
بسم الله الرحمن الرحیم

به‌کارگیری مهارت‌های حل مسئله در بررسی عدد رنگی گراف‌های یکال وابسته به حلقه‌ها

بهنام آیتی پور

استاد راهنما:

دکتر رضا نیک‌اندیش

۹ مهر ۱۳۹۸

فهرست مطالب

تعریف ۱

مسئله: چالشی است که دانش آموز (یا هر شخص دیگر) از قبل پاسخ آن را ندیده است. (یک حل از پیش آماده و قابل بازیابی از حافظه برای آن ندارد) اما با استفاده از اطلاعات و مهارت‌های موجود خود می‌تواند حداقل یک پاسخ برای آن پیدا کند.

تعریف ۲

راهبردهای حل مسئله: رهیافت‌ها و قواعد تجربی و کلی هستند که به صورت مهارت‌های حل دسته‌ای از مسائل به کار می‌روند و به مسئله حل کن کمک می‌کنند تا راه حل قابل قبولی برای مسئله‌ای که پیش رو دارد، بیابد.

معرفی تعدادی از مهارت‌های حل مسئله:

۱. رسم شکل
۲. سازماندهی اطلاعات (بررسی تمام حالت‌ها)
۳. حدس هوشمندانه و آزمایش آن
۴. حل مسأله هم‌ارز ساده تر ـ حل مسئله درحالت خاص ـ
۵. بازسازی و مدل‌سازی مسأله (بازنمایی)
۶. حل از آخر
۷. الگو یابی
۸. استدلال منطقی
۹. الگو سازی
۱۰. اتخاذ دیدگاه متفاوت

در این فصل به‌طور مختصر به سوالات زیر پاسخ می‌دهیم:

۱. مهارت‌های حل مسئله چه هستند؟
۲. چرا باید به مهارت‌های حل مسئله توجه ویژه‌ای داشته باشیم؟
۳. آیا لازم است در پایان نامه‌های ارشد ریاضی، مهارت‌های حل مسئله را بررسی کنیم؟
۴. چرا در این پایان نامه کاربرد های مهارت‌های حل مسئله را ردیابی کردیم؟

تعریف ۳

فرض کنید G یک گراف و k عددی طبیعی باشد. منظور از رنگ‌آمیزی گراف G با حداکثر k رنگ، تابعی مانند $f : V(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ است به‌طوری‌که برای هر $x, y \in V(G)$ که $xy \in E(G)$، $f(x) \neq f(y)$.

تعریف ۴

فرض کنیم گراف G دارای یک رنگ‌آمیزی با k رنگ باشد. در این صورت G را kـ رنگ‌پذیر نامیم.

تعریف ۵

عدد رنگی گراف G که با نماد $\chi(G)$ نشان داده می‌شود عبارت است از کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند k که به ازای آن گراف G، k ـ رنگ‌پذیر باشد.

تعریف ۶

یک زیرگراف کامل از یک گراف را یک خوشه از آن گراف نامند.

تعریف ۷

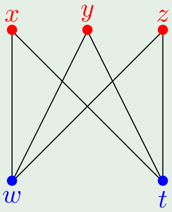
تعداد رئوس بزرگ‌ترین خوشه در یک گراف، عدد خوشه‌ای آن گراف نام دارد و با $\omega(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۸

گراف G را تام ضعیف نامیم هرگاه $\chi(G) = \omega(G)$.

مثال ۹

گراف $K_{۲,۳}$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم؛



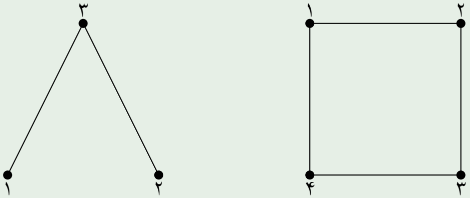
در این صورت واضح است که $۲ = \chi(H) = \omega(H)$. لذا گراف فوق تام ضعیف است.

