بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

دانشکده‌ی علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی گرایش جبر

عنوان :

به‌کارگیری مهارت‌های حل مسئله در بررسی عدد رنگی گراف‌های یکال وابسته به حلقه‌ها

استاد راهنما

دکتر رضا نیک‌اندیش

نگارش

بهنام آیتی پور

شهریور ۹۸

تاییدیه صحت و اصالت نتایج

بسمه تعالی

اینجانب **بهنام آیتی پور** به شماره دانشجویی ۹۶۱۵۵۱۱۰۱ دانشجوي رشته **ریاضی** مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه‌ی نتایج این پایان‌نامه/رساله حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه‌برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر نموده‌ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقي و حقوقي و مراجع ذی‌صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده‌یی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ‌گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی : بهنام آیتی پور

امضا و تاریخ :

سیلی روزگار خورده بودم و خویشم به روز نیاز بیگانه می‌نمود.

نه در آشنایان وفا دیده‌ام   نه در باده نوشان صفا دیده‌ام
ز نامردمی‌ها نرنجد دلم   که از چشم خود هم خطا دیده‌ام

حضور در محافل علمی مجالی بود برای فرار از دردها و رنج‌ها. روزگار مرا به پای صحبت استاد کشاند. ابرمرد بختیاری شوق آموختن در وجودم برافروخت.

تو آمدی به کوی ما از پی قبسی   من از زبان خودم با تو راز خواهم گفت
و فیه مآرب اخری اهشو بی غنمی   و امر تسعی حی به تاز خواهم گفت
مترس موسی و اژدر زجای خود بردار   که در حضوری و ترس! احتراز خواهم گفت
و الکنم و فراری ز قوم در بیابانم   به قصد یاریت از صد جهاز خواهم گفت

و شیرزن کرد به من از آموختن آموخته‌ها گفت.

برای کودک تبعم که خواب می‌بیند   شمیم دلکشت آمد بگو که لالا باش
به چشم زمستان زده برای گوش سکوت   به مأذن سحری مادر مسیحا باش
ز جور دلشدگی رفته در مقام سکوت   بتاز بر سر جهل و زبان گویا باش

مبهوت توام ، ز چرخ زاری چه کنم؟ درطوقه این گراف ماری چه کنم؟
در عمق وجود من تو هستی هر دم در گشت و گذار روزگاری چه کنم؟
در کرنل ذهن من مقیم‌اند سواک دلگشته‌ی خود یک ننگاری چه کنم؟
بر موی تو بسته ایم صد دیده شوق مهجورم از آن باغ بهاری چه کنم؟
می‌راند مرا ز دامنه تابع تو گیسوی تو در خیال، بردباری چه کنم؟
مضروب شدم به تاکی از روز ازل ای حلقه دل نه ایده آلی چه کنم؟
می گفت به من محتسب خوش نسقی چون نیست مقدمم به تالی چه کنم؟
با تابع فیض جان محبان همه یک حاصل نشدم چنین کمالی چه کنم؟
حیران توام سراب میبینم و دشت پیدا نشدم یار یکالی چه کنم؟
یک دیده تمناست، دو چشم خمار ترکیب دو تابع است و f و g چه کنم؟
هر شام تو را به خواب میبینم و صبح بی تابع اندازه پذیری و مساحی چه کنم؟
پژواک توام بخوان مرا بار دگر ای دوست، نشد ز نو ندایی چه کنم؟
من آیتی، از کوی توام دولت عشق بی رخصت تو غزل سرایی چه کنم؟

بهنام آیتی پور

به نام خدا

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّوجلّ":

از استاد با کمالات و شایسته؛ **جناب آقای دکتر نیک‌اندیش** که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ اگر در این پایان‌نامه نامی از استاد محترم دکتر علیرضا آل هفت‌تن و دوستان بسیار گرامی ابراهیم دودانگه و محمد ماسچی زاده نیاورم خود را از ادای دینی که در کسوت استادی در حق من دارند فارغ نساخته‌ام.

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. گراف یکال وابسته به R با نماد $G(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوس آن تمام اعضای R هستند و دو راس متمایز x, y باهم مجاور هستند اگر وتنها اگر $x + y$ عضوی یکال از حلقه R بشود.

گراف G را تام ضعیف نامیم هرگاه عدد رنگی و عدد خوشه‌ای آن برابر باشند.

در این تحقیق تعدادی از مهارت های حل مسئله را به کار بردیم تا ثابت کنیم که گراف یکال یک حلقه‌ی یکدار جابجایی و متناهی تام ضعیف است. به علاوه دسته‌ی جدیدی از گراف‌های تام ضعیف برآمده از حلقه‌ها را معرفی می‌کنیم و یک فرمول سر راست برای یافتن عدد رنگی چنین گراف‌هایی ارائه می‌کنیم.

کلید واژه: مهارت‌های حل مسئله، گراف یکال، عدد رنگی، عدد خوشه‌ای، گراف تام ضعیف، حلقه‌های جابه‌جایی.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی نظریه‌ی حلقه

۱.۱.۱ **تعریف.** یک عمل دوتایی روی مجموعه‌ی ناتهی G نگاشتی مانند $* : G\times G \longrightarrow G$ است ($G\times G$ حاصل‌ضرب دکارتی[1] G در خودش است) که به هر عضو (a, b) از $G \times G$ عضوی یکتایی مانند c از G را نسبت می‌دهد. چون عمل $*$ یک نگاشت است، لذا به هر زوج‌مرتب از اعضای G یکی و نه بیشتر از G نظیر می‌کند؛ به‌عبارتی خوش تعریف است.

مجموعه‌ی G همراه با عمل $*$ را به صورت $(G, *)$ نشان می‌دهیم. همچنین اگر بخواهیم عمل دوتایی را با نماد جمعی نشان دهیم حاصل عمل را روی عضو (a, b) از $G \times G$، به‌صورت $a + b$ و اگر بخواهیم آن را با نماد ضربی نشان دهیم حاصل عمل را به‌صورت $a \cdot b$ یا ab نشان می‌دهیم.

[1] Cartesian product

۲.۱.۱ مثال. مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را با عمل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a * b = \circ.$$

در این صورت به وضوح $*$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Z}$ است.

۳.۱.۱ تعریف. فرض کنید $*$ یک عمل دوتایی روی مجموعه‌ی G باشد. عمل $*$ را جابه‌جایی یا جابه‌جایی گویند هرگاه: $\forall a, b \in G \quad a * b = b * a$.

در این صورت گوییم G دارای خاصیت جابه‌جایی است.

۴.۱.۱ تعریف. گوییم عمل دوتایی $*$ روی مجموعه‌ی G شرکت‌پذیر است هرگاه:

$$\forall\ a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c).$$

۵.۱.۱ تعریف. مجموعه‌ی G همراه با عمل دوتایی $*$ را یک نیم‌گروه نامیم هرگاه $*$ عملی شرکت‌پذیر در G باشد.

۶.۱.۱ تعریف. عنصر e از $(G, *)$ را خنثی یا همانی نسبت به $*$ نامیم هرگاه:

$$\forall\ a \in G \qquad a * e = e * a = a.$$

۷.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $*$ عملی دوتایی روی G، $a \in G$ و e عضو همانی G نسبت به $*$ باشد. عنصر a' با ویژگی $a * a' = a' * a = e$ را در صورت وجود، وارون a نسبت به $*$ می‌نامیم و آن را با a^{-1} نمایش می‌دهیم. در این صورت a را وارون‌پذیر نسبت به $*$ یا به‌طور خلاصه، وارون‌پذیر نامیم.

۸.۱.۱ تعریف. فرض کنید $(G, *)$ یک نیم‌گروه باشد. در این صورت آن را یک گروه نامیم هرگاه G دارای

عضو همانی و هر عضو آن وارون‌پذیر باشد.

با توجه به این تعریف، گوییم مجموعه‌ی ناتهی G یک گروه است اگر در G عملی مانند $*$ چنان تعریف شده باشد که:

الف) G تحت $*$ بسته باشد.

ب) $*$ عملی شرکت‌پذیر باشد.

پ) G دارای عضو همانی نسبت به $*$ باشد.

ت) هر عضو G وارون‌پذیر نسبت به $*$ باشد.

۹.۱.۱ تعریف. به گروه $(G,*)$ گروه آبلی[۲] یا گروه جابه‌جایی می‌گوییم هرگاه G دارای خاصیت جابه‌جایی باشد.

۱۰.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. مجموعه‌ی $H \subseteq G$ را یک زیرگروه از G نامیم هرگاه H همراه با عمل G تشکیل یک گروه دهد.

۱۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(G,\star)$ و $(H,\circ)$ دو گروه باشند. مجموعه‌ی $G \times H = \{(g,h) \mid g \in G, h \in H\}$ حاصل‌ضرب مستقیم دو گروه نامیده می‌شود.

۱۲.۱.۱ تعریف. مجموعه‌ی R همراه با دو عمل $(+,\cdot)$ را یک حلقه می‌نامیم و به‌صورت $(R,+,\cdot)$ نشان می‌دهیم هرگاه:

۱) $(R,+)$ یک گروه آبلی باشد.

۲) $(R,\cdot)$ یک نیم‌گروه باشد.

[2] Abelian

۳) عمل ضرب روی عمل جمع از چپ و راست توزیع‌پذیر باشد. یعنی به ازای هر $a, b, c \in R$ داشته باشیم: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ و $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

۱۳.۱.۱ مثال. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ یک حلقه است.

۱۴.۱.۱ تعریف. حلقه‌ی R را که در آن عمل ضرب دارای خاصیت جابه‌جایی باشد، حلقه‌ی جابه‌جایی و در غیر این صورت یک حلقه‌ی ناجابه‌جایی می‌گوییم.

۱۵.۱.۱ تذکر (مهم). در این بخش و سرتاسر این پایان‌نامه (به‌جز فصل سوم که مفهوم گراف یکال را برای یک حلقه‌ی یکدار معرفی می‌کنیم) همه‌ی حلقه‌ها یکدار و جابه‌جایی هستند که برای پرهیز از تکرار ممکن است این واژه‌ها را ذکر نکنیم.

۱۶.۱.۱ تعریف. عضو خنثی گروه $(R, +)$ را صفر حلقه نامند و با ۰_R یا ۰ نشان داده می‌شود.

۱۷.۱.۱ تعریف. اگر $(R, +, \cdot)$ یک حلقه باشد الزاماً در نیم‌گروه $(R, \cdot)$ عضو خنثی وجود ندارد اما در صورت وجود، آن را یکِ حلقه‌ی R و R را یک حلقه‌ی یکدار می‌نامند. همچنین یکِ حلقه‌ی R را با نماد ۱_R یا ۱ نشان می‌دهند.

۱۸.۱.۱ مثال. مجموعه‌ی اعداد صحیح درمثال ۱۳.۱.۱ ، یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار است.

۱۹.۱.۱ تعریف. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R را زیرحلقه‌ی R نامیم هرگاه S با اعمال جمع و ضرب R، ساختار یک حلقه داشته باشد.

۲۰.۱.۱ تعریف. عضوی از حلقه‌ی R را که نسبت به عمل ضرب وارون‌پذیر باشد، یکال یا وارون‌پذیر نامیم و مجموعه‌ی تمام عناصر وارون‌پذیر حلقه‌ی R را با نماد $U(R)$ نمایش می‌دهیم.

۲۱.۱.۱ تعریف. حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی تقسیم نامیم هرگاه هر عضو غیر صفر R عضو یکالی از R باشد.

۲۲.۱.۱ تعریف. گوییم حلقه‌ی R یک میدان است هرگاه یک حلقه‌ی تقسیم جابه‌جایی باشد.

۲۳.۱.۱ مثال. $(\mathbb{Z}_۵, +, .)$ یک میدان است.

۲۴.۱.۱ تعریف. عنصر $a \in R$ را مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R نامیم، هرگاه عنصر ناصفر $b \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $ab = ۰$. مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R را با نماد $Z(R)$ نشان می‌دهیم.

۲۵.۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد و $a, b \in R$. در این صورت R یک دامنه‌ی صحیح[۳] (حوزه‌ی صحیح) است اگر $ab = ۰$ ایجاب کند که $a = ۰$ یا $b = ۰$.

۲۶.۱.۱ مثال. حلقه‌ی $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ در مثال ۱۳.۱.۱ یک دامنه‌ی صحیح است.

۲۷.۱.۱ تعریف. زیرمجموعه‌ی ناتهی I از حلقه‌ی R را ایده‌آل[۴] R نامیم و به شکل $I \trianglelefteq R$ نمایش می‌دهیم، هرگاه:

الف) I زیرگروه جمعی R بوده

ب) اگر $a \in I$ و $r \in R$، آن‌گاه $ra \in I$.

۲۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $I_۱, I_۲, \ldots, I_n, I, J$ ایده‌آل‌هایی از آن باشند. در این صورت جمع و ضرب ایده‌آل‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند؛

الف) جمع ایده‌آل‌ها:

$$I_۱ + I_۲ + \cdots + I_n = \{a_۱ + \cdots + a_n \mid a_i \in I_i \ , \ ۱ \leqslant i \leqslant n\}$$

ب) ضرب ایده‌آل‌ها:

$$IJ = \{a_۱ b_۱ + \cdots + a_n b_n \mid a_i \in I, b_i \in J \ , \ ۱ \leqslant i \leqslant n\}.$$

[3] Integral domain

[4] Ideal

۲۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و $a \in R$ باشد. در این‌صورت مجموعه‌ی $aR = \{ar \mid r \in R\}$ ایده‌آل R می‌باشد و ایده‌آل اصلی تولید شده توسط a نامیده می‌شود. نمادهای دیگر aR عبارت‌اند از $< a >$ و Ra.

۳۰.۱.۱ تعریف. حلقه‌ای که هر ایده‌آل آن اصلی باشد را حلقه ایده‌آل اصلی یا به اختصار PIR نامیم. همچنین یک حلقه‌ی ایده‌آل اصلی که دامنه صحیح باشد را دامنه ایده‌آل اصلی یا به‌طور خلاصه PID می‌گوییم.

۳۱.۱.۱ تعریف. حلقه‌ی $(\mathbb{Z}, +, .)$ یک دامنه ایده‌آل اصلی می‌باشد.

۳۲.۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و $I \trianglelefteq R$. مجموعه‌ی $\frac{R}{I}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{R}{I} = \{r + I \mid r \in R\}.$$

در این صورت $\frac{R}{I}$ با اعمال جمع و ضرب زیر یک حلقه می‌باشد که آن را حلقه‌ی خارج‌قسمتی می‌نامیم.

$$\forall\ r_1 + I, r_2 + I \in \frac{R}{I}\ :\ (r_1 + I) + (r_2 + I) = (r_1 + r_2) + I\ ,\ (r_1 + I)(r_2 + I) = (r_1 r_2) + I.$$

همچنین $1_{\frac{R}{I}} = 1_R + I$ و $0_{\frac{R}{I}} = I$.

۳۳.۱.۱ تعریف. در حلقه‌ی R، ایده‌آل $P \neq R$ را اول[5] نامیم، هرگاه برای هر دو ایده‌آل دلخواه I و J از حلقه‌ی R، از $IJ \subseteq P$ نتیجه شود $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$. به‌عبارت دیگر، در حلقه‌ی R، ایده‌آل P را اول نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$ اگر $ab \in P$، آن‌گاه نتیجه شود $a \in P$ یا $b \in P$. همچنین مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با $Spec(R)$ نشان می‌دهیم.

۳۴.۱.۱ مثال. برای هر عدد اول p، ایده‌آل $p\mathbb{Z}$ در حلقه مثال ۱۳.۱.۱، ایده‌آلی اول از $\mathbb{Z}$ است.

[5] Prime

۳۵.۱.۱ تعریف. ایده‌آل $\mathfrak{m} \neq R$ از حلقه‌ی R را ماکسیمال[۶] می‌نامیم، هرگاه به ازای هر ایده‌آل N از R مانند N که $\mathfrak{m} \subseteq N$ داشته باشیم: $N = \mathfrak{m}$ یا $N = R$. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R را با $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهیم.

۳۶.۱.۱ مثال. در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_4$ ایده‌آل $<2>$ یک ایده‌آل ماکسیمال است.

۳۷.۱.۱ تعریف. دو ایده‌آل I و J از حلقه‌ی R را هم‌ماکسیمال[۷] (متباین) نامیم هرگاه $I + J = R$.

۳۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت رادیکال جیکوبسن[۸] R را به شکل $J(R)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in Max(R)} \mathfrak{m}.$$

۳۹.۱.۱ تعریف. حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی موضعی می‌نامیم، هرگاه R تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد. در این صورت از نماد $(R, \mathfrak{m})$ استفاده می‌کنیم.

۴۰.۱.۱ مثال. حلقه‌ی مثال ۳۶.۱.۱ یک حلقه‌ی موضعی می‌باشد که با نماد $(\mathbb{Z}_4, <2>)$ نشان داده می‌شود.

۴۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(R, +, \times)$ و $(R', \oplus, \otimes)$ دو حلقه باشند. تابع $f : R \to R'$ را یک همریختی

[6] Maximal

[7] Comaximal

[8] Jacobson radical

حلقه‌ای می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$۱ \cdot \forall a, b \in R \quad f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$$

$$۲ \cdot \forall a, b \in R \quad f(a \times b) = f(a) \otimes f(b).$$

همچنین هسته‌ی همریختی f با $Ker(f)$ نشان داده می‌شود و عبارت است از:

$$Ker(f) = \{x \in R \mid f(x) = \circ_{R'}\}.$$

هر همریختی یک به یک را تکریختی، همریختی پوشا را بروریختی و همریختی یک به یک و پوشا را یکریختی نامند که در این صورت قرار می‌دهند $R \cong R'$.

۴۲.۱.۱ تعریف (حلقه آرتینی[۹]). فرض کنید R یک حلقه باشد. گوییم R آرتینی است، هرگاه هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های R مانند $\cdots \supseteq I_{n+۱} \supseteq I_n \supseteq \cdots \supseteq I_۲ \supseteq I_۱$ سر انجام "ایستا"باشد. یعنی عدد طبیعی k موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $n \geqslant k$، $I_n = I_k$.

