بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پروژه درس مباحث

اعضای گروه:

کوثر شجیراتی
۹۶۱۵۵۲۱۴۱

سیده آیه علی کوثری
۹۷۱۵۵۲۱۵۳

سکینه حمیدی
۹۷۱۵۵۲۱۲۶

مرضیه نژادقرباغی
۹۷۱۵۵۲۱۶۹

دنیا اورکی
۹۷۱۵۵۲۱۱۱

بهمن امیدی
۹۷۱۵۵۲۱۱۰

هانیه رمضانی
۹۶۱۵۵۲۱۳۰

استاد

دکتر رضا چهارپاشلو

اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۱

فهرست مطالب

لم ۵.۴.۴. فرض کنیم $\phi(t):[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ یک تابع پوشا و صعودی اکید و $(X,\mathcal{M},\mathcal{T})$ یک فضای متریک $\mathbf{M}\mathcal{L}$-فازی باشد که در آن $\mathcal{T}$ در شرط (۱.۲.۱) صدق می‌کند. در این صورت برای هر $x,y\in X$، $\lambda\in L\setminus\{0_{\mathcal{L}},1_{\mathcal{L}}\}$ و $n\in\{1,2,\cdots\}$ داریم

$$\begin{aligned}&\inf\{\phi^n(t)>0:\mathcal{M}(x,y,t)>_L\mathcal{N}(\lambda)\}\\ \leq&\phi^n\left(\inf\{t>0:\mathcal{M}(x,y,t)>_L\mathcal{N}(\lambda)\}\right)\end{aligned}$$

اثبات. فرض کنیم $t\in[0,\infty)$ باشد که $\mathcal{M}(x,y,t)>_L\mathcal{N}(\lambda)$. در این صورت $\phi^n(t)>0$ و لذا

$$\phi^n(t)\geq\inf\{\phi^n(s)>0:\mathcal{M}(x,y,s)>_L\mathcal{N}(\lambda)\}.$$

اکنون، چون ϕ^n پوشا و اکیداً صعودی است نتیجه می‌گیریم

$$t\geq(\phi^n)^{-1}\left(\inf\{\phi^n(s)>0:\mathcal{M}(x,y,s)>_L\mathcal{N}(\lambda)\}\right).$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}&\inf\{t>0:\mathcal{M}(x,y,t)>_L\mathcal{N}(\lambda)\}\\ \geq&(\phi^n)^{-1}\left(\inf\{\phi^n(s)>0:\mathcal{M}(x,y,s)>_L\mathcal{N}(\lambda)\}\right)\end{aligned}$$

و لذا

$$\begin{aligned}&\inf\{\phi^n(t)>0:\mathcal{M}(x,y,t)>_L\mathcal{N}(\lambda)\}\\ \leq&\ \phi^n\left(\inf\{t>0:\mathcal{M}(x,y,t)>_L\mathcal{N}(\lambda)\}\right).\end{aligned}$$

بنابراین اثبات تمام است. □

لم ۵.۴.۵. فرض کنیم $(X,\mathcal{M},\mathcal{T})$ یک فضای متریک $\mathbf{M}\mathcal{L}$-فازی باشد که در آن $\mathcal{T}$ در شرط (۱.۲.۱) صدق می‌کند. فرض کنیم که $\{u_n\}$ یک دنباله در X باشد به طوری که برای هر $t>0$ داشته باشیم

$$\mathcal{M}\left(u_n,u_{n+1},\phi^n(t)\right)\geq_L\mathcal{M}\left(u_0,u_1,t\right)$$

که در آن تابع $\phi : [\circ, +\infty) \to [\circ, +\infty)$ پوشا و اکیداً صعودی است که در شرط (Φ) نیز صدق می‌کند. هم‌چنین فرض کنیم

$$E_{\mathcal{M}}\left(u_\circ, u_1\right) = \sup\left\{E_{\gamma,\mathcal{M}}\left(u_\circ, u_1\right) : \gamma \in (\circ, 1)\right\} < \infty.$$

در این صورت $\{u_n\}$ یک دنباله کوشی[1] است.

اثبات. با استفاده از ۵.۴.۴، برای هر $\lambda \in L \setminus \{\circ_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}}\}$ داریم

$$\begin{aligned}
E_{\lambda,\mathcal{M}}\left(u_n, u_{n+1}\right) &= \inf\left\{\phi^n(t) > \circ : \mathcal{M}\left(u_n, u_{n+1}, \phi^n(t)\right) >_L \mathcal{N}(\lambda)\right\} \\
&\leq \inf\left\{\phi^n(t) > \circ : \mathcal{M}\left(u_\circ, u_1, t\right) >_L \mathcal{N}(\lambda)\right\} \\
&\leq \phi^n\left(\inf\left\{t > \circ : \mathcal{M}\left(u_\circ, u_1, t\right) >_L \mathcal{N}(\lambda)\right\}\right) \\
&= \phi^n\left(E_{\lambda,\mathcal{M}}\left(u_\circ, u_1\right)\right).
\end{aligned}$$

برای هر $\mu \in L \setminus \{\circ_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}}\}$، $\gamma \in L \setminus \{\circ_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}}\}$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}
E_{\mu,\mathcal{M}}\left(u_n, u_m\right) &\leq E_{\gamma,\mathcal{M}}\left(u_{m-1}, u_m\right) + E_{\gamma,\mathcal{M}}\left(u_{m-2}, u_{m-1}\right) + \cdots + E_{\gamma,\mathcal{M}}\left(u_n, u_{n+1}\right) \\
&\leq \sum_{j=n}^{\infty} \phi^j\left(E_{\mathcal{M}}\left(u_\circ, u_1\right)\right) \to \circ
\end{aligned}$$

چون $n \to \infty$. بنابراین $\{u_n\}$ یک دنباله کوشی است و لذا اثبات تمام است. $\square$

فرض کنیم $\mathcal{T}$ یک t-نرم پیوسته روی مشبکه $\mathcal{L}$ باشد به طوری که برای هر $\mu \in L \setminus \{\circ_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}}\}$، $\lambda \in L \setminus \{\circ_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}}\}$ وجود داشته باشد (که ممکن است وابسته به n باشد) به طوری که برای هر $n \in \{1, 2, \cdots\}$ داریم

$$\mathcal{T}^{n-1}(\mathcal{N}(\lambda), \cdots, \mathcal{N}(\lambda)) >_L \mathcal{N}(\mu). \qquad (۵.۴.۱)$$

برای اطلاعات بیشتر به [۱۳۳] مراجعه شود. در بقیه این نوشته، فرض می‌کنیم (۵.۴.۱) برقرار است.

[1] Cauchy

تذکر ۵.۴.۶. توجه داریم که در ۵.۴.۴، اگر شرط (۵.۴.۱) را در نظر بگیریم آن‌گاه به شرط $E_{\mathcal{M}}(u_\circ, u_1) <$ ∞ نیازی نخواهد بود. زیرا برای هر $\mu \in L \setminus \{\circ_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}}\}$، $\lambda \in L \setminus \{\circ_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}}\}$ وجود دارد (که به n وابسته نیست) به طوری که برای هر $n \in \{1, 2, \cdots\}$ داریم

$$T^{n-1}(\mathcal{N}(\lambda), \cdots, \mathcal{N}(\lambda)) >_L \mathcal{N}(\mu). \tag{۵.۴.۲}$$

در این حالت، λ در قسمت (a) از لم ۵.۴.۱ به n وابسته نیست. اکنون رابطه (۵.۴.۲) در [۴] در نظر گرفته شده است (توجه داریم که در [۴] به طور ناخواسته تعریف فضاهای متری $\mathcal{L}$-فازی را کنار گذاشته‌ایم). هم‌چنین توجه کنید که (با استفاده از ایده‌های ۵.۴.۴) نتایج [۴] با شرط (۵.۴.۲) را می‌توان جایگزین شرط (۵.۴.۱) نمود (زیرا به وضوح یک شرط اضافی برای تضمین $E_{\mathcal{M}}(u_\circ, u_1) < \infty$) به دست می‌آوریم).

قضیه ۴.۵.۷ (قضیه نقطه ثابت $\mathcal{L}$-فازی). فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ یک فضای متریک $\mathbf{M}\mathcal{L}$-فازی کامل باشد. فرض کنیم $A : X \to X$ یک نگاشت باشد که برای هر $x, y \in X$ و $t > \circ$ در شرط

$$\mathcal{M}(A(x), A(y), \phi(t)) \geq_L \mathcal{M}(x, y, t)$$

صدق کند که در آن تابع $\phi : [\circ, \infty) \to [\circ, \infty)$ پوشا و اکیداً صعودی است و در شرط (Φ) صدق می‌کند. در این صورت داریم:

۱. اگر (۵.۴.۱) برقرار باشد و $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که

$$E_{\mathcal{M}}(x, Ax) = \sup\{E_{\gamma,\mathcal{M}}(x, Ax) \ : \ \gamma \in]\circ, 1[\ \} < \infty$$

آن‌گاه A دارای نقطه ثابت است.

۲. اگر (۵.۴.۲) برقرار باشد، آن‌گاه A دارای نقطه ثابت است.

اثبات. فرض کنیم $x \in X$ به گونه‌ای باشد که $E_{\mathcal{M}}(x, Ax) < \infty$ و گیریم برای هر $n \geq 1$، $x_n = A^n(x)$. در این صورت داریم

$$\mathcal{M}(x_n, x_{n+1}, \phi^n(t)) = \mathcal{M}\left(A^n(x), A^{n+1}(x), \phi^n(t)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\geq_L \mathcal{M}\left(A^{n-۱}(x), A^n(x), \phi^{n-۱}(t)\right)\\
&\geq_L \mathcal{M}\left(A^{n-۲}(x), A^{n-۱}(x), \phi^{n-۲}(t)\right)\\
&\geq_L\\
&\geq_L \mathcal{M}(x, A(x), t)\\
&= \mathcal{M}\left(x, x_۱, t\right).
\end{aligned}$$

بنابراین ۵.۴.۵ نتیجه می‌دهد که $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. چون X کامل است، $y \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = y$.

حال ادعا می‌کنیم که y یک نقطه ثابت از نگاشت A است. داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(A(y), y, ۲\phi(t)) &\geq_L \mathcal{T}\left(\mathcal{M}\left(A(y), A\left(x_n\right), \phi(t)\right), \mathcal{M}\left(x_{n+۱}, y, \phi(t)\right)\right)\\
&\geq_L \mathcal{T}\left(\mathcal{M}\left(y, x_n, t\right), \mathcal{M}\left(x_{n+۱}, y, t\right)\right)\\
&\longrightarrow \mathcal{T}\left(۱_{\mathcal{L}}, ۱_{\mathcal{L}}\right) = ۱_{\mathcal{L}}.
\end{aligned}$$

چون $n \longrightarrow \infty$. بنابراین داریم $\mathcal{M}\left(A(y), y, t'\right) = ۱_{\mathcal{L}}$ که در آن $t' = ۲\phi(t)$ و لذا $A(y) = y$. برای نشان دادن یکتایی نقطه ثابت y از A، فرض کنیم $z \in X$ وجود داشته باشد که $A(z) = z$. در این صورت

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left(z, y, \phi^n(t)\right) &= \mathcal{M}\left(A(z), A(y), \phi^n(t)\right)\\
&\geq_L \mathcal{M}\left(z, y, \phi^{n-۱}(t)\right)\\
&= \mathcal{M}\left(A(z), A(y), \phi^{n-۱}(t)\right)\\
&\geq_L \mathcal{M}\left(z, y, \phi^{n-۲}(t)\right)\\
&\geq_L \cdots\\
&\geq_L \mathcal{M}(z, y, t).
\end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم

$$\mathcal{M}\left(z, y, \phi^{n}(t)\right) \leq_{L} \mathcal{M}\left(z, y, \phi^{n-1}(t)\right) \leq_{L} \cdots \leq_{L} \mathcal{M}(z, y, t).$$

بنابراین داریم

$$\mathcal{M}(z, y, t)=\mathcal{M}(z, y, \phi(t))=\cdots=\mathcal{M}\left(z, y, \phi^{n}(t)\right).$$

پس برای هر $t>0$، $\mathcal{M}(x, y, t)=C$ و لذا از **لم ۵.۴.۲** نتیجه می‌گیریم $y=z$.