تعریف ۱۰

گیریم p یک عدد اول و k عددی طبیعی باشد. گرافی را بر مبنای اعداد و جمع آن‌ها تعریف می‌کنیم که با $G(p^k)$ نمایش داده می‌شود. رئوس گراف $G(p^k)$ عبارت است از $[p^k] = \{۱, \ldots, p^k\}$، دو راس متمایز x و y را مجاور گوییم اگر وتنها اگر $(x+y, p)_{\text{ب‌م‌م}} = ۱$، یعنی $x+y$ مضربی از p نباشد.

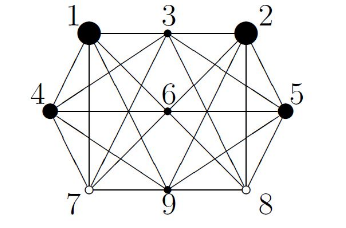
مثال ۱۱

گراف $G(۴)$ و $G(۳)$ در شکل پایین نشان داده شده است.



مثال ۱۲

گراف $G(۹)$ و رنگ‌آمیزی رئوس آن را در شکل زیر نمایش داده‌ایم.



شکل فوق نشان می‌دهد پیدا کردن عدد رنگی گراف $G(p^k)$ زمانی که تعداد راس‌ها زیاد است، چندان ساده نیست. اما قضیه‌ی اصلی (قضیه‌ی ۱۵) این فصل بیان می‌کند که تمام گراف‌های $G(p^k)$ تام ضعیف هستند و به‌علاوه فرمولی سرراست برای پیدا کردن عدد رنگی چنین گراف‌ها ارائه می‌کند.
برای اثبات این قضیه به دو لم نیاز داریم که ابتدا آن‌ها را بیان می‌کنیم:

لم ۱۳

گیریم $p > ۲$ عددی اول و k عددی طبیعی باشد، اگر $H = \{ip \mid ۱ \leq i \leq p^{k-۱}\}$، آنگاه یک خوشه ماکزیمم C در $G(p^k)$ وجود دارد به طوری که $C \cap H = \{p^k\}$.

لم ۱۴

گیریم $p > ۲$ عددی اول و k عددی طبیعی باشد، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\omega(G(p^k)) = \frac{p^{k-۱}(p-۱)}{۲} + ۱.$$

قضیه ۱۵

گیریم p عددی اول و k عددی طبیعی باشد در این‌صورت $G(p^k)$ تام ضعیف است، به‌علاوه خواهیم داشت:

$$\chi(G(p^k)) = \omega(G(p^k)) = \begin{cases} ۲ & p = ۲, \\ \frac{p^{k-۱}(p-۱)}{۲} + ۱ & p > ۲. \end{cases}$$

تعریف ۱۶

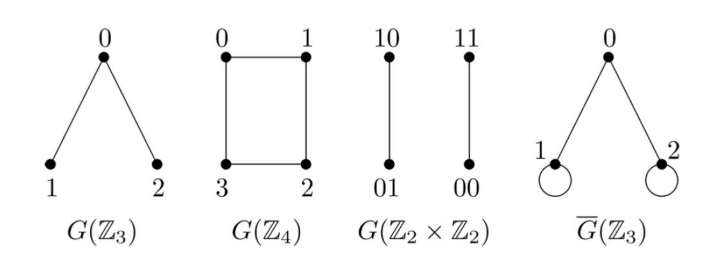
فرض کنیم R یک حلقه و $U(R)$ مجموعه‌ی یکال‌های R باشد، گراف یکال R که به صورت $G(R)$ نوشته می‌شود گرافی است که تمام عضوهای R رئوس آن می‌باشند و تعریف می کنیم رئوس متمایز x و y مجاورند اگر وفقط اگر $x + y \in U(R)$.

تعریف ۱۷

اگر کلمه‌ی متمایز را از تعریف قبل حذف کنیم، در این صورت ما گراف بسته یکال را با نماد $\overline{G}(R)$ ساخته‌ایم. این گراف ممکن است طوقه داشته باشد.