۴۳.۱.۱ تعریف (حلقه‌ی نوتری[۱۰]). فرض کنید R یک حلقه باشد. گوییم R نوتری است، هرگاه هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های R مانند $\cdots \subseteq I_{n+۱} \subseteq I_n \subseteq \cdots \subseteq I_۲ \subseteq I_۱$ سرانجام "ایستا"باشد. یعنی عدد طبیعی k موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $n \geqslant k$، $I_n = I_k$.

۴۴.۱.۱ مثال. حلقه‌ی $(\mathbb{Z}, +, .)$ یک حلقه‌ی نوتری می‌باشد که آرتینی نیست.

۴۵.۱.۱ مثال. حلقه‌های متناهی هم آرتینی و هم نوتری می‌باشند.

[9] Artinian ring

[10] Noetherian ring

۴۶.۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه‌ی یکدار باشد. در این صورت کوچکترین عدد طبیعی n با این خاصیت که برای هر $a \in R$، $na = \circ$، را مشخصه[11]ی R می‌نامیم.

۴۷.۱.۱ تعریف. فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. در این صورت $\sqrt{I}$ را رادیکال I می‌نامند و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad s.t \quad r^n \in I\}.$$

بالاخص $\sqrt{\circ}$ را با $\mathrm{Nil}(R)$ نشان می‌دهند و آن را رادیکال پوچ حلقه‌ی R می‌نامند. در واقع

$$\mathrm{Nil}(R) = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad s.t \quad r^n = \circ\}$$

که همان مجموعه‌ی اعضای پوچ‌توان R می‌باشد.

۴۸.۱.۱ تعریف. فرض کنید R یک حلقه باشد و $x \in R$. پوچ‌ساز x با نماد $\mathrm{ann}_R(x)$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{ann}_R(x) = \{a \in R \mid ax = \circ\}.$$

اگر $x = \circ$ آن‌گاه $\mathrm{ann}_R(x) = R$.

در حالتی که I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد پوچ‌ساز I را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ann}_R(I) = \{a \in R \mid \ \forall b \in I; \quad ab = \circ\}.$$

[11] Characteristic

۴۹.۱.۱ تعریف. حلقه‌ی R را تجزیه‌پذیر گویند هرگاه حلقه‌های $R_1, R_2, \ldots, R_n$ که همگی متمایز با R هستند، وجود داشته باشند به‌طوری‌که $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$.

در ادامه قضایای مقدماتی نظریه‌ی حلقه را بیان می‌کنیم.

۵۰.۱.۱ لم. فرض کنید I_1 و I_2 ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند. در این صورت $I_1 \cap I_2$ و $I_1 + I_2$ نیز ایده‌آل‌هایی از R هستند.

اثبات. واضح است. □

۵۱.۱.۱ قضیه. در حلقه‌ی ناصفر و یکدار R همواره ایده‌آل‌های ماکسیمال وجود دارند. در واقع هر ایده‌آل در R (به جز خود R) مشمول در یک ایده‌آل ماکسیمال است.

اثبات. به قضیه‌ی ۲۰۸۱ در [۱۰] مراجعه شود. □

۵۲.۱.۱ قضیه (قضیه‌ی ساختاری حلقه‌های آرتینی[12]). هر حلقه‌ی غیرموضعی و آرتینی با حاصل‌ضرب تعدادی متناهی از حلقه‌های موضعی و آرتینی یکریخت است.

اثبات. به صفحه ۹۵ [۳۳] مراجعه شود. □

۵۳.۱.۱ مثال. حلقه‌ی $\mathbb{Z}_{12}$ با $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ یکریخت می‌باشد.

۵۴.۱.۱ قضیه. فرض کنید R یک حلقه باشد و $a \in R$. در این صورت $a \in J(R)$ اگر و تنها اگر برای هر $r \in R$، $1 - ra$ وارون‌پذیر باشد.

اثبات. به گزاره‌ی ۳۰۷۱ در [۶] مراجعه شود. □

[12] Structure theorem for Artinian rings

۵۵.۱.۱ قضیه. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی باشد. در این صورت $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Max}(R)$. به‌عبارتی، هر ایده‌آل اول از R یک ایده‌آل ماکسیمال است.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۰ از [۱۲] مراجعه شود. □

۵۶.۱.۱ لم. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی باشد. در این صورت R تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال دارد.

اثبات. به لم ۸ . ۴۰ از [۶] مراجعه شود. □

۵۷.۱.۱ لم. F میدان است اگر و تنها اگر F و $\{0\}$ تنها ایده‌آل‌های آن باشند.

اثبات. لم ۳ . ۱۰ در [۶] را مشاهده کنید. □

۵۸.۱.۱ قضیه. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ میدان است اگر و تنها اگر $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال R باشد.

اثبات. قضیه‌ی ۶ . ۱۳ در [۱۰] را مشاهده کنید. □

۵۹.۱.۱ لم. هر میدان، دامنه‌ی صحیح است.

اثبات. تذکر ۱ . ۲۶ در [۶] را مشاهده کنید. □

۶۰.۱.۱ لم. هر دامنه صحیح متناهی، میدان است.

اثبات. به لم ۱ . ۲۷ در [۶] مراجعه کنید. □

۶۱.۱.۱ قضیه (باقی‌مانده چینی[۱۳]). فرض کنید $I_1, I_2, \ldots, I_k$ ایده‌آل‌هایی از R باشند به‌طوری‌که برای هر $j \neq i$، $I_i + I_j = R$ و $\bigcap I_i = 0$. در این صورت:

$$R \cong \frac{R}{I_1} \times \frac{R}{I_2} \times \cdots \times \frac{R}{I_k}$$

به‌ویژه، اگر I_iها ماکسیمال باشند، آن‌گاه $\frac{R}{I_i}$ها میدان هستند.

اثبات. برای مشاهده‌ی اثبات به قضیه‌ی ۱۶۵ در [۲۵] مراجعه شود. □

[13] Chinese Remainder

۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی نظریه‌ی گراف

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنید $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ یک مجموعه و E مجموعه‌ای از جفت‌های نامرتب اعضای V باشد. در این صورت $G = (V, E)$ و یا به اختصار، G را یک گراف نامیم.

۲.۲.۱ تعریف. در گراف $G = (V, E)$ مجموعه‌ی V را مجموعه‌ی رئوس و هر عضو آن را یک رأس، و مجموعه‌ی E را مجموعه‌ی یال‌ها و هر عضو از آن را یک یال نامیم.

نمادگذاری: اگر $(v_i, v_j) \in E$، آن‌گاه قرار می‌دهیم: $v_iv_j \in E$ و در این صورت گوییم یک سر یال v_i و سر دیگر آن v_j است.

۳.۲.۱ تعریف. به یالی که دو سر آن یک رأس باشند، طوقه می‌گوییم.

۴.۲.۱ تعریف. به گرافی که فاقد طوقه باشد، گراف ساده گوییم.

۵.۲.۱ تعریف. تعداد رئوس گراف G را مرتبه[۱۴]ی G نامند و آن را با $Order(G)$ نشان می‌دهند. اگر مرتبه‌ی یک گراف متناهی باشد، گراف را گراف متناهی و در غیر این صورت گراف را گراف نامتناهی می‌نامند.

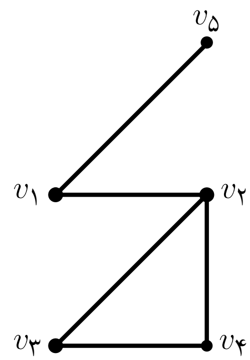
۶.۲.۱ تعریف. تعداد یال‌های گراف G را اندازه[۱۵]ی G نامند و آن را با $Size(G)$ نشان می‌دهند.

۷.۲.۱ تعریف. اگر $v_iv_j \in E$، آن‌گاه گوییم v_i, v_j مجاور، و در غیر این صورت غیرمجاور هستند.

۸.۲.۱ مثال. فرض کنیم گراف G به شکل زیر باشد:

[14] Order

[15] Size



در این صورت داریم:

$$Order(G) = 5 \text{ و } V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$Size(G) = 5 \text{ و } E(G) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_2v_4\}.$$

همچنین دو رأس v_1 و v_2 مجاور و دو رأس v_1 و v_3 غیر مجاور هستند.

۹.۲.۱ تعریف. یک گشت در گراف G دنباله‌ای از رئوس مانند $v_0, v_1, \cdots, v_k$ است که در آن برای هر $0 \leqslant i \leqslant k-1$، $v_iv_{i+1} \in E$. همچنین در این صورت رأس v_0 را رأس ابتدا و رأس v_k را رأس انتهای گشت گوییم.

۱۰.۲.۱ تعریف. تعداد یال‌های ظاهر شده در یک گشت، طول آن گشت نامیده می‌شود.

۱۱.۲.۱ تعریف. یک گشت بدون رأس تکراری را یک مسیر[16] می‌نامند.

۱۲.۲.۱ تعریف. مسیری که ابتدا و انتهای آن یک رأس باشند، دور[17] نامیده می‌شود.

۱۳.۲.۱ تعریف. گراف G را همبند[18] نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت آن را ناهمبند[19] نامیم.

[16]Path

[17]Cycle

[18]Connected

[19]disconnected

۱۴.۲.۱ تعریف. گراف G را کامل[20] گویند هرگاه هر دو رأس آن مجاور باشند. گراف کامل از مرتبه‌ی n را با نماد K_n نشان می‌دهند.

۱۵.۲.۱ تعریف. گراف G را پوچ یا تهی[21] نامند هرگاه هیچ یالی نداشته باشد. گراف تهی از مرتبه‌ی n را با نماد E_n نشان می‌دهند.

۱۶.۲.۱ تعریف. فرض کنیم r یک عدد نامنفی باشد. گراف G را r–منتظم[22] گویند هرگاه درجه هر راس از آن r باشد.

۱۷.۲.۱ تعریف. مکمل[23] گراف G با نماد $\overline{G}$ نشان داده می‌شود و عبارت است از: $V(\overline{G}) = V(G)$ و $xy \in E(\overline{G}) \Leftrightarrow xy \notin E(G)$.

۱۸.۲.۱ تعریف. گراف H را زیرگراف[24] G نامند هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. در این صورت قرار می‌دهیم $H \subseteq G$.

۱۹.۲.۱ تعریف. زیرگراف H از گراف G را زیرگراف فراگیر[25] G می‌نامند، هرگاه $V(H) = V(G)$.

۲۰.۲.۱ تعریف. زیرگراف فراگیر ۱–منتظم H از گراف G را یک تطابق تام[26] از گراف G می‌نامند.

۲۱.۲.۱ تعریف. اگر یک تطابق تام از گراف $K_{۲n}$ (گرافی کامل با تعداد رئوس زوج) حذف کنیم، گراف باقی‌مانده را یک کوکتل پارتی[27] می‌نامیم و با نماد $CP(۲n)$ نمایش می‌دهیم.

۲۲.۲.۱ مثال. گراف $K_۴$ به شکل زیر را درنظر می‌گیریم:

[20] Complete

[21] Empty graph

[22] r-regular

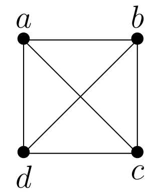
[23] Complement

[24] Subgraph

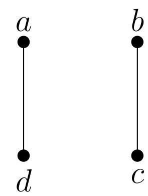
[25] Spaning Subgraph

[26] Perfect Matching

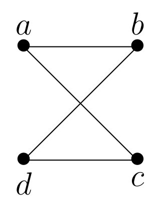
[27] Cocktail party



در این صورت زیرگراف فراگیر زیر یک تطابق تام از K_4 است:



با حذف کردن این زیرگراف از K_4، ما کوکتل پارتی $CP(4)$ را به‌دست می‌آوریم که به‌صورت زیر می‌باشد:



۲۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\varnothing \neq S \subseteq V(G)$، در این صورت زیرگراف راس-القایی[28] روی S را با نماد $< S >$ نمایش می‌دهند که گرافی است با مجموعه رئوس S و همه یال‌هایی از G که دو سر آن‌ها در S است، به عبارت دیگر $E(< S >) = \{uv \in E(G) \mid u, v \in S\}$.

۲۴.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\varnothing \neq A \subseteq E(G)$، در این صورت زیرگراف یال-القایی[29] روی A را با نماد $< A >$ نمایش می‌دهند که گرافی است با مجموعه یال‌های A و مجموعه رئوس آن شامل دو سر پایانی همه‌ی یال‌های A می‌باشد.

[28] Vertex-induced

[29] Edge-induced

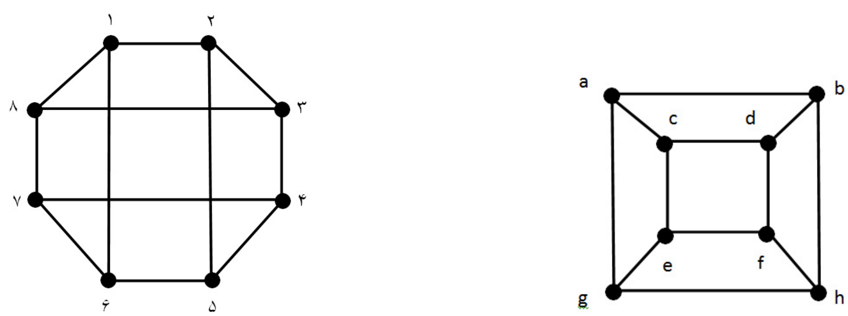
۲۵.۲.۱ تعریف. گراف G را n−بخشی نامند هرگاه بتوان مجموعه‌ی رئوس G را به n مجموعه‌ی $V_۱, V_۲, \cdots, V_n$ افراز نمود به نحوی که یک سر هر یال از G در یک مجموعه و سر دیگر آن در مجموعه‌ی دیگری باشد.

۲۶.۲.۱ تعریف. گراف دوبخشی[30] G با بخش‌های $V_۱$ و $V_۲$ را گراف دوبخشی کامل می‌گویند هرگاه تمام رئوس $V_۱$ با تمام رئوس $V_۲$ مجاور باشند. در این صورت اگر $|V_۱| = m$ و $|V_۲| = n$، گراف فوق را با نماد $K_{m,n}$ نمایش می‌دهند. به‌ویژه، $K_{۱,n}$ را گراف ستاره می‌نامند.

۲۷.۲.۱ تعریف. دو گراف G و H را یکریخت نامند هرگاه تابع دوسویی $f : V(G) \to V(H)$ موجود باشد به‌طوری‌که:

$$xy \in E(G) \Leftrightarrow f(x)f(y) \in E(H).$$

۲۸.۲.۱ مثال. دو گراف زیر تحت تابع f تعریف شده در زیر، با هم یکریخت هستند؛



شکل ۱.۱: دو گراف یکریخت

$$f = \{(a, ۱), (b, ۲), (c, ۸), (d, ۳), (e, ۷), (f, ۴), (g, ۶), (h, ۵)\}.$$

۲۹.۲.۱ تعریف. فرض کنید G یک گراف و k عددی طبیعی باشد. منظور از رنگ‌آمیزی[31] گراف G با حداکثر k رنگ، تابعی مانند $f : V(G) \to \{۱, ۲, \cdots, k\}$ است به‌طوری‌که برای هر $x, y \in V(G)$ که $xy \in E(G)$، $f(x) \neq f(y)$.

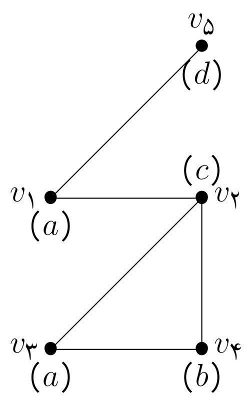
[30] Bipartite graph

[31] Coloring

۳۰.۲.۱ تعریف. فرض کنیم گراف G دارای یک رنگ‌آمیزی با k رنگ باشد. در این صورت G را k-رنگ‌پذیر نامیم.

۳۱.۲.۱ تذکر. اگر گرافی k-رنگ‌پذیر باشد، ممکن است $(k-۱)$-رنگ‌پذیر نیز باشد.

۳۲.۲.۱ مثال. در شکل زیر مشاهده می‌شود گراف مثال ۸.۲.۱، ۴-رنگ پذیر است (رنگ‌های a, b, c, d) ولی در رنگ آمیزی گراف زیر می‌توان راس $v_۵$ را هم‌رنگ راس $v_۴$ قرار داد، بنابراین گراف ۳-رنگ پذیر نیز می‌باشد.



۳۳.۲.۱ تعریف. عدد رنگی[۳۲] گراف G که با نماد $\chi(G)$ نشان داده می‌شود عبارت است از کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند k که به ازای آن گراف G، k-رنگ‌پذیر باشد.

۳۴.۲.۱ مثال. در مثال ۳۲.۲.۱ داریم: $\chi(G) = ۳$.

۳۵.۲.۱ تعریف. یک زیرگراف کامل از یک گراف را یک خوشه[۳۳] از آن گراف نامند.

۳۶.۲.۱ تعریف. تعداد رئوس بزرگ‌ترین خوشه در یک گراف، عدد خوشه‌ای[۳۴] آن گراف نام دارد و با $\omega(G)$ نشان داده می‌شود.

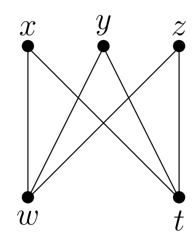
[32] Chromatic number

[33] Clique

[34] Clique number

۳۷.۲.۱ تعریف. گراف G را تام ضعیف نامیم هرگاه $\chi(G) = \omega(G)$.

۳۸.۲.۱ مثال. گراف $K_{۲,۳}$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم؛



در این صورت واضح است که $\omega(H) = \chi(H) = ۲$. لذا گراف فوق تام ضعیف است.

۳۹.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$ دو گراف باشند. الحاق[۳۵] دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ را با نماد $H = G_۱ \vee G_۲$ نشان می‌دهیم که در آن $V(H) = V_۱ \cup V_۲$ و

$$E(H) = E_۱ \cup E_۲ \cup \{xy | x \in V_۱, y \in V_۲\}.$$

۳.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی نظریه اعداد

۱.۳.۱ تعریف. فرض کنیم n و d دو عدد صحیح باشند، گوییم d، n را عاد می‌کند و می‌نویسیم $d \mid n$ در صورتی‌که به ازای عدد صحیحی مانند c داشته باشیم $n = cd$. همچنین گوییم n یک مضرب d است و d یک مقسوم‌علیه n می‌باشد. اگر d، n را عاد نکند، می‌نویسیم $d \nmid n$.