۲. استدلال این قسمت نیز مشابه قسمت (۱) است به جز این‌که در این حالت از تذکر ۵.۴.۶ استفاده خواهیم کرد. بنابراین اثبات تمام است. □

نتیجه ۵.۴.۸. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ یک فضای متریک $\mathcal{ML}$-فازی کامل باشد که در آن t-نرم $\mathcal{T}$ از نوع هادزیک[۲] است. فرض کنیم $A: X \longrightarrow X$ یک نگاشت باشد که در شرط

$$\mathcal{M}(A(x), A(y), \phi(t)) \geq_{L} \mathcal{M}(x, y, t)$$

صدق کند که در آن تابع $\phi:[0, \infty) \rightarrow[0, \infty)$ پوشا و اکیداً صعودی است و در شرط (Φ) صدق می‌کند. در این صورت A دارای یک نقطه ثابت یکتا است.

اثبات. توجه داریم که در این حالت (۵.۴.۲) برقرار است. □

در [۱۲۵]، نویسندگان با استفاده از یک t-نرم پیوسته مخصوص، یعنی یک t-نرم H-نوع پیوسته، یک قضیه نقطه ثابت مشترک برای حالت غیرخطی ثابت کردند.

قضیه ۵.۴.۹. فرض کنیم $\{A_n\}$ یک دنباله از نگاشت‌های A_i از یک فضای متریک کامل $\mathcal{ML}$-فازی $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ به خودش باشد به طوری که برای هر دو نگاشت A_i و A_j، برای هر $x, y \in X, t>0$ و برای یک m داشته باشیم

$$\mathcal{M}\left(A_{i}^{m}(x), A_{j}^{m}(y), \phi_{i, j}(t)\right) \geq_{L} \mathcal{M}(x, y, t)$$

[2] Hadžic

که در آن $\phi_{i,j} : [۰, +\infty) \to [۰, +\infty)$ یک تابع است که برای $i, j = ۱, ۲, \cdots$ و $t > ۰$ داریم $\phi_{i,j}(t) \leq \phi(t)$. همچنین تابع $\phi : [۰, +\infty) \to [۰, +\infty)$ پوشا و اکیداً صعودی است که در شرط (Φ) صدق می‌کند. در این صورت موارد زیر را داریم:

۱. اگر (۵.۴.۱) برقرار باشد و $x_۰ \in X$ وجود داشته باشد به طوری که

$$E_{\mathcal{M}}\left(x_۰, A_۱^m x_۰\right) = \sup\left\{E_{\gamma,\mathcal{M}}\left(x_۰, A_۱^m x_۰\right) : \gamma \in]۰, ۱[\right\} < \infty$$

آن‌گاه دنباله $\{A_n\}$ دارای یک نقطه ثابت مشترک یکتا در X است.

۲. اگر (۵.۴.۲) برقرار باشد، آن‌گاه $\{A_n\}$ دارای یک نقطه ثابت یکتا است.

اثبات. ۱. فرض کنیم $x_۰ \in X$ به گونه‌ای باشد که $E_{\mathcal{M}}\left(x_۰, A_۱^m x_۰\right) < \infty$. دنباله $\{x_n\}$ در X را به صورت

$$x_۱ = A_۱^m\left(x_۰\right), x_۲ = A_۲^m\left(x_۱\right), \quad \cdots, x_n = A_۲^m\left(x_{n-۱}\right), \cdots.$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left(x_۱, x_۲, \phi(t)\right) &\geq_L \mathcal{M}\left(x_۱, x_۲, \phi_{۱,۲}(t)\right) \\
&= \mathcal{M}\left(A_۱^m\left(x_۰\right), A_۲^m\left(x_۱\right), \phi_{۱,۲}(t)\right) \\
&\geq_L \mathcal{M}\left(x_۰, x_۱, t\right)
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left(x_۲, x_۳, \phi^۲(t)\right) &\geq_L \mathcal{M}\left(x_۲, x_۳, \phi_{۲,۳}(\phi(t))\right) \\
&= \mathcal{M}\left(A_۲^m\left(x_۱\right), A_۳^m\left(x_۲\right), \phi_{۲,۳}(\phi(t))\right) \\
&\geq_L \mathcal{M}\left(x_۱, x_۲, \phi(t)\right) \\
&\geq_L \mathcal{M}\left(x_۰, x_۱, t\right)
\end{aligned}$$

و به همین شکل می‌توان ادامه داد. با استفاده از استقرا داریم

$$\mathcal{M}\left(x_n, x_{n+1}, \phi^n(t)\right) \geq_L \mathcal{M}\left(x_0, x_1, t\right).$$

بنابراین ۵.۴.۵ نتیجه می‌دهد که $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. چون X کامل است، $x \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

اکنون نشان می‌دهیم که برای هر $i \in \{1, 2, \cdots\}$ داریم $A_i^m(x) = x$. توجه داریم که

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}\left(x, A_i^m(x), t\right)\\
&\geq \mathcal{T}^2\left(\mathcal{M}\left(x, x_n, t-\phi(t)\right), \mathcal{M}\left(x_n, A_i^m(x), \phi(t)\right)\right)\\
&= \mathcal{T}^2\left(\mathcal{M}\left(x, x_n, t-\phi(t)\right), \mathcal{M}\left(A_n^m\left(x_{n-1}\right), A_i^m(x), \phi(t)\right)\right)\\
&\geq L\mathcal{T}^2\left(\mathcal{M}\left(x, x_n, t-\phi(t)\right), \mathcal{M}\left(A_n^m\left(x_{n-1}\right), A_i^m(x), \phi_{n,i}(t)\right)\right)\\
&\geq L\mathcal{T}^2\left(\mathcal{M}\left(x, x_n, t-\phi(t)\right), \mathcal{M}\left(x_{n-1}, x, t\right)\right)\\
&\to \mathcal{T}^2\left(1_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}}\right)\\
&= 1_{\mathcal{L}}
\end{aligned}$$

چون $n \to \infty$. بنابراین $\mathcal{M}\left(x, A_i^m(x), t\right) = 1_{\mathcal{L}}$ و نتیجه می‌گیریم $A_i^m(x) = x$.

برای این که نشان دهیم نقطه ثابت x یکتاست، فرض می‌کنیم $x \neq y$ نقطه ثابت دیگری باشد که به طوری برای هر $i \in \{1, 2, \cdots\}$، $A_i^m(y) = y$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left(x, y, \phi^n(t)\right) &\geq_L \mathcal{M}\left(x, y, \phi_{i,j}\left(\phi^{n-1}(t)\right)\right)\\
&= \mathcal{M}\left(A_i^m(x), A_i^m(y), \phi_{i,j}\left(\phi^{n-1}(t)\right)\right)\\
&\geq_L \mathcal{M}\left(x, y, \phi^{n-1}(t)\right)\\
&\geq_L \mathcal{M}\left(x, y, \phi_{i,j}\left(\phi^{n-2}(t)\right)\right)\\
&= \mathcal{M}\left(A_i^m(x), A_i^m(y), \phi_{i,j}\left(\phi^{n-2}(t)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\geq_L \mathcal{M}\left(x, y, \phi^{n-۲}(t)\right)$$
$$\geq_L \cdots$$
$$\geq_L \mathcal{M}(x, y, t).$$

از سوی دیگر، چون $\mathcal{M}(x,y,\cdot)$ غیر نزولی بوده و $\phi^n(t) < t$، داریم

$$\mathcal{M}(x, y, \phi^n(t)) \leq_L \mathcal{M}(x, y, t).$$

از این رو، برای هر $t > ۰$ داریم $\mathcal{M}(x,y,t) = C$ و از لم ۵.۴.۲ نتیجه می‌گیریم که $x = y$. هم‌چنین داریم

$$A_i(x) = A_i(A_i^m(x)) = A_i^m(A_i(x)).$$

در نتیجه داریم $x = A_i(x)$، به عبارت دیگر، برای هر $n \geq ۱$، x نقطه ثابت مشترک یکتای نگاشت‌های A_n می‌باشد.

۲. استدلال این قسمت با قسمت (۱) یکسان می‌باشد به جز این‌که در این‌جا از ۵.۴.۶ استفاده می‌کنیم. □

نتیجه ۵.۴.۱۰. فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای از نگاشت‌های A_i به فضای متریک $\mathbf{M}\mathcal{L}$-فازی کامل $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ باشد که در آن t-نرم $\mathcal{T}$ نوع هازدیک[۳] باشد به طوری که برای هر دو نگاشت A_i و A_j و برای هر $x, y \in X, t > ۰$ و برای یک m، داشته باشیم

$$\mathcal{M}(A_i^m(x), A_j^m(y), \phi_{i,j}(t)) \geq_L \mathcal{M}(x, y, t)$$

که در آن $\phi_{i,j} : [۰, +\infty) \to [۰, +\infty)$ تابعی است که برای هر $i, j = ۱, ۲, \cdots$ و $t > ۰$، داریم $\phi_{i,j}(t) \leq \phi(t)$. هم‌چنین تابع $\phi : [۰, +\infty) \to [۰, +\infty)$ پوشا و صعودی اکید بوده که در شرط (Φ) صدق می‌کند. در این صورت دنباله $\{A_n\}$ در X یک نقطه ثابت مشترک یکتا دارد.

[3] Hazdic

قضیه زیر که قضیه Jungck ([۸۴]) می‌باشد، یک تعمیم از اصل انقباض باناخ[4] در فضاهای متریک است.

قضیه ۵.۴.۱۱. فرض کنیم f یک نگاشت پیوسته از فضای متریک کامل (X, d) به خودش باشد و $g : X \to X$ یک نگاشت باشد که در شرایط زیر صدق کند.

(a) $g(X) \subseteq f(X)$.

(b) g با f جابه‌جا شود.

(c) $\circ < k < ۱$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(g(x), g(y)) \leq kd(f(x), f(y))$.

در این صورت f و g یک نقطه ثابت مشترک یکتا دارند.

در قضیه بعد، نوع $\mathcal{L}$-فازی قضیه بالا را برای انقباض‌های غیرخطی اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵.۴.۱۲. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ یک فضای متریک $\mathbf{M}\mathcal{L}$-فازی و $f, g : X \to X$ نگاشت‌هایی باشند که در شرایط زیر صدق می‌کنند.

(a) $g(X) \subseteq f(X)$.

(b) f پیوسته باشد.

(c) برای هر $x, y \in X$،

$$\mathcal{M}(g(x), g(y), \phi(t)) \geq_L \mathcal{M}(f(x), f(y), t)$$

که در آن تابع $\phi : [\circ, +\infty) \to [\circ, +\infty)$ پوشا و صعودی اکید است که در شرط (Φ) صدق می‌کند.

[4] Banach

در این صورت داریم

۱. اگر (۵.۴.۱) برقرار باشد و $x_0 \in X$ وجود داشته باشد به طوری که

$$E_{\mathcal{M}}(f(x_0), g(x_0)) = \sup\{E_{\gamma,\mathcal{M}}(f(x_0), g(x_0)) : \gamma \in]0, 1[\} < \infty$$

آن‌گاه f و g یک نقطه ثابت مشترک یکتا دارند در صورتی که f و g جابه‌جا شوند.

۲. اگر (۵.۴.۲) برقرار باشد، آن‌گاه f و g یک نقطه ثابت یکتا دارند.

اثبات. ۱. فرض کنیم $x_0 \in X$ به گونه‌ای باشد که $E_{\mathcal{M}}(f(x_0), g(x_0)) < \infty$. طبق (a)، می‌توانیم عضو x_1 را بیابیم به طوری که $f(x_1) = g(x_0)$. با استقراء می‌توانیم دنباله $\{x_n\}_n$ در X را به گونه‌ای تعریف کنیم که برای هر $n \geq 1$ داشته باشیم $f(x_n) = g(x_{n-1})$. مجددا با استفاده از استقراء برای هر $n \geq 1$ داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(f(x_n), f(x_{n+1}), \phi^n(t))) &= \mathcal{M}(g(x_{n-1}), g(x_n), \phi^n(t)) \\
&\geq_L \mathcal{M}(f(x_{n-1}), f(x_n), \phi^{n-1}(t)) \\
&\geq_L \cdots \\
&\geq_L \mathcal{M}(f(x_0), f(x_1), t).
\end{aligned}$$

بنابراین لم ۵.۴.۵ نتیجه می‌دهد که $\{f(x_n)\}$ یک دنباله کوشی است. چون X کامل است $y \in X$ وجود دارد بطوری که $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$. در نتیجه $g(x_{n-1}) = f(x_n)$ به سمت y میل می‌کند. از قسمت (c) متوجه می‌شویم که پیوستگی f، پیوستگی g را نتیجه می‌دهد. پس به این نتیجه می‌رسیم که $\{g(f(x_n))\}_n$ به $g(y)$ همگراست. با این حال داریم $g(f(x_n)) = f(g(x_n))$، چون طبق فرض f و g جابه‌جا می‌شوند. لذا $f(g(x_n))$ به $f(y)$ همگراست. حال چون حدها منحصر به فرد هستند پس داریم $f(y) = g(y)$. توجه داریم که $f(f(y)) = f(g(y))$ و

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(g(y), g(g(y)), \phi^n(t)) &\geq_L \mathcal{M}(f(y), f(g(y)), \phi^{n-1}(t)) \\
&= \mathcal{M}(g(y), g(g(y)), \phi^{n-1}(t))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq_L \cdots \\
&\geq_L \mathcal{M}(g(y), g(g(y)), t).
\end{aligned}
$$

از طرف دیگر داریم

$$
\mathcal{M}(g(y), g(g(y)), \phi^n(t)) \leq_L \mathcal{M}(g(y), g(g(y)), t)
$$

و لذا برای هر $t > ۰$ داریم $\mathcal{M}(g(y), g(g(y)), t) = C$ که از این نتیجه می‌گیریم که $C = ۱_{\mathcal{L}}$ یا به عبارت دیگر $g(y) = g(g(y))$. در نتیجه $g(y) = g(g(y)) = f(g(y))$ و لذا $g(y)$ یک نقطه ثابت مشترک f و g است.

