-اتمی مانند M_2 دارد. با ادامه این روند، زنجیر

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n \supsetneq \cdots$$

را به دست می‌آوریم که در آن هر مدول خارج قسمتی $\frac{M_i}{M_{i+1}}$، اتمی است. چون M آرتینی است، این زنجیر باید متناهی باشد. این یعنی برای یک عدد طبیعی مانند n باید داشته باشیم $M_n = (0)$.

[1] atomic chain

برعکس، اگر $M = M_\circ \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = (\circ)$ یک زنجیر اتمی باشد، آنگاه طبق قضیه‌ی ۷.۴.۳ هر M_i، $i = n, n-1, \cdots$ دارای بعد نوتری است. اکنون به استقرا روی $n-dim(M) = \alpha$ می‌پردازیم. اگر $\alpha = \circ$، آنگاه واضح است که یک مدول اتمیِ نوتری، ساده است و لذا آرتینی است. فرض کنیم هر مدول M با $n-dim(M) \prec \alpha$، آرتینی باشد. اکنون فرض کنیم $n-dim(M) = \alpha$ و $M = M_\circ \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = (\circ)$ یک زنجیر اتمی در M باشد. در این صورت واضح است که M_{n-1} اتمی است و بنابراین برای هر زیرمدول سره‌ی N از M داریم $n-dim(N) \prec n-dim(M) \preceq \alpha$. حال طبق فرض استقرا، N آرتینی است و در نتیجه M_{n-1} آرتینی است. چون هر $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ اتمی است و $n-dim\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right) \preceq n-dim(M)$، برای هر زیرمدول سره‌ی $\frac{P}{M_{i+1}}$ از $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ داریم:

$$n-dim\left(\frac{P}{M_{i+1}}\right) \prec n-dim\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right) \preceq \alpha.$$

اگر $\frac{P}{M_{i+1}}$ در فرض قضیه صدق کند، آنگاه بنا به فرض استقرا، $\frac{P}{M_{i+1}}$ آرتینی است و لذا $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ آرتینی است. بنابراین هر M_i، به ویژه M آرتینی است. در نتیجه برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم هر زیرمدول $\frac{A}{M_{i+1}}$ از $\frac{P}{M_{i+1}}$، دارای یک زنجیر اتمی است. به این منظور فرض کنیم $A = A_\circ \supsetneq A_1 \supsetneq \cdots \supsetneq A_m = (\circ)$ یک زنجیر اتمی در A باشد (چون A آرتینی است طبق قسمت اول قضیه، چنین زنجیری وجود دارد). در این صورت

$$\frac{A}{M_{i+1}} = \frac{A_\circ}{M_{i+1}} \supsetneq \frac{A_1 + M_{i+1}}{M_{i+1}} \supsetneq \cdots \supsetneq \frac{A_m + M_{i+1}}{M_{i+1}} = (\circ)$$

یک زنجیر اتمی در $\frac{A}{M_{i+1}}$ است، زیرا طبق گزاره‌ی ۱.۲.۴،

$$\frac{A_k + M_{i+1}}{A_{k+1} + M_{i+1}} \cong \frac{A_k}{A_{k+1} + A_k \cap M_{i+1}}$$

اتمی است. بنابراین هر زیرمدول از $\frac{P}{M_{i+1}}$ دارای زنجیر اتمی است و اثبات تمام است. □

۲۶.۲.۴ تذکر. این گونه نیست که هر مدولِ دارای بعد نوتری (حتی مدول‌های نوتری)، دارای زنجیر اتمی باشد. زیرا یک مدول نوتری دارای زنجیر اتمی است اگر وتنها اگر آرتینی باشد. هم‌چنین اگر $M = M_۰ \supseteq M_۱ \supseteq \cdots \supseteq M_n = (۰)$ زنجیری از زیرمدول‌های مدول آرتینی M باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه‌ی قبل می‌توان این زنجیر را به یک زنجیر اتمی در M توسعه داد.

لم زیر اساسا گزاره‌ای در [۳۹] می‌باشد ولی اثبات آن اندکی متفاوت است.

۲۷.۲.۴ لم. اگر A یک R-مدول ۱-اتمی باشد، آن‌گاه $S = \mathrm{End}(A)$ یک حلقه‌ی موضعی است.

اثبات. فرض کنیم M مجموعه‌ی تمام اعضای وارون ناپذیر S باشد. اگر نشان دهیم M مشمول در $J(S)$ است، آن‌گاه M ایده‌آل چپ (راست) یکتایی از S می‌باشد و اثبات تمام است. به این منظور، فرض کنیم $f \in M$ باشد، ادعا می‌کنیم $h \in S$ وجود ندارد که $hf = ۱$ یا $fh = ۱$. اگر $hf = ۱$، آن‌گاه f یک به یک است، از طرفی بنا به قسمت ۱۰.۲.۴ از گزاره‌ی ۷.۲.۴، f یک به‌روریختی است، بنابراین f وارون پذیر است که این غیرممکن است. هم‌چنین اگر $fh = ۱$، آن‌گاه fh خودتوان است، از طرفی طبق گزاره‌ی ۴.۲.۴، A تجزیه ناپذیر است، بنابراین داریم $hf = ۰$ یا $hf = ۱$. اما در مرحله‌ی قبل نشان دادیم $hf \neq ۱$، از سوی دیگر طبق قسمت ۱ گزاره‌ی ۷.۲.۴، S یک دامنه‌ی صحیح است، پس $hf \neq ۰$ که تناقض است. بنابراین نشان دادیم M تحت ضرب عناصر حلقه از هردو طرف بسته است. اکنون کافی است برای هر $f \in M$، نشان دهیم $۱ - f$ عضوی وارون پذیر است. زنجیر

$$\ker f \subseteq \ker f^۲ \subseteq \cdots \subseteq \ker f^n \subseteq \cdots$$