۲.۳.۱ تعریف. اگر d دو عدد صحیح a و b را عاد کند، d یک مقسوم‌علیه مشترک a و b نامیده می‌شود.

۳.۳.۱ تعریف. عدد d در تعریف قبل را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (به اختصار ب.م.م) a و b نامند و با نماد (a, b) نشان داده می‌دهند، هرگاه :

[35] Join

۱. $d \geq ۰$.

۲. اگر $a \mid e$ و $b \mid e$ آنگاه $d \mid e$.

۴.۳.۱ تعریف. عدد صحیح n را اول نامیم هرگاه $n > ۱$ و تنها مقسوم علیه‌های مثبت آن ۱ و n باشند.

۵.۳.۱ تذکر. هرگاه $(a, b) = ۱$، گوییم a و b نسبت به هم اول هستند.

۶.۳.۱ قضیه (قضیه‌ی اساسی حساب). هر عدد صحیح $n > ۱$ را می‌توان (صرف نظر از ترتیب عوامل) فقط به یک طریق به‌صورت حاصل ضربی از اعداد اول نمایش داد.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۰۰۱ از [۱] مراجعه شود. □

۷.۳.۱ تذکر. در تجزیه‌ی عدد صحیح n، عدد اول خاص p ممکن است بیش از یک‌بار بیاید. هرگاه عوامل اول متمایز n، $p_۱, \dots, p_r$ بوده و p_i به عنوان یک عامل a_i بار بیاید، می‌توانیم بنویسیم $n = p_۱^{a_۱} \dots p_r^{a_r}$. این عبارت را تجزیه‌ی n به عوامل اول می‌نامند.

۸.۳.۱ قضیه (الگوریتم تقسیم). به ازای اعداد صحیح a و b که $b > ۰$، جفت منحصربه‌فردی از اعداد صحیح مانند r و q وجود دارد به‌طوری که $a = bq + r$، که در آن $۰ \leq r < b$.

به‌علاوه $r = ۰$ اگر وتنها اگر $a \mid b$.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۰۱۴ از [۱] مراجعه شود. □

قضیه‌ی زیر روشی مفید و سریع برای محاسبه ب.م.م دو عدد ارائه می‌کند.

۹.۳.۱ قضیه (الگوریتم اقلیدس). فرض کنیم اعداد صحیح و مثبت a, b داده شده باشند که $a \nmid b$. همچنین $r_۰ = a \ , \ r_۱ = b$ و الگوریتم تقسیم را متوالیاً به‌کار بریم تا مجموعه باقیمانده‌های $r_۲, r_۳, \dots, r_n, r_{n+۱}$

به‌دست آید که به‌ترتیب با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
r_0 &= r_1 q_1 + r_2, && 0 < r_2 < r_1\,,\\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3, && 0 < r_3 < r_2\,,\\
&\vdots\\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, && 0 < r_n < r_{n-1}\,,\\
r_{n-1} &= r_n q_n + r_{n+1}, && r_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

در این‌صورت آخرین باقیمانده‌ی ناصفر در این فرایند (a,b) است.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۵ ۰ ۱ از [۱] مراجعه شود. □

۱۰.۳.۱ تعریف. فرض کنیم $n \geq 1$، تابع $\varphi(n)$ برابر تعداد اعداد صحیح مثبتی تعریف می‌شود که از n بیشتر نبوده و نسبت به n اول باشند و تابع فی اویلر نام دارد.

قضیه‌ی زیر یک فرمول برای محاسبه‌ی $\varphi(n)$ می‌باشد که بسیار راه‌گشا خواهد بود.

۱۱.۳.۱ قضیه. اگر $n \geq 1$، داریم:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}).$$

اثبات. به قضیه‌ی ۲.۴ از [۱] مراجعه شود. □

۱۲.۳.۱ نتیجه. به ازای هر عدد اول p و $\alpha \geq 1$، داریم $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

اثبات. کافیست در قضیه‌ی قبل قرار دهیم $n = p^\alpha$، در این‌صورت چون تنها عدد اولی که p^α را عاد می‌کند p می‌باشد، خواهیم داشت:

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha(۱ - \frac{۱}{p}) = p^\alpha - p^{\alpha-۱}.$$

□

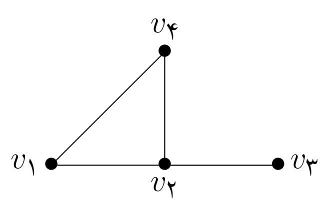
۴.۱ تعاریف مقدماتی و قضایای مقدماتی جبرخطی و ماتریس‌ها

۱.۴.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گراف دلخواه (نه لزوما ساده) با مجموعه رئوس $V = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ باشد. منظور از ماتریس مجاورت گراف G، ماتریس $n \times n$، $A(G) = [a_{ij}]$ است که a_{ij} برابر تعداد یال‌های بین دو راس v_i, v_j است، $i, j = ۱, ۲, \dots, n$.

در حالتی که G گرافی ساده باشد داریم:

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } v_i, v_j \text{ مجاور باشند} \\ ۰ & \text{اگر } v_i, v_j \text{ مجاور نباشند} \end{cases}$$

۲.۴.۱ مثال. فرض کنیم گراف G به شکل زیر باشد:



در این‌صورت ماتریس مجاورت گراف G به صورت زیر خواهد بود:

$$A(G) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_۱ & v_۲ & v_۳ & v_۴ \end{array} \\ \begin{array}{c} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \\ v_۴ \end{array} & \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

۳.۴.۱ تذکر. ماتریس مجاورت گراف منحصر به‌فرد نیست و اگر ترتیب نوشتن راس‌های گراف را تغییر دهیم، ممکن است این ماتریس نیز تغییر کند.

۴.۴.۱ نکته. در ماتریس مجاورت گراف‌های ساده، مانند مثال ۲.۴.۱، برای هر i, j مشاهده می‌شود که $a_{ij} = a_{ji}$، بنابراین $A(G)$ یک ماتریس متقارن است

۵.۴.۱ قضیه. اگر G یک گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ و ماتریس مجاورت $A(G)$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌ها در سطر i−ام (ستون i−ام) ماتریس $A(G)$ برابر است با $d(v_i)$.

اثبات. سطر i−ام و ستون j−ام ماتریس $A(G)$ برابر است با تعداد یال‌هایی که راس v_i را به راس v_j وصل می‌کند. پس مجموع همه‌ی سطرهای i−ام (ستون i−ام) برابر است با $d(v_i)$. $\square$

۵.۱ مختصری درباره‌ی مهارت‌های حل مسئله

« یادگیری حل مسأله دلیل اصلی یادگیری ریاضیات است » (NCSM 1977,1)

هیبرت: زمانی که قواعد کار کردن با نشانه‌ها را در یک صفحه به خاطر می‌سپاریم، ممکن است چیزی بیاموزیم، ولی ریاضیات را یاد نمی‌گیریم. دانستن ریاضیات به معنای رفتن به درون آن و مشاهده‌ی چگونگی کارکرد اجزا، چگونگی ارتباط اجزا با یکدیگر و این که چرا این گونه کار می‌کنند می‌باشد.

از سال ۱۹۴۵ که جورج پولیا کتاب ''چگونه مسئله راحل کنیم؟'' را نوشت دنیای ریاضیات علاوه بر پیگیری نتایج علمی به نحوه چگونگی ساختار و راهبردها و تکنولوژی بدست آوردن این نتایج نیز توجه ویژه‌ایی نشان داد. مهارت‌های حل مسئله دسته‌ایی از فنون است که فرد را قادر می‌سازد تا با داشتن اطلاعات اولیه به گونه‌ایی خلاقانه اقدام به حل مسائلی نماید که تا پیش از آن کسی آن مسائل را حل نکرده یا لااقل فرد مذکور راه حل آن مسائل را قبلاً جایی ندیده است. توجه دنیای امروز به خلاقیت به عنوان سرچشمه پیشرفت و نوآوری سبب گردید فراشناخت به عنوان فرایندی که در پی یافتن و نظام‌مند کردن کنترل و بهروری شیوه‌های شناخت و ابداع و ابتکار می‌باشد مورد توجه ویژه قرار گیرد.

در این تحقیق مجال‌های ارزنده‌ایی فراهم شد تا در پژوهش فرا رو به فرا شناخت و رویکرد های مربوط به آن به ویژه به استفاده از مهارت‌های حل مسئله ارج نهیم و با استفاده از آن‌ها مبادرت به مطالعه‌ایی عمیق‌تر در بررسی عدد رنگی گراف‌های یکالی نماییم.

در این فصل به طور خلاصه به این چهار سوال پاسخ خواهیم داد:

۱. مهارت‌های حل مسئله چه هستند؟

۲. چرا باید به مهارت‌های حل مسئله توجه ویژه‌ای داشته باشیم؟

۳. آیا لازم است در پایان نامه‌های ارشد ریاضی، مهارت‌های حل مسئله را بررسی کنیم؟

۴. چرا در این پایان نامه کاربرد های مهارت‌های حل مسئله را ردیابی کردیم؟

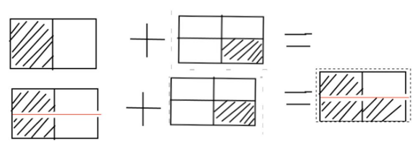
۱.۵.۱ مهارت‌های حل مسئله چه هستند؟

مسئله: چالشی است که دانش آموز (یا هر شخص دیگر) از قبل پاسخ آن را ندیده است. (یک حل از پیش آماده و قابل بازیابی از حافظه برای آن ندارد) اما با استفاده از اطلاعات[۳۶] و مهارت‌های[۳۷] موجود خود می‌تواند حداقل یک پاسخ برای آن پیدا کند.

مثال: فرض کنیم دانش آموزان مفهوم کسر را آموخته‌اند و مهارت رسم شکل را هم بلدند.
در این حالت ما دو کسر با مخرج مختلف را به آن‌ها می‌دهیم. مثلا می‌پرسیم:
حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = ?$$

در این صورت اگر دانش آموزی بتواند خودش با استفاده از مهارت رسم شکل فرایند زیر را ترسیم و به جواب $\frac{۳}{۴}$ برسد گوییم دانش آموز مسئله را **خلاقانه** حل کرده است.



اما اگر طبق قاعده از پیش گفته شده (هم مخرج کردن) مسئله را پاسخ دهد در این صورت اصطلاح حل خلاقانه را برای آن به کار نمی‌بریم.

[36] Information
[37] Skills

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۲ + ۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

رهیافت: در فرهنگ لغات آکسفورد (۲۰۰۴)، یک صفت معرفی شده است که می‌توان آن را معادل راهیابانه یا راهیابی ترجمه کرد. طبق توضیح فرهنگ لغات آکسفورد (۲۰۰۴)، "تدریس یا آموزش راهیابانه، تدریسی است که شما را به یادگیری از طریق کشف چیزهایی برای خودتان، ترغیب می‌کند."

به اعتقاد پولیا (۱۹۴۵)، «راهیابی به معنای Heuristics یا Heurestic، نام شاخه‌ای از تحقیق در منطق یا فلسفه یا روان‌شناسی بوده که حدود آن، به خوبی تحدید نشده و کمتر به صورت تفصیلی از آن سخن رفته است. هدف راهیابی، تحقیق در روش‌های اختراع و اکتشافی است» (ص ۱۵۷).

راهبردهای حل مسئله: رهیافت‌ها و قواعد تجربی و کلی هستند که به صورت مهارت‌های حل دسته‌ای از مسائل به کار می‌روند و به مسئله حل کن کمک می‌کنند تا راه حل قابل قبولی برای مسئله‌ای که پیش رو دارد، بیابد.

معرفی تعدادی از مهارت‌های حل مسئله:

۱. رسم شکل

۲. سازماندهی اطلاعات (بررسی تمام حالت‌ها)

۳. حدس هوشمندانه و آزمایش آن

۴. حل مسأله هم‌ارز ساده تر –حل مسئله درحالت خاص–

۵. بازسازی و مدل‌سازی مسأله (بازنمایی)

۶. حل از آخر

۷. الگو یابی

۸. استدلال منطقی

۹. الگو سازی

۱۰. اتخاذ دیدگاه متفاوت

یکی از اهداف اصلی آموزش ریاضی، ارتقای توانایی اندیشیدن فرد است. اما اندیشه‌ی ریاضی را نباید یک اندیشه‌ی صوری به حساب آورد. اندیشه‌ی ریاضی، تنها بر اصول، تعریف‌ها و اثبات‌های دقیق استوار نیست، بلکه چیزهای دیگری را هم در بر می‌گیرد. یاد گرفتن روش‌های کشف یا روشن کردن مضمون ریاضی در یک موقعیت مشخص، استفاده از شباهت‌ها، به کار بردن استقرا، و مانند این‌ها، همگی در شکل‌دهی اندیشه‌ی ریاضی فرد، دارای اهمیّت ویژه‌ای هستند. با ارتقای توانایی اندیشیدن، ضمن آن که دانش آموز هنر کشف کردن را می‌آموزد، انتظار می‌رود که بر حل مسائل نیز، قادر شود.

مسلماً مسئله حل کن‌های خبره در طول مطالعات ریاضی خود، به خاطر دست و پنجه نرم کردن با مسائل ریاضی، شگردها و «حیله»هایی را برای گونه‌های به خصوصی از مسائل به دست آورده‌اند. آن‌ها با بررسی و حل مسائل چالش‌آور، مسئله حل کن‌های خبره شده‌اند. و راهبردها و رهیافت‌ها را در عمل آموخته‌اند. بنابراین، رهیافت‌ها قواعدی تجربی و کلی هستند که برای حل دسته‌ای از مسائل به کار می‌روند و به مسئله حل کن کمک می‌کنند تا راه حل قابل قبولی برای مسئله‌ای که پیش رو دارد، بیابد. ضرورت مطالعه راجع به رهیافت‌ها و آموزش آن‌ها، وقتی بیش‌تر آشکار می‌شود که متوجه باشیم هر شخصی که درگیر حل یک مسئله‌ی ریاضی است، لزوماً نباید راه طولانی پیموده شده توسط یک ریاضی‌دان را، برای کشف روش‌هایی لازمه حل مسائل بپیماید.

بولتسانو (۱۸۴۸ - ۱۷۸۱) نیز، منطق‌دان و ریاضی‌دانی بود که سهم عمده‌ای از کتاب منطقِ شناخت‌شناسی خود را به موضوع رهیافت‌ها اختصاص داد. پولیا (۱۹۴۵) به نقل از بولتسانو خاطر نشان می‌کند که «...

زحمت بیان این مطلب را بر خود هموار می‌سازم که قواعد و راه‌های تحقیقی را که همه‌ی مردان شایسته از آن پیروی کرده‌اند، و غالباً حتی از این پیروی آگاهی نداشته‌اند، با کلماتی روشن بیان کنم» (ص ۸۸).

آرام (۱۳۶۴)، در مقدمه‌ی ترجمه کتاب چگونه مساله را حل کنیم ذکر کرده است، پولیا، افزون بر دویست و پنجاه مقاله و رساله درباره‌ی حساب احتمالات، آنالیز ترکیبی، اکتشافات ریاضی و روش تدریس ریاضیات نوشته است، و به جرات می‌توان او را به عنوان (پدر موسس تاکید جدید بر حل مساله و تاثیر عظیم آن در آموزش علوم ریاضی)، خواند.

۲.۵.۱ چرا باید به مهارت‌های حل مسئله توجه ویژه‌ای داشته باشیم؟

وقتی کودکان را برای مسأله حل کن شدن درس می‌دهیم، داریم به آن‌ها فکر کردن و استدلال کردن را درس می‌دهیم، مهارت‌هایی که برای تمام عمر آن‌ها –حتی فراتر از ریاضیات!– حیاتی است. و اگر قرار است در تدریس تفکر به آن‌ها موفق باشیم، آن‌ها به چیزی نیاز دارند تا به آن فکر کنند. مسائل این ”چیز“ را مهیا می‌کنند [۲۷].

طبق [۲] دو مکتب از مکاتب معتبر آموزشی جهان، (TFU (TEACH FOR UNDERSTND و TFC (TEACH FOR CITIZEN SHIP) می‌باشند. اولی هدف ویژه‌ی آموزشی را یادگیری مهارت‌های زندگی و دومی هدف ویژه‌ی آموزش را فهمیدن معرفی می‌کند. چه معتقد به مکتب TFC باشیم و چه مومن به مکتب TFU، هر دو با اندکی تغییر آمر به استفاده از مهارت‌های حل مسئله هستند. و از دیدگاه مکتب TFC زندگی اجتماعی درگیر چالش‌هایی است که در فرآیند مهندسی انتخاب راه‌حل این چالش‌ها، همیشه دفترچه راهنمای (hand book) از پیش آماده‌ای در دسترس نیست و لازم است شخص برای دستیابی به یک راه‌حل مناسب و منطقی و صحیح از مهارت‌های حل مسئله استفاده نماید.

طبق [۷] حل خلاقانه مسائل در روانشناسی با عنوان PS کاربرد وسیعی یافته و علمای روانشناسی معتقدند این شیوه از مهندسی تصمیم برای حل تعارضات اجتماعی مناسب است. اصول مهندسی تریز مبحث ویژه‌ای

است که سطوح بالای مهندسی مورد توجه قرار گرفته است و تأکید آن بر حل خلاقانه و چالش‌های پیشروی صنعت و کشاورزی و... می‌باشد. تأکید این تئوری بر استفاده از اصول و روش‌هایی است که منتج به ایده‌های خلاق به منظور حل چالش‌های صنعتی و فنی است. منصور سلمان زاده در پایان نامه‌ی خود ([۵]) نشان داد آموزش اصول حل خلاقانه‌ی مسئله، مبتنی بر نظریه‌ی تریز، در [پیشرفت توانایی مهارت‌های] حل مسئله‌ی دانش آموزان سال هفتم و هشتم مفید و مؤثر بوده است.