برای اثبات یکتایی این نقطه ثابت، فرض کنیم y و z دو نقطه ثابت مشترک از f و g باشند. در نتیجه داریم

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(y, z, \phi^n(t)) &= \mathcal{M}(g(y), g(z), \phi^n(t)) \\
&\geq_L \mathcal{M}(f(y), f(z), \phi^{n-۱}(t)) \\
&= \mathcal{M}(y, z, \phi^{n-۱}(t)) \\
&\geq_L \cdots \\
&\geq_L \mathcal{M}(y, z, t).
\end{aligned}
$$

از طرف دیگر داریم

$$
\mathcal{M}(y, z, \phi^n(t)) \leq_L \mathcal{M}(y, z, t)
$$

و لذا برای هر $t > ۰$ داریم $\mathcal{M}(y, z, t) = C$. پس از لم ۵.۴.۲ نتیجه می‌گیریم $y = z$.

۲. استدلال این قسمت با قسمت (۱) یکسان می‌باشد به جز این‌که در این‌جا از تذکر ۵.۴.۶ استفاده می‌کنیم. بنابراین اثبات تمام است. □

نتیجه ۵.۴.۱۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ یک فضای متریک $\mathbf{M}\mathcal{L}$-فازی کامل باشد که در آن t-نرم $\mathcal{T}$ از نوع هازدیک می‌باشد. فرض کنیم $f, g : X \to X$ نگاشت‌هایی هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند.

(a) $g(X) \subseteq f(X)$.

(b) f پیوسته است.

(c) برای هر $x, y \in X$ داریم

$$\mathcal{M}(g(x), g(y), \phi(t)) \geq_L \mathcal{M}(f(x), f(y), t)$$

که در آن تابع $\phi : [\circ, +\infty) \to [\circ, +\infty)$ پوشا و صعودی اکید است که در شرط (Φ) صدق می‌کند.

در این صورت اگر f و g جابه‌جا شوند، آن‌گاه f و g یک نقطه ثابت مشترک یکتا دارند.

۵.۵ فضاهای متریک ابَر $\mathcal{L}$-فازی

در این بخش به فضاهای متریک ابر $\mathcal{L}$-فازی کامل خواهیم پرداخت و چند قضیه نقطه ثابت را در این فضاها به اثبات می‌رسانیم.

تعریف ۵.۵.۱. سه‌تایی $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ را یک فضای متریک $\mathcal{L}$-فازی می‌نامیم اگر X یک مجموعه غیرتهی دلخواه، $\mathcal{T}$ یک t-نرم پیوسته روی $\mathcal{L}$ و $\mathcal{M}$ یک مجموعه $\mathcal{L}$-فازی روی $X^۲ \times (\circ, \infty)$ باشد که برای هر $x, y, z \in X$ و $t, s \in (\circ, +\infty)$ در شرایط زیر صدق می‌کند.

(LFM1) $\mathcal{M}(x, y, t) >_L \circ_\mathcal{L}$.

(LFM2) برای هر $t > \circ$، $\mathcal{M}(x, y, t) = ۱_\mathcal{L}$ اگر و تنها اگر $x = y$.

(LFM3) $\mathcal{M}(x, y, t) = \mathcal{M}(y, x, t)$.

(LFM4) $\mathcal{T}(\mathcal{M}(x, y, t), \mathcal{M}(y, z, s)) \leq_L \mathcal{M}(x, z, t + s)$.

(LFM5) $\mathcal{M}(x,y,.):(0,+\infty)\to L$ پیوسته است.

در این حالت، $\mathcal{M}$ یک متریک $\mathcal{L}$-فازی نامیده می‌شود. اگر فضای متریک $\mathcal{L}$-فازی $(X,\mathcal{M},\mathcal{T})$ در شرط

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}(x,y,t)=1_{\mathcal{L}} \tag{Ω}$$

صدق کند، آن‌گاه $(X,\mathcal{M},\mathcal{T})$ یک فضای متریک $\mathcal{L}$-فازی منگر[5] یا به اختصار فضای متریک M$\mathcal{L}$-فازی نامیده می‌شود.

اگر نامساوی (LFM4) جایگزین نامساوی

(H) برای هر $x,y\in X, z,w\in X$ که $z\neq w$ و $r,t,s\geq 0$،

$$\mathcal{M}(x,y,r+t+s)\geq_L \mathcal{T}^2(\mathcal{M}(z,w,t),\mathcal{M}(w,y,s)).$$

شود، آن‌گاه سه‌تایی $(X,\mathcal{M},\mathcal{T})$ یک فضای متریک ابر $\mathcal{L}$-فازی (به اختصار فضای متریک $H\mathcal{L}$-فازی) نامیده می‌شود.

واضح است که هر فضای متریک $\mathcal{L}$-فازی، یک فضای متریک $H\mathcal{L}$-فازی است. اما در مثال بعد یک فضای متریک $H\mathcal{L}$-فازی را ارائه داده‌ایم که فضای متریک $\mathcal{L}$-فازی نمی‌باشد.

مثال ۲.۵.۵. فرض کنیم X مجموعه $\{a,b,c,e\}$ باشد. برای هر $x,y\in[0,1]$، فرض کنیم $\mathcal{T}(x,y)=\min\{x,y\}$. برای هر $t\in(0,\infty)$، نگاشت $\mathcal{M}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{M}(a,b,t)=\frac{t}{t+3},$$

$$\mathcal{M}(a,c,t)=\mathcal{M}(b,c,t)=\frac{t}{t+1},$$

$$\mathcal{M}(a,e,t)=\mathcal{M}(b,e,t)=\mathcal{M}(c,e,t)=\frac{t}{t+2},$$

$$\mathcal{M}(k,k,t)=1,$$

[5] Menger

برای هر $k \in X$. واضح است که $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ یک فضای متریک $H\mathcal{L}$-فازی می‌باشد. اما یک فضای متریک $\mathcal{L}$-فازی نیست، زیرا دارای خاصیت مثلثی نمی‌باشد: برای هر $a, b, c \in X$ فرض کنیم

$$\mathcal{M}(a, b, ۲t) < \min\{\mathcal{M}(a, c, t), \mathcal{M}(b, c, t)\}.$$

فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ یک فضای متریک $H\mathcal{L}$-فازی باشد. برای هر $t \in (۰, +\infty)$ گوی باز $B(x, r, t)$ با مرکز $x \in X$ و شعاع $r \in L \setminus \{۰_{\mathcal{L}}, ۱_{\mathcal{L}}\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(x, r, t) = \{y \in X : \mathcal{M}(x, y, t) >_L \mathcal{N}(r)\}.$$

زیرمجموعه $A \subseteq X$ باز نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $x \in A$، $t > ۰$ و $r \in L \setminus \{۰_{\mathcal{L}}, ۱_{\mathcal{L}}\}$ وجود داشته باشند به طوری که $B(x, r, t) \subseteq A$. فرض کنیم $\tau_{\mathcal{M}}$ نشان دهنده خانواده تمام زیر مجموعه‌های باز X باشد. در این صورت $\tau_{\mathcal{M}}$ توپولوژی القا شده به وسیله متریک $H\mathcal{L}$-فازی $\mathcal{M}$ نامیده می‌شود.

لم ۵.۵.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ فضای متریک $H\mathcal{L}$-فازی باشد. در این صورت برای هر $x, y \in X$، $\mathcal{M}(x, y, t)$ نسبت به t می‌باشد، غیر نزولی است.

تعریف ۵.۵.۴. ۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک $H\mathcal{L}$-فازی $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ یک دنباله کوشی نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $\varepsilon \in L \setminus \{۰_{\mathcal{L}}\}$ و $t > ۰$، $n_۰ \in \mathbf{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $m \geq n \geq n_۰ (n \geq m \geq n_۰)$ داشته باشیم

$$\mathcal{M}(x_m, x_n, t) >_L \mathcal{N}(\varepsilon).$$

۲. گوییم دنباله $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ در فضای متریک $H\mathcal{L}$-فازی $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ به نقطه x همگراست (و با $x_n \xrightarrow{\mathcal{M}} x$ نشان داده می‌شود) اگر

$$\mathcal{M}(x_n, x, t) = \mathcal{M}(x, x_n, t) \to ۱_{\mathcal{L}}$$

برای هر $t > ۰$، زمانی که $n \to +\infty$.

۳. فضای متریک $H\mathcal{L}$-فازی $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ کامل نامیده می‌شود، اگر هر دنباله کوشی به نقطه‌ای در X همگرا باشد.

لم ۵.۵.۵. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ یک فضای متریک منگر $H\mathcal{L}$-فازی (به اختصار فضای متریک $\mathbf{M}H\mathcal{L}$-فازی) باشد که در آن $\mathcal{T}$ در (۲.۲.۱) صدق می‌کند. نگاشت $E_{\lambda,\mathcal{M}} : X^{۲} \longrightarrow \mathbf{R}^{+} \cup \{۰\}$ را برای هر $\lambda \in L \setminus \{۰_{\mathcal{L}}, ۱_{\mathcal{L}}\}$ و $x, y \in X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, y) = \inf\{t > ۰ : \mathcal{M}(x, y, t) >_{L} \mathcal{N}(\lambda)\}.$$

در این صورت داریم

۱. برای هر $\mu \in L \backslash \{۰_{\mathcal{L}}, ۱_{\mathcal{L}}\}$، $\lambda \in L \backslash \{۰_{\mathcal{L}}, ۱_{\mathcal{L}}\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $x, y \in X$ و $z, w \in X$ با $z \neq w$ که متمایز با x و y است داریم

$$E_{\mu,\mathcal{M}}(x, y) \leq E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, z) + E_{\lambda,\mathcal{M}}(z, w) + E_{\lambda,\mathcal{M}}(w, y).$$

۲. دنباله $\{x_n\}$ نسبت به فضای متریک $\mathbf{M}H\mathcal{L}$-فازی $\mathcal{M}$ همگرا است اگر و تنها اگر $E_{\lambda,\mathcal{M}}(x_n, x) \to ۰$.

۳. دنباله $\{x_n\}$ نسبت به فضای متریک $\mathbf{M}H\mathcal{L}$-فازی $\mathcal{M}$ یک دنباله کوشی است اگر و تنها اگر نسبت به $E_{\lambda,\mathcal{M}}$ یک دنباله کوشی باشد.

اثبات. برهان‌های این لم همانند برهان‌های فضاهای متریک $\mathcal{L}$-فازی می‌باشد [۴]. $\square$

تعریف ۶.۵.۵. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ ، فضای متریک $H\mathcal{L}$-فازی و $A : X \longrightarrow X$ یک نگاشت باشد. برای هر $x \in X$ فرض کنیم:

$$O(x, \infty) = \{x, Ax, A^{۲}x, A^{۳}x, \cdots, A^{n}x, \cdots\}.$$

فضای X یک فضای کامل A- مداری نامیده می‌شود اگر هر دنباله کوشی که برای یک $x \in X$ شامل $O(x, \infty)$ باشد در X همگرا باشد.

۵.۵.۱ قضیه نقطه ثابت باناخ در فضاهای متریک $\mathrm{M}H\mathcal{L}$-فازی

اکنون در این بخش قضیه نقطه ثابت باناخ را در فضاهای متریک $\mathrm{M}H\mathcal{L}$-فازی را به اثبات می‌رسانیم.

