
بسم الله الرحمن الرحیم

گراف‌های i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر از حلقه‌های جابه‌جایی

اقدس خوشوقت

استاد راهنما:

دکتر رضا نیک‌اندیش

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

اردیبهشت ۱۴۰۱

فهرست مطالب

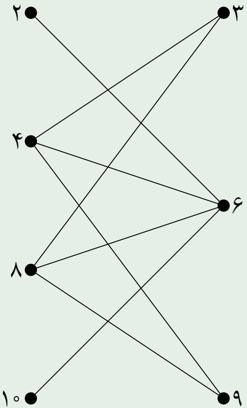
تعریف ۱

گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه R که با $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، گرافی با مجموعه رئوس $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ است و دو رأس متمایز x و y در $\Gamma(R)$ با هم مجاور هستند اگر وتنها اگر $xy = 0$.

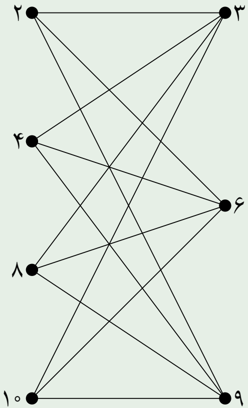
تعریف ۲

گراف توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر حلقه R که با $\overline{\Gamma}(R)$ نمایش داده می‌شود یک گراف ساده وابسته به R است با مجموعه رئوس $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ و دو رأس متمایز x و y با هم مجاورند اگر وتنها اگر دو عدد طبیعی n و m وجود داشته باشند به طوری که $x^n \cdot y^m = 0$ با این شرط که $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$.

مثال ۳



$\Gamma(\mathbb{Z}_{۱۲})$



$\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_{۱۲})$

گزاره ۴

فرض کنیم R یک حلقه کاهشی باشد. در این صورت $\overline{\Gamma}(R) = \Gamma(R)$.

قضیه ۵

فرض کنیم $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ خانواده متناهی از حلقه‌ها باشد که $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. در این صورت

$$\overline{\Gamma}(\prod_{i=1}^{n} R_i) = \Gamma(\prod_{i=1}^{n} R_i)$$

اگر و تنها اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، R_i کاهشی باشد.

تعریف ۶

فرض کنیم R یک حلقه و x عنصر پوچ‌توانی از آن باشد. در این صورت مرتبه پوچ‌توانی x که با نماد $\nu(x)$ یا n_x نمایش داده می‌شود، عبارت است از کوچک‌ترین عدد طبیعی k به طوری که $x^k = 0$. سوپریمم مرتبه پوچ‌توانی عناصر R، درجه پوچ‌توانی R نامیده شده و با نماد $\nu(R)$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۷

فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت رأس x از گراف $\overline{\Gamma}(R)$ وجود دارد که مجاور همه رئوس دیگر است اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times D$ که D دامنه صحیح است، یا داریم $Z(R) = \sqrt{\mathrm{Ann}(x^{n_x - 1})}$.

قضیه ۸

فرض کنیم R یک حلقه باشد، در این صورت $\overline{\Gamma}(R)$ گراف کامل است اگر و تنها اگر یا $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ یا $Z(R) = \mathrm{Nil}(R)$ و برای هر $x, y \in Z(R)^*$ داشته باشیم $x^{n_x - 1} y^{n_y - 1} = 0$.

نمادگذاری ۹

قرار می‌دهیم

$$\overline{Z}(R) := \{x^{n_x-۱} | x \in \mathrm{Nil}(R)^*\}$$

و

$$\overline{Z}(R)^۲ := \{x^{n_x-۱}y^{n_y-۱} | x, y \in \mathrm{Nil}(R)^*\}.$$

نتیجه ۱۰

فرض کنیم R یک حلقه باشد به طوری که $\overline{\Gamma}(R) \neq \Gamma(R)$. در این صورت $\overline{\Gamma}(R)$ کامل است اگر و تنها اگر $Z(R) = \mathrm{Nil}(R)$ و $\overline{Z}(R)^۲ = \{۰\}$.

قضیه ۱۱

فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر $\Gamma(R) \neq \overline{\Gamma}(R)$، آن‌گاه $\overline{\Gamma}(R)$ دارای دور است.

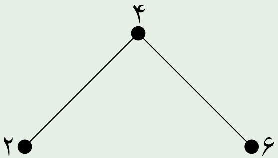
قضیه ۱۲

فرض کنیم R یک حلقه با $\mathrm{Nil}(R) \neq 0$ و $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = 4$ باشد. در این صورت $\Gamma(R) \neq \overline{\Gamma}(R)$ نتیجه می‌دهد که $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = 4$ و $\overline{\Gamma}(R)$ گراف دوبخشی کامل است.

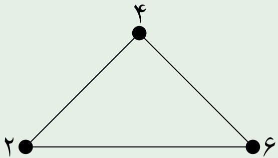
تعریف ۱۳

برای یک عدد طبیعی i، گراف i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر حلقه R که با $\overline{\Gamma}_i(R)$ نمایش داده می‌شود و مجموعه رئوس آن $Z(R)^*$ است و دو رأس متمایز x و y از آن با یکدیگر مجاورند اگر و تنها اگر دو عدد طبیعی $n \leq i$ و $m \leq i$ وجود داشته باشند به طوری که $x^n \cdot y^m = 0$ با این شرط که $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$.