را در نظر می‌گیریم، واضح است که این زنجیر صعودی اکید است. زیرا اگر $۰ \neq x \in \ker f$، آن‌گاه طبق قسمت ۱ از گزاره‌ی ۷.۲.۴ داریم $f^n(A) = A$. بنابراین $y \in A$ وجود دارد به طوری که $x = f^n(y)$. بنابراین $y \notin f^n$ و چون $x \in \ker f$ داریم $۰ = f(x) = f^{n+۱}(y)$، در نتیجه $y \in \ker f^{n+۱}$. اما A

۱-اتمی است و لذا هر زیرمدول سره‌ی آن نوتری است، بنابراین $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker f^n$. اکنون برای هر $x \in A$، $g \in S$ را با ضابطه‌ی $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(x)$ تعریف می‌کنیم. g خوش تعریف است، زیرا اگر $x \in A$، آن‌گاه عدد n وجود دارد که $x \in \ker f^n$. بنابراین برای هر $m \geq n$ داریم $f^m(x) = 0$. واضح است که g وارون f است. بنابراین M تنها ایده‌آل ماکسیمال S می‌باشد و S موضعی است. □

۲۸.۲.۴ تذکر. جالب است بدانیم که اگر R یک حلقه تعویض‌پذیر و A یک R-مدول آرتینی ۱-اتمی باشد، آن‌گاه در قضیه‌ی اصلی [۳۹]، ثابت شده است که $S = \mathrm{End}_R(A)$ تعویض‌پذیر، کامل و هم‌چنین دامنه‌ی صحیح نوتری موضعی با بعد کرول ۱ است.

اکنون همانطور که در پایان بخش ۳.۲ وعده داده بودیم، گزاره‌ای مشابه با قضیه‌ی کرول-اشمیت برای مدول‌های اتمی بیان و اثبات می‌کنیم.

۲۹.۲.۴ قضیه. فرض کنیم $\bigoplus_{i\in I} A_i \cong \bigoplus_{j\in J} B_j$، که در آن هر A_i مدولی α_i-اتمی ($\alpha_i \preceq 1$) و هر B_j مدولی اتمی است. در این صورت تابع دوسویی $f : I \to J$ وجود دارد به طوری که برای هر $i \in I$ داریم $A_i \cong B_{f(i)}$.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم هر B_j، α_j-اتمی است که $\alpha_j \preceq 1$. می‌دانیم یک تابع یک به یک از B_j به $\bigoplus_{i\in I} A_i$ وجود دارد بنابراین همریختی ناصفری مانند f از B_j به یک A_i وجود دارد و لذا داریم:

$$\frac{B_j}{\ker f} \cong f(B_j) \subseteq A_i \Rightarrow n\text{-}dim(B_j) = n\text{-}dim\left(\frac{B_j}{\ker f}\right) \preceq n\text{-}dim(A_i) \preceq 1.$$

اکنون طبق قضیه ۴.۱.۶ از [۱۷]، کافی است ثابت کنیم اگر A یک R-مدول α-اتمی ($\alpha \preceq 1$) باشد، آن‌گاه $S = \mathrm{End}_R(A)$ یک حلقه موضعی است. اگر $\alpha = 0$، آن‌گاه A ساده است و به وضوح S یک حلقه تقسیم است. اگر $\alpha = 1$، آن‌گاه لم ۲۷.۲.۴ اثبات را تمام می‌کند. □

۳.۴ مدول‌های اتمی روی حلقه‌های تعویض‌پذیر

۱.۳.۴ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر، $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال از R و A یک R-مدول آرتینی باشد. در این صورت **زیرمدول $\mathfrak{m}$-تاب‌دار**[1] از A را با نماد $T_{\mathfrak{m}}(A)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_{\mathfrak{m}}(A) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad s.t \quad x\mathfrak{m}^n = (\circ)\}.$$

۲.۳.۴ لم. مجموع $\sum_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(R)} T_{\mathfrak{m}}(A)$ از زیرمدول‌های A، یک مجموع مستقیم است.

اثبات. به لم ۱.۳ از [۳۴] مراجعه شود. □

۳.۳.۴ قضیه. اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و A یک R-مدول آرتینی ناصفر باشد، آن‌گاه فقط تعدادی متناهی ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R وجود دارد که $T_{\mathfrak{m}}(A) \neq (\circ)$؛ اگر این ایده‌آل‌های ماکسیمال متمایز $\mathfrak{m}_۱, \mathfrak{m}_۲, \dots, \mathfrak{m}_n$ باشند، آن‌گاه داریم $A = \bigoplus_{i=۱}^{n} T_{\mathfrak{m}_i}(A)$. هم‌چنین هر $T_{\mathfrak{m}}(A)$ به طور طبیعی یک $R_{\mathfrak{m}}$-مدول آرتینی می‌باشد که مشبکه‌ی R-زیرمدول‌های آن منطبق بر مشبکه‌ی $R_{\mathfrak{m}}$-زیرمدول‌های آن می‌باشد.

اثبات. به گزاره‌ی ۱.۴ از [۳۴] مراجعه شود. □

یادآوری می‌کنیم که طبق قسمت ۴ از مثال بخش اول این فصل، اگر R یک DVR و Q میدان کسرهای آن باشد، آن‌گاه Q یک R-مدول ۱-اتمی بدون تاب است. در [۳۹] ثابت شده که مدول‌های بدون تاب ۱-اتمی با بعضی از میدان‌های کسرها یکریخت هستند. برای مطلب اخیر، در اینجا نیز گزاره‌ی کلی زیر را داریم:

۴.۳.۴ گزاره. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد. اگر A یک R-مدول بدون تاب اتمی باشد، آن‌گاه R یک دامنه‌ی صحیح است و A با میدان کسرهای R یکریخت است.

[1] $\mathfrak{m}$-torsion submodule

اثبات. طبق قسمت ۴ از گزاره‌ی ۷.۲.۴، $\mathrm{Ann}(A) = (0)$ یک ایده‌آل اول از R است و طبق قسمت ۳ از همان گزاره، برای هر $0 \neq r \in R$ داریم $rA = A$. این یعنی A یک R-مدول بخش‌پذیر است و لذا A روی Q (میدان کسرهای R) یک فضای برداری است. بنابراین $A = \bigoplus_{i\in I} Q_i$ که برای هر i داریم $Q \cong Q_i$؛ اما A تجزیه ناپذیر است لذا داریم $Q \cong A$. $\square$

گزاره‌ی زیر در واقع تعمیمی از [۳۹، گزاره ۱.۴] می‌باشد که در آن‌جا برای مدول‌های ۱-اتمی ثابت شده است.