قضیه ۵.۵.۷. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ یک فضای متریک $\mathrm{M}H\mathcal{L}$-فازی باشد که $\mathcal{T}$ در (۲.۲.۱) صدق می‌کند و $\alpha \in (0, 1]$. فرض کنیم $B : X \to X$ نگاشتی باشد که برای هر $x, y \in X$ و $t > 0$ شرط زیر را برآورده می‌سازد:

$$\mathcal{M}(Bx, By, t) \geq_L \mathcal{M}(x, y, \frac{t}{\alpha}). \tag{۵.۵.۱}$$

هم‌چنین فرض کنیم $x \in X$ به گونه‌ای باشد که

$$E_x < \infty \tag{۵.۵.۲}$$

که

$$E_x = \max\{E_B(x), E_{B^2(x)}\},$$

$$E_B(x) = \sup\{E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Bx) : \lambda \in L \setminus \{0_\mathcal{L}, 1_\mathcal{L}\}\},$$

$$E_{B^2}(x) = \sup\{E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, B^2(x)) : \lambda \in L \setminus \{0_\mathcal{L}, 1_\mathcal{L}\}\}.$$

در این صورت عبارات زیر را خواهیم داشت:

۱. نقطه $a \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n\to\infty} B^n x = a$.

۲. $Ba = a$ و برای هر $e \in X$ که $Be = e$ داشته باشیم $e = a$.

اثبات. $x \in X$ را یک عضو ثابت در نظر می‌گیریم. پس (۵.۵.۲) برقرار است. دنباله $\{B^n x\}$ را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که x نقطه تناوبی B نیست. در واقع اگر $B^v x = x$، برای یک $v \in \mathbb{N}$، آن‌گاه برای هر $\lambda \in L \setminus \{0_\mathcal{L}, 1_\mathcal{L}\}$ داریم

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Bx) = E_{\lambda,\mathcal{M}}(B^v x, B^{v+1} x) \leq \alpha^v E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Bx)$$

و در نتیجه $E_{\lambda,\mathcal{M}}(x,Bx)=0$ که نتیجه می‌دهد برای هر $t>0$ داریم

$$\mathcal{M}(x,Bx,t)=1_{\mathcal{L}}.$$

(برای اثبات این معادله توجه کنید که اگر $t>0$ را ثابت در نظر بگیریم آنگاه چون $\mathcal{M}$ غیر نزولی است برای هر $\lambda\in L\setminus\{0_{\mathcal{L}},1_{\mathcal{L}}\}$ داریم

$$\mathcal{M}(x,Bx,t)>_L\mathcal{N}(\lambda).$$

بنابراین اگر فرض کنیم $\lambda\to 0_{\mathcal{L}}$ آنگاه داریم

$$\mathcal{M}(x,Bx,t)\geq_L 1_{\mathcal{L}}.$$

و لذا برای هر $t>0$ نیز نامساوی فوق را خواهیم داشت)، یعنی، $x=Bx$.

از سوی دیگر، با این برهان می‌توانیم فرض کنیم که برای هر دو عضو متمایز $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ داریم $B^nx\neq B^mx$.

اکنون نشان می‌دهیم که برای هر $\mu\in L\setminus\{0_{\mathcal{L}},1_{\mathcal{L}}\}$، $\lambda_i\in L\setminus\{0_{\mathcal{L}},1_{\mathcal{L}}\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $i\in\{0,\cdots,2k-2\}$ و $\delta_i\in L\setminus\{0_{\mathcal{L}},1_{\mathcal{L}}\}$ برای هر $i\in\{0,\cdots,2k\}$ به طوری که

$$\begin{aligned}&E_{\mu,\mathcal{M}}(x,B^{2k}x)\\&\leq\sum_{i=0}^{2k-3}\alpha^iE_{\lambda_i,\mathcal{M}}(x,Bx)+\alpha^{2k-2}E_{\lambda_{2k-2},\mathcal{M}}(x,B^2x)\end{aligned}\tag{5.5.3}$$

برای هر $k\geq 2$ و

$$E_{\mu,\mathcal{M}}(x,B^{2k+1}x)\leq\sum_{i=0}^{2k}\alpha^iE_{\delta_i,\mathcal{M}}(x,Bx)\tag{5.5.4}$$

برای هر $k\geq 0$.

ابتدا (۵.۵.۳) را برای $k=2$ اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $\mu\in L\setminus\{0_{\mathcal{L}},1_{\mathcal{L}}\}$ در این صورت طبق لم ۵.۵.۵، $\lambda\in L\setminus\{0_{\mathcal{L}},1_{\mathcal{L}}\}$ وجود دارد به طوری که

$$E_{\mu,\mathcal{M}}(x,B^4x)$$

$$\leq E_{\lambda,\mathcal{M}}(x,Bx)+E_{\lambda,\mathcal{M}}(Bx,B^{۲}x)+E_{\lambda,\mathcal{M}}(B^{۲}x,B^{۴}x)$$

$$\leq E_{\lambda,\mathcal{M}}(x,Bx)+\alpha E_{\lambda,\mathcal{M}}(x,Bx)+\alpha^{۲}E_{\lambda,\mathcal{M}}(x,B^{۲}x)$$

و لذا (۵.۵.۳) برای $k=۲$ برقرار است.

اکنون (۵.۵.۳) را برای $k=۳$ ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $\mu\in L\setminus\{۰_{\mathcal{L}},۱_{\mathcal{L}}\}$ در این صورت طبق لم ۵.۵.۵، $\lambda\in L\setminus\{۰_{\mathcal{L}},۱_{\mathcal{L}}\}$ و $\delta\in L\setminus\{۰_{\mathcal{L}},۱_{\mathcal{L}}\}$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}
&E_{\mu,\mathcal{M}}(x,B^{۶}x)\\
\leq&E_{\lambda,\mathcal{M}}(x,Bx)+E_{\lambda,\mathcal{M}}(Bx,B^{۲}x)+E_{\lambda,\mathcal{M}}(B^{۲}x,B^{۶}x)\\
\leq&E_{\lambda,\mathcal{M}}(x,Bx)+\alpha E_{\lambda,\mathcal{M}}(x,Bx)\\
&+E_{\delta,\mathcal{M}}(B^{۲}x,B^{۳}x)+E_{\delta,\mathcal{M}}(B^{۳}x,B^{۴}x)+E_{\delta,\mathcal{M}}(B^{۴}x,B^{۶}x)\\
\leq&E_{\lambda,\mathcal{M}}(x,Bx)+\alpha E_{\lambda,\mathcal{M}}(x,Bx)+\alpha^{۲}E_{\delta,\mathcal{M}}(x,Bx)\\
&+\alpha^{۳}E_{\delta,\mathcal{M}}(x,Bx)+\alpha^{۴}E_{\delta,\mathcal{M}}(x,B^{۲}x)
\end{aligned}$$

و در نتیجه (۵.۵.۳) برای $k=۳$ برقرار است.

با ادامه این روند، (۵.۵.۳) را به دست می‌آوریم. استدلالی مشابه، (۵.۵.۴) را به اثبات می‌رساند. در نتیجه از (۵.۵.۳) و (۵.۵.۴) برای هر $n,k\in\mathbb{N}$ (k مجاز است در فرمول دوم زیر، عضو $\mathbb{Z}^{+}$ باشد) داریم

$$\begin{aligned}
E_{\mu,\mathcal{M}}(B^{n}x,B^{n+۲k}x)&\leq\alpha^{n}E_{\mu,\mathcal{M}}(x,B^{۲k}x)\\
&\leq\alpha^{n}\sum_{i=۰}^{۲k-۲}\alpha^{i}\max\{E_{B(x)},E_{B^{۲}(x)}\}\\
&\leq\frac{\alpha^{n}}{۱-\alpha}E_{x}
\end{aligned}$$

و

$$E_{\mu,\mathcal{M}}(B^{n}x,B^{n+۲k+۱}x)\leq\alpha^{n}E_{\mu,\mathcal{M}}(x,B^{۲k+۱}x)$$

$$\leq \alpha^n \sum_{i=۰}^{۲k} \alpha^i \max\{E_{B(x)}, E_{B^۲(x)}\}$$
$$\leq \frac{\alpha^n}{۱-\alpha} E_x.$$

یعنی برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ داریم

$$E_{\mu,\mathcal{M}}(B^n x, B^{n+m} x) \leq \frac{\alpha^n}{۱-\alpha} E_x. \tag{۵.۵.۵}$$

که نتیجه می‌دهد $\{B^n x\}_n$ در $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ که یک فضای متریک $\mathbf{M}H\mathcal{L}$-فازی کامل بوده یک دنباله کوشی است و لذا نقطه $a \in X$ وجود دارد به طوری که $a = \lim_{n\to\infty} B^n x$. در نتیجه a نقطه ثابت B می‌باشد و لذا برای هر $\lambda \in (۰, ۱)$ زمانی که $n \to \infty$ داریم

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(B^{n+۱} x, Ba) \leq \alpha E_{\lambda,\mathcal{M}}(B^n x, a) \to ۰$$

و لذا

$$a = \lim_{n\to\infty} B^n x = Ba.$$

به علاوه اگر داشته باشیم $Be = e$، آن‌گاه داریم

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(a, e) = E_{\lambda,\mathcal{M}}(Ba, Be) \leq \alpha E_{\lambda,\mathcal{M}}(a, e)$$

برای هر $\lambda \in L \setminus \{۰_\mathcal{L}, ۱_\mathcal{L}\}$. در نتیجه $E_{\lambda,\mathcal{M}}(a, e) = ۰$ که از این نتیجه می‌گیریم $a = e$. بنابراین (۱) و (۲) برقرار هستند و برهان کامل است. □

تذکر ۵.۵.۸. می‌توان نشان داد که جایگزین کردن شرط (۵.۵.۲) با سایر شروط، وجود نقطه ثابت را در قضیه ۵.۵.۷ تضمین کند. برای مثال، فرض کنیم $x \in X$ به این صورت باشد که

$$E_{\lambda,B}(x) = \sup\{E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, B^p x), p \in \mathbb{N}\} < \infty$$

برای هر $\lambda \in L \setminus \{۰_\mathcal{L}, ۱_\mathcal{L}\}$. در این صورت دنباله $\{B^n x\}$ یک دنباله کوشی چپ می‌باشد زیرا برای هر $\lambda \in L \setminus \{۰_\mathcal{L}, ۱_\mathcal{L}\}$ و برای هر $n, m \in \mathcal{N}$ داریم

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(B^{n+m} x, B^n x) \leq \alpha^n E_{\lambda,\mathcal{M}}(B^m x, x) \leq \alpha^n E_{\lambda,B}(x).$$

۵.۵.۲ قضیه نقطه ثابت کانان در فضاهای متریک $\mathrm{M}H\mathcal{L}$-فازی

اکنون نسخه فازی قضایای نقطه ثابت کانان[۶] در فضاهای متریک $\mathrm{M}H\mathcal{L}$-فازی را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۵.۵.۹. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mathcal{T})$ یک فضای متریک $\mathrm{M}H\mathcal{L}$-فازی است که در آن $\mathcal{T}$ در (۲.۲.۱) صدق می‌کند و S یک s-نرم باشد. فرض کنیم $A : X \to X$ نگاشتی باشد که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\mathcal{M}(Ax, Ay, t) \geq_L \mathcal{S}(x, Ax, \frac{t}{\beta}), \mathcal{M}(y, Ay, \frac{t}{\beta})) \qquad (۵.۵.۶)$$

برای هر $x, y \in X$ که $۰ < \beta < \frac{۱}{۲}$. همچنین فرض کنیم که $x \in X$ به صورت زیر باشد

$$E_A(x) = \sup\{E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax) : \lambda \in L \setminus \{۰_\mathcal{L}, ۱_\mathcal{L}\}\} < \infty.$$

به علاوه، فرض کنیم:

(a) $E_A(u) < \infty$ برای هر $u \in X$ که $A^n x \neq u$ و $A^n x \neq Au$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.

(b) $E_A(u) < \infty$ برای هر $u \in X$ که $A^n x \neq u$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $A^p u \neq A^r u$ برای هر $p, r \in \mathbb{N}$ که $p \neq r$.

اگر X، A-مداری کامل باشد، آن‌گاه A در X دارای نقطه ثابت یکتا است.