امااز دیدگاه مکتب TFU کلید دست‌یابی به فهمیدن (درجه یا درجات بالایی از دانستن، فهمیدن، به کار بستن و .....) آموختن مهارت‌های حل مسئله است. مهارت‌هایی که بینشی ایجاد می‌کند که به واسطه آن خطوط نانوشته‌ایی از حقایق و واقعیت‌ها در بین خطوط نوشته شده دیده شوند. درست مانند کامل کردن یک پازل ناقص که به واسطه فهمیدن طرح کلی می‌توان اجزای آن را به درستی در جایگاه خود قرار داد. در این دیدگاه ریاضیات ابزاری ارجمند است، چون می‌توان در خلال آموزش آن، نفوذ به اعماق سطوح پیشرفته‌تری از آموزش را تجربه کرد. در این مکتب ریاضیات خصوصاً در دوره آموزش عمومی وسیله‌ای برای مدل‌سازی و ایجاد توانایی مهارت حل مسئله خلاقانه می‌باشد و مباحثی از ریاضیات برای ارائه مناسب ترند که به ایجاد این توانایی کمک بیشتری نمایند.

به تازگی، شورای ملی معلمان ریاضیات (NCTM)، در استانداردهای حرفه‌ای خود برای آموزش ریاضیات، بیان کردند که «حل مسأله، استدلال و ارتباط، فرایندهایی هستند که باید در تمام تعالیم ریاضی وارد شوند و باید توسط معلمان مدل‌سازی شوند» (NCTM 95,1991). حتی قبل از آن، در ۱۹۸۰، شورای ملی معلمان ریاضی در چشم انداز کاری خود، بیان کرد که «حل مسأله باید در رأس توجه برنامه آموزشی باشد» (NCTM 1,1980).

۳.۵.۱ آیا لازم است در پایان نامه‌های ارشد ریاضی، مهارت‌های حل مسئله را بررسی کنیم؟

مقالات علمی بر مبنای فرمت‌هایی که لاجرم باید در نوشتار آن‌ها رعایت شود عموماً به اختصار مقدماتی را بیان و بیشتر به بیان یافته‌های جدید خود می‌پردازند و گرچه دقت علمی در درجه‌ای قابل قبول رعایت می‌شود، اما ایجاز و اختصار در حذف حاشیه‌ها و زواید دریافت عمیق موضوعات را تا حدی پیچیده می‌نماید. در حقیقت مقاله گزارش یک اکتشاف علمی و یا اختراع یک دستگاه یا ابداع یک فرمول است اما گزارشی از چگونگی نائل شدن به این کشف یا چگونگی دست‌یابی به این اختراع و ابداع در آن‌ها ذکر نمی‌شود. خصوصاً این مورد در مقالات ریاضی ویژه است که حتی کاربرد این فرمول در کجاست نیز بیان نمی‌شود. لذا برای فهمیدن مباحث مطرح شده در مقالات علمی علاوه بر ترجمه و تهیه لیست اطلاعات مقدماتی اعم از تعاریف و قضایا و اصولی که مورد استفاده قرار می‌گیرد و افزودن مثال‌های مناسب لازم است به عامل مهم‌تری توجه نمود که اغماز از آن را نوعی قصور از تعهد خود به جامعه‌ی علمی کشور می‌دانم.
این مهم، مهارت‌های حل مسئله به کار رفته در پژوهش است. توجه به پیش زمینه‌ها، انگیزه‌ها، راهبردها و تکنولوژی‌های خردمندانه‌ای که باعث آفرینش نتایج یک تحقیق شده است.

۴.۵.۱ چگونه در این پایان نامه مهارت های حل مسئله را ردیابی کرده ایم؟

در مقالاتی که توسط استاد نیک اندیش جهت تحقیق به اینجانب ارائه شد به کرات از مهارت‌های حل مسئله استفاده شده بود علی الخصوص که در دو مقاله از دو دیدگاه مسئله طرح و حل شده بود که ما دیدگاهی دیگر نیز به آن افزودیم. به کارگیری راهبرد های حل مسئله رابه صورت موردی و مبسوط در فصول بعد متذکر خواهم شد. به اعتقاد اینجانب ردیابی مهارت‌های حل مسئله و مشاهده تأثیر سحر آمیز این ابزار در تحصیل نتایج خارق العاده امری است که در تدوین و تألیف پایان نامه‌ها مغفول مانده است و امیدوارم رویه‌ی اینجانب

مقدمه‌ای باشد برای آغاز نگرشی جدید در تألیف رسالات و پایان نامه‌های دانشجویی آتی.

فصل ۲

یک رسته خاص از گراف‌های تام ضعیف

۱.۲ مقدمه

در این فصل که برگرفته از مقاله‌ی [۲۹] می‌باشد، رسته‌ای جدید از گراف‌های تام ضعیف را معرفی می‌کنیم و در قضیه‌ی ۳.۲.۲ یک فرمول سرراست برای عدد رنگی این نوع گراف‌ها ارائه خواهیم کرد.

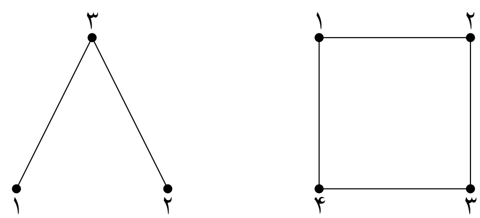
در سرتاسر این فصل از مهارت تغییر زاویه‌ی دید[۱] استفاده شده است. یعنی شرط معادلی ارائه می‌شود که یکال بودن حاصل جمع شماره‌های دو رأس را تأمین می‌کند و آن شرط عبارت است از این که در $[p^k]$ برای دو رأس x و y داشته باشیم $(x+y,p)=1$.

[1] Adopting a Different Point of View

۲.۲ معرفی گراف $G(p^k)$

۱.۲.۲ تعریف. گیریم p یک عدد اول و k عددی طبیعی باشد. گرافی را بر مبنای اعداد و جمع آن‌ها تعریف می‌کنیم که با $G(p^k)$ نمایش داده می‌شود. رئوس گراف $G(p^k)$ عبارت است از $[p^k] = \{۱, \dots, p^k\}$، دو راس متمایز x و y را مجاور گوییم اگر وتنها اگر $(x+y, p)_{\text{ب‌م‌م}} = ۱$، یعنی $x + y$ مضربی از p نباشد.

۲.۲.۲ مثال. گراف $G(۴)$ و $G(۳)$ در شکل پایین نشان داده شده است.



شکل ۱.۲: گراف‌های $G(۳)$ و $G(۴)$

گراف $G(۹)$ که در شکل ۲.۲ نمایش داده شده است نشان می‌دهد که پیدا کردن عدد رنگی گراف $G(p^k)$ زمانی که تعداد راس‌ها زیاد است چندان ساده نیست. قضیه اصلی این فصل ثابت می‌کند که تمام گراف های $G(p^k)$ تام ضعیف هستند و فرمولی سرراست برای پیدا کردن عدد رنگی چنین گراف‌ها ارائه می‌کند.

۳.۲.۲ قضیه. گیریم p عددی اول و k عددی طبیعی باشد در اینصورت $G(p^k)$ تام ضعیف است، به‌علاوه خواهیم داشت:

$$\chi(G(p^k)) = \omega(G(p^k)) = \begin{cases} ۲ & p = ۲, \\ \frac{p^{k-۱}(p-۱)}{۲} + ۱ & p > ۲. \end{cases}$$

به منظور اثبات قضیه‌ی ۳.۲.۲ ما با یک جفت لم شروع می‌کنیم:

در اثبات لم زیر از **مهارت حذف حالت‌های نامطلوب** استفاده شده است.

دو مجموعه B و H یا یک عضو مشترک دارند یا هیچ عضو مشترکی ندارند. حالت تهی نقض می‌شود و برای اشتراک دقیقاً یک عضو باقی می‌ماند.

۴.۲.۲ لم. گیریم $p > ۲$ عددی اول و k عددی طبیعی باشد، اگر $H = \{ip \mid ۱ \leq i \leq p^{k-۱}\}$، آنگاه یک خوشه ماکزیمم C در $G(p^k)$ وجود دارد به طوری که $C \cap H = \{p^k\}$.

اثبات. چون جمع هر دو عضو H مضربی از p است و در نتیجه هیچ دو عضوی از H مجاور نیستند بنابراین برای هر خوشه B از گراف $G(p^k)$ داریم: $|B \cap H| \leq ۱$.

ادعا می‌کنیم که اشتراک هر خوشه ماکسیمال B با H در یک عضو خواهد بود یعنی اینکه $|B \cap H| = ۱$. برای اثبات این ادعا با برهان خلف پیش می‌رویم. گیریم خوشه ماکزیمم B در گراف $G(p^k)$ وجود دارد بطوری‌که $B \cap H = \varnothing$. گیریم $۱ \leq i \leq p^{k-۱}$ داده شده است. برای هر $x \in B$ ما خواهیم داشت: $(x, p) = ۱$ و بنابراین خواهیم داشت $(x + ip, p) = ۱$ پس x و ip مجاورند و با همین استدلال هر عضو B با ip مجاور است پس $B \cup \{ip\}$ یک خوشه در $G(p^k)$ می‌باشد اما این موضوع با تعریف B به عنوان خوشه ماکزیمم مغایرت دارد، پس ادعا ثابت شد.

حال B را به عنوان یک خوشه ماکزیمم گراف $G(p^k)$ با شرط در $|B \cap H| = ۱$ در نظر می‌گیریم. گیریم $B \cap H = \{lp\}$ برای $۱ \leq l \leq p^{k-۱}$. اکنون اگر $C = (B \setminus \{lp\}) \cup \{p^k\}$ را در نظر بگیریم در این‌صورت C یک خوشه ماکسیمال در گراف $G(p^k)$ خواهد بود بطوری‌که $C \cap H = ۱$. □

در لم زیر از **الگویابی** استفاده شده است. ابتدا به مشاهده گراف‌های متعدد و بررسی خوشه‌ها و زیر خوشه‌ها به دنبال الگویی برای تعداد رئوس موجود در یک زیرخوشه هستیم و سپس به دنبال خوشه‌ی ماکسیمال می‌گردیم.

۵.۲.۲ لم. گیریم $p > ۲$ عددی اول باشد و k عددی طبیعی، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\omega(G(p^k)) = \frac{p^{k-۱}(p-۱)}{۲} + ۱.$$

اثبات. گیریم

$$B_I = \{(i-۱)p+۱, \dots, (i-۱)p + \frac{(p-۱)}{۲}\} \quad , \quad ۱ \le i \le p^{k-۱},$$

ادعا می‌کنیم $B = B_۱ \cup \dots \cup B_{p^{k-۱}} \cup \{p^k\}$ خوشه ای در $G(p^k)$ می باشد. برای اثبات این ادعا فرض می‌کنیم $x \in B_i$ و $y \in B_j$ دو راس متمایز باشند به طوریکه $۱ \le i,j \le p^{k-۱}$. ما می‌توانیم x,y را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} x = (i-۱)p+s \\ y = (j-۱)p+t \end{cases} \xRightarrow{۱ \le s,t \le \frac{p-۱}{۲}} x+y = (i+j-۲)p+(s+t) \overset{p}{\equiv} s+t \xRightarrow{۲ \le s+t \le p-۱} (s+t,p) = ۱.$$

بنابراین x,y مجاور هستند. از طرف دیگر می‌دانیم $(x+p^k,p) = ۱$، بنابراین p^k مجاور با x می‌باشد. پس هر دو راس متمایز از B مجاورند و بنابراین ادعا درست است. بدیهی است که اندازه B، $\frac{p^{k-۱}(p-۱)}{۲} + ۱$ می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم که G یک خوشه‌ی ماکزیمم در گراف $G(p^k)$ با اندازه‌ای بزرگ‌تر از $\frac{p^{k-۱}(p-۱)}{۲} + ۱$ باشد. با استفاده از لم ۴.۲.۲ داریم $p^k \in C$. ما می‌توانیم مجموعه‌ی $[p^k]$ را به کلاس‌های هم‌ارزی

$A_1, \dots, A_{p^{k-1}}$ افراز کنیم. به طوریکه برای هر $1 \le i \le p^{k-1}$، $A = \{(i-1)p+1, \dots, ip\}$. فرض کنیم که برای هر $1 \le l \le p^{k-1} - 1$ ما داریم $|A_l \cap C| \le \frac{p-1}{2}$ همچنین $|A_{p^{k-1}} \cap C| \le \frac{p-1}{2} + 1$ پس بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
|C| &= |(A_1 \cap C) \cup \dots \cup (A_{p^{k-1}} - 1 \cap C) \cup (A_{p^{k-1}} \cap C)| \\
&= |A_1 \cap C| + \dots + |A_{p^{k-1}-1} \cap C| + |A_{p^{k-1}} \cap C| \\
&= (p^{k-1} - 1)(p-1)/2 + (p-1)/2 + 1 \\
&= p^{k-1}(p-1)/2 + 1.
\end{aligned}
$$

این با فرض ما در انتخاب C تناقض دارد. بنابراین $1 \le l \le p^{k-1} - 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $|A_l \cap c| > \frac{p-1}{2}$ یا $|A_{p^{k-1}} \cap c| > \frac{p-1}{2} + 1$. فرض کنیم $1 \le l \le p^{k-1} - 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $|A_l \cap c| > \frac{p-1}{2}$. حال ما $\hat{A}_i$ را چنین در نظر می‌گیریم $\hat{A}_i = \{(l-1)p+i, (l-1)p+(p-i)\}$ به طوری‌که $1 \le i \le \frac{(p-1)}{2}$ و ممکن است به سادگی دیده شود که A_l می‌تواند به زیر مجموعه‌های مجزا $\hat{A}_1, \cdots, \hat{A}_{(\frac{p-1}{2})}, \{l_p\}$ افراز شود. چون $p^k \in C$ است و p^k مجاور l_p نیست، نتیجه می‌گیریم که l_p در C نیست. بنابراین

$$|(\hat{A}_1 \cap C) \cup \dots (\hat{A}_{\frac{(p-1)}{2}} \cap C)| > \frac{(p-1)}{2}$$

و به دست می‌آوریم

$$|\hat{A}_1 \cap C| + \dots + |\hat{A}_{\frac{(p-1)}{2}} \cap C| > \frac{(p-1)}{2}.$$

پس $1 \le i \le \frac{(p-1)}{2}$ وجود دارد به طوری که $|\hat{A}_i \cap C| \ge 2$. به عبارت دیگر حداقل دو عضو مشمول در A_i دارد که $1 \le i \le \frac{(p-1)}{2}$ می‌باشد. پس $x, y \in C$ وجود دارند به‌طوری‌که $x = (l-1)p + i$ و $y = (l-1)p + (p-i)$. چون $x + y = (2l-1)p$، x نمی‌تواند مجاور y باشد. اما این با انتخاب ما از C

(به عنوان خوشه ماکسیمال) متناقض است. با استدلالی مشابه حالت $|A_{p^{k-1}} \cap C| > \frac{p-1}{2} + 1$ به تناقض خواهد رسید. بنابراین یک خوشه ماکسیمال در $G(p^k)$ با اندازه‌ای بزرگ‌تر از $\frac{p^{k-1}(p-1)}{2} + 1$ وجود ندارد.

بنابراین B یک خوشه ماکسیمال در $G(p^k)$ می‌باشد و نتیجه می‌گیریم که $\omega(G(p^k)) = \frac{p^{k-1}(p-1)}{2} + 1$. □

۶.۲.۲ مثال. زیرمجموعه‌های مجزای $[5^2]$ با استفاده از ساختارهای اثبات لم فوق:

$$p = 5\ ,\ k = 2 \longrightarrow\ p^k = 5^2 = 25\ ,\ p^{k-1} = 5^{2-1} = 5.$$

$$i = 1 \longrightarrow B_1 = \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\} \xrightarrow{p=5} B_1 = \{1, 2\},$$

$$i = 2 \longrightarrow B_2 = \{p+1, p+2, \ldots, p, \frac{p-1}{2}\} \xrightarrow{p=5} B_2 = \{5+1, 5+2\} = \{6, 7\},$$

$$i = 3 \longrightarrow B_3 = \{2p+1, 2p+2\} \longrightarrow B_3 = \{10+1, 10+2\} = \{11, 12\},$$

$$i = 4 \longrightarrow B_4 = \{3p+1, 3p+2\} \longrightarrow B_4 = \{16, 17\},$$

$$i = 5 \longrightarrow B_5 = \{4p+1, 4p+2\} \longrightarrow B_5 = \{21, 22\}.$$

بنابراین اجتماع این زیرمجموعه‌ها عبارت است از

$$\bigcup_{1 \leq i \leq p^{k-1}} B_i \longrightarrow \bigcup_{1 \leq i \leq p^{k-1}} B_i = \{1, 2\} \cup \{6, 7\} \cup \{11, 12\} \cup \{16, 17\} \cup \{21, 22\}$$

$$\longrightarrow \bigcup_{1 \leq i \leq p^{k-1}} Bi \cup \{p^k\} = \{1, 2, 6, 7, 11, 12, 16, 17, 21, 22, 25\},$$

و مجموعه‌ی فوق خوشه‌ی ماکسیمال گراف $G(p^k)$ می‌باشد.

حال قضیه‌ی ۳.۲.۲ را با استفاده از دو لم فوق ثابت می‌کنیم.