۵.۳.۴ گزاره. فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح و Q میدان کسرهای آن باشد. اگر α یک عدد ترتیبی غیرحدی باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادل هستند.

۱. Q یک R-مدول α-اتمی است.

۲. $\frac{Q}{R}$ یک R-مدول α-اتمی تاب‌دار است.

اثبات. ۲ $\Rightarrow$ ۱: طبق گزاره ۷.۲.۴ بدیهی است.

۱ $\Rightarrow$ ۲: فرض کنیم A یک زیرمدول سره‌ی ناصفر از Q باشد. اگر $0 \neq x \in A$، آن‌گاه $\frac{Q}{Rx}$ با $\frac{Q}{R}$ یکریخت است، لذا $\frac{Q}{Rx}$ یک مدول α-اتمی است. در نتیجه طبق گزاره ۷.۲.۴، $\frac{Q}{A}$ که یک مدول خارج قسمتی ناصفر از $\frac{Q}{Rx}$ است نیز α-اتمی می‌باشد. بنابراین طبق لم ۵.۴.۳، Q دارای بعد نوتری است و $n\!-\!dim(Q) = \alpha$. حال فرض کنیم A زیرمدول سره‌ای از Q و B زیرمدول ناصفر و سره‌ای از A باشد. در این صورت طبق چیزی که ثابت کردیم $\frac{Q}{A}$ و در نتیجه مدول خارج قسمتی ناصفر $\frac{Q}{B}$ α-اتمی است. اما $\frac{A}{B}$ زیرمدول سره‌ای از $\frac{Q}{B}$ است، لذا داریم $n\!-\!dim\left(\frac{A}{B}\right) \preceq \alpha - 1$. بنابراین طبق لم ۵.۴.۳، A دارای بعد نوتری است و $n\!-\!dim(A) \preceq \alpha - 1$. در نتیجه Q یک R-مدول α-اتمی است. $\square$

۶.۳.۴ تذکر. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد. بنا به نتیجه‌ی ۸.۲.۴، واضح است که اگر R میدان نباشد، نمی‌تواند یک R-مدول اتمی باشد. اما یک ایده‌آل در حلقه‌ای تعویض‌پذیر ممکن است اتمی باشد که برای این مطلب گزاره‌ی زیر را داریم.

۷.۳.۴ گزاره. فرض کنیم P یک ایده‌آل از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. اگر P به عنوان R-مدول اتمی باشد، آن‌گاه هر عضو از P یک مقسوم علیه صفر است. به علاوه اگر P یک ایده‌آل اول باشد، آن‌گاه P اول مینیمال است.

اثبات. طبق قسمت ۳ از گزاره‌ی ۷.۲.۴، برای هر $a \in P$ داریم $aP = (\circ)$ یا $aP = P$. اگر $aP = (\circ)$ که چیزی برای اثبات وجود ندارد. اگر $aP = P$، آن‌گاه $b \in P$ وجود دارد به طوری که $a(\text{۱} - b) = \circ$.

اکنون فرض کنیم P اول باشد، نشان می‌دهیم P اول مینیمال است. به خلاف فرض کنیم $Q \subsetneq P$ یک ایده‌آل اول باشد، لذا عضوی مانند a وجود دارد که $a \in P$ و $a \notin Q$. بنابراین $aP = \circ$ یا $b \in P$ وجود دارد به طوری که $a(\text{۱} - b) = \circ$. در حالت اول داریم $P \subseteq Q$ و در حالت دوم $\text{۱} - b \in Q \subseteq P$ که هر دو حالت تناقض هستند. □

لم زیر نتیجه‌ای از قضیه‌ی ۳.۳.۴ می‌باشد که برای اثبات نتیجه‌ی اصلی این فصل به آن نیاز داریم.

۸.۳.۴ لم. فرض کنیم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد. اگر A یک R-مدول اتمی آرتینی باشد، آن‌گاه ایده‌آل ماکسیمال یکتای $\mathfrak{m}$ وجود دارد به طوری که $A = T_{\mathfrak{m}}(A)$ و $\mathrm{Ass}(A) = \mathrm{Supp}(A) = \{\mathfrak{m}\}$. هم‌چنین برای هر $x \in A$، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $\mathfrak{m} \supseteq \mathrm{Ann}(x) \supseteq \mathfrak{m}^n$. در حالت خاص، اگر R میدان نباشد، آن‌گاه A باید تاب‌دار باشد.

اثبات. از قضیه‌ی ۳.۳.۴ و این‌که A تجزیه ناپذیر است نتیجه می‌گیریم ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R وجود دارد به طوری که

$$A = T_{\mathfrak{m}}(A) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad s.t \quad x\mathfrak{m}^n = (\circ)\}.$$

بنابراین برای هر $x \in A$، عدد طبیعی n وجود دارد که $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{m}$. در نتیجه $\mathfrak{m}$ منحصر به فرد است. چون A آرتینی است داریم $\mathrm{Ass}(A) \neq \emptyset$، بنابراین $\mathrm{Ass}(A) = \mathfrak{m}$. حال اگر $P \neq \mathfrak{m}$ ایده‌آل اولی از R باشد، آن‌گاه هر عضو از A با عضوی در $R \setminus P$ پوچ می‌شود، لذا $A_P = (\circ)$. بنابراین $\mathrm{Supp}(A) = M$. حالت خاص نیز بدیهی است. □

۹.۳.۴ لم. اگر هر ایده‌آل اول در حلقه‌ی تعویض‌پذیر R ماکسیمال باشد، آن‌گاه هر R−مدول A که دارای بعد نوتری باشد، آرتینی (نوتری) است.