اثبات. فرض کنیم $x \in X$ می‌باشد. بر اساس (۵.۵.۶) عبارت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&E_{\lambda,\mathcal{M}}(Ax, Ay)\\
&= \inf\{t > ۰ : \mathcal{M}(Ax, Ay, t) >_L \mathcal{N}(\lambda)\}\\
&\leq \inf\{t > ۰ : \mathcal{S}\left(\mathcal{M}\left(x, Ax, \frac{t}{\beta}\right), \mathcal{M}\left(y, Ay, \frac{t}{\beta}\right)\right) >_L \mathcal{N}(\lambda)\}
\end{aligned}$$

[۶] Kannan

$$
\begin{aligned}
&\leq \inf\{t > \circ : \wedge\left(\mathcal{M}\left(x, Ax, \frac{t}{\beta}\right), \mathcal{M}\left(y, Ay, \frac{t}{\beta}\right)\right) >_L \mathcal{N}(\lambda)\} \\
&\leq \inf\{t > \circ : \mathcal{M}\left(x, Ax, \frac{t}{\beta}\right) >_L \mathcal{N}(\lambda)\} \\
&\quad + \inf\{t > \circ : \mathcal{M}\left(y, Ay, \frac{t}{\beta}\right) >_L \mathcal{N}(\lambda)\} \\
&= \beta[E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax) + E_{\lambda,\mathcal{M}}(y, Ay)]
\end{aligned}
$$

اکنون داریم

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(Ax, A^{۲}x) \leq \beta[E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax) + E_{\lambda,\mathcal{M}}(Ax, A^{۲}x)]$$

که این نتیجه می‌دهد

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(Ax, A^{۲}x) \leq \frac{\beta}{۱ - \beta} E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax).$$

مجدداً، خواهیم داشت

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(A^{۲}x, A^{۳}x) \leq \beta[E_{\lambda,\mathcal{M}}(Ax, A^{۲}x) + E_{\lambda,\mathcal{M}}(A^{۲}x, A^{۳}x)]$$

که نتیجه می‌دهد

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(A^{۲}x, A^{۳}x) \leq \frac{\beta}{۱ - \beta} E_{\lambda,\mathcal{M}}(Ax, A^{۲}x) \leq \left(\frac{\beta}{۱ - \beta}\right)^{۲} E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax).$$

پس به طور کلی برای هر $n \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(A^n x, A^{n+۱}x) \leq \left(\frac{\beta}{۱ - \beta}\right)^n E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax) = r^n E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax) \qquad (۵.۵.۷)$$

که $r = \frac{\beta}{۱-\beta}$. اما چون $\circ < \beta < \frac{۱}{۲}$، نتیجه می‌گیریم $\circ < r < ۱$.

فرض می‌کنیم $x \in X$ به گونه‌ای باشد که $E_A(x) < \infty$ برهان را به دو حالت زیر تقسیم می‌کنیم:

حالت I. ابتدا فرض کنیم

$$A^m x \neq A^n x \qquad (۵.۵.۸)$$

برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $m \neq n$. طبق (۵.۵.۷) داریم

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(A^n x, A^{n+1} x) \leq r^n E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax) \leq \frac{r^n}{1-r} E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax). \tag{۵.۵.۹}$$

هم‌چنین چون

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}(A^n x, A^{n+2} x, t)\\ \geq_L &\mathcal{S}\Bigg(\mathcal{M}\Bigg(A^{n-1} x, A^n x, \frac{t}{\beta}\Bigg), \mathcal{M}\Bigg(A^{n+1} x, A^{n+2} x, \frac{t}{\beta}\Bigg)\Bigg)\end{aligned}$$

داریم

$$\begin{aligned}&E_{\lambda,\mathcal{M}}(A^n x, A^{n+2} x)\\ \leq &\beta[E_{\lambda,\mathcal{M}}(A^{n-1} x, A^n x) + E_{\lambda,\mathcal{M}}(A^{n+1} x, A^{n+2} x)]\\ \leq &\beta\Big[\Big(\frac{\beta}{1-\beta}\Big)^{n-1} E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax) + \Big(\frac{\beta}{1-\beta}\Big)^{n+1} E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax)\Big]\\ \leq &\Big[\Big(\frac{\beta}{1-\beta}\Big)^{n} + \Big(\frac{\beta}{1-\beta}\Big)^{n+2}\Big] E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax)\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(A^n x, A^{n+2} x) \leq \frac{r^n}{1-r} E_{\lambda,\mathcal{M}}(x, Ax). \tag{۵.۵.۱۰}$$

اکنون اگر $m > 2$ فرد باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم $m = 2k+1, k \geq 1$ و با استفاده از لم ۵.۵.۵ و رابطه (۵.۵.۹) به این نتیجه می‌رسیم که برای هر $\mu \in L \setminus \{0_\mathcal{L}, 1_\mathcal{L}\}$، $\lambda_i \in L \setminus \{0_\mathcal{L}, 1_\mathcal{L}\}$ $(i \in \{1, \cdots, 2k+1\})$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}E_{\mu,\mathcal{M}}(A^n x, A^{n+m} x) \leq &E_{\lambda_1,\mathbb{M}}(A^n x, A^{n+1} x) + E_{\lambda_2,\mathbb{M}}(A^{n+1} x, A^{n+2} x)\\ &+ \cdots + E_{\lambda_{2k+1},\mathbb{M}}(A^{n+2k} x, A^{n+2k+1} x)\\ \leq &\frac{E_A(x)}{1-r}(r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{n+2k})\\ \leq &\frac{r^n}{(1-r)^2} E_A(x)\end{aligned}$$

مجدداً، اگر $m > ۲$ زوج باشد آن‌گاه قرار می‌دهیم $m = ۲k, k \geq ۱$ و با استفاده از لم ۵.۵.۵، رابطه (۵.۵.۹) و رابطه (۵.۵.۱۰) به این نتیجه می‌رسیم که برای هر $\mu \in L \setminus \{0_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}}\}$، $\lambda'_i \in L \setminus \{0_{\mathcal{L}}, 1_{\mathcal{L}}\}(i \in \{1, \cdots, 2k+1\})$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}E_{\mu,\mathcal{M}}(A^n x, A^{n+m}x) \leq & E_{\lambda'_1,\mathbb{M}}(A^n x, A^{n+2}x) + E_{\lambda'_2,\mathbb{M}}(A^{n+2}x, A^{n+3}x) \\ & + \cdots + E_{\lambda'_{2k-1},\mathbb{M}}(A^{n+2k-1}x, A^{n+2k}x) \\ \leq & \frac{E_A(x)}{1-r}(r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{n+2k-1}) \\ \leq & \frac{r^n}{(1-r)^2}E_A(x).\end{aligned}$$

بنابراین با ترکیب تمام موارد داریم

$$E_{\mu,\mathcal{M}}(A^n x, A^{n+m}x) \leq \frac{r^n}{(1-r)^2}E_A(x). \tag{۵.۵.۱۱}$$

چون $0 < r < 1$ و زمانی که $n \to \infty$ داریم $r^n \to 0$ و لذا دنباله $\{A^n x\}$ کوشی چپ است. چون X یک فضای A-مداری کامل می‌باشد، $u \in X$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} A^n x = u. \tag{۵.۵.۱۲}$$

حال نشان می‌دهیم که $Au = u$ می‌باشد. این برهان را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. نخست فرض می‌کنیم که $A^n x \neq u, Au$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. در این صورت برای هر $\lambda \in L \setminus \{0_L, 1_L\}$ از لم ۵.۵.۵ نتیجه می‌گیریم که $\mu \in L \setminus \{0_L, 1_L\}$ وجود دارد به طوری که (به ابتدای برهان قضیه ۵.۵.۷ و رابطه (۵.۵.۱۱) مراجعه کنید)

$$\begin{aligned}& E_{\lambda,\mathcal{M}}(u, Au) \\ \leq & E_{\mu,\mathcal{M}}(u, A^n x) + E_{\mu,\mathcal{M}}(A^n x, A^{n+1}x) + E_{\mu,\mathcal{M}}(A^{n+1}x, Au) \\ \leq & E_{\mu,\mathcal{M}}(u, A^n x) + E_{\mu,\mathcal{M}}(A^n x, A^{n+1}x) \\ & + \beta[E_{\mu,\mathcal{M}}(u, Au) + E_{\mu,\mathcal{M}}(A^n x, A^{n+1}x)]\end{aligned}$$

$$\leq E_{\mu,\mathcal{M}}(u, A^n x) + \frac{(۱+\beta)r^n}{۱-r} E_A(x) + \beta E_{\mu,\mathcal{M}}(u, Au)$$

در نامساوی فوق با فرض این‌که $n \to \infty$، به دست می‌آوریم (رابطه (۵.۵.۱۲) را ببینید)

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(u, Au) \leq \beta E_{\lambda,\mathcal{M}}(u, Au) \leq \beta E_A(u)$$

و در نتیجه

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(u, Au) \leq \beta E_A(u)$$

برای هر $\lambda \in L \setminus \{۰_L, ۱_L\}$. این نتیجه می‌دهد که $E_A(u) \leq \beta E_A(u)$. بنابراین برای هر $\delta \in L \setminus \{۰_\mathcal{L}\}$ خواهیم داشت $E_A(u) = ۰$ و لذا $E_{\delta,\mathcal{M}}(u, Au) = ۰$. در نتیجه خواهیم داشت $u = Au$ و در این حالت حکم اثبات می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم که $A^k x = u$ یا $A^k x = Au$ برای یک $k \in \mathbb{N}$. به آسانی می‌توان دید که $\{A^n u\}$ یک دنباله با ویژگی‌های زیر است.

(a) $\lim_{n\to\infty} A^n u = u$.

(b) $A^n u \neq u$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.

(c) $A^p u \neq A^r u$ برای هر $p, r \in \mathbb{N}$ که $p \neq r$

توجه داریم که (a) به سادگی نتیجه می‌شود. در واقع، طبق (۵.۵.۱۲)، داریم

$$\lim_{n\to\infty} A^n u = \lim_{n\to\infty} A^{n+k} x = u$$

به شرطی که $A^k x = u$ و

$$\lim_{n\to\infty} A^n u = \lim_{n\to\infty} A^{(n-۱)+k} x = u$$

به شرطی که $A^k x = Au$. هم‌چنین (b) و (c) از (۵.۵.۸) به دست می‌آیند.

اساساً استدلالی مشابه استدلال فوق (که در آن x با u جایگزین می‌شود و توجه داریم که (۵.۵.۱۱) با جایگزینی x با u برقرار می‌ماند) با استفاده از ویژگی‌های (a)-(c) به دست می‌آوریم $u = Au$.

حالت II. فرض کنیم

$$A^m x = A^n x \tag{۵.۵.۱۳}$$

برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $m \neq n$. با فرض اینکه

ثابت هستند و بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $m > n$. در این صورت $A^{m-n}(A^n x) = A^n x$ به عبارت دیگر $A^k y = y$ که $k = mn$ و $A^n x = y$. برای هر $\lambda \in (\circ, ۱)$ از (۵.۵.۷) نتیجه می‌گیریم

$$E_{\lambda,\mathcal{M}}(y, Ay) = E_{\lambda,\mathcal{M}}(A^k y, A^{k+۱} y) \leq \left(\frac{\beta}{۱-\beta}\right)^k E_{\lambda,\mathcal{M}}(y, Ay).$$

و این یعنی $E_{\lambda,\mathcal{M}}(y, Ay) = \circ$ و در نتیجه $y = Ay$.

یکتایی نقطه ثابت A به آسانی از (۵.۵.۶) به دست می‌آید. بنابراین اثبات تمام است. □

۵.۶ کاربردهای قضایای نقطه ثابت در فضاهای شبه-متریک فازی شهودی

در این بخش، از نسخه شبه-متریک فازی برخی از قضایای نقطه ثابت استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که جواب‌هایی برای معادلات بازگشتی مربوط به تحلیل الگوریتم مرتب‌سازی سریع وجود دارد.

تعریف ۵.۶.۱. فرض کنیم M, N مجموعه‌هایی فازی از $X \times X \times [\circ, +\infty)$ به $[\circ, ۱]$ باشند به طوری که برای هر $x, y \in X$ و $t > \circ$، $\mathbf{M}(x,y,t) + \mathbf{N}(x,y,t) \leq ۱$. سه‌تایی $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی[7] نامیده می‌شود اگر X یک مجموعه دلخواه (غیرتهی)، $\mathcal{T}$ یک t-نرم قابل نمایش پیوسته و $\mathcal{M}_{M,N}$ نگاشت $X \times X \times [\circ, \infty) \to L^*$ باشد که برای هر $x, y, z \in X$ و $t, s > \circ$ در شرایط زیر را صدق کند.