اثبات. نخست فرض می‌کنیم $p = 2$. گیریم X مجموعه‌ی اعداد فرد در $[2^k]$ و Y مجموعه‌ی اعداد زوج

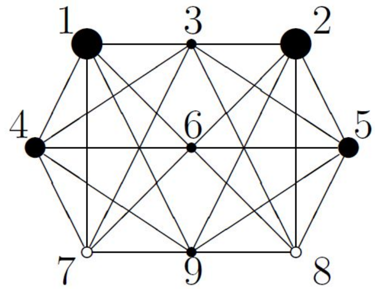
در $[۲^k]$ باشد. بنابراین X و Y مجموعه رئوس گراف $G(۲^k)$ را افراز می‌کنند. واضح است که هیچ دو جفتی از عناصر متمایز X یا Y مجاور نیستند، بنابراین گراف $G(۲^k)$ دوبخشی است، لذا $\chi(G(۲^k)) = ۲ = \omega(G(۲^k))$. چون جمع یک عدد زوج و یک عدد فرد عددی فرد است و هر عدد فرد با یک عدد زوج متباین است پس به هم متصل‌اند. دوم فرض کنیم که $p > ۲$. H را چنین در نظر می‌گیریم $H = \{ip | ۱ \leq i \leq p^{k-۱}\}$. بنابراین طبق لم یک خوشه ماکزیمم C در $G(p^k)$ وجود دارد به طوری که $C \cap H = \{p^k\}$. ما می‌توانیم مجموعه $[p^k]$ را به مجموعه‌های $H_i^j = \{(i+۱)p + j, ip - j\}$، $۱ \leq i \leq p^k - ۱$ و $۱ \leq j \leq \frac{(p-۱)}{۲}$ و H افراز کنیم. همچنین به سادگی می‌توان نشان داد که مجموعه‌ها $۱ \leq i \leq p^k - ۱$ و $۱ \leq j \leq \frac{(p-۱)}{۲}$ و H مجموعه‌هایی با رئوس دو به دو غیر مجاور هستند. حال تمام رئوس در مجموعه‌های H_i^j با رنگ‌های (i, j) و همچنین رئوس H را با رنگ p رنگ‌آمیزی می‌کنیم. بنابراین ما یک رنگ‌آمیزی $(۱ + \frac{(p^k-۱(p-۱)}{۲})$-رنگ‌آمیزی از $G(p^k)$ پس تعداد مجموعه‌های H_i^j مساوی است با $\frac{p^k-۱(p-۱)}{۲}$ بنابراین $\chi(G(p^k)) \leq \frac{p^k-۱(p-۱)}{۲} + ۱$. پس لم ۵.۲.۲ ایجاب می‌کند $\chi(G(p^k)) \geq \omega(G(p^k))$. از طرفی داریم $\chi(G(p^k)) \leq \omega(G(p^k))$. پس ما نتیجه می‌گیریم که

$$\chi(G(p^k)) = \omega(G(p^k)) = \frac{p^k - ۱(p-۱)}{۲} + ۱$$

□

قضیه‌ی ۳.۲.۲ نشان می‌دهد عدد رنگی گراف $G(۹)$ مساوی است با ۴.

در شکل ۲.۲ ما این مطلب را نشان داده‌ایم. در این‌جا گره‌های متمایز رنگ‌های متمایز را نشان می‌دهند.



شکل ۲.۲: گراف $G(۹)$ و رنگ آمیزی آن

۳.۲ اثباتی متفاوت از قضیه‌ی اصلی فصل

در این بخش با استفاده از یکی از مهارت‌های حل مسئله به نام **تغییر نقطه‌ی دید** یک اثبات جدید و یک طرح اثبات دیگر از قضیه‌ی اصلی فصل ارائه نموده‌ایم.

ابتدا تعدادی تعریف و لم که برای بیان اثبات نیازمند آن‌ها هستیم بیان می‌کنیم:

۱.۳.۲ تعریف. در $\{۱, \ldots, p^k\}$ مجموعه‌های مجزای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$W_۱ = \left\{[۱], [۲], \ldots, [\frac{p-۱}{۲}]\right\} \quad , \quad W_۲ = \left\{[\frac{p+۱}{۲}], [\frac{p+۱}{۲}+۱], \ldots, [p-۱]\right\},$$

و در آن کلاس هم‌ارزی $[i]$ که $۱ \le i \le p-۱$ عبارت است از $[i] = \{x \in \{۱, \ldots, p^k\} \mid x \overset{p}{\equiv} i\}$.

۲.۳.۲ مثال. اگر $p = ۵$ و $k = ۲$ باشد، آن‌گاه:

$$[p^k] = [۵^۲] = [۲۵] = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲۵\}, \quad H = \{۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵\}$$

$$W_۱ = \left\{[۱] = \{۱, ۶, ۱۱, ۱۶, ۲۱\}\ ,\ [۲] = \{۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲\}\ \right\},$$

$$W_۲ = \left\{\ [۳] = \{۳, ۸, ۱۳, ۱۸, ۲۳\}\ ,\ [۴] = \{۴, ۹, ۱۴, ۱۹, ۲۴\}\ \right\}.$$

۳.۳.۲ لم. در گراف $G(p^k)$ گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱. هیچ‌کدام از عضوهای مجموعه‌ی $H = \{ip \mid ۱ \le i \le p^{k-۱}\}$ با هم مجاور نیستند.

۲. تمام عضوهای H با تمام عضوهای مجموعه‌ی $W_۱$ مجاور هستند.

۳. تمام عضوهای H با تمام عضوهای مجموعه‌ی $W_۲$ مجاور هستند.

۴. تمام عضوهای $W_۱$ با هم مجاور هستند.

۵. تمام عضوهای $W_۲$ با هم مجاور هستند.

۶. $|W_۱| = |W_۲| = \frac{p-۱}{۲}$.

۷. در همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی از $W_۱$ و $W_۲$ تعداد یکسانی عضو وجود دارد.

۸. برای هر کلاس هم‌ارزی $[i]$ از $W_۱$ یک و فقط یک کلاس هم‌ارزی $[p-i]$ از $W_۲$ وجود دارد، به طوری‌که هیچ‌کدام از رئوس دو کلاس در گراف $G(p^k)$ مجاور نیستند، به عبارت دیگر

$$\forall [i] \in W_۱ \quad \exists! \quad [p-i] \in W_۲ \quad s.t \quad \forall x \in [i], \forall y \in [p-i] \quad : \ xy \notin E(G(p^k)).$$

اثبات. برای قسمت (۱) فرض کنیم $x, y \in H$ باشند. در این صورت $x = k_۱ p \ , \ y = k_۲ p$، بنابراین

$$(k_۱ p + k_۲ p, p) = ((k_۱ + k_۲)p, p) = p \neq ۱.$$

برای اثبات قسمت (۲) می‌توانیم بنویسیم

$$\forall x \in H \ , \ \forall y \in W_۱ \quad (x+y, p) = (kp + y, p) = (y, p) \overset{W_۱ \text{ تعریف}}{=} ۱.$$

اثبات قسمت (۳) مشابه قسمت (۲) می‌باشد.

برای اثبات قسمت (۴) فرض کنیم $x, y \in W_۱$ باشند. در این صورت طبق تعریف $x', y' \in W_۱$ وجود دارند به طوری که $x \overset{p}{\equiv} x' < \frac{p-۱}{۲}$ و $y \overset{p}{\equiv} y' < \frac{p-۱}{۲}$. بنابراین $x' + y' < p - ۱$ و در نتیجه داریم $(x+y, p) = (x' + y', p) = ۱$.

برای اثبات (۵) مشابه اثبات قسمت قبل گیریم $x,y \in W_۲$ باشند. در این صورت طبق تعریف $x',y' \in W_۲$ وجود دارند به طوری که $x \overset{p}{\equiv} x' > \frac{p-۱}{۲}$ و $y \overset{p}{\equiv} y' > \frac{p-۱}{۲}$. بنابراین $x' + y' > p - ۱$ و در نتیجه داریم $(x+y,p) = (x'+y',p) = ۱$.

برای اثبات قسمت (۶)، $f : W_۱ \to W_۲$ را با ضابطه‌ی $f([i]) = [p-i]$ تعریف می‌کنیم. در این صورت به وضوح f تابعی یک به یک و پوشا است. لذا f دوسویی است و بنابراین $|W_۱| = |W_۲|$. از طرفی چون p فرد است پس $p-۱$ زوج است و ما در هریک از $W_۱,W_۲$، $\frac{p-۱}{۲}$ کلاس هم‌ارزی داریم، نتیجه می‌گیریم که $|W_۱| = |W_۲| = \frac{p-۱}{۲}$.

برای اثبات قسمت (۷)، فرض کنیم $[i],[j]$ دو کلاس هم ارزی دلخواه $W_۱ \cup W_۲$ باشند. $f:[i] \to [j]$ را با ضابطه‌ی $f(x) = f(kp+i) = kp+j$ تعریف می‌کنیم. بدیهی است که f تابعی یک به یک و پوشا است. لذا f دوسویی است و بنابراین $|[i]| = |[j]|$.

برای اثبات قسمت (۸)، می‌توان نوشت: $(x+y,p) = (i+p-i,p) = (p,p) = p \neq ۱$ □

۴.۳.۲ نکته. می‌دانیم تمام عضوهای کلاس‌های هم‌ارزی $W_۱$ و $W_۲$ اعدادی هستند که از p^k کوچکترند و طبق تعریف $W_۱$ و $W_۲$ با p متباین هستند. از طرفی $|W_۲| = |W_۱|$ و ثابت شد کلاس‌های هم‌ارزی تعداد عضوهای یکسان دارند. بنابراین با توجه به تعریف تابع φ اویلر داریم

$$\text{تعداد عضوهای همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی } W_۱ = \text{تعداد عضوهای همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی } W_۲$$
$$= \frac{\varphi(p^k)}{۲} = \frac{p^k - p^{k-۱}}{۲}$$

۵.۳.۲ قرارداد. از این پس تعداد عضوهای همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی مجموعه‌های $W_۱$ و $W_۲$ را به ترتیب با نمادهای $]W_۱[$ و $]W_۲[$ نمایش می‌دهیم.

۶.۳.۲ تعریف. تعداد عضوهای کلاس‌های هم‌ارزی $W_۱$ را با $]W_۱[$ نشان می‌دهیم.

$$]W_۱[=]W_۲[= \frac{\varphi(p^k)}{۲} = \frac{p^k - p^{k-۱}}{۲}.$$

۷.۳.۲ لم. اگر T را اجتماع عضوهای کلاس‌های هم‌ارزی $W_۱$ و $\{۱,\dots,p^k\}$ در نظر بگیریم در این صورت T یک خوشه در $G(R)$ است.

اثبات. طبق لم ۳.۳.۲، قسمت (۲) و (۳)، تمام عضوهای H با تمام عضوهای $W_۱$ و $W_۲$ مجاور هستند، اما هیچ‌کدام با یکدیگر مجاور نیستند، همچنین تمام عضوهای کلاس‌های $W_۱$ با یکدیگر مجاورند، پس T یک خوشه است. □

در اثبات لم زیر از **راهبرد بررسی کلیه حالت‌های ممکنه** استفاده کرده‌ایم.

۸.۳.۲ لم. T خوشه ماکسیمال است.

اثبات. اگر T خوشه ماکسیمال نباشد حتما T' خوشه‌ای ماکسیمال است که تعدادی رأس بیشتر از T دارد. اما این رأس یا رئوس بیشتر از T کجا هستند؟

آیا در مجموعه‌ی H می‌باشند؟

خیر، زیرا اگر یک رأس به جز p^k از H به خوشه اضافه شود طبق لم ۳.۳.۲ به ناچار باید رأس p^k را حذف کرد و اضافه کردن هر رأس دیگر از H به T نیز مستلزم وقوع فرآیندی مشابه است.

آیا در مجموعه‌ی $W_۱$ می‌باشند؟

خیر، چون در آن جا دیگر رأس دیگری وجود ندارد.

آیا در مجموعه‌ی $W_۲$ می‌باشند؟

شاید بشود در این جا رأس یا رئوسی دیگر برای افزودن به T پیدا کرد! فرض کنیم رأس y را از کلاس $[p-i]$ به T بیفزاییم، در این صورت برای حفظ این رأس در خوشه ناچاریم تمام رئوس موجود در کلاس $[i]$ را حذف کنیم، زیرا طبق لم ۳.۳.۲ هیچ دو رأسی از کلاس‌های $[i]$ و $[p-i]$ نمی‌توانند مجاور باشند. پس اضافه شدن یک رأس از $[p-i]$ به وضوح باعث کاسته شدن p^{k-1} رأس شد، چنان چه تمام رئوس $[p-i]$ را به خوشه بیفزاییم در نهایت $\frac{\varphi(p^k)}{2}+1$ رأس داریم و تازه به خوشه‌ای ماکسیمال که تعداد عضوهای آن برابر با خوشه T می‌باشد، رسیده‌ایم.

فرآیند فوق برای افزودن هر عضو دیگر از کلاس‌های هم‌ارزی W_2 تکرار می‌شود پس تمام خوشه‌های ماکسیمال از مرتبه $\frac{\varphi(p^k)}{2}+1$ می‌باشند. □

در ادامه با استفاده از مهارت تغییر زاویه‌ی دید یک حدس ارائه خواهیم کرد.

۹.۳.۲ حدس. اگر ماتریس مجاورت $G(R)$ را بنویسیم در این صورت خوشه ماکسیمال بزرگترین زیر ماتریس مربعی است که قطر اصلی آن صفر و سایر عضوهای آن یک باشد. در صورتی که بتوان چنین زیر ماتریسی یافت بدیهی است تعداد سطر های ماتریس (یا تعداد ستون‌های آن) عدد خوشه‌ای خواهد بود.

فصل ۳

گراف یکال وابسته به حلقه‌ها

۱.۳ مقدمه

گیریم n یک عدد طبیعی باشد و $\mathbb{Z}_n$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی n باشد. گریمالدی[۱] در [۲۳] گراف $G(\mathbb{Z}_n)$ را وابسته به عناصر مجموعه یکال‌های $\mathbb{Z}_n$ تعریف کرد.

رئوس گراف $G(\mathbb{Z}_n)$ تمام عناصر می‌باشند، دو راس متمایز x و y را مجاور گوییم اگر وتنها اگر $x+y$ عضوی یکه از $\mathbb{Z}_n$ باشد. بنابراین داریم:

$$xy \in E(G(\mathbb{Z}_n)) \Leftrightarrow \exists u \in U(\mathbb{Z}_n) \quad s.t \quad x+y=u.$$

برای یک عدد طبیعی مانند m موارد گفته شده ایجاب می کند که $G(\mathbb{Z}_{2m})$ گرافی $\varphi(2m)$-منتظم باشد، منظور از φ همان تابع فی اویلر می باشد که در تعریف ۱۰.۳.۱ آورده شده است. می‌توان نشان داد که دور

[1] Grimaldi

$\frac{\varphi(2m)}{2}$ هامیلتونی یکتایی وجود دارد، در حالت فرد مورد به این سادگی نیست، اما ساختار روشنی وجود دارد و نتایج مشابه حالت زوج است.

زمانی که p عددی فرد و اول است $G(\mathbb{Z}_p)$ را می‌توان به صورت یک مخروط روی گراف چند بخشی کامل با $\frac{p-1}{2}$ بخش که اندازه هر قسمت ۲ می باشد در نظر گرفت. این راهبرد ما را به یک فرمول سر راست چند جمله ای رنگی $p(k)$ از $G(\mathbb{Z}_p)$ رهنمون می‌شود. $p(k)$ تعداد راههای ممکن است برای رنگ آمیزی رئوس گراف با استفاده از k رنگ بطوریکه هیچ دو راس مجاوری همرنگ نباشند.

چند جمله‌ای رنگی به وسیله بیرخوف[2] در سال ۱۹۱۲ به منظور مطالعه مسئله ۴-رنگ ابداع شد (به مرجع [۱۶] مراجعه شود). مقاله‌ی [۲۳] همچنین شامل تعدادی از خواص گراف‌های $G(\mathbb{Z}_{p^m})$ می‌باشد بطوریکه p عددی اول می‌باشد و $m \geq 2$.

اکنون ما در این فصل گراف $G(\mathbb{Z}_n)$ را به گراف $G(R)$ که R یک حلقه شرکت پذیر با همانی غیرصفر است، تعمیم داده‌ایم و آن را گراف یکال نامگذاری کرده‌ایم. این رویه همان **راهبرد تبدیل مسئله به مسئله ساده‌تر (حل مسئله در حالت خاص)** یکی از مهارت‌های حل مسئله است. ابتدا $\mathbb{Z}_n$ را بررسی کرده‌ایم، سپس به تعمیم نتایج به حلقه‌ی شرکت‌پذیر R اقدام کرده‌ایم. این گراف زیر گرافی از گراف هم‌ماکسیمال مطالعه شده در [۳۱] می‌باشد. تعریف $G(R)$ و خواص اساسی آن در بخش بعد ارائه شده است.

در ادامه و سراسر این فصل همه حلقه‌ها شرکت پذیر با همانی غیرصفر هستند و زیر حلقه‌های حلقه یاد شده نیز این خاصیت را به ارث می‌برند. همچنین منظور ما از یک گراف، گرافی متناهی و بدون طوقه است (مگر اینکه بر خلاف تصریح شود). به علاوه ما از نمادگذاری کاپلانسکی[3] [۲۴]، چارتراند[4] و اولرمن[5] [۱۷] استفاده کرده‌ایم.

[2]Birkhoff

[3]Kaplansky

[4]Chartrand

[5]Oellermann

مطالب این فصل برگرفته از مقاله‌ی [۱۳] می‌باشند.

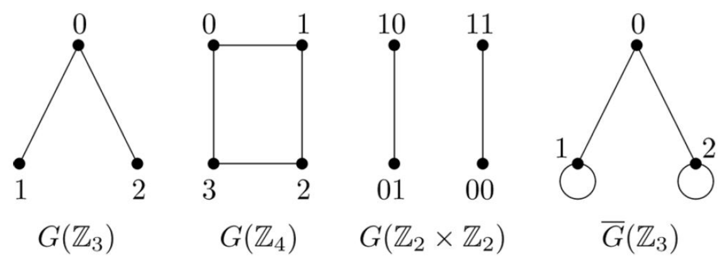
۲.۳ تعریف گراف یکال و خواص مقدماتی

در این بخش ما خواص اساسی گراف‌های یکال را مطالعه می‌کنیم. نخست ما گراف یکال و گراف یکال بسته را متناظر با یک حلقه‌ی شرکت پذیر بررسی می‌کنیم.

۱.۲.۳ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و $U(R)$ مجموعه‌ی یکال‌های R باشد، گراف یکال R که به صورت $G(R)$ نوشته می‌شود گرافی است که تمام عضوهای R رئوس آن می‌باشند و تعریف می کنیم رئوس متمایز x و y مجاورند اگر وفقط اگر $x + y \in U(R)$.