اثبات. فرض کنیم $\circ \neq x \in A$. قرار می‌دهیم $\mathrm{Ann}(x) = I$، در این صورت داریم $Rx \cong \frac{R}{I}$. حال طبق [۱۳، نتیجه‌ی ۷.۵]، ایده‌آل اول $I \subseteq P$ وجود دارد به طوری که $k-dim\left(\frac{R}{I}\right) = k-dim\left(\frac{R}{P}\right)$. بنابراین $\frac{R}{I}$ یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر آرتینی است و این یعنی Rx یک R−مدول آرتینی است. بنابراین طبق قضیه‌ی ۱۲.۳.۳، $A = \sum_{x \in A} Rx$ آرتینی است. سرانجام بنا به [۱۹، لم ۲.۱]، A یک مدول نوتری نیز می‌باشد. □

اکنون آماده‌ایم تا قضیه‌ی اصلی این فصل را ثابت کنیم. ابتدا توجه داریم که بنا به قسمت ۴ از گزاره‌ی ۷.۲.۴، اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و A یک R−مدول باشد، آن‌گاه $\mathrm{Ann}(A)$ یک ایده‌آل اول است. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح و $\mathrm{Ann}(A) = (\circ)$.

۱۰.۳.۴ قضیه. فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح (که میدان نیست) و A یک R−مدول اتمی باشد که $\mathrm{Ann}(A) = (\circ)$. در این صورت A آرتینی است اگر وتنها اگر A تاب‌دار باشد و برای هر $\circ \neq x \in A$ داشته باشیم $\sqrt{\mathrm{Ann}(x)} = P$ که P یک ایده‌آل اول ثابت از R است. به علاوه هرگاه $B \lneq A$، برای ایده‌آل اول Q، یک $\frac{R}{Q}$−مدول بدون تابِ بخش پذیر باشد، آن‌گاه نتیجه بگیریم Q ایده‌آلی ماکسیمال است.

اثبات. $(\Leftarrow)$: فرض کنیم A یک R−مدول آرتینی اتمی باشد. در این صورت طبق لم ۸.۳.۴، A تاب‌دار است و ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R وجود دارد که برای هر $\circ \neq x \in A$، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری

که $\mathfrak{m}^n \supseteq \mathrm{Ann}(x) \supseteq \mathfrak{m}$. بنابراین برای هر $0 \neq x \in A$ داریم $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathrm{Ann}(x)}$.

حال فرض کنیم B زیرمدول سره‌ای از A باشد که یک $\frac{R}{Q}$-مدول (Q ایده‌آل اولی از R) بدون تابِ بخش پذیر است. در این صورت B روی میدان کسرهای حلقه‌ی $\frac{R}{Q}$ یک فضای برداری است و لذا این میدان روی $\frac{R}{Q}$ آرتینی است. بنابراین $\frac{R}{Q}$ آرتینی است که نتیجه می‌دهد Q ماکسیمال است.

($\Rightarrow$): فرض کنیم x عضو ناصفر دلخواهی از A باشد و $I = \mathrm{Ann}(x)$. در این صورت طبق اثبات لم ۹.۳.۴، $Rx \cong \frac{R}{I}$ دارای بعد نوتری است. اما طبق [۱۳، لم ۵.۶]، هر ایده‌آل پوچ در حلقه‌ی دارای بعد کرول R، پوچ‌توان است. این یعنی عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $(\sqrt{I})^n \subseteq I$ و لذا $P^n \supseteq \mathrm{Ann}(x) \supseteq P$. ادعا می‌کنیم P ماکسیمال است. برای اثبات این ادعا قرار می‌دهیم $D = \{x \in A \mid Px = (0)\}$. در این صورت D یک $\frac{R}{P}$-مدول است. در واقع D یک $\frac{R}{P}$-مدول بخش پذیر است، زیرا اگر $r \notin P$، آن‌گاه طبق قسمت ۳ از گزاره‌ی ۷.۲.۴ داریم $rA = A$. بنابراین برای هر $x \in D$، $y \in A$ وجود دارد به طوری که $x = ry$. اکنون از $Px = (0)$ نتیجه می‌گیریم $rPy = (0)$ و لذا باید داشته باشیم $Py = (0)$، زیرا در غیر این صورت طبق فرض داریم $\mathrm{Ann}(Py) \subseteq P$ که غیر ممکن است. در نتیجه داریم $y \in D$ و $x = (r+P)y$. بنابراین D یک $\frac{R}{P}$-مدول بخش پذیر است. واضح است که $A \neq D$ یک $\frac{R}{P}$-مدول بدون تاب است و لذا طبق بند دوم اثبات، P ماکسیمال است. برای هر $x \in A$، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که Rx یک $\frac{R}{P^n}$-مدول است. اما هر ایده‌آل اول از $\frac{R}{P^n}$ ماکسیمال است و Rx دارای بعد نوتری است. بنابراین طبق لم ۹.۳.۴، Rx آرتینی است و لذا از قضیه‌ی ۱۲.۳.۳ نتیجه می‌گیریم $A = \sum_{x\in A} Rx$ آرتینی است. $\square$

گزاره‌ی زیر که در [۳۹] و [۱۴] ثابت شده است اکنون نتیجه‌ای از قضیه‌ی قبل می‌باشد.

۱۱.۳.۴ نتیجه. اگر R یک دامنه‌ی صحیح و A یک R-مدول ۱-اتمی با $\mathrm{Ann}(A) = (0)$ باشد، آن‌گاه A آرتینی است.