[7] intuitionistic fuzzy quasi-metric space

(IFQM1) $\mathcal{M}_{M,N}(x,y,\circ)=\circ_{L^*}$.

(IFQM2) $\mathcal{M}_{M,N}(x,y,t)=\mathcal{M}_{M,N}(y,x,t)=\text{۱}_{L^*}$ اگر و تنها اگر $x=y$.

(IFQM3) $\mathcal{M}_{M,N}(x,y,t+s)\geq_{L^*}\mathcal{T}(\mathcal{M}_{M,N}(x,z,t),\mathcal{M}_{M,N}(z,y,s)))$.

(IFQM4) $\mathcal{M}_{M,N}(x,y,.):[\circ,\infty)\to L^*$ پیوسته چپ باشد.

در این حالت، $\mathcal{M}_{M,N}$ یک شبه-متریک فازی شهودی نامیده می‌شود که

$$\mathcal{M}_{M,N}(x,y,t)=(\mathbf{M}_{M,N}(x,y,t),\mathbf{N}_{M,N}(x,y,t)).$$

توجه داریم که فضای شبه-متریک فازی شهودی $(X,\mathcal{M}_{M,N},\mathcal{T})$ در اصل تقارن صدق می‌کند، یعنی برای هر $x,y\in X$ و $t>\circ$.

$$\mathcal{M}_{M,N}(x,y,t)=\mathcal{M}_{M,N}(y,x,t)$$

یک فضای شبه-متریک فازی شهودی می‌باشد. در صورتی که فضای شبه-متریک فازی شهودی $(X,\mathcal{M}_{M,N},\mathcal{T})$ در شرط

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{M}_{M,N}(x,y,t)=\text{۱}_{L^*}$$

صدق کند، آن‌گاه $(X,\mathcal{M}_{M,N},\mathcal{T})$ فضای شبه-متریک فازی شهودی منگر نامیده می‌شود. اگر $(X,\mathcal{M}_{M,N},\mathcal{T})$ فضای شبه-متریک فازی شهودی باشد، آن‌گاه $(X,\mathcal{M}^{-\text{۱}}_{M,N},\mathcal{T})$ نیز فضای شبه-متریک فازی شهودی است که

$$\mathcal{M}^{-\text{۱}}_{M,N}(x,y,t)=\mathcal{M}_{M,N}(x,y,t).$$

به علاوه، اگر با نماد $\mathcal{M}^{i}_{M,N}$، مجموعه فازی در $X\times X\times[\circ,\infty)$ را نشان دهیم که به صورت

$$\mathcal{M}^{i}_{M,N}(x,y,t)=\mathcal{T}(\mathcal{M}_{M,N}(x,y,t),\mathcal{M}^{-\text{۱}}_{M,N}(x,y,t))$$

تعریف می‌شود، آن‌گاه $(X,\mathcal{M}^{i}_{M,N},\mathcal{T})$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی می‌باشد.

فرض کنیم $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی باشد. برای هر $t > ۰$، گوی باز $B(x, r, t)$ را با مرکز $x \in X$ و شعاع $۰ < r < ۱$ به صورت تعریف می‌کنیم

$$B(x, r, t) = \{y \in X : \mathcal{M}_{M,N}(x, y, t) >_{L^*} (N_s(r), r) = \mathcal{N}_s(r)\}.$$

به زیرمجموعه $A \subseteq X$ باز گفته می‌شود اگر برای هر $x \in A$، $t > ۰$ و $۰ < r < ۱$ وجود داشته باشد به طوری که $B(x, r, t) \subseteq A$. فرض کنیم $\tau_{\mathcal{M}_{M,N}}$ نشان دهنده خانواده تمام زیر مجموعه‌های باز X باشد. در این صورت $\tau_{\mathcal{M}_{M,N}}$ توپولوژی القا شده توسط شبه-متریک فازی شهودی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۶.۵. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی باشد.

۱. گفته می‌شود دنباله $\{x_n\}$ در X به نقطه $x \in X$ همگراست و به صورت $x_n \overset{\mathcal{M}_{M,N}}{\to} x$ نشان داده می‌شود، اگر برای هر $t > ۰$ داشته باشیم

$$\mathcal{M}_{M,N}(x_n, x, t) \to ۱_{L^*}$$

زمانی که $n \to \infty$.

۲. دنباله $\{x_n\}$ در X دنباله کوشی نامیده می‌شود به شرطی که برای هر $\varepsilon > ۰$ و $t > ۰$، $n_۰ \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n, m \geq n_۰$ داشته باشیم

$$\mathcal{M}_{M,N}(x_n, x_m, t) >_{L^*} \mathcal{N}_s(\varepsilon)$$

۳. یک فضای متریک فازی شهودی، کامل نامیده می‌شود در صورتی که هر دنباله کوشی در X همگرا باشد (به [۱۱۹] مراجعه کنید).

۴. دنباله $\{x_n\}$ در X یک دنباله G-کوشی نامیده می‌شود اگر برای هر $t > ۰$ و $p \in \mathbb{N}$،

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{M}_{M,N}(x_n, x_{n+p}, t) = ۱_{L^*}.$$

۵. فضای متریک فازی شهودی $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ G-کامل نامیده می‌شود اگر هر دنباله کوشی G-کامل در X همگرا باشد.

تعریف ۵.۶.۳. دنباله $\{x_n\}$ در فضای شبه-متریک فازی شهودی $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ دنباله G-کوشی نامیده می‌شود اگر در فضای متریک فازی شهودی $(X, \mathcal{M}^i_{M,N}, \mathcal{T})$ دنباله‌ای G-کامل باشد.

تعریف ۵.۶.۴. فضای شبه-متریک فازی شهودی $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ فضای G-دوکامل نامیده می‌شود اگر فضای متریک فازی شهودی $(X, \mathcal{M}^i_{M,N}, \mathcal{T})$، G-کامل باشد. در این حالت گوییم $\mathcal{M}_{M,N}$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی G-کامل در X می‌باشد.

لم ۵.۶.۵. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی باشد. در این صورت $\mathcal{M}_{M,N}(x, y, t)$ نسبت به t برای هر x, y در X، غیر نزولی است.

اثبات. مشابه برهان فضاهای متریک شهودی می‌باشد. □

مثال ۵.۶.۶. فرض کنیم (X, d) یک فضای شبه-متریک بوده و M, N مجموعه‌های فازی در $X^۲ \times (۰, \infty)$ باشند که به این صورت تعریف می‌شوند

$$\mathcal{M}^d_{M,N}(x, y, t) = (M(x, y, t), N(x, y, t)) = (\frac{t}{t + d(x, y)}, \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)}).$$

در این صورت $(X, \mathcal{M}^d_{M,N}, \wedge)$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی می‌باشد.

۵.۶.۱ قضیه نقطه ثابت باناخ در فضاهای شبه-متریک فازی

فرض کنیم $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی باشد. یک IB-انقباض روی X خود-نگاشتی مانند f است به طوری که ثابت $k \in (۰, ۱)$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in X$ و $t > ۰$ در شرط زیر صدق کند.

$$\mathcal{M}^i_{M,N}(f(x), f(y), kt) \geq_{L^*} \mathcal{M}^i_{M,N}(x, y, t).$$

قضیه زیر بسط نتیجه آلاکا[8] و دیگران است [۶].

[8] Alaca

قضیه ۵.۶.۷. فرض کنیم $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی منگر G-دوکامل باشد. در این صورت هر IB-انقباض روی X دارای نقطه ثابت یکتا می‌باشد.

۵.۶.۲ G-کامل بودن در فضاهای شبه-متریک فازی شهودی غیر ارشمیدسی

تعریف ۵.۶.۸. اگر در فضای شبه-متریک فازی شهودی $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$، نامساوی مثلثی (IFQM3) در ۵.۶.۱ برای هر $x, y \in X$ و $t > ۰$ جایگزین

$$\mathcal{M}^i_{M,N}(f(x), f(y), kt) \geq_{L^*} \mathcal{M}^i_{M,N}(x, y, t)$$

شود آن‌گاه این فضا، شبه-متریک شهودی غیر ارشمیدسی نامیده می‌شود.

مثال ۵.۶.۹. فرض کنیم (X, d) یک فضای شبه-متریک باشد. در این صورت بلافاصله می‌توان نشان داد که (X, d) یک فضای شبه-متریک شهودی غیر ارشمیدسی است اگر و تنها اگر $(X, \mathcal{M}^d_{M,N}, \wedge)$ یک فضای شبه-متریک فازی غیر ارشمیدسی باشد.

قضیه ۵.۶.۱۰. هر دنباله کوشی G-کامل در فضای شبه-متریک شهودی غیر ارشمیدسی $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ که $\mathcal{T}$ از نوع هازدیک می‌باشد، یک دنباله کوشی است.

اثبات. چون $\mathcal{T}$ برای هر $\varepsilon \in (۰, ۱)$ از نوع هازدیک می‌باشد، برای هر $\varepsilon \in (۰, ۱)$، $\delta \in (۰, ۱)$ وجود دارد به طوری که برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم

$$\mathcal{T}^m(\mathcal{N}_s(\delta), \cdots, \mathcal{N}_s(\delta)) >_{L^*} \mathcal{N}_s(\varepsilon).$$

فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی G-کامل در فضای شبه-متریک فازی شهودی غیر ارشمیدسی $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ باشد. فرض کنیم $\varepsilon \in (۰, ۱), t > ۰$ و عدد صحیح مثبت $n_۰$ به‌گونه‌ای باشد که برای هر $n \geq n_۰$

$$\mathcal{M}^i_{M,N}(x_n, x_{n+۱}, t) >_{L^*} \mathcal{N}_s(\varepsilon).$$

در این صورت برای هر $n \geq n_\circ$ و $j > \circ$ داریم

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}^i_{M,N}(x_n, x_{n+j}, t)\\
&\geq_{L^*} \mathcal{T}^{j-1}(\mathcal{M}^i_{M,N}(x_n, x_{n+1}, t), \cdots, \mathcal{M}^i_{M,N}(x_{n+j-1}, x_{n+j}, t))\\
&\geq_{L^*} \mathcal{T}^{j-1}(\mathcal{N}_s(\delta), \cdots, \mathcal{N}_s(\delta))\\
&\geq_{L^*} \mathcal{N}_s(\varepsilon).
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در فضای شبه-متریک فازی شهودی غیر ارشمیدسی $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ می‌باشد. در نتیجه برهان کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۵.۶.۱۱. هر فضای شبه-متریک فازی شهودی غیر ارشمیدسی G-دوکامل $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ که $\mathcal{T}$ از نوع هازدیک باشد، G-کامل است.

اثبات. فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله G-کوشی در فضای شبه-متریک فازی شهودی غیر ارشمیدسی $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ باشد. با استفاده از ۵.۶.۱۰، $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ می‌باشد. در نتیجه $x \in X$ وجود دارد به طوری که برای هر $t > \circ$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}^i_{M,N}(x, x_n, t) = 1_{L^*}.$$

بنابراین $(X, \mathcal{M}^i_{M,N}, \mathcal{T})$ یک دنباله G-کامل است یعنی $(X, \mathcal{M}_{M,N}, \mathcal{T})$ یک دنباله G-دوکامل می‌باشد. $\square$

۵.۶.۳ کاربردهایی در دامنه کلمات

فرض کنیم $\sum$ یک الفبای غیرتهی و $\sum^\infty$ مجموعه همه دنباله‌های (''کلمات'') متناهی و نامتناهی روی $\sum$ باشد. قراردادی را انتخاب می‌کنیم که دنباله تهی $\emptyset$ عضوی از $\sum^\infty$ می‌باشد.