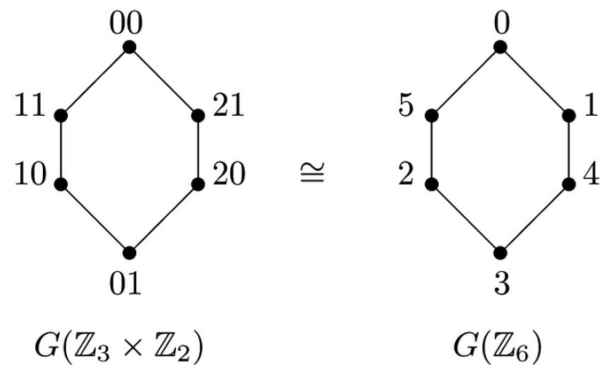
۲.۲.۳ تذکر. اگر ما کلمه‌ی متمایز را از تعریف قبل حذف کنیم، در این صورت ما گراف بسته یکال را با نماد $\overline{G}(R)$ ساخته‌ایم. این گراف ممکن است طوقه داشته باشد.

۳.۲.۳ نکته. اگر $۲ \notin U(R)$ آنگاه $G(R) = \overline{G}(R)$. برای مثال شکل ۱.۳ مشاهده شود.



شکل ۱.۳: گراف یکال برخی از حلقه‌های خاص

در شکل ۱.۳، گراف‌های یکال بعضی حلقه‌ها نشان داده شده است، بدیهی است برای دو حلقه مفروض R و S، اگر $R \cong S$ آن‌گاه $G(R) \cong G(S)$. این مطلب در شکل ۲.۳ برای دو حلقه یکریخت $\mathbb{Z}_۶$ و $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۳$ نشان داده شده است .



شکل ۲.۳: گراف‌های یکال دو حلقه‌ی یکریخت

در ادامه ما حاصل ضرب گراف‌ها را تعریف خواهیم کرد و سپس خواص اساسی گراف یکال را بررسی می‌کنیم.

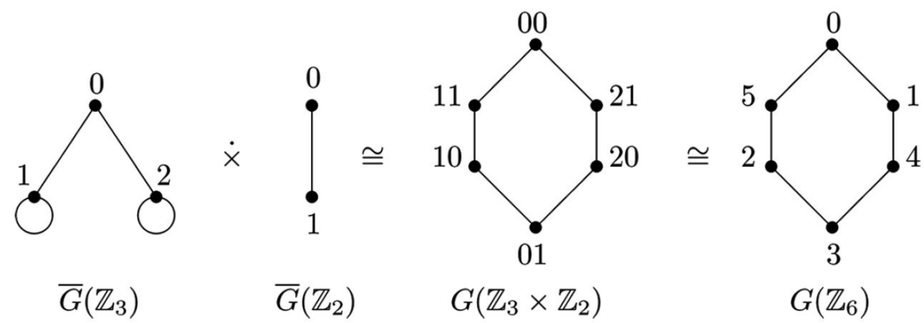
۴.۲.۳ تعریف. برای گراف G، فرض کنید $V(G)$ نماد مجموعه رئوس و $E(G)$ نماد مجموعه یال‌ها باشد، نیز گیریم G_1 و G_2 دو گراف با مجموعه راس‌های مجزا باشند. رسته حاصل ضرب G_1 و G_2 را با نماد $G_1 \dot{\times} G_2$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$V(G_1 \dot{\times} G_2) := V(G_1) \times V(G_2).$$

دو راس متمایز (x,y) و (x',y') مجاورند اگر وفقط اگر x و x' در G_1، نیز y و y' در G_2 مجاور باشند.

۵.۲.۳ تذکر. به وضوح برای دو حلقه مفروض R و S، دو راس مجزای $(x,y),(x',y') \in V(\overline{G}(R_1) \dot{\times} \overline{G}(R_2))$ مجاورند هرگاه x و x' در $\overline{G}(R_1)$ نیز y و y' در $\overline{G}(R_2)$ مجاور باشند. این وضعیت ایجاب می کند که $\overline{G}(R_1) \dot{\times} \overline{G}(R) \cong G(R_1 \times R_2)$.

در شکل ۳.۳ ما نکات فوق را برای ضرب مستقیم دو حلقه‌ی $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ نشان داده‌ایم.



شکل ۳.۳: رسته حاصل ضرب گراف یکال دو حلقه $\mathbb{Z}_۲$ و $\mathbb{Z}_۳$

گزاره ۶.۲.۳ نشان می‌دهد چنانچه ۲ عضوی یکال در حلقه R نباشد، در اینصورت گراف یکال وابسته به R گرافی $|U(R)|$-منتظم خواهد بود. گراف یکال $|U(R)|$-منتظم نخواهد بود اگر ۲ عضوی یکال از حلقه R باشد.

۶.۲.۳ گزاره. فرض کنیم R یک حلقه متناهی باشد. عبارات زیر برای گراف یکال حلقه R برقرارند:

الف) اگر $۲ \notin U(R)$ آنگاه گراف یکال $G(R)$ گرافی $|U(R)|$-منتظم است.

ب) اگر $۲ \in U(R)$ آنگاه برای هر $x \in U(R)$ داریم $deg(x) = |U(R)| - ۱$ و برای هر $x \in R \backslash U(R)$ داریم $deg(x) = |U(R)|$.

اثبات. برای اثبات هر دو قسمت فرض می‌کنیم $x \in R$ داده شده است. می‌دانیم $x + R = R$ بنابراین برای هر $u \in U(R)$، $x_u \in R$ وجود دارد بطوری‌که $x + x_u = u$. به وضوح x_u به صورت یکتایی به وسیله u تعیین می‌شود.

نخست فرض می‌کنیم $۲ \notin U(R)$ دراین صورت $x \neq x_u$، بنابراین x و x_u در گراف G با یکدیگر مجاورند، لذا تابع $f : U(R) \to N_{G(R)}(x)$ با ضابطه $f(u) = x$ خوش تعریف می‌باشد. به سادگی

ملاحظه می‌شود که f تابعی پوشا است، بنابراین $deg(x) = |N_{G(R)}(x)| = |U(R)|$. این مطلب نشانگر آن است که گراف G گرافی منتظم است پس اثبات در قسمت (الف) تمام است.

در حالت (ب) فرض کنید $۲ \in U(R)$ و $x \in R \setminus U(R)$ در این حالت باز هم خواهیم داشت $x \neq x_u$، بنابراین x و x_u در گراف G با یکدیگر مجاورند. لذا استدلال بالا همچنان معتبر است و نشان می‌دهد $deg(x) = |U(R)|$.

درپایان فرض کنید $۲ \in U(R)$ و $x \in U(R)$ در این حالت $۲x \in U(R)$ و ما برای هر $u \neq ۲x$ خواهیم داشت $x \neq x_u$ و $x_{۲x} = x$. حال برای $u \neq ۲x$، در گراف $G(R)$، راس x_u با x مجاور است. بنابراین $f : U(R) \to N_{G(R)}[x]$ با ضابطه $f(u) = x_u$ یک تابع خوش تعریف است. به سادگی ملاحظه می شود که f تابعی دوسویی است، بنابراین

$$deg(x) = |N_{G(R)}(x)| = |N_{G(R)}[x]| - ۱ = |U(R) - ۱|.$$

پس (ب) برقرار است. $\square$

۷.۲.۳ تذکر. فرض کنیم R یک حلقه موضعی متناهی باشد و $\mathfrak{m}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال آن باشد، اگر $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| > ۲$ باشد، آنگاه $|U(R)| \geq \frac{۲|R|}{۳}$ پس برای هر $x, y \in R$ با استفاده از اثبات گزاره قبل داریم:

$$\begin{aligned} |N_{\overline{G}(R)}(x) \cap N_{\overline{G}(R)}(y)| &= |N_{\overline{G}(R)}(x)| + |N_{\overline{G}(R)}(y)| - |N_{\overline{G}(R)}(x) \cup N_{\overline{G}(R)}(y)| \\ &\geq |U(R)| + |U(R)| - |R| \geq \frac{|R|}{۳} > ۰. \end{aligned}$$

این موضوع ایجاب می کند $N_{\overline{G}(R)}(x) \cap N_{\overline{G}(R)}(y) \neq \varnothing$.

۸.۲.۳ تذکر. فرض کنیم G یک گراف و $\{G_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرگراف‌های یال مجزای گراف G باشد به‌طوری که $E(G) = \cup_{i \in I} E(G_i)$، آنگاه می‌نویسیم $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$. در این حالت اگر برای هر $i \in I$

داشته باشیم $G_i \cong H$ آنگاه قرار می‌دهیم $G = \bigoplus_I H$.

۹.۲.۳ گزاره. فرض کنیم R یک حلقه و $J(R)$ نماد رادیکال جکوبسن R باشد. اگر $x, y \in R$، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. اگر $x + J(R)$ و $y + J(R)$ در گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ مجاور باشند آنگاه هر عضو از $x + J(R)$ با هر عضو $y + J(R)$ در گراف یکال $G(R)$ مجاور است.

۲. اگر $2x \in U(R)$، آنگاه $x + J(R)$ یک هم‌خوشه در گراف یکال $G(R)$ می‌باشد.

۳. اگر $2x \notin U(R)$، آنگاه $x + J(R)$ یک خوشه در گراف یکال $G(R)$ می‌باشد.

اثبات. برای قسمت (۱)، فرض کنیم $a \in x + J(R)$ و $b \in y + J(R)$ باشند. بنابراین j و j' در $J(R)$ وجود دارند به طوری که $a = x + j$ و $b = y + j'$. چون $x + J(R)$ و $y + J(R)$ در $G(\frac{R}{J(R)})$ مجاور هستند، $u \in U(R)$ وجود دارد به طوری که $(x + J(R)) + (y + J(R)) = u + J(R)$. بنابراین $x + y - u = (a + b) - (j + j') - u \in J(R)$.

حال به خلاف گیریم $a + b$ عضوی یکال از حلقه‌ی R نباشد، بنابراین $< a + b >$ ایده‌آلی سره از R می‌باشد. پس بنا به ۵۱.۱.۱ ایده‌آل ماکسیمالی مانند $\mathfrak{m}$ در R وجود دارد به طوری که $< a + b > \subseteq \mathfrak{m}$، لذا $a + b \in \mathfrak{m}$. از سوی دیگر $j + j'$ و $(a + b) - (j + j') - u$ اعضایی از $\mathfrak{m}$ هستند، لذا $u \in \mathfrak{m}$، که این با یکال بودن u و ماکسیمال بودن $\mathfrak{m}$ در تناقض است. بنابراین $a + b \in U(R)$ و در نتیجه a و b در گراف $G(R)$ مجاور هستند.

برای اثبات قسمت (۲)، فرض کنیم z و z' اعضای دلخواهی از $x + J(R)$ باشند، بنابراین j و j' در $J(R)$ وجود دارند به طوری که $z = x + j$ و $z' = x + j'$. اگر $z + z'$ عضوی یکال از گراف $G(R)$ نباشد، آنگاه ایده‌آل ماکسیمالی مانند $\mathfrak{m}$ در R وجود دارد به طوری که $< z + z' > \subseteq \mathfrak{m}$، لذا $z + z' = 2x + j + j' \in \mathfrak{m}$.

چون $j + j' \in \mathfrak{m}$، نتیجه می‌گیریم $2x \in \mathfrak{m}$، که این با فرض $2x \in U(R)$ و ماکسیمال بودن $\mathfrak{m}$ متناقض است. لذا $z + z' \in U(R)$ و در نتیجه z و z' در $G(R)$ مجاور هستند. بنابراین $x + J(R)$ یک خوشه در $G(R)$ می‌باشد.

برای اثبات قسمت (۳)، به خلاف گیریم z و z' دو عضو از $x + J(R)$ باشند که در گراف $G(R)$ با هم مجاور هستند. بنابراین $z + z' \in U(R)$. از طرفی j و j' در $J(R)$ وجود دارند به طوری که $z = x + j$ و $z' = x + j'$. بنابراین $2x + j + j' \in U(R)$. طبق فرض $2x \notin U(R)$، لذا ایده‌آل ماکسیمالی مانند $\mathfrak{m}$ در R وجود دارد به طوری که $< 2x > \subseteq \mathfrak{m}$، لذا $2x \in \mathfrak{m}$. همچنین چون $j + j' \in \mathfrak{m}$، نتیجه می‌گیریم $2x + j + j' \in \mathfrak{m}$. پس ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ دارای عضوی یکال است، که این یک تناقض است. بنابراین $x + J(R)$ یک هم‌خوشه در $G(R)$ است. $\square$

۱۰.۲.۳ قضیه. گیریم R یک حلقه باشد، گراف یکال $G(R)$ یک گراف کامل است اگر و فقط اگر R یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ باشد.

اثبات. فرض کنیم گراف یکال $G(R)$ یک گراف کامل باشد و $r \neq 0$ عضوی دلخواه از حلقه‌ی R باشد. چون گراف کامل است، راس 0 با r مجاور است، لذا $r = r + 0 \in U(R)$. پس هر عضو ناصفر از حلقه‌ی R یکال است و بنابراین R یک حلقه‌ی تقسیم است. از طرف دیگر راس ۱ با ۱− مجاور نیست، بنابراین داریم $1 = -1$، که این نشان می‌دهد مشخصه‌ی حلقه R برابر ۲ است.

برعکس، اگر R یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ باشد، آنگاه هر جفت از رئوس متمایز R مجاورند، بنابراین $G(R)$ یک گراف کامل است. $\square$

۱۱.۲.۳ گزاره. گیریم R یک حلقه، n یک عدد طبیعی و p یک عدد اول فرد باشد، در این‌صورت $G(R) \cong K_1 \vee CP(p^n - 1)$، اگر وفقط اگر R یک میدان با p^n عضو باشد.

اثبات. فرض کنیم $G(R) \cong K_1 \vee CP(p^n - 1)$، بنابراین $r \in R$ وجود دارد، به طوری که با هر عضو

از R مجاور است. چون $G(R)$ یک گراف منتظم نیست، بنابراین همه‌ی اعضای R به جز r وارون پذیر هستند، لذا $2 \in U(R)$ و $r = 0$. در نتیجه R یک میدان با p^n عضو می‌باشد.

برعکس، فرض کنیم R یک میدان با p^n عضو باشد. به آسانی مشاهده می‌شود که اگر راس 0 را از گراف $G(R)$ حذف کنیم، آنگاه گراف باقی مانده یک گراف کامل بدون یال $\{r, -r\}$، برای هر $r \neq 0$ است. بنابراین گراف اخیر یک کوکتل پارتی است و لذا یکریخت با $CP(p^n - 1)$ می‌باشد. چون 0 با هر عضو ناصفر از R مجاور است، نتیجه می‌گیریم $G(R) \cong K_1 \vee CP(p^n - 1)$. $\square$

فصل ۴

گراف یکال حلقه‌های جابه‌جایی و متناهی

۱.۴ مقدمه

همان‌طور که در فصل اول گفته شد یک گراف تام ضعیف نامیده می‌شود هرگاه عدد رنگی آن با عدد خوشه‌ای آن برابر باشد. نتیجه‌ی اصلی این فصل (قضیه‌ی ۶.۲.۴) نشان می‌دهد گراف‌های یکال حلقه‌های جابه‌جایی و متناهی تام ضعیف هستند، به‌علاوه اثبات قضیه‌ی ۶.۲.۴ یک فرمول سرراست برای عدد رنگی چنین گراف‌هایی ارائه می‌کند.

در این فصل تمامی حلقه‌ها جابه‌جایی و متناهی با همانی غیرصفر هستند. همچنین منظور ما از یک گراف، گرافی متناهی و بدون طوقه است.

این فصل برگرفته از مقاله‌ی [۳۰] می‌باشد.

۲.۴ خواص اساسی این گراف‌ها

در این بخش تعدادی لم را که برای اثبات قضیه‌ی ۶.۲.۴ نیاز داریم بیان و اثبات می‌کنیم.

۱.۲.۴ لم. فرض کنیم R یک حلقه و $2 + J(R) \in U(\frac{R}{J(R)})$ باشد، که در آن $J(R)$ نماد جکوبسن رادیکال R است. همچنین گیریم k و l دو عدد طبیعی باشند، در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. اگر گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ یک خوشه با اندازه $k + l$ داشته باشد، به طوریکه دقیقا l عنصر غیر یکال در آن باشد. آن‌گاه گراف یکال $G(R)$ یک خوشه با اندازه $|J(R)|k + l$ دارد.

۲. اگر گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ به رنگ‌آمیزی با $(k + l)$ رنگ داشته باشد به طوریکه دقیقاً l رنگ برای رنگ‌آمیزی عناصر غیر یکال استفاده می‌شود، در این‌صورت گراف یکال $G(R)$ یک رنگ‌آمیزی با $(|J(R)|k + l)$ رنگ دارد.

اثبات. برای اثبات قسمت (۱) طبق فرض می‌توانیم در نظر بگیریم

$$S = \{x_1 + J(R), \dots, x_k + J(R), y_1 + J(R), \dots, y_l + J(R)\}$$

یک خوشه در $G(\frac{R}{J(R)})$ می‌باشد به طوریکه برای هر i که $1 \leq i \leq k$ داریم $x_i + J(R)$ یک عنصر یکال در $\frac{R}{J(R)}$ می‌باشد و برای هر j به طوری که $1 \leq j \leq l$ داریم $y_j + J(R)$ یک عنصر غیر یکال از $\frac{R}{J(R)}$ است.

فرض کنید $x_i + J(R)$ که $1 \leq i \leq k$ داده شده است. چون $2 + J(R)$ و $x_i + J(R)$ عضوهای یکال در حلقه $\frac{R}{J(R)}$ هستند، خواهیم داشت $(2 + J(R))(x_i + J(R)) = 2x_i + J(R) \in U(\frac{R}{J(R)})$. بنابراین $t \in R$ وجود دارد به طوریکه $(2x_i + J(R))(t + J(R)) = 1 + J(R)$. و این ایجاب می‌کند که $2x_it - 1 \in J(R)$.

به خلاف، گیریم $2x_i$ عنصر یکال در R نباشد، بنابراین $< 2x_i >$ یک ایده‌آل سره در R است. بنابراین یک ایده‌آل ماکسیمال مانند $\mathfrak{m}$ از R وجود دارد. به طوری که $< 2x_i > \subseteq \mathfrak{m}$. پس $2x_i \in \mathfrak{m}$ و بنابراین داریم $2x_i t \in \mathfrak{m}$. از طرف دیگر $2x_i t - 1 \in \mathfrak{m}$، و این ایجاب می‌کند که $1 \in \mathfrak{m}$ اما این یک تناقض است. بنابراین $2x_i \in U(R)$، پس طبق قسمت (۲) گزاره‌ی ۹.۲.۳، $x_i + J(R)$ یک خوشه در $G(R)$ است.