اثبات. واضح است که اگر $A \lneq B$، برای ایده‌آل اول Q، یک $\frac{R}{Q}$-مدول بخش پذیر باشد، آن‌گاه Q باید ماکسیمال باشد. زیرا B متناهی مولد است و در نتیجه دارای یک مدول خارج قسمتی ساده است. ادعا می‌کنیم برای هر $A \ni x \neq \circ$ داریم $\sqrt{\mathrm{Ann}(x)} = Z(A)$ که در آن

$$Z(A) = \{r \in R \mid \exists a \in A, a \neq \circ \quad s.t \quad ra = \circ\}$$

مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های صفر روی A است. برای اثبات این ادعا کافی است نشان دهیم $Z(A) \subseteq \sqrt{\mathrm{Ann}(x)}$. به خلاف فرض کنیم $r \in Z(A)$ و $r \in \sqrt{\mathrm{Ann}(x)}$. در این صورت داریم:

$$\mathrm{Ann}_A(r) \subseteq \mathrm{Ann}_A(r^{۲}) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ann}_A(r^n) \subseteq \cdots$$

هم‌چنین برای هر عدد طبیعی n داریم $r^n x \neq \circ$. بنابراین برای هر n داریم $r^n A = A$ و در نتیجه $\mathrm{Ann}_A(r^n) \subsetneq \mathrm{Ann}_A(r^{n+۱})$. اکنون $\bigcup_{n=۱}^{\infty} \mathrm{Ann}_A(r^n) = C$ نتیجه می‌دهد $x \notin C \neq A$ که یک تناقض است، زیرا C نوتری است. واضح است که اگر $Z(A)$ ایده‌آل باشد، آن‌گاه یک ایده‌آل اول است. □

۱۲.۳.۴ نتیجه. اگر R یک حلقه‌ی ارزیابی گسسته و Q میدان کسرهای آن باشد، آن‌گاه $\frac{Q}{R}$ آرتینی است.

اثبات. واضح است که $\frac{Q}{R}$ یک R-مدول تاب‌دار است. هم‌چنین طبق گزاره‌ی ۵.۳.۴، می‌دانیم $\frac{Q}{R}$، ۱-اتمی است؛ اکنون بنا به نتیجه‌ی قبل اثبات تمام است. □

۱۳.۳.۴ تذکر. فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح و A یک R-مدول ۱-اتمی با $\mathrm{Ann}(A) = (\circ)$ باشد. در این صورت طبق قسمت ۳ گزاره‌ی ۷.۲.۴، برای هر $\circ \neq r \in R$ داریم $rA = A$. بنابراین هر زیرمدول تاب‌دار از A یا برابر با صفر است یا A، زیرا هر زیرمدول تاب‌دار از A بخش پذیر است و نمی‌تواند زیرمدولی ناصفر و متناهی مولد باشد. در نتیجه A مدولی تاب‌دار یا بدون تاب است. این نکته در [۳۹] و [۱۴] نیز ثابت شده است.

۱۴.۳.۴ نتیجه. اگر A یک R-مدول با بعد نوتری یک باشد، آنگاه A دارای زیرمدول سره‌ای مانند B است به طوری که $\frac{A}{B}$ آرتینی است یا $\frac{A}{B}$ با یک میدان خارج قسمتی یکریخت است.

اثبات. طبق قضیه‌ی ۳.۲.۴، A دارای یک مدول خارج قسمتی ناصفر اتمی مانند $\frac{A}{B}$ است. واضح است که $n\!-\!dim\left(\frac{A}{B}\right) \preceq 1$. اگر $n\!-\!dim\left(\frac{A}{B}\right) = 0$، آنگاه $\frac{A}{B}$ ساده است و لذا اثبات تمام است. حال اگر $n\!-\!dim\left(\frac{A}{B}\right) = 1$، آنگاه با قرار دادن $P = \mathrm{Ann}_R\left(\frac{A}{B}\right)$ و در نظر گرفتن $\frac{A}{B}$ به عنوان یک $\frac{R}{P}$-مدول، می‌توانیم فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح است و $\mathrm{Ann}_R\left(\frac{A}{B}\right) = (0)$. اکنون طبق تذکر ۱۳.۳.۴، $\frac{A}{B}$ یک R-مدول تاب‌دار یا بدون تاب است. اگر $\frac{A}{B}$ تاب‌دار باشد، آنگاه طبق نتیجه ۱۱.۳.۴، $\frac{A}{B}$ آرتینی است و اگر $\frac{A}{B}$ بدون تاب باشد، آنگاه طبق گزاره ۴.۳.۴، $\frac{A}{B}$ با یک میدان خارج قسمتی یکریخت است. □

در گزاره‌ی ۴.۵ از [۱۴]، حلقه‌هایی که مدول‌های ۱-اتمیِ آرتینی را می‌پذیرند مشخص شده‌اند. در ادامه گزاره‌ی مذکور اندکی تعمیم داده شده است. توجه داریم که طبق قضیه‌ی ۲.۶ از [۲۳]، هر R-مدول اتمیِ آرتینی، n-اتمی است که n یک عدد طبیعی است.

۱۵.۳.۴ گزاره. برای حلقه‌ی تعویض‌پذیر R گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. R یک مدول آرتینی با بعد نوتری m می‌پذیرد.

۲. برای هر $n \leqslant m$، R یک مدول n-اتمیِ آرتینی می‌پذیرد.

۳. برای ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، $R_{\mathfrak{m}}$ یک مدول m-اتمی مانند A می‌پذیرد به طوری که $A = B_{\mathfrak{m}}$ و B یک R-مدول آرتینی است.

اثبات. ($1 \Rightarrow 2$): فرض کنیم A یک R-مدول آرتینی باشد که $n\!-\!dim(A) = m$. اکنون فرض کنیم $n \leqslant m$ دلخواه باشد و B زیرمدولی از A باشد که نسبت به خاصیت $n\!-\!dim(B) \succeq n$ مینیمال است. در این صورت واضح است که B یک R-مدول n-اتمی است.

(۳ $\Rightarrow$ ۲): فرض کنیم A یک R−مدول m−اتمیِ آرتینی باشد. در این صورت بنا به لم ۸.۳.۴، ایده‌آل ماکسیمال یکتای $\mathfrak{m}$ از R وجود دارد به طوری که $A = T_{\mathfrak{m}}(A)$. اکنون طبق قضیه‌ی ۳.۳.۴، مشبکه‌ی R−زیرمدول‌های A منطبق با مشبکه‌ی $R_{\mathfrak{m}}$−زیرمدول‌های آن می‌باشد. بنابراین A به عنوان یک $R_{\mathfrak{m}}$−مدول، m−اتمی است و طبق [۳۴، تذکر ۱.۷]، نتیجه می‌گیریم $A = A_{\mathfrak{m}}$.