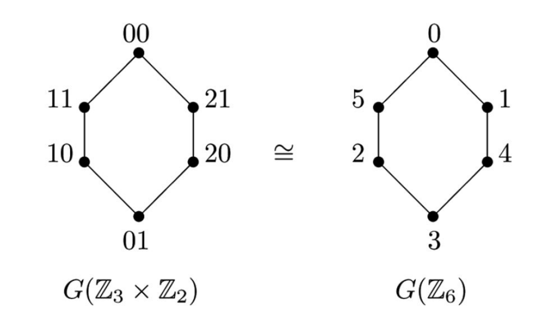
مثال ۱۸

گراف یکال برخی از حلقه‌های خاص در شکل زیر نمایش داده شده است.



مثال ۱۹

بدیهی است برای دو حلقه مفروض R و S، اگر $R \cong S$ آن‌گاه $G(R) \cong G(S)$. این مطلب در شکل زیر برای دو حلقه یکریخت $\mathbb{Z}_۶$ و $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۳$ نشان داده شده است.



تعریف ۲۰

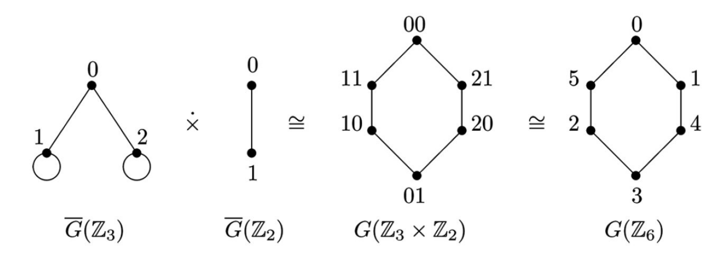
برای گراف G، فرض کنید $V(G)$ نماد مجموعه رئوس و $E(G)$ نماد مجموعه یال‌ها باشد، نیز گیریم G_1 و G_2 دو گراف با مجموعه راس‌های مجزا باشند. رسته حاصل ضرب G_1 و G_2 را با نماد $G_1 \times G_2$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$V(G_1 \times G_2) := V(G_1) \times V(G_2).$$

دو راس متمایز (x, y) و (x', y') مجاورند اگر وفقط اگر x و x' در G_1، نیز y و y' در G_2 مجاور باشند.
همچنین به وضوح برای دو حلقه مفروض R و S، دو راس مجزای $(x, y), (x', y') \in V(\overline{G}(R_1) \times \overline{G}(R_2))$ مجاورند هرگاه x و x' در $\overline{G}(R_1)$ نیز y و y' در $\overline{G}(R_2)$ مجاور باشند. این وضعیت ایجاب می‌کند که $\overline{G}(R_1) \dot{\times} \overline{G}(R) \cong G(R_1 \times R_2)$.

مثال ۲۱

رسته حاصل ضرب گراف یکال دو حلقه $\mathbb{Z}_۲$ و $\mathbb{Z}_۳$ در شکل زیر نمایش داده شده است.



قضیه ۲۲

فرض کنیم R یک حلقه متناهی باشد. عبارات زیر برای گراف یکال حلقه R برقرارند:

الف) اگر $2 \notin U(R)$ آنگاه گراف یکال $G(R)$ گرافی $|U(R)|$ـ منتظم است.

ب) اگر $2 \in U(R)$ آنگاه برای هر $x \in U(R)$ داریم $deg(x) = |U(R)| - 1$ و برای هر $x \in R \setminus U(R)$ داریم $deg(x) = |U(R)|$.

قضیه ۲۳

فرض کنیم R یک حلقه و $J(R)$ نماد رادیکال جکوبسن R باشد. اگر $x, y \in R$، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. اگر $x + J(R)$ و $y + J(R)$ در گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ مجاور باشند آن‌گاه هر عضو از $x + J(R)$ با هر عضو $y + J(R)$ در گراف یکال $G(R)$ مجاور است.
۲. اگر $2x \in U(R)$، آن‌گاه $x + J(R)$ یک هم‌خوشه در گراف یکال $G(R)$ می‌باشد.
۳. اگر $2x \notin U(R)$، آن‌گاه $x + J(R)$ یک خوشه در گراف یکال $G(R)$ می‌باشد.