مثال ۱۴



$\overline{\Gamma}_1(\mathbb{Z}_8)$



$\overline{\Gamma}_2(\mathbb{Z}_8)$

قضیه ۱۵

اگر $\mathrm{Nil}(R)$ غیر صفر باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرار هستند:

1. $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = ۴$ اگر و تنها اگر $R \cong D \times B$ که D یک دامنه صحیح با $|D| \geq ۳$ است و $B = \mathbb{Z}_۴$ یا $B = \mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$.
2. $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = \infty$ اگر و تنها اگر $R \cong B$ یا $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times B$ که $B = \mathbb{Z}_۴$ یا $B = \mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$ یا $\Gamma(R)$ گراف ستاره باشد.

نتیجه ۱۶

فرض کنیم $i \geq ۲$ یک عدد صحیح باشد که $\overline{\Gamma}_i(R) \neq \Gamma(R)$. در این صورت $\overline{\Gamma}_i(R)$ دارای دور است و $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}_i(R)) = ۴$ اگر و تنها اگر $R \cong D \times B$ که D یک دامنه صحیح است و $B = \mathbb{Z}_۴$ یا $B = \mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$.

قضیه ۱۷

فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. در این صورت یک رأس در $\overline{\Gamma}_i(R)$ وجود دارد به طوری که مجاور همه رئوس دیگر است اگر و تنها اگر یا $R \cong \mathbb{Z}_2 \times D$ که D یک دامنه صحیح است یا $z \in R^*$ وجود دارد به طوری که $Z(R)^* = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}(z)}$.

قضیه ۱۸

فرض کنیم $i > 1$ یک عدد طبیعی باشد. اگر $\Gamma(R) \neq \overline{\Gamma}_i(R)$، آن‌گاه $\mathrm{diam}\left(\overline{\Gamma}_i(R)\right) = 3$ اگر و تنها اگر مقسوم‌علیه‌های ناصفر غیر پوچ‌توان $a \neq b$ و دو عدد طبیعی n و m وجود داشته باشند به طوری که $\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left((a^n, b^m)\right)} = \varnothing$.

نمادگذاری ۱۹

فرض کنیم R یک حلقه، I ایده‌آلی از R و i یک عدد طبیعی باشد. در این صورت قرار می‌دهیم

$$\mathrm{N}^i(R) := \{x \in \mathrm{Nil}(R) \mid \nu(x) \leq i\}$$

و

$$\sqrt[i]{\mathrm{I}} := \{y \in R \mid \exists \alpha \leq i \ \ s.t. \ \ y^{\alpha} \in \mathrm{I} \setminus \{0\}\}.$$

قضیه ۲۰

برای عدد طبیعی i، گراف $\overline{\Gamma}_i(R)$ کامل است اگر و تنها اگر یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

1. $Z(R) \neq \mathrm{Nil}(R)$ و $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
2. $Z(R) = \mathrm{Nil}(R)$ و دو عبارت زیر برقرار باشد:

(الف) برای هر $x \in N^i$ داشته باشیم $Z(R)^* = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(x^{\nu(x)-1}\right)}$.

(ب) برای هر $x \in \mathrm{Nil}(R) \setminus N^i$ داشته باشیم $Z(R)^* = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(x^i\right)}$.

قضیه ۲۱

فرض کنیم $\nu(R)$ متناهی باشد و $Z(R)$ به صورت یک اجتماع متناهی از ایده‌آل‌های اول مینیمال R باشد. فرض کنیم $i \geq \nu(R)$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت قطر $\overline{\Gamma}_i(R)$ کمتر یا مساوی ۲ است اگر و تنها اگر R حداکثر دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد.

گزاره ۲۲

فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. اگر $Z(R) = \mathrm{N}^{i+1}(R)$، آن‌گاه $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$.

قضیه ۲۳

فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. عبارات زیر معادل هستند.

1. $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$.
2. $Z(R) = \mathrm{N}^{i+1}(R)$ یا برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{N}^{i+1}(R)$ داریم $\sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)} = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)}$.
3. $Z(R) = \mathrm{N}^{i+1}(R)$ یا برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{N}^{i+1}(R)$ داریم $\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)} = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)}$ و $\sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)} = \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)}$.

گزاره ۲۴

فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد و برای هر $x \in \mathrm{Nil}(R)$، $\nu(x) \neq i + 1$. در این صورت $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ اگر و تنها اگر یا $Z(R) = \mathrm{N}^{i+1}(R)$ و یا برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{N}^{i+1}(R)$ داشته باشیم

$$\mathrm{N}^2(R) \cap \mathrm{Ann}\left(x^i\right) = \mathrm{N}^2(R) \cap \mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right).$$

قضیه ۲۵

فرض کنیم $(R_j)_{۱\leq j\leq n}$ یک خانواده متناهی از حلقه‌ها باشد که $n \geq ۲$ و i یک عدد طبیعی باشد. در این صورت

$$\overline{\Gamma}_i\left(\prod_{j=۱}^{n} R_j\right) = \overline{\Gamma}_{i+۱}\left(\prod_{j=۱}^{n} R_j\right)$$

اگر و تنها اگر دو گزاره زیر برقرار باشد.

1. برای هر $۱ \leq j \leq n$، $\overline{\Gamma}_i\left(R_j\right) = \overline{\Gamma}_{i+۱}\left(R_j\right)$.
2. برای هر $۱ \leq j \leq n$ و $x \in \mathrm{Nil}\left(R_j\right)$، $\nu(x) \neq i + ۱$.

قضیه ۲۶

عبارت‌های زیر معادلند:

1. $\overline{\Gamma}_1(R) = \overline{\Gamma}_2(R)$.
2. $\Gamma(R) = \overline{\Gamma}(R)$.
3. برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{N}^2(R)$، $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}\left(x^2\right)$.

قضیه ۲۷

اگر برای یک عدد طبیعی i داشته باشیم $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$، آن‌گاه $\overline{\Gamma}(R) = \overline{\Gamma}_{2i}(R)$.


باسپاس از توجه شما