(۱ $\Rightarrow$ ۳): اگر $A = B_{\mathfrak{m}}$، آن‌گاه با استقرا می‌توان نشان داد $n{-}dim_{R_{\mathfrak{m}}}(A) \preceq n{-}dim_R(B)$، اگر طرف راست نامساوی وجود داشته باشد. بنابراین داریم $n{-}dim(B) \succeq m$. حال فرض کنیم C زیرمدولی از B باشد که در میان زیرمدول‌های B نسبت به خاصیت $n{-}dim(C) \succeq m$ مینیمال باشد. در این صورت واضح است که $n{-}dim(C) = m$ و C یک R−مدول m−اتمیِ آرتینی است. $\square$

در گزاره‌ی ۱۵.۲.۴ ثابت شد که هر مدول هم−فشرده‌ی دارای بعد نوتری، اتمی است، هم‌چنین در تذکر ۱۶.۲.۴ نشان دادیم که عکس گزاره‌ی اخیر حتی برای مدول‌های ۱−اتمی روی حلقه‌های تعویض‌پذیر نیز برقرار نیست. این فصل را با تذکر زیر به پایان می‌بریم که نشان می‌دهد عکس گزاره‌ی ۱۵.۲.۴ برای مدول‌های ۱−اتمی آرتینی با شرایط زیر برقرار است.

۱۶.۳.۴ تذکر. فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح و A یک R−مدول ۱−اتمیِ آرتینی باشد که $\mathrm{Ann}(A) = (0)$. نشان می‌دهیم A یک R−مدول هم−فشرده است. به این منظور فرض کنیم f عضوی ناصفر و غیر یکه از $\mathrm{End}_R(A)$ باشد. در این صورت زنجیر نامتناهی $\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker f^n \subseteq \cdots$ را به دست می‌آوریم و داریم $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker f^n$. اگر B یک زیرمدول سره‌ی دلخواه از A باشد، آن‌گاه B متناهی مولد است و عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $B \subseteq \ker f^n$. در نتیجه دنباله $\frac{A}{B} \to \frac{A}{\ker f^n} \xrightarrow{f^n} A$ نشان می‌دهد A یک تصویر بهروریخت از $\frac{A}{B}$ است و لذا A هم−فشرده است. هم‌چنین مثال ۵.۴ از [۳۹] نشان می‌دهد مدول‌های ۱−اتمیِ آرتینی روی حلقه‌های تعویض‌پذیر ممکن است هم−فشرده نباشند.