حال فرض کنیم $y_j + J(R)$ که $1 \le j \le l$ داده شده است. چون $y_j + J(R)$ در حلقه $\frac{R}{J(R)}$ یکال نیست، به سادگی مشاهده می‌شود که $2y_j \notin U(R)$، پس طبق قسمت (۳) گزاره‌ی ۹.۲.۳، $y_j + J(R)$ یک هم‌خوشه در $G(R)$ است.

همچنین با استفاده از قسمت (۱) گزاره‌ی ۹.۲.۳، اگر $a + J(R)$ و $b + J(R)$ دو هم‌دسته متمایز در S باشند، آنگاه هر عضو از $a + J(R)$ با هر عضو از $b + J(R)$ در $G(R)$ مجاور خواهد بود.

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که مجموعه $\bigcup_{i=1}^{k} (x_i + J(R)) \cup \{y_1, \ldots, y_l\}$ یک خوشه در $G(R)$ با اندازه $\sum_{i=1}^{k} |x_i + J(R)| + l = \sum_{i=1}^{k} |J(R)| + l = |J(R)|k + l$ است. بنابراین خوشه خواسته شده در $G(R)$ وجود دارد.

برای اثبات قسمت (۲) در نظر می‌گیریم $J(R) = \{r_1, \ldots, r_{|J(R)|}\}$. با توجه به گزاره‌ی ۹.۲.۳، هر هم‌دسته از $\frac{R}{J(R)}$ یا یک خوشه یا هم‌خوشه‌ای در $G(R)$ است. فرض کنیم عضو $x \in R$ داده شده باشد. ما می‌خواهیم رأس x را رنگ بزنیم. چون هم‌دسته‌های متمایز از $\frac{R}{J(R)}$ به شکل یک افراز برای R هستند، می‌توانیم فرض کنیم که x متعلق است به هم‌دسته $a + J(R)$ که رنگ α را دارد. دو امکان وجود دارد، یا $a + J(R)$ یک خوشه است یا هم‌خوشه در $G(R)$. اگر حالت اول برقرار باشد، می‌نویسیم $x = a + r_i$ به طوری که $r_i \in J(R)$ و رنگ می‌زنیم x را با (α, r_i). اگر حالت دوم برقرار باشد، رنگ می‌زنیم x را به وسیله α. ما هم‌اکنون نشان می‌دهیم که این یک رنگ‌آمیزی از رئوس $G(R)$ است. به منظور انجام این کار، فرض می‌کنیم که رئوس متمایز x و y در $G(R)$ مجاورند. دو امکان وجود دارد. یا این که x و y در یک هم‌دسته هستند یا این که x و y متعلق به هم‌دسته‌های متمایزی هستند.

حالت اول: فرض کنیم x و y متعلق به یک هم‌دسته هستند. این هم‌دسته را $a+J(R)$ نام‌گذاری می‌کنیم که دارای رنگ α است. چون x با y در $G(R)$ مجاور است، $a+J(R)$ یک خوشه است در $G(\frac{R}{J(R)})$. فرض کنیم $x=a+r_i$ و $y=a+r_j$، به طوری که $r_i \neq r_j$. بنابراین x دارای رنگ (α, r_i) است. درصورتی که y دارای رنگ متمایزی به نام (α, r_j) است.

حالت دوم: فرض کنیم x و y متعلق به هم‌دسته‌های متمایزی باشند. پس گیریم x متعلق است به هم‌دسته‌ی $a+J(R)$ به طوری که رنگ α را دارد و y که متعلق به هم‌دسته‌ی $b+J(R)$ باشد به طوری که رنگ β را دارد. می‌توانیم به سادگی نتیجه بگیریم که $a+J(R)$ مجاور با $b+J(R)$ در $G(\frac{R}{J(R)})$ است. این ایجاب می‌کند که $\alpha \neq \beta$. فرض کنیم $x=a+r_i$ و $y=a+r_j$ بنابراین x یا رنگ α را دارد یا رنگ (α, r_i) مادامی که y یا رنگ β را دارد یا رنگ (β, r_j). بنابراین در این حالت نیز x و y رنگ‌های متمایزی دارند.

پس x و y رنگ‌های متمایزی دارند و بنابراین ما یک رنگ آمیزی از رئوس $G(R)$ داریم. با شمردن تعداد رنگ‌های استفاده شده، ما نتیجه می‌گیریم که $G(R)$ یک رنگ‌آمیزی $|J(R)|_k+l$ - رنگی دریافت کرده است. $\square$

۲.۲.۴ لم. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $2+J(R) \notin U(\frac{R}{J(R)})$، همچنین گیریم k یک عدد صحیح مثبت باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

۱. اگر گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ یک خوشه با اندازه k داشته باشد، آن‌گاه گراف یکال $G(R)$ نیز خوشه‌ای به اندازه k دارد.

۲. اگر گراف یکال $G(\frac{R}{J(R)})$ یک رنگ‌آمیزی k - رنگی دریافت کند، آن‌گاه گراف یکال $G(R)$ نیز یک رنگ‌آمیزی k - رنگی دریافت می‌کند.

اثبات. چون $J(R) + ۲ \notin U(\frac{R}{J(R)})$، به آسانی مشاهده می‌شود که برای هر $x \in R$، خواهیم داشت $۲x \notin U(R)$ و بنابراین طبق قسمت (۳) گزاره‌ی ۹.۲.۳، $x + J(R)$ یک هم‌خوشه از گراف $G(R)$ است.

حال برای اثبات قسمت (۱)، فرض کنیم $S = \{x_۱ + J(R), \dots, x_k + J(R)\}$ یک خوشه در $G(\frac{R}{J(R)})$ باشد. با استفاده از قسمت (۱) گزاره‌ی ۹.۲.۳، برای هر $۱ \leq i, j \leq k$ که $i \neq j$، خواهیم داشت هر عنصر $x_i + J(R)$ با هر عنصر $x_j + J(R)$ در گراف $G(R)$ مجاور است. پس نتیجه می‌گیریم که مجموعه $\{x_۱, \dots, x_k\}$ یک خوشه در گراف $G(R)$ با اندازه k می‌باشد. بنابراین، خوشه خواسته شده در $G(R)$ موجود است.

برای اثبات قسمت (۲)عضوهای R را به هم‌دسته‌های هم ارزی متمایز $\frac{R}{J(R)}$ افراز می‌کنیم و سپس عناصر داده شده در هر هم‌دسته را به وسیله‌ی رنگ همان هم‌دسته رنگ‌آمیزی می‌کنیم. به سادگی مشاهده می‌شود گراف $G(R)$ یک رنگ‌آمیزی k رنگی دریافت کرده است. □

اکنون نتایج زیر را بیان می‌کنیم که به ما اطلاعاتی درباره ساختار گراف‌های یکال برآمده از میدان‌ها ارائه می‌کند.

۳.۲.۴ لم. فرض کنیم F_i، به طوری که $۱ \leq i \leq n$، یک میدان با مشخصه نامساوی با ۲ باشد، در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

۱. گراف یکال $G(\prod_{i=۱}^{n} F_i)$ یک خوشه به اندازه $n + \frac{۱}{۲^n}\prod_{i=۱}^{n}(|F_i| - ۱)$ دارد، به طوری که دقیقاً n تا از عضوهای آن یکال نیستند.

۲. گراف یکال $G(\prod_{i=۱}^{n} F_i)$ یک رنگ‌آمیزی $n + \frac{۱}{۲^n}\prod_{i=۱}^{n}(|F_i| - ۱)$ - رنگی می‌پذیرد به طوری که دقیقاً n رنگ برای رنگ‌آمیزی عناصر نایکال استفاده می‌شود.

اثبات. برای اثبات قسمت (۱)، فرض می‌کنیم که برای هر $1 \leq i \leq n$ مجموعه S_i یک خوشه ماکسیمال در گراف یکال $G(F_i)$ باشد و a_i را به عنوان عضو ناصفر از S_i انتخاب می‌کنیم آن‌گاه به سادگی مشاهده می‌شود که مجموعه

$$S = \left(\prod_{i=1}^{n}(S_i \setminus \{0\})\right) \cup \{a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

یک خوشه در گراف یکال $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ است، به طوری که دقیقاً n عضو آن نایکال است. برای هر i به طوری که $1 \leq i \leq n$ بر اساس گزاره‌ی ۱۱.۲.۳ نتیجه می‌گیریم که $G(F_i) \cong K_1 \vee CP(|F_i| - 1)$. بنابراین خواهیم داشت $\omega(G(F_i)) = 1 + \frac{(|F_i|-1)}{2}$. همچنین داریم $0 \in S_i$، پس $|S_i \setminus \{0\}| = |S_i| - 1$، بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$|S| = \prod_{i=1}^{n}(|S_i| - 1) + n = \prod_{i=1}^{n}(\omega(G(F_i)) - 1) + n = \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(|F_i| - 1) + n$$

و بنابراین خوشه خواسته شده در $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ وجود دارد.

برای اثبات قسمت (۲)، برای هر i به طوری که $1 \leq i \leq n$ می‌توانیم فرض کنیم

$$F_i = \{0, \alpha_1^i, \ldots, \alpha^i_{\frac{(|F_i|-1)}{2}}, -\alpha_1^i, \ldots, -\alpha^i_{\frac{(|F_i|-1)}{2}}\}.$$

فرض کنید که $1 \leq k_i \leq \frac{(|F_i|-1)}{2}$، $1 \leq i \leq n$ و در نظر بگیرید $T_{k_1,\ldots,k_n} = \prod_{i=1}^{n} T^i_{k_i}$، به طوری که $T^i_{k_i} = \{\alpha^i_{k_i}, -\alpha^i_{k_i}\}$. به سادگی مشاهده می‌شود $T_{k_1,\ldots,k_n}$، که $1 \leq k_i \leq \frac{(|F_i|-1)}{2}$ و $1 \leq i \leq n$ یک هم‌خوشه در $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ است.

توجه داریم که هر عضو از $\prod_{i=1}^{n} F_i$ یا عضو $T_{k_1,\ldots,k_n}$ است، برای تعدادی از $1 \leq k_i \leq \frac{(|F_i|-1)}{2}$ و

$1 \leq i \leq n$، یا مختصاتی برابر با صفر دارد. اکنون فرض کنید که x یک رأس داده شده از گراف یکال $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ باشد. اگر $1 \leq k_i \leq \frac{(|F_i|-1)}{2}$ و $1 \leq i \leq n$، آن‌گاه ما x را به وسیله رنگ $(k_1, \ldots, k_n)$ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. در حالت بعدی ما x را با رنگ i به طوری که i امین مؤلفه، اولین مؤلفه صفر x باشد رنگ‌آمیزی می‌کنیم. به وضوح این یک رنگ‌آمیزی از گراف یکال $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ می‌باشد. با شمارش تعداد رنگ‌های استفاده شده به این نتیجه می‌رسیم که $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ یک رنگ‌آمیزی $\frac{1}{2^n}(\prod_{i=1}^{n}(|F_i| - 1) + n)$-رنگی می‌پذیرد در این جا دقیقاً n رنگ برای رنگ‌آمیزی عناصر نایکال استفاده شده است، چنان‌که مطلوب بود. □

۴.۲.۴ لم. فرض کنیم F_i که $1 \leq i \leq n$، یک میدان باشد به طوری که $F_1, \ldots, F_l$ دارای مشخصه‌های مساوی ۲ باشند و $|F_1| \leq \cdots \leq |F_l|$ همچنین $F_{l+1}, \ldots, F_n$ همگی مشخصه‌هایی مخالف با ۲ داشته باشند. در این‌صورت احکام زیر برقرارند.

۱. گراف یکال $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ یک خوشه به اندازه $|F_1|$ دارد.

۲. گراف یکال $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ یک رنگ‌آمیزی $|F_1|$ - رنگی می‌پذیرد.

اثبات. برای اثبات قسمت (۱) برای هر i ای که $2 \leq i \leq l$ فرض می‌کنیم که S_i یک زیر مجموعه از F_i است، به طوری که $|S_i| = |F_1|$ و تابع دوسویی $f_i : F_1 \to S_i$ را در نظر می‌گیریم. به استناد گزاره‌ی ۱۰.۲.۳ گراف یکال $G(F_i)$ که $1 \leq i \leq l$، یک گراف کامل است.

$$S = \{(\alpha, f_2(\alpha), \ldots, f_l(\alpha), 1, \ldots, 1) \mid \alpha \in F_1\}$$

یک خوشه در $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ است. بدیهی است که اندازه این خوشه برابر با $|F_1|$ می‌باشد، بنابراین خوشه خواسته شده مطلوب در $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ وجود دارد.

برای اثبات قسمت (۲)، برای هر $\alpha \in F_1$، ما $T_\alpha = \{\alpha\} \times \prod_{i=2}^{n} F_i$ را در نظر می‌گیریم. متذکر می‌شویم که هر عضوی از $\prod_{i=1}^{n} F_i$ متعلق است به T_α، برای تعدادی از $\alpha \in F_1$. اینک فرض می‌کنیم که x یک رأس داده شده از $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ باشد. اگر $\alpha \in F_1$ وجود داشته باشد به طوری که x عضوی از T_α باشد، آنگاه با رنگ α رأس x را رنگ می‌کنیم. به وضوح این یک رنگ‌آمیزی $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ می‌باشد. به شمردن تعداد رنگ‌های استفاده شده به این نتیجه می‌رسیم که یک رنگ‌آمیزی $|F_1|$ - رنگی می‌پذیرد. $\square$

ما اکنون آماده‌ایم نتیجه اصلی این فصل را بیان و اثبات کنیم. اما قبل از این‌کار، بیان تذکر زیر ضروری است.

۵.۲.۴ تذکر. طبق قضیه‌ی ۵۲.۱.۱، هر حلقه با یک حاصل ضرب مستقیم از حلقه‌های موضعی یکریخت است (چون در این فصل حلقه‌ها متناهی هستند پس به وضوح هر حلقه آرتینی است). بنابراین برای حلقه‌ی داده شده R می‌توانیم بنویسیم $R \cong \prod_{i=1}^{n} R_i$. به طوری که هر R_i یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}_i$ است. به سادگی مشاهده می‌شود، مجموعه‌ی

$$\{R_1 \times \ldots \times R_{i-1} \times \mathfrak{m}_i \times R_{i+1} \times \ldots \times R_n \mid 1 \leq i \leq n\}$$

عبارت است از مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال $\prod_{i=1}^{n} R_i$ و بنابراین نتیجه می‌گیریم رادیکال جکوبسن R یکریخت است با $J(\prod_{i=1}^{n} R_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$. نیز به یاد داریم که تابع $f : \prod_{i=1}^{n} R_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \frac{R_i}{\mathfrak{m}_i}$، با ضابطه‌ی $f(r_1, \ldots, r_n) = (r_1 + \mathfrak{m}_1, \ldots, r_n + \mathfrak{m}_n)$ یک بروریختی است که $\ker f = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$. لذا داریم:

$$\frac{R}{J(R)} \cong \prod_{i=1}^{n} \frac{R_i}{\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i} \cong \prod_{i=1}^{n} \frac{R_i}{\mathfrak{m}_i}.$$

در نهایت در اثبات قضیه ۶.۲.۴، از کمیت

$$\frac{|J(R)|}{۲^n}\prod_{i=۱}^{n}(|\frac{R_i}{\mathfrak{m}_i}|-۱)+n$$

استفاده خواهد شد. چون $|J(R)|=\prod_{i=۱}^{n}|\mathfrak{m}_i|$، این مقدار رامی‌توان به فرم ساده‌تر زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{۱}{۲^n}\prod_{i=۱}^{n}(|R_i|-|\mathfrak{m}_i|)+n.$$

۶.۲.۴ قضیه. اگر R یک حلقه باشد، آنگاه گراف یکال $G(R)$ تام ضعیف است.

اثبات. طبق تذکر ۵.۲.۴، می‌توانیم بنویسیم $R\cong\prod_{i=۱}^{n}R_i$، به طوری که هر R_i یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}_i$ است، بنابراین $\frac{R}{J(R)}\cong\prod_{i=۱}^{n}F_i$، به طوری که برای هر i که $۱\leq i\leq n$ داریم، $F_i=\frac{R_i}{\mathfrak{m}_i}$ یک میدان است. دو امکان وجود دارد، یا همه میدان‌های F_i مشخصه‌ای مخالف با ۲ دارند یا حداقل یکی از میدان‌های F_i دارای مشخصه ۲ می‌باشد.

حالت اول: فرض کنیم که تمام میدان‌های F_i مشخصه‌ی مخالف ۲ داشته باشند. بنابراین داریم $(۲,\ldots,۲)\in U(\prod_{i=۱}^{n}F_i)$، پس $۲+J(R)\in \cup(\frac{R}{J(R)})$.

به استناد قسمت (۱) از لم ۳.۲.۴، $G(\prod_{i=۱}^{n}F_i)$ و در نتیجه $G(\frac{R}{J(R)})$، یک خوشه به اندازه $\frac{۱}{۲^n}\prod_{i=۱}^{n}(|F_i|-۱)+n$ دارد، که در آن دقیقاً n عضو نایکال وجود دارد. لذا طبق قسمت (۱) از لم ۱.۲.۴ و تذکر ۵.۲.۴ نتیجه می‌گیریم $G(R)$ یک خوشه به اندازه $\frac{۱}{۲^n}\prod_{i=۱}^{n}(|R_i|-|\mathfrak{m}_i|)+n$ دارد و این مطلب ایجاب می‌کند که $\omega(G(R))\geq\frac{۱}{۲^n}\prod_{i=۱}^{n}(|R_i|-|\mathfrak{m}_i|)+۱$ باشد.