قضیه ۲۴

گیریم R یک حلقه باشد، گراف یکال $G(R)$ یک گراف کامل است اگر و فقط اگر R یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ باشد.

تعریف ۲۵

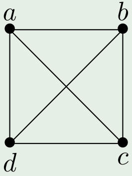
زیرگراف فراگیر ۱ـ منتظم H از گراف G را یک تطابق تام از گراف G می‌نامند.

تعریف ۲۶

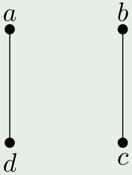
اگر یک تطابق تام از گراف K_{2n} (گرافی کامل با تعداد رئوس زوج) حذف کنیم، گراف باقی‌مانده را یک کوکتل پارتی می‌نامیم و با نماد $CP(2n)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۷

گراف $K_۴$ به شکل زیر را درنظر می‌گیریم:



در این صورت زیرگراف فراگیر زیر یک تطابق تام از $K_۴$ است:



قضیه ۲۸

گیریم R یک حلقه، n یک عدد طبیعی و p یک عدد اول فرد باشد، در این‌صورت $G(R) \cong K_1 \vee CP(p^n - 1)$، اگر وفقط اگر R یک میدان با p^n عضو باشد.

هدف این فصل

در این فصل ابتدا تعدادی لم را که برای اثبات قضیه‌ی ۳۳ (قضیه‌ی اصلی این بخش) نیاز داریم بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۲۹

فرض کنیم R یک حلقه و $U(\frac{R}{J(R)}) \in J(R) + ۲$ باشد، که در آن $J(R)$ نماد جکوبسن رادیکال R است. همچنین گیریم k و l دو عدد طبیعی باشند، در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

1. *اگر گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ یک خوشه با اندازه $k + l$ داشته باشد، به طوریکه دقیقا l عنصر غیر یکال در آن باشد. آن‌گاه گراف یکال $G(R)$ یک خوشه با اندازه $|J(R)|k + l$ دارد.*
2. *اگر گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ به رنگ‌آمیزی با $(k + l)$ رنگ داشته باشد به طوریکه دقیقاً l رنگ برای رنگ‌آمیزی عناصر غیر یکال استفاده می‌شود، در این‌صورت گراف یکال $G(R)$ یک رنگ‌آمیزی با $(|J(R)|k + l)$ رنگ دارد.*

لم ۳۰

فرض کنیم R یک حلقه باشد و $2 + J(R) \notin U(\frac{R}{J(R)})$، همچنین گیریم k یک عدد صحیح مثبت باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

1. اگر گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ یک خوشه با اندازه k داشته باشد، آن‌گاه گراف یکال $G(R)$ نیز خوشه‌ای به اندازه k دارد.
2. اگر گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ یک رنگ‌آمیزی k ـ رنگی دریافت کند، آن‌گاه گراف یکال $G(R)$ نیز یک رنگ‌آمیزی k ـ رنگی دریافت می‌کند.

اکنون نتایج زیر را بیان می‌کنیم که به ما اطلاعاتی درباره ساختار گراف‌های یکال برآمده از میدان‌ها ارائه می‌کند.

لم ۳۱

گیریم F_i، به طوری که $1 \le i \le n$، یک میدان باشد با مشخصه نامساوی با ۲، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند.

1. *گراف یکال $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ یک خوشه به اندازه $n + \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(|F_i| - 1)$ دارد، به طوری که دقیقاً n تا از عضوهای آن یکال نیستند.*
2. *گراف یکال $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ یک رنگ‌آمیزی $n + \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(|F_i| - 1)$ ـ رنگی می‌پذیرد به طوری که دقیقاً n رنگ برای رنگ‌آمیزی عناصر نایکال استفاده می‌شود.*

لم ۳۲

گیریم F_i که $n \leq i \leq 1$، یک میدان باشد به طوری که $F_1, \ldots, F_l$ دارای مشخصه‌های مساوی ۲ باشند و $|F_l| \leq \cdots \leq |F_1|$ همچنین $F_{l+1}, \ldots, F_n$ همگی مشخصه‌هایی مخالف با ۲ داشته باشند آن‌گاه احکام زیر برقرارند.