ترتیب پیشوند را در $\sum^\infty$ به صورت $\sqsubseteq$ نشان می‌دهیم به عبارت دیگر

$$x \sqsubseteq y \Longleftrightarrow \text{باشد } y \text{ پیشوند } x$$

برای هر $x \in \sum^\infty$ طول x را با $l(x)$ نشان می‌دهیم. در نتیجه زمانی که $x \neq \emptyset$ و $l(\emptyset) = 0$، آن‌گاه $l(x) \in [1, 0)$. برای هر $x, y \in \sum^\infty$ فرض می‌کنیم $x \sqcap y$ پیشوند مشترک x و y باشد. در این صورت تابع $d_{\sqsubseteq}$ روی $\sum^\infty \times \sum^\infty$ که به صورت

$$d_{\sqsubseteq}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \sqsubseteq y \text{ اگر} \\ 2^{-l(x \sqcap y)}, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم یک شبه-متریک روی $\sum^\infty$ است. قرارداد می‌کنیم $2^{-\infty} = 0$ (برای جزئیات بیشتر رجوع کنید به [۱۳۰]). فرض کنیم $\mathcal{M}^{d_{\sqsubseteq}1}_{M,N}(x,y,t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

- $\mathcal{M}^{d_{\sqsubseteq}1}_{M,N}(x,y,0) = 0_{L^*}$ برای هر $x, y \in \sum^\infty$.
- $\mathcal{M}^{d_{\sqsubseteq}1}_{M,N}(x,y,t) = 1_{L^*}$ اگر x پیشوند y باشد و $t > 0$.
- $\mathcal{M}^{d_{\sqsubseteq}1}_{M,N}(x,y,t) = \mathcal{N}_s(2^{-l(x \sqcap y)})$ اگر x پیشوند y نباشد و $t \in (0, 1]$.
- $\mathcal{M}^{d_{\sqsubseteq}1}_{M,N}(x,y,t) = 1_{L^*}$ اگر x پیشوند y نباشد و $t > 0$.

قضیه ۵.۶.۱۲. $(\sum^\infty, \mathcal{M}^{d_{\sqsubseteq}1}_{M,N}, \wedge)$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی غیر ارشمیدسی G-کامل است.

اثبات. مرجع [۱۳۰] را ببینید. $\square$

فرض کنیم $\mathcal{M}^{d_{\sqsubseteq}}_{M,N}(x,y,t)$ به صورت

$$\mathcal{M}^{d_{\sqsubseteq}}_{M,N}(x,y,t) = \begin{cases} 0_{L^*} & x, y \in \sum^\infty \text{ اگر } t = 0 \text{ و برای هر } \\ \left(\frac{t}{t + 2^{-l(x \sqcap y)}}, \frac{2^{-l(x \sqcap y)}}{t + 2^{-l(x \sqcap y)}}\right) & \text{اگر } t > 0 \text{ و } x \text{ پیشوند } y \text{ نباشد} \\ 1_{L^*} & \text{اگر } t > 0 \text{ و } x \text{ پیشوند } y \text{ باشد} \end{cases}$$

تعریف شود.

قضیه ۵.۶.۱۳. $(\sum^\infty, \mathcal{M}^{d_{\sqsubseteq}1}_{M,N}, \wedge)$ یک فضای شبه-متریک فازی شهودی غیر ارشمیدسی کامل G-کامل است.

اکنون، با استفاده از ۵.۶.۷، پیچیدگی الگوریتم‌های مرتب‌ساز سریع را بررسی می‌کنیم. معادله بازگشتی

$$(\Phi(x))_۱ = T(۱). \qquad (\Phi(x))_n = \frac{۲(n-۱)}{n} + \frac{n+۱}{n} x_{n-۱}$$

برای هر $n \geq ۱$ را با T نمایش می‌دهیم. در بررسی حالت میانگین الگوریتم‌های مرتب‌ساز به دست می‌آید (به [؟، ۱۳۰] رجوع کنید).

فرض کنیم الفبای $\sum$ مجموعه اعداد حقیقی غیرمنفی باشد به عبارت دیگر $\sum = [۰, \infty)$. تابع $\Phi : \sum^\infty \longrightarrow \sum^\infty$ که برای هر $n \geq ۲$ به صورت

$$(\Phi(x))_۱ = T(۱). \qquad (\Phi(x))_n = \frac{۲(n-۱)}{n} + \frac{n+۱}{n} x_{n-۱}$$

تعریف شده را با نماد T نمایش می‌دهیم (اگر $x \in \sum^\infty$ دارای طول $n < \infty$ باشد، می‌نویسیم $x := x_۱x_۲\cdots x_n$ و اگر x یک کلمه نامتناهی باشد، می‌نویسیم: $x := x_۱x_۲\cdots$).

حال نشان می‌دهیم که Φ یک نگاشت IB–انقباضی روی فضای شبه–متریک فازی شهودی غیر ارشمیدسی G-کامل $(\sum^\infty, \mathcal{M}^{d_\sqsubseteq}_{M,N}, \wedge)$ با ثابت انقباض ۱/۲ می‌باشد.

با این کار برای هر $x, y \in \sum^\infty$ داریم $l(\Phi(x)) = l(x) + ۱$. (به ویژه $l(\Phi(x)) = \infty$ زمانی که $l(x) = \infty$) به علاوه واضح است که $\Phi(x) \sqsubseteq \Phi(y)$ اگر و تنها اگر $x \sqsubseteq y$. در نتیجه برای هر $x, y \in \sum^\infty$ داریم

$$\Phi(x \sqcap y) \sqsubseteq \Phi(x) \sqcap \Phi(y).$$

بنابراین برای هر $x, y \in \sum^\infty$ داریم

$$l(\Phi(x \sqcap y)) \subseteq l(\Phi(x) \sqcap \Phi(y)).$$

پس با توجه به نتایج قبلی، نتیجه می‌گیریم که اگر x پیشوند y باشد، آنگاه برای هر $t > ۰$ داریم

$$\mathcal{M}^{d_\sqsubseteq}_{M,N}(\Phi(x), \Phi(y), t/۲) = \mathcal{M}^{d_\sqsubseteq}_{M,N}(x, y, t) = ۱_{L^*}$$

و اگر x پیشوند y نباشد، آنگاه برای هر $t > ۰$ خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{M,N}^{d_{\sqsubseteq}}(\Phi(x), \Phi(y), t/۲) \\
=&\left(\frac{t/۲}{(t/۲) + ۲^{-l(\Phi(x)\sqcap\Phi(y))}}, \frac{۲^{-l(\Phi(x)\sqcap\Phi(y))}}{(t/۲) + ۲^{-l(\Phi(x)\sqcap\Phi(y))}}\right) \\
\geq_{L^*}&\left(\frac{t/۲}{(t/۲) + ۲^{-l(\Phi(x\sqcap y))}}, \frac{۲^{-l(\Phi(x\sqcap y))}}{(t/۲) + ۲^{-l(\Phi(x\sqcap y))}}\right) \\
=&\left(\frac{t/۲}{(t/۲) + ۲^{-(l(x\sqcap y)+۱)}}, \frac{۲^{-(l(x\sqcap y)+۱)}}{(t/۲) + ۲^{-(l(x\sqcap y)+۱)}}\right) \\
=&\left(\frac{t}{t + ۲^{-(l(x\sqcap y))}}, \frac{۲^{-(l(x\sqcap y))}}{t + ۲^{-(l(x\sqcap y))}}\right) \\
=&\mathcal{M}_{M,N}^{d_{\sqsubseteq}}(x, y, t).
\end{aligned}
$$

به طور مشابه داریم

$$\mathcal{M}_{M,N}^{d_{\sqsubseteq}}(\Phi(y), \Phi(x), t/۲) \geq_{L^*} \mathcal{M}_{M,N}^{d_{\sqsubseteq}}(y, x, t)$$

بنابراین، Φ یک IB-انقباض روی $\sum^\infty, \mathcal{M}_{M,N}^{d_{\sqsubseteq}}, \wedge$ با ثابت انقباض $۱/۲$ می‌باشد. طبق ۵.۶.۷، Φ دارای نقطه ثابت یکتای $z = z_۱ z_۲ \cdots$ می‌باشد که جواب منحصر به فرد معادله بازگشتی T می‌باشد به عبارت دیگر برای هر $n \geq ۲$ داریم

$$z_۱ = ۰, \qquad z_n = \frac{۲(n-۱)}{n} + \frac{n+۱}{n} z_{n-۱}.$$

است.

۵.۷ توابع پیمانه‌ای و قضایای نقطه ثابت

در این بخش، نوع جدیدی از توابع پیمانه‌ای φ را بررسی کرده و چند قضیه نقطه ثابت جدید را برای φ-انقباض‌های فازی در فضاهای متریک فازی با نرم t-نرم نوع H به اثبات می‌رسانیم [۸۲].

با نماد Φ_w خانواده تمام توابع به صورت $\varphi : (۰, \infty) \to (۰, \infty)$ که در آن‌ها برای هر $t > ۰$، $r \geq t$ وجود داشته باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(r) = ۰$ را نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۷.۱. ([۶۹، ۶۹]). فرض کنیم $(X, M, *)$ فضای متریک فازی منگر کامل با t-نرم $*$ نوع H باشد. اگر $T : X \to X$ یک φ- انقباض فازی باشد، یعنی برای هر $x, y \in X$ و $t > \circ$ در شرط

$$M(T_x, T_y, \varphi(t)) \geq M(x, y, t) \qquad (۵.۷.۱)$$

صدق کند که $\varphi \in \Phi_w$، آنگاه T دارای نقطه ثابت یکتا $x_* \in X$ بوده و دنباله $\{T^n(x_\circ)\}$ برای هر $x_\circ \in X$ به x_* همگراست.

فرض کنیم Φ_k خانواده تمام توابع $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ باشد به طوری که برای هر $t > \circ$، $r > t$ موجود باشد به طوری که

$$\circ \leq \lim_{n\to\infty} \varphi^n(r) < t < r.$$

فرض می‌کنیم که $\varphi \in \Phi_k$ باشد. در این صورت برای هر $t > \circ$ داریم

$$L_t = \left\{ r > t : \circ \leq \lim_{n\to\infty} \varphi^n(r) < t < r \right\} \neq \emptyset.$$

لم ۵.۷.۲. فرض کنیم Φ_k یک تابع می‌باشد. اگر

$$\circ < x_{i+۱} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x_\circ^{(i)}) < x_i < x_\circ^{(i)}$$

برای هر $x_۱ > \circ$ و $x_\circ^{(i)} \in L_{x_i}$ برای هر $i \geq ۱$، آنگاه داریم

$$\inf_{\{t_m\}\in T} \left\{ t_\circ : \lim_{m\to\infty} t_m = t_\circ \right\} = \circ$$

که $T = \left\{ \{x_m\} : x_{i+۱} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x_\circ^{(m)}), x_\circ^{(i)} \in L_{x_i} \right\}$.

اثبات. به آسانی می‌توان نشان داد که برای هر $\{t_m\} \in T$، $\{t_m\}$ یک دنباله نزولی است و

$$\inf_{\{t_m\}\in T} \{ t_\circ : \lim_{m\to\infty} t_m = t_\circ \} \geq \circ.$$

فرض کنیم $\inf_{\{t_m\}\in T}\{t_\circ : \lim_{m\to\infty} t_m = t_\circ\} = t' > \circ$. واضح است که برای هر $\{t_m\} \in T$ و $m \in \{۱,۲,۳,\cdots\}$ داریم $t_m > t'$. یعنی،

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(x) > t' \tag{۵.۷.۲}$$

برای هر $\{t_m\} \in T$ و $x \in L_{t_m}$ برای هر $m \in \{۱,۲,۳,\cdots\}$. چون $\varphi \in \Phi_k$، $t'_\circ > t'$ وجود دارد به طوری که

$$\circ \le \lim_{n\to\infty} \varphi^n(t'_\circ) < t' \tag{۵.۷.۳}$$

برای $\varepsilon_\circ = \frac{t'_\circ - t'}{۲}$، طبق تعریف اینفیمم، $\{y_m\} \in T$ وجود دارد به طوری که

$$y = \lim_{m\to\infty} y_m < t' + \varepsilon_\circ = \frac{t'_\circ + t'}{۲} < t'_\circ.$$

بنابراین $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $m \ge N$ داریم

$$y_m < t'_\circ, \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi^n(t'_\circ) < y_m$$

که این نتیجه می‌دهد برای هر $m \in N$، $t'_\circ \in L_{y_m}$. چون $\{y_m\} \in T$ و با استفاده از (۵.۷.۲) داریم $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t'_\circ) > t'$ که این با (۵.۷.۳) متناقض است و لذا حکم نتیجه می‌شود. $\square$

لم ۵.۷.۳. فرض کنیم $\varphi \in \Phi_k$ یک تابع باشد. برای هر $t > \circ$ و $r \in L_t$، $N_r \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\varphi^{N_r}(r) < t \le \varphi^{N_r - ۱}(r)$ و $\varphi^n(r) < t$، برای هر $n \ge N_r$.