نمایه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

almost finitely generated ....تقریباً متناهی مولد

annihilator ....پوچ‌ساز

artinian module ....مدول آرتینی

associated prime ideal ......ایده‌آل اول وابسته

atomic ....اتمی

atomic chain ....زنجیر اتمی

B

bimodule ....دومدول

bounded ....کران‌دار

C

closed submodule ....زیرمدول بسته

co-atomic ....هم–اتمی

co-atomic socle ....ساکل هم–اتمی

coclosed submodule ....زیرمدول هم‌بسته

co-compressible ....هم–فشرده

coindependent family ......خانواده‌ی هم‌مستقل

complement submodule ....زیرمدول مکمل

composition series ....سری ترکیبی

compressible ....فشرده

critical ....بحرانی

D

direct decomposition ....تجزیه‌ی مستقیم

direct sum ....مجموع مستقیم

direct summand ....جمعوند مستقیم

discrete valuation ring ...حلقه‌ی ارزیابی گسسته

division ring ....حلقه‌ی تقسیم

E

epiform ....به‌روریخت

epimorphic image .... تصویر به‌روریخت

equivalence relation .... رابطه‌ی هم‌ارزی

equivalent .... هم‌ارز

essential extension .... توسیع اساسی

essential monomorphism ..... تکریختی اساسی

essential submodule .... زیرمدول اساسی

F

field .... میدان

field of fractions .... میدان کسرها

finitely cogenerated .... متناهی هم تولید شده

finitely embedded .... متناهی نشانده شده

finitely generated .... متناهی تولید شده

G

Goldie dimension .... بعد گلدی

H

hollow dimension .... بعد پوچ

hollow module .... مدول پوچ

I

idempotent .... خودتوان

indecomposable .... تجزیه ناپذیر

independet family .... خانواده‌ی مستقل

integral domain .... دامنه صحیح

invariant .... پایا

invertible .... وارون پذیر

J

Jacobson radical .... رادیکال جیکوبسن

K

Krull dimension .... بعد کرول

L

lattice .... مشبکه

length of module .... طول مدول

lies above .... فرابری

limit .... حدی

local .... موضعی

P

partial ordered .... ترتیب جزئی

permutation .... جایگشت

prime .... اول

principal ideal .... ایده‌آل اصلی

proper chain .... زنجیر سره

Q

quotient field .... میدان خارج قسمتی

R

ring of fractions .... حلقه‌ی کسرها

S

Schur’s lemma .... لم شور

segment .... قطعه

semisimple .... نیم‌ساده

short exact sequence .... دنباله دقیق کوتاه

simple .... ساده

small cover .... پوش کوچک

local module .... مدول موضعی

localization .... موضعی سازی

lower bound .... کران پایین

M

maximal .... ماکسیمال

modular .... مدولار

modular law .... قانون مدولار

module of fractions .... مدول کسرها

monoform module .... مدول تکریخت

multiplicatively closed .... بسته‌ی ضربی

N

nil .... پوچ

nilpotent .... پوچ‌توان

Noetherian dimension .... بعد نوتری

noetherian module .... مدول نوتری

O

ordinal homomorphism .... همریختی ترتیبی

ordinal number .... عدد ترتیبی

small epimorphism .... به‌روریختی کوچک

small submodule .... زیرمدول کوچک

socle .... ساکل

successor .... تالی

supplement submodule .... زیرمدول متمم

support .... محمل

T

torsion .... تاب‌دار

torsion free .... بی‌تاب

transfinite induction .... استقرای ترامتناهی

triangular ring .... حلقه‌ی مثلثی

U

uniform dimension .... بعد یکنواخت

uniform module .... مدول یکنواخت

uniserial .... تک‌پیاپی

unit .... یکه

upper bound .... کران بالا

W

well ordered .... خوش ترتیب

Z

zero divisor .... مقسوم‌علیه صفر

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

اتمی .... atomic

استقرای ترامتناهی .... transfinite induction

اول .... prime

ایده‌آل اصلی .... principal ideal

ایده‌آل اول وابسته .... associated prime ideal

ب

بحرانی .... critical

بسته‌ی ضربی .... multiplicatively closed

بعد پوچ .... hollow dimension

بعد کرول .... Krull dimension

بعد گلدی .... Goldie dimension

بعد نوتری .... Noetherian dimension

بعد یکنواخت .... uniform dimension

به‌روریخت .... epiform

به‌روریختی کوچک .... small epimorphism

بی‌تاب .... torsion free

پ

پایا .... invariant

پوچ .... nil

پوچ‌توان .... nilpotent

پوچ‌ساز .... annihilator

پوش کوچک .... small cover

ت

تاب‌دار .... torsion

تالی .... successor

تجزیه ناپذیر .... indecomposable

تجزیه‌ی مستقیم .... direct decomposition

ترتیب جزئی .... partial ordered

تصویر به‌روریخت .... epimorphic image

تقریباً متناهی مولد .... almost finitely generated

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

تک‌پیاپی .... uniserial

تکریختی اساسی .... essential monomorphism

توسیع اساسی .... essential extension

ج

جایگشت .... permutation

جمعوند مستقیم .... direct summand

ح

حدی .... limit

حلقه‌ی ارزیابی گسسته .... discrete valuation ring

حلقه‌ی تقسیم .... division ring

حلقه‌ی کسرها .... ring of fractions

حلقه‌ی مثلثی .... triangular ring

خ

خانواده‌ی مستقل .... independet family

خانواده‌ی هم‌مستقل .... coindependent family

خودتوان .... idempotent

خوش ترتیب .... well ordered

د

دامنه صحیح .... integral domain

دنباله دقیق کوتاه .... short exact sequence

دومدول .... bimodule

ر

رابطه‌ی هم‌ارزی .... equivalence relation

رادیکال جیکوبسن .... Jacobson radical

ز

زنجیر اتمی .... atomic chain

زنجیر سره .... proper chain

زیرمدول اساسی .... essential submodule

زیرمدول بسته .... closed submodule

زیرمدول کوچک .... small submodule

زیرمدول متمم .... supplement submodule

زیرمدول مکمل .... complement submodule

زیرمدول هم‌بسته .... coclosed submodule

س

ساده .... simple

ساکل .... socle

ساکل هم–اتمی .... co-atomic socle

سری ترکیبی .... composition series

ط

طول مدول .... length of module

ع

عدد ترتیبی .... ordinal number

ف

فرابری .... lies above

فشرده .... compressible

ق

قانون مدولار .... modular law

قطعه .... segment

ک

کران بالا .... upper bound

کران پایین .... lower bound

کران‌دار .... bounded

ل

لم شور .... Schur's lemma

م

ماکسیمال .... maximal

متناهی تولید شده .... finitely generated

متناهی نشانده شده .... finitely embedded

متناهی هم تولید شده .... finitely cogenerated

مجموع مستقیم .... direct sum

محمل .... support

مدول آرتینی .... artinian module

مدول پوچ .... hollow module

مدول تکریخت .... monoform module

مدول کسرها .... module of fractions

مدول موضعی .... local module

مدول نوتری .... noetherian module

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

مدول یکنواخت .... uniform module

مدولار .... modular

مشبکه .... lattice

مقسوم‌علیه صفر .... zero divisor

موضعی .... local

موضعی سازی .... localization

میدان .... field

میدان خارج قسمتی .... quotient field

میدان کسرها .... field of fractions

ن

نیم‌ساده .... semisimple

و

وارون پذیر .... invertible

ه

هم–اتمی .... co-atomic

هم‌ارز .... equivalent

همریختی ترتیبی .... ordinal homomorphism

هم–فشرده .... co-compressible

ی

یکه .... unit

فهرست اختصارات

A

ACC .... Acending Chain Condition

a.f.e. .... Almost finitely embedded

a.f.g. .... Almost finitely generated

D

DCC .... Decending Chain Condition

DVR .... Discrete Valuation Ring

F

f.e. .... Finitely embedded

f.g. .... Finitely generated

M

m.c.s. .... Multiplicatively closed subset

P

PID .... Principal Ideal Domain

PIR .... Principal Ideal Ring

مراجع

[۱] بدیعی، م. نخستین درس در منطق و نظریه مجموعه‌ها. انتشارات دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول، ۱۳۹۴. ۹

[۲] شارپ، ر. گام‌هایی در جبر تعویض‌پذیر. ترجمه‌ی ابراهیمی، م. م. مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ویرایش هشتم، ۱۳۹۲. ۲۳، ۲۶

[۳] هانگرفورد، ت. د. جبر. ترجمه‌ی عالم‌زاده، ع. ا. و ذاکری، ح. انتشارات پژوهش، تهران، ویرایش هفتم، ۱۳۹۳. ۱۱

[۴] یاسمی، س. و پورنکی، م. ر. مقدمه‌ای بر نظریه مدول‌ها. انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، تهران، شهریور ۱۳۹۵. ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۹، ۵۰

[5] Albu, T. and Smith, P. F. Dual relative krull dimension of modules over commutative rings. In *Abelian Groups and Modules*, pages 1–15. Springer, 1995. 2

[6] Albu, T. and Smith, P. F. Localization of modular lattices, krull dimension, and the hopkins-levitzki theorem (ii). *Communications in Algebra*, 25(4):1111–1128, 1997. 2