بنا به قسمت (۲) از لم ۳.۲.۴، $G(\prod_{i=۱}^{n}F_i)$ و لذا $G(\frac{R}{J(R)})$ یک رنگ‌آمیزی $(\frac{۱}{۲^n}\prod_{i=۱}^{n}(|F_i|-$

$n + 1$ -رنگی می‌پذیرد. به طوری که دقیقاً n تا از رنگ‌ها برای رنگ‌آمیزی عناصر نایکال به کار رفته‌اند. پس به استناد قسمت (۲) از لم ۱.۲.۴ و تذکر ۵.۲.۴، نتیجه می‌گیریم که $G(R)$ یک رنگ‌آمیزی $\frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(|R_i| - |\mathfrak{m}_i|) + n$ -رنگی می‌پذیرد. این ایجاب می‌کند که

$$\chi(G(R)) \leq \frac{1}{2^n}(\prod_{i=1}^{n}(|R_i| - |\mathfrak{m}_i|) + n.$$

بنابراین چون $\chi(G(R)) \geq \omega(G(R))$ نتیجه می‌گیریم که

$$\chi(G(R)) = \omega(G(R)) = \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(|R_i| - |\mathfrak{m}_i|) + n,$$

و این نتیجه می‌دهد که گراف یکال $G(R)$ تام ضعیف است.

حالت دوم: فرض کنیم که حداقل یکی از میدان‌های F_i مشخصه‌ای برابر با ۲ داشته باشد. بنابراین خواهیم داشت $(2, \ldots, 2) \notin U(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ و لذا $2 + J(R) \notin \cup(\frac{R}{J(R)})$. با استفاده از بازچینی می‌توانیم فرض کنیم که $F_1, \ldots, F_l$ همگی دارای مشخصه‌ی یکسان ۲ می‌باشند و $|F_l| \leq \cdots \leq |F_1|$، همگی دارای مشخصه‌ی مخالف ۲ می‌باشند.

به استناد قسمت (۱) از لم ۴.۲.۴، $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ و در نتیجه $G(\frac{R}{J(R)})$ یک خوشه به اندازه $\frac{|R_1|}{|\mathfrak{m}_1|}$ دارد. پس طبق قسمت (۱) از لم ۲.۲.۴ نتیجه می‌گیریم که $G(R)$ یک خوشه به اندازه $\frac{|R_1|}{|\mathfrak{m}_1|}$ دارد. این مورد ایجاب می‌کند که $\omega(G(R)) \geq \frac{|R_1|}{|\mathfrak{m}_i|}$. به استناد قسمت (۲) از لم ۴.۲.۴، $G(\prod_{i=1}^{n} F_i)$ و در نتیجه $G(\frac{R}{J(R)})$، یک رنگ‌آمیزی $(\frac{|R_1|}{|\mathfrak{m}_1|})$ -رنگی دریافت می‌کند. لذا بنا به قسمت (۲) از لم ۲.۲.۴، نتیجه می‌گیریم که $G(R)$ یک رنگ‌آمیزی $(\frac{|R_1|}{|\mathfrak{m}_1|})$ -رنگی دریافت می‌کند. این مورد ایجاب می‌کند که $\chi(G(R)) \leq \frac{|R_1|}{|\mathfrak{m}_1|}$.

بنابراین چون $\chi(G(R)) \geq \omega(G(R))$، نتیجه می‌گیریم که

$$\chi(G(R)) = \omega(G(R)) = \frac{|R_1|}{|m_1|}.$$

پس در این حالت نیز گراف یکال $G(R)$ تام ضعیف است. □

اجازه بدهید ما یادآوری کنیم که اثبات قضیه‌ی ۶.۲.۴ به ما یک فرمول صریح برای عدد رنگی گراف یکال $G(R)$ ارائه می‌کند. برای حلقه مفروض R می‌توانیم بنویسیم $R \cong R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$، به طوری که هر R_i یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}_i$ است. اگر $2 \notin U(R)$، با استفاده از بازچینی می‌توانیم فرض کنیم که $R_1, \ldots, R_l$ همگی مشخصه‌ای مساوی ۲ دارند، به طوری که $\frac{|R_l|}{|\mathfrak{m}_l|} \leq \cdots \leq \frac{|R_1|}{|\mathfrak{m}_1|}$ و $R_{l+1}, \ldots, R_n$ همگی مشخصه مخالف ۲ دارند. آن‌گاه:

$$\chi(G(R)) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(|R_i| - |\mathfrak{m}_i|) + n & 2 \in U(R), \\ \dfrac{|R_1|}{|\mathfrak{m}_1|} & 2 \notin U(R). \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که این فرمول تبدیل می‌شود به فرم ساده‌تری اگر همه حلقه‌ها میدان باشند.

$$\chi(G(R)) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(|R_i| - 1) + n & 2 \in U(R), \\ |R_1| & 2 \notin U(R). \end{cases}$$

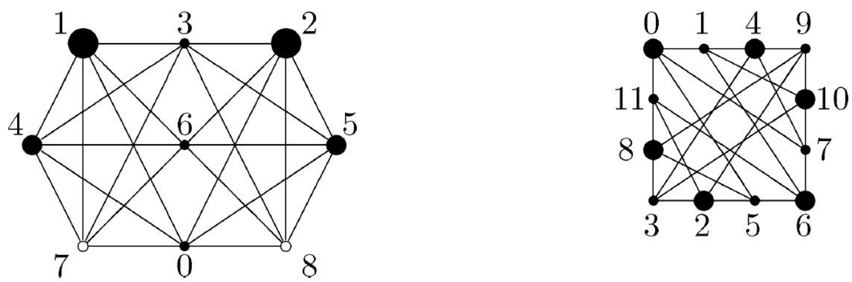
اکنون درستی نتیجه‌گیری و فرمول بالا را در مثال‌های زیر بررسی می‌کنیم.

۷.۲.۴ مثال. گیریم $k > 1$ عدد طبیعی باشد، طبق تذکر ۷.۳.۱، می‌توان نوشت $k = p_1^{r_1}\ldots p_n^{r_n}$، به طوری که p_i ها اعداد اول متمایز و r_i ها اعداد طبیعی باشند. بنابراین نتیجه می‌گیریم $\mathbb{Z}_k \cong \mathbb{Z}_{p_1}^{r_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_n}^{r_n}$ و

بنابراین خواهیم داشت:

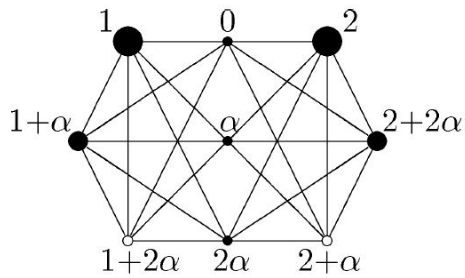
$$\chi(G(\mathbb{Z}_k)) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\varphi(k) + n & \text{اگر } k \text{ فرد باشد،} \\ 2 & \text{اگر } k \text{ زوج باشد.} \end{cases}$$

بنابراین برای مثال، عدد رنگی $G(\mathbb{Z}_9)$ برابر ۴ است و عدد رنگی $G(\mathbb{Z}_{12})$ برابر با ۲ می‌باشد. در شکل ۱.۴ ما این مطلب را نشان داده‌ایم. در این نمایش گلوله‌های متمایز معرف رنگ‌های متمایز می‌باشند.



شکل ۱.۴: گراف‌های یکال $G(\mathbb{Z}_9)$ و $G(\mathbb{Z}_{12})$ و رنگ آمیزی آنها با کمترین تعداد رنگ ممکن.

۸.۲.۴ مثال. عدد رنگی گراف یکال $G(\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{<x^2>})$ برابر ۴ است. در شکل ۲.۴ این مورد را نشان داده‌ایم. در این نمایش نیز گلوله‌های متمایز معرف رنگ‌های مختلف می‌باشند.



شکل ۲.۴: گراف یکال $G\left(\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{<x^2>}\right)$ و رنگ آمیزی آن با کمترین تعداد رنگ ممکن.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آرتینی .... Artinian
استدلال منطقی .... Logical Reasoning
اطلاعات .... Information
الحاق .... Join
اندازه .... Size
اول .... Prime
اهداف آموزشی .... Education Aim
ایده‌آل .... Ideal
پوشا .... Onto
تابع .... Function
تام .... Perfect
تجزیه‌پذیر .... Decomposable
تغییر زاویه‌ی دید .... Adopting a different point of view
تطابق کامل .... Perfect Matching
توزیع‌پذیر .... Destributive
تهی .... Empty
جابه‌جایی .... Commutative
چندجمله‌ای .... Polynomial
حاصل‌ضرب مستقیم .... Direct Product
حلقه .... Ring
حل مسئله .... Problem Solving

حل مسئله ساده‌تر	Solving a simpler
خارج‌قسمت	Quotient
خوشه	Clique
دامنه‌ی صحیح	Integral domain
دوتایی	Binary
دور	Cycle
رادیکال جکوبسن	Jacobson radical
رأس	Vertex
رنگ‌آمیزی	Coloring
زیرحلقه	Subring
زیرگروه	Subgroup
زیرمجموعه	Subset
سازماندهی داده‌ها	Organizing the data
ستاره	Star
سره	Proper
شرکت‌پذیر	Associative
ضعیف	Weakly
عضو	Element
عدد رنگی	Chromatic number
عمل	Operation
کامل	Complete
کوکتل پارتی	Cocktail Party
گراف	Graph
گراف یکال	Unit Graph
گروه	Group
ماتریس مجاورت	Adjacent matrix
ماکسیمال	Maximal
متمم	Complement
متناهی	Finite

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

مجاور .... Adjacent
مجزا .... Disjoint
مرتبه .... Order
مسیر .... Path
مشخصه .... Characteristic
مهارت .... Skill
موضعی .... Local
مقسوم‌علیه .... Divisor
میدان .... Field
نوتری .... Noetherian
نیم‌گروه .... Semigroup
وارون‌پذیر .... Invertible
همانی .... Identity
همبند .... Connected
همریختی .... Homomorphism
یال .... Edge
یکال .... Unit
یک‌به‌یک .... One to one
یکتا .... Uniquely
یکریختی .... Isomorphism

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent .... مجاور
Adjacent matrix .... ماتریس مجاورت
Adopting a different point of view .... تغییر زاویه‌ی دید
Artinian .... آرتینی
Associative .... شرکت‌پذیر
Binary .... دوتایی
Characteristic .... مشخصه
Chromatic number .... عدد رنگی
Clique .... خوشه
Coloring .... رنگ‌آمیزی
Cocktail Party .... کوکتل پارتی
Commutative .... جابه‌جایی
Complement .... متمم
Complete .... کامل
Connected .... همبند
Cycle .... دور
Decomposable .... تجزیه‌پذیر
Destributive .... توزیع‌پذیر
Direct product .... حاصل‌ضرب مستقیم
Disjoint .... مجزا
Divisor .... مقسوم‌علیه

Edge .... یال
Education Aim .... اهداف آموزشی
Element .... عضو
Empty .... تهی
Field .... میدان
Finite .... متناهی
Function .... تابع
Graph .... گراف
Group .... گروه
Homomorphism .... همریختی
Ideal .... ایده‌آل
Identity .... همانی
Information .... اطلاعات
Integral domain .... دامنه‌ی صحیح
Invertible .... وارون‌پذیر
Isomorphism .... یکریختی
Jacobson radical .... رادیکال جکوبسن
Join .... الحاق
Local .... موضعی
Logical Reasoning .... استدلال منطقی
Maximal .... ماکسیمال
Noetherian .... نوتری
One to one .... یک‌به‌یک
Onto .... پوشا
Operation .... عمل
Organizing the data .... سازماندهی داده‌ها
Order .... مرتبه
Path .... مسیر
Perfect .... تام

Perfect Matching .... تطابق کامل
Polynomial .... چندجمله‌ای
Prime .... اول
Problem Solving .... حل مسئله
Proper .... سره
Quotient .... خارج‌قسمت
Ring .... حلقه
Semigroup .... نیم‌گروه
Size .... اندازه
Skill .... مهارت
Solving a simpler .... حل مسئله ساده‌تر
Star .... ستاره
Subgroup .... زیرگروه
Subring .... زیرحلقه
Subset .... زیرمجموعه
Uniquely .... یکتا
Unit .... یکال
Unit Graph .... گراف یکال
Vertex .... رأس
Weakly perfect .... تام ضعیف

مراجع

[۱] تام م آپوستل. نظریه‌ی تحلیلی اعداد، ترجمه‌ی علی‌اکبر عالم زاده و علی‌اکبر رحیم زاده، انتشارات شباهنگ، ۱۳۶۷

[۲] بهنام آیتی پور، هادی معصوم پور. خانه‌های ریاضیات، آنچه که هست، آنچه که باید باشد. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، دوره‌ی سی و ششم، شماره‌ی ۳، بهار ۱۳۹۸.

[۳] جورج پولیا. چگونه مسئله را حل کنیم. ترجمه‌ی احمد آرام، انتشارات کیهان، ۱۳۶۶.

[۴] علی روز دار. آنچه لازم است درباره‌ی حل مسئله بدانیم. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، دوره‌ی بیست و چهارم، شماره‌ی ۲، زمستان ۱۳۸۵.

[۵] منصور سلمان زاده ساعدی. پایان نامه کارشناسی ارشد. بررسی اثربخشی آموزش حل خلاقانه‌ی مسئله، مبتنی بر نظریه تریز، در حل مسئله ریاضی در پایه هفتم و هشتم. استاد راهنما: دکتر وحید عالمیان. دانشگاه فرهنگیان. بهمن ماه ۱۳۹۶

[۶] رودنی شارپ. گام‌هایی در جبر تعویض‌پذیر، ترجمه‌ی محمد مهدی ابراهیمی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.

[۷] علی شریعتمداری. اصول و فلسفه‌ی تعلیم و تربیت. انتشارات امیرکبیر، ۱۳۶۴.

[۸] علیرضا علیپور. ترکیبیات (جلد اول)، انتشارات فاطمی، چاپ سوم ۱۳۸۴.

[۹] زهرا گویا، زهرا گیلک. آموزش حل مسئله‌ی ریاضی: تحقق یک چشم انداز، مروری بر ادبیات تحقیق. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، دوره‌ی بیست و چهارم، شماره‌ی ۲، زمستان ۱۳۸۵.

[۱۰] توماس دبلیو. هانگرفورد. جبر، ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده و دکتر حسین ذاکری، انتشارات پژوهش، ۱۳۷۵.

[۱۱] آی. ان. هرشتاین. جبر مجرد، ترجمه‌ی دکتر محمدرضا رجب‌زاده‌مقدم و دکتر علی‌اکبر محمدی‌حسن‌آبادی، انتشارات دانشگاه امام رضا(ع)، ۱۳۷۸.

[۱۲] سیامک یاسمی و محمدرضا پورنکی. مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مدول‌ها، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۴.

[13] N. Ashrafi, H. R. Maimani, M. R. Pournaki and S. Yassemi, Unit graphs associated with rings, Comm. Algebra, to appear.

[14] Ashrafi, N., Vámos, P. (2005). On the unit sum number of some rings. Q. J. Math. 56:1–12.

[15] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra (Addison Wesley, Reading, MA.–London–Don Mills, ON, 1969).

[16] Birkhoff, G. D. (1912/13). A determinant formula for the number of ways of coloring a map. Ann. of Math. (2) 14:42–46.

[17] Chartrand, G., Oellermann, O. R. (1993). Applied and Algorithmic Graph Theory. New York: McGraw-Hill, Inc.

[18] Corbas, B., Williams, G. D. (2000). Rings of order p5. II. Local rings. J. Algebra 231:691–704.

[19] Dolžan, D. (2002). Group of units in a finite ring. J. Pure Appl. Algebra 170:175–183.

[20] S. Galovich, Unique factorization ringswith zero divisors, Math. Mag. 51 (1978), 276-283.

[21] M. R. Garey, D. S. Johnson, Computers and Intractabilitiy: A Guide to the Theory of NPCompleteness, W. H. Freman and Company, New York, 1979.

[22] Goldsmith, B., Pabst, S., Scott, A. (1998). Unit sum numbers of rings and modules. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 49:331–344.

[23] Grimaldi, R. P. (1990). Graphs from rings. Proceedings of the 20th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Boca Raton, FL, 1989). Congr. Numer. Vol. 71, pp. 95–103.

[24] Henriksen, M. (1974). Two classes of rings generated by their units. J. Algebra 31:182–193.

[25] Kaplansky, I. (1974). Commutative Rings. Chicago, Ill.-London: The University of Chicago Press.

[26] König, D. (1990). Theory of Finite and Infinite Graphs. Translated from the German by R. McCoart. Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc.

[27] Stephen. Krulik, Alfred S. Posamentier. Problem Solving in Mathematics, Corwin, 2009.

[28] M. Kubale, Graph Colorings, American Mathematical Society, 2004.

[29] Maimani, H. R., Pournaki, M. R., Yassemi, S. (2010). A Class of Weakly Perfect Graphs. Czechoslovak Mathematical Journal 60(4):1037–1041.

[30] Maimani, H. R., Pournaki, M. R., Yassemi, S. (2010). Weakly Perfect Graphs Arising From Rings. Glasgow Math. J. 52:417–425.

[31] Maimani, H. R., Salimi, M., Sattari, A., Yassemi, S. (2008). Comaximal graph of commutative rings. J. Algebra 319:1801–1808.

[32] C. McDiarmid, B. Reed, Channel assignment and weighted colouring, Networks 36 (2000), 114–117.

[33] B. R. McDonald, Finite rings with identity, in Pure and Applied Mathematics, vol. 28. (Marcel Dekker, Inc., New York, 1974).

[34] Raphael, R. (1974). Rings which are generated by their units. J. Algebra 28:199–205.

[35] D. B.West, Introduction to Graph Theory (Prentice Hall, Upper Saddle River,NJ, 1996).

Abstract

Let R be a commutative ring with identity. unit graph associated with R demted by $G(R)$ is a graph whose vertices are all elements of R and two distinct vertices x, y are adjacent if and only if $x + y$ is a unit element of R. A graph G is called weakly perfect if its chromatic number equal its clique number.

In this research we use some skills of problem solving to prove that unit graph of a finite commutative ring with nonzero identity is weakly perfect, Morever a new classes of weakly perfect graphs is presented an explicit formula for the chromatic number of such graphs is given.

Key Words : Skills of Problem Solving, Unit graph, Chromatic number, Clique number, Weakly perfect graph, Commutative rings .

Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran

Collage of Student Collage

Departement of Student Field

Thesis Submitted for the Degree of Master of Science in Algebra

Title

Appling Skills of Problem Solving in Investigation For Chromatic Number of Unit Graphs Associated with Rings

Supervisor

Reza Nikandish

By

Behnam Ayati Pour

Date

2019