۱. گراف یکال $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ یک خوشه به اندازه $|F_1|$ دارد.
۲. گراف یکال $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ یک رنگ‌آمیزی $|F_1|$ ـ رنگی می‌پذیرد.

قضیه ۳۳

اگر R یک حلقه باشد، آنگاه گراف یکال $G(R)$ تام ضعیف است.

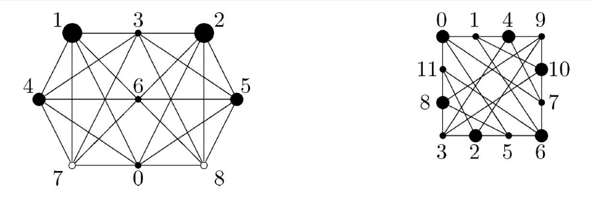
مثال ۳۴

گیریم $k > ۱$ عدد طبیعی باشد، می‌توان نوشت $k = p_۱^{r_۱} \dots p_n^{r_n}$، به طوری که p_i ها اعداد اول متمایز و r_i ها اعداد طبیعی باشند. بنابراین نتیجه می‌گیریم $\mathbb{Z}_k \cong \mathbb{Z}_{p_۱}^{r_۱} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}^{r_n}$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$\chi(G(\mathbb{Z}_k)) = \begin{cases} \frac{۱}{۲^n}\varphi(k) + n & \text{اگر } k \text{ فرد باشد،} \\ ۲ & \text{اگر } k \text{ زوج باشد.} \end{cases}$$

مثال ۳۴

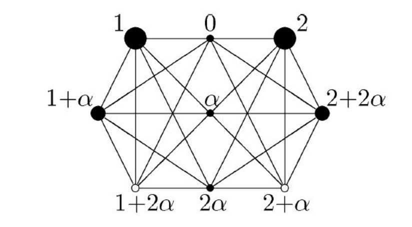
بنابراین برای مثال، عدد رنگی $G(\mathbb{Z}_{۹})$ برابر ۴ است و عدد رنگی $G(\mathbb{Z}_{۱۲})$ برابر با ۲ می‌باشد. در شکل ۱ ما این مطلب را نشان داده‌ایم. در این نمایش گلوله‌های متمایز معرف رنگ‌های متمایز می‌باشند.



شکل: گراف‌های یکال $G(\mathbb{Z}_{۹})$ و $G(\mathbb{Z}_{۱۲})$ و رنگ آمیزی آنها با کمترین تعداد رنگ ممکن.

مثال ۳۵

عدد رنگی گراف یکال ($G(\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{<x^2>})$ برابر ۴ است. در شکل زیر این رنگ آمیزی را نشان داده‌ایم. در این نمایش نیز گلوله‌های متمایز معرف رنگ‌های مختلف می‌باشند.



شکل: گراف یکال $G\left(\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{<x^2>}\right)$ و رنگ آمیزی آن با کمترین تعداد رنگ ممکن.

منابع

[1] N. Ashrafi, H. R. Maimani, M. R. Pournaki and S. Yassemi, Unit graphs associated with rings, Comm. Algebra, to appear.

[2] Chartrand, G., Oellermann, O. R. (1993). Applied and Algorithmic Graph Theory. New York: McGraw-Hill, Inc.

[3] Maimani, H. R., Pournaki, M. R., Yassemi, S. (2010). A Class of Weakly Perfect Graphs. Czechoslovak Mathematical Journal 60(4):1037–1041.

[4] Maimani, H. R., Pournaki, M. R., Yassemi, S. (2010). Weakly Perfect Graphs Arising From Rings. Glasgow Math. J. 52:417–425.

[5] D. B.West, Introduction to Graph Theory (Prentice Hall, Upper Saddle River,NJ, 1996).


با سپاس از توجه شما