[7] Anderson, F. W and Fuller, K. R. *Rings and Categories of Modules*, volume 13. Springer Science & Business Media, 1992. 16, 17, 18, 30, 48, 50, 51, 52

[8] Chambless, L. N-dimension and n-critical modules. application to artinian modules. *Communications in Algebra*, 8(16):1561–1592, 1980. 1, 2, 103

[9] Dung, N. V, Van Huynh, D., Smith, P. F, and Wisbauer, Ro. *Extending Modules*, volume 313. CRC Press, 1994. 56, 61

[10] Facchini, A., Herbera, D., Levy, L. S., and Vámos, P. Krull-schmidt fails for artinian modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(12):3587–3592, 1995. 52

[11] Fleury, P. A note on dualizing goldie dimension. *Canadian Mathematical Bulletin*, 17(4):511–517, 1974. 62

[12] Goodearl, K. R. and Warfield Jr, R. B. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, volume 61. Cambridge university press, 2004. 1, 18, 73

[13] Gordon, R. and Robson, J. C. *Krull Dimension*, volume 133. American Mathematical Society, 1973. 1, 103, 110, 111

[14] Heinzer, W. and Lantz, D. Artinian modules and modules of which all proper submodules are finitely generated. *Journal of Algebra*, 95(1):201–216, 1985. 2, 111, 112, 113

[15] Hrbacek, K. and Jech, T. *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded*. CRC Press, 1999. 10

[16] Huang, I. C. Constructions of artinian modules. *Communications in Algebra*, 23(13):5025–5030, 1995. 2

[17] Jategaonkar, A. V. *Localization in Noetherian Rings*, volume 98. Cambridge University Press, 1986. 1, 106

[18] Karamzadeh, O. A. S. *Noetherian-dimension*. PhD thesis, Ph. D. thesis, Exeter, 1974. 1, 2

[19] Karamzadeh, O. A. S. and Motamedi, M. On α-dicc modules. *Communications in Algebra*, 22(6):1933–1944, 1994. 2, 110

[20] Karamzadeh, O. A. S. and Sajedi Nejad, AR. Atomic modules. *Communications in Algebra*, 29(7):2757–2773, 2001. 3, 97

[21] Karamzadeh, O. A. S. and Sajedi Nejad, AR. On the loewy length and the noetherian dimension of artinian modules. *Communications in Algebra*, 30(3):1077–1084, 2002. 2

[22] Kasch, F. *Modules and Rings*, volume 17. Academic Press, 1982. 30

[23] Kirby, D. Dimension and length for artinian modules. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 41(4):419–429, 1990. 2, 89, 103, 113

[24] Krause, G. On the krull-dimension of left noetherian rings. *Journal of Algebra*, 23:88–99, 1972. 1

[25] Krull, W. Matrizen, moduln und verallgemeinerte abelsche gruppen im bereich der ganzen algebraischen zahlen. *Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, 2:13–38, 1932. 52

[26] Lam, T. Y. *A First Course in Noncommutative Rings*, volume 131. Springer Science & Business Media, 2001. 12, 14, 20, 46

[27] Lemonnier, B. Dimension de krull et codeviation. application au theoreme d'eakin. *Communications in Algebra*, 6(16):1647–1665, 1978. 1, 2

[28] Lomp, C. *On dual Goldie dimension*. PhD thesis, ProQuest Dissertations & Theses,, 1996. 36, 43, 62, 63, 64, 65

[29] McConnell, J. C., Robson, J. C., and Small, L. W. *Noncommutative Noetherian Rings*, volume 30. American Mathematical Society, 2001. 1, 46, 72, 73

[30] Northcott, D. G. Infective envelopes and inverse polynomials. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2):290–296, 1974. 89

[31] Reiter, E. A dual to the goldie ascending chain condition on direct sums of submodules. *Bull. Calcutta Math. Soc*, 73:55–63, 1981. 62

[32] Rentschler, R. and Gabriel, P. Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés. *CR Acad. Sci. Paris*, 265(2):712–715, 1967. 1

[33] Roberts, R. N. Krull dimension for artinian modules over quasi local commutative rings. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 26(1):269–273, 1975. 1

[34] Sharp, R. Y. A method for the study of artinian modules, with an application to asymptotic behavior. In *Commutative algebra*, pages 443–465. Springer, 1989. 107, 114

[35] Takeuchi, T. et al. On cofinite-dimensional modules. *Hokkaido Mathematical Journal*, 5(1):1–43, 1976. 35, 62

[36] Vámos, P. The dual of the notion of "finitely generated". *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):643–646, 1968. 16

[37] Varadarajan, K. Dual goldie dimension. *Communications in Algebra*, 7(6):565–610, 1979. 62

[38] Warfield, R. B. A krull-schmidt theorem for infinite sums of modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 22(2):460–465, 1969. 52

[39] Weakley, W. D. Modules whose proper submodules are finitely generated. *Journal of Algebra*, 84(1):189–219, 1983. 2, 3, 86, 90, 98, 105, 106, 107, 108, 111, 112, 114

[40] Wisbauer, R. *Foundations of Module and Ring Theory*. Routledge, 2018. 30

Abstract

Let M be an R-module. The Noetherian dimension (dual of Krull dimension) of M denoted by $n-dim(M)$. An R-module M is called α-atomic (α is an ordinal number) if $n-dim(M) = \alpha$ and $n-dim(N) \prec \alpha$ for any proper submodule N of M. Also M is said be atomic if it is α-atomic for some α. In this research we extensively study the concept of α-atomic modules and characterize atomic modules over commutative rings which are Artinian.

Key Words : Noetherian dimension, Atomic module, Atomic chain, α-atomic radical

Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran

Collage of Basic Science

Departement of Mathematics

Thesis Submitted for the Degree of Master of Science in Algebra

Title

Atomic Modules

By

Mohammad Maschi Zadeh

Supervisor 1	**Supervisor 2**	**Advisor**
Ahmad Halali	Alireza Alehafttan	Nasrin Shirali

Date

September 2020