اثبات. چون برای هر $r \in l_t$، $\varphi \in \Phi_k$ داریم $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(r) < t$ و لذا $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \ge N$ داریم

$$\varphi^n(r) < t.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $N \ge ۱$، زیرا $\varphi^\circ(r) = r > t$. در نتیجه مجموعه

$$\{N \in \mathbb{N} : \varphi^n(r) < t, \forall n \ge N\}$$

دارای یک کران پایین است. یعنی، $N_r = \inf_{N\in\mathbb{N}}\{\varphi^N(r) < t\}$ وجود دارد به طوری که

$$\varphi^{N_r}(r) < t \leq \varphi^{N_r-۱}(r)$$

و این برهان را کامل می‌کند. $\square$

لم ۵.۷.۴. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی منگر با t-نرم کمینه $*$ و $\{x_n\}$ یک دنباله در $(X, M, *)$ باشد. اگر تابع $\varphi \in \Phi_k$ وجود داشته باشد به طوری که

(a) $\varphi(t) > ۰$، برای هر $t > ۰$.

(b) $M(x_n, x_m, \varphi(t)) \geq M(x_{n-۱}, x_{m-۱}, t)$، برای هر $n, m \geq ۱$ و $t > ۱$.

آن‌گاه $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در X می‌باشد.

اثبات. واضح است که شرط (a) نتیجه می‌دهد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $t > ۰$، $\varphi^n(t) > ۰$.

اکنون، اثبات می‌کنیم که برای هر $t > ۰$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n+۱}, t) = ۱. \tag{۵.۷.۴}$$

طبق شرط (b)، برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $t > ۰$ داریم

$$M(x_n, x_{n+۱}, \varphi(t)) \geq M(x_{n-۱}, x_n, t). \tag{۵.۷.۵}$$

توجه داریم از این که برای هر $\varepsilon \in (۰, ۱]$ داریم $M(x_۰, x_۱, t) \to ۱$ (زمانی که $t \to \infty$)، نتیجه می‌گیریم $t_۱ > ۰$ وجود دارد به طوری که

$$M(x_۰, x_۱, t_۱) > ۱ - \varepsilon.$$

چون $\varphi \in \Phi_k$، پس $L_{t_۱}$ برای هر $\varepsilon \in (۰, ۱]$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(x_۰^{(۱)}) \geq ۰.$$

حالت ۱. فرض کنیم که $t_\circ^{(1)} \in L_{t_1}$ وجود داشته باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t_\circ^{(1)}) = \circ$. در نتیجه برای هر $t > \circ$، $n_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq n_1$، $\varphi^n(t_\circ^{(1)}) < t$. طبق (۵.۷.۵)، چون متریک فازی، غیر نزولی است برای هر $n \geq n_\circ$ داریم:

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &< M(x_\circ, x_1, t_1) \\ &\leq M(x_\circ, x_1, t_\circ^{(1)}) \\ &\leq M(x_1, x_2, \varphi(t_\circ^{(1)})) \\ &\leq \cdots \\ &\leq M(x_n, x_{n+1}, \varphi^n(t_\circ^{(1)})) \\ &\leq M(x_n, x_{n+1}, t). \end{aligned}$$

در نتیجه (۵.۷.۴) برقرار است.

حالت ۲. فرض کنیم $t_\circ^{(j)} \in L_{t_j}$ وجود دارد که $j \in \{1, 2, \cdots, i\}$ و $t_j > \circ$، $i \in \{2, 3, 4, \cdots\}$، به طوری که $t_{j+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(t_\circ^{(j)}) > \circ$، برای هر $j \in \{1, 2, \cdots, i-1\}$ و $t_{i+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(t_\circ^{(i)}) = \circ$ طبق فرض، $n_j \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq n_j$ داریم $\varphi^n(t_\circ^{(j)}) < t_\circ^j$. چون $t_{j+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(t_\circ^{(i)}) = \circ$ نتیجه می‌گیریم که برای هر $t > \circ$، $n_i \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq n_i$ داریم $\varphi^n(t_\circ^{(i)}) < t$. چون متریک فازی غیر نزولی است، بنا به (۵.۷.۵)، برای هر $n \geq \sum_{k=1}^{i} n_k$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &< M(x_\circ, x_1, t_1) \\ &\leq M(x_\circ, x_1, t_\circ^{(1)}) \\ &\leq M(x_1, x_2, \varphi(t_\circ^{(1)})) \\ &\leq \cdots \\ &\leq M(x_{n_1}, x_{n_1+1}, \varphi^{n_1}(t_\circ^{(1)})) \end{aligned}$$

$$\le M(x_{n_1}, x_{n_1+1}, t_\circ^{(2)})$$
$$\le M(x_{n_1}, x_{n_1+2}, \varphi(t_\circ^{(2)}))$$
$$\le \cdots$$
$$\le M(x_{n_1+n_2}, x_{n_1+n_2+1}, \varphi^{n_2}(t_\circ^{(2)}))$$
$$\le \cdots$$
$$\le M(x_{n_1+\cdots+n_i-1}, x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}, \varphi^{n_i-1}(t_\circ^{(i-1)}))$$
$$\le M(x_{n_1+\cdots+n_i}, x_{n_1+\cdots+n_i+1}, t_\circ^{(i)})$$
$$\le \cdots$$
$$\le M(x_{n_1+\cdots+n_i-1}, x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+2}, \varphi(t_\circ^{(i)}))$$
$$\le \cdots$$
$$\le M(x_{n_1+\cdots+n_i}, x_{n_1+\cdots+n_i+1}, \varphi^{n_i}(t_\circ^{(i)}))$$
$$\le M(x_n, x_{n+1}, t).$$

حالت ۳. فرض کنیم برای هر $t_\circ^{(i)} \in L_{t_i}$ و $i \in \{1,2,3,\cdots\}$ داشته باشیم $t_{i+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(t_\circ^{(i)}) > \circ$. طبق ۵.۷.۲ داریم $\inf_{\{t_m\}\in T}\{t_\circ : \lim_{m\to\infty} t_m = t_\circ\} = \circ$. پس برای هر $t > \circ$، $\{t_m\}$ وجود دارد به طوری که $\lim_{m\to\infty} t_m = t_\circ < t$. بنابراین $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $m \ge k$، $t_m < t$. اما چون $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t_\circ^{(m)}) = t_{m+1}$، $n_m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $m \ge k$ و $n \ge n_m$ داریم $\varphi^n(t_\circ^{(m)}) < t$. چون متریک فازی، غیر نزولی می‌باشد، طبق (۵.۷.۴)، برای هر $n = h + \sum_{i=1}^m n_i$ که $m \ge k$ و $h \in \mathbb{N}$، داریم:

$$1 - \varepsilon < M(x_\circ, x_1, t_1)$$
$$\le M(x_\circ, x_1, t_\circ^{(1)})$$
$$\le M(x_1, x_2, \varphi(t_\circ^{(1)}))$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \cdots \\
&\leq M(x_{n_۱}, x_{n_۱+۱}, \varphi^{n_۱}(t_۰^{(۱)})) \\
&\leq M(x_{n_۱}, x_{n_۱+۱}, t_۰^{(۲)}) \\
&\leq M(x_{n_۱+۱}, x_{n_۱+۲}, \varphi(t_۰^{(۲)})) \\
&\leq \cdots M(x_{n_۱+n_۲}, x_{n_۱+n_۲+۱}, \varphi^{n_۲}(t_۰^{(۲)})) \\
&\leq \cdots \\
&\leq M(x_{n_۱+\cdots+n_{m-۱}}, x_{۱+n_۱+\cdots+n_{m-۱}}, \varphi^{n_{m-۱}}(t_۰^{(m-۱)})) \\
&\leq M(x_{n_۱+\cdots+n_{m-۱}}, x_{۱+n_۱+\cdots+n_{m-۱}}, (t_۰^{(m)}) \\
&\leq M(x_{n_۱+\cdots+n_{m-۱}+۱}, x_{n_۱+\cdots+n_{m-۱}+۲}, \varphi(t_۰^{(m)})) \\
&\leq \cdots \\
&\leq M(x_{n_۱+\cdots+n_m}, x_{n_۱+\cdots+n_{m+۱}}, \varphi^{n_m}(t_۰^{(m)})) \\
&\leq \cdots \\
&\leq M(x_{n_۱+\cdots+n_m+h}, x_{n_۱+\cdots+n_m+h+۱}, \varphi^{n_m+h}(t_۰^{(m)})) \\
&\leq M(x_{n_۱+\cdots+n_m+h}, x_{n_۱+\cdots+n_m+h+۱}, t) \\
&= M(x_n, x_{n+۱}, t)
\end{aligned}
$$

در نتیجه برای هر $t > ۰$ داریم $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n+۱}, t) = ۱$. پس بنا به ۵.۷.۳، $N_r \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\varphi^{N_r}(r) < t$. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ داده شده باشد. در این صورت برای هر $k \in \mathbb{N}$ و

$r \in L_t$ داریم:

$$\begin{aligned} &M(x_{n+1}, x_{n+k+1}, t) \\ =&M(x_{n+1}, x_{n+k+1}, t - \varphi^{N_r}(r) + \varphi^{N_r}(r)) \\ \geq&M(x_n, x_{n+1}, t - \varphi^{N_r}(r)) * M(x_{n+1}, x_{n+k+1}, \varphi^{N_r}(r)) \\ \geq&M(x_n, x_{n+1}, t - \varphi^{N_r}(r)) * M(x_n, x_{n+k}, \varphi^{N_r - 1}(r)) \\ \geq&M(x_n, x_{n+1}, t - \varphi^{N_r}(r)) * M(x_n, x_{n+k}, t) \\ \geq&M(x_n, x_{n+1}, t - \varphi^{N_r}(r)) * \cdots * M(x_n, x_{n+1}, t - \varphi^{N_r}(r)) \end{aligned} \tag{5.7.6}$$

بنابراین به سادگی می‌توانیم نشان دهیم که $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. پس اثبات تمام است. $\square$

لم ۵.۷.۵. فرض کنیم $(X, M, *)$ فضای متریک فازی منگر باشد و $x, y \in X$. اگر تابع $\varphi \in \Phi_k$ وجود داشته باشد (که در آن $\varphi(t) > 0$) به طوری که برای هر $t > 0$ داشته باشیم

$$M(x, y, \varphi(t)) \geq M(x, y, t) \tag{5.7.7}$$

آن‌گاه $x = y$.

اثبات. برای اثبات این‌که $x = y$، فقط باید نشان دهیم که $M(x, y, t) = 1$ برای هر $t > 0$. از $M(x, y, t) \to 1$ زمانی که $t \to \infty$، نتیجه می‌شود که برای هر $\varepsilon \in (0, 1]$، $t_1 > 0$ وجود دارد به طوری که $M(x, y, t_1) > 1 - \varepsilon$. از $\varphi \in \Phi_k$ نتیجه می‌گیریم L_{t1} وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} \varphi^n \left(x_0^{(1)}\right) \geq 0$ برای هر $x_0^{(1)} \in L_{t_1}$.

حالت ۱. فرض کنیم $t_0^{(1)} \in L_{t_1}$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n\to\infty} \varphi^n \left(t_0^{(1)}\right) = 0$. بنابراین، برای هر $t > 0$، $n_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\varphi^n \left(t_0^{(1)}\right) < t$ برای هر $n \geq n_1$. چون متریک

فازی، نزولی نیست، از (۵.۷.۷)، داریم

$$\begin{aligned}
1-\varepsilon &< M\left(x,y,t_1\right)\\
&\leq M\left(x,y,\varphi\left(t_0^{(1)}\right)\right)\\
&\leq \cdots\\
&\leq M\left(x,y,\varphi^{n}\left(t_0^{(1)}\right)\right)\\
&\leq M(x,y,t).
\end{aligned}$$

برای هر $n \geq n_1$. بنابراین $x=y$.

حالت ۲. فرض کنیم $t_0^{(j)} \in L_{t_j}$ وجود داشته باشد که در آن $j \in \{1,2,\cdots,i\}$ و $t_j > 0$، $i \in \{2,3,4,\cdots\}$، به طوری که $t_{j+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi^{n}\left(t_0^{(j)}\right) > 0$ برای هر $j \in \{1,2,\cdots,i-1\}$ و $t_{i+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi^{n}\left(t_0^{(i)}\right) = 0$. طبق فرض، $n_j \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\varphi^{n}\left(t_0^{(j)}\right) < t_0^{(j)}$ برای هر $n \geq n_j$. چون $t_{i+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi^{n}\left(t_0^{(i)}\right) = 0$، نتیجه می‌شود که برای هر $t > 0$، $n_i \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\varphi^{n}\left(t_0^{(i)}\right) < t$ برای هر $n \geq n_i$. چون متریک فازی، نزولی نیست، از (۵.۷.۷)، برای هر $n \geq n_i$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
1-\varepsilon &< M\left(x,y,t_1\right)\\
&\leq M\left(x,y,t_0^{(1)}\right)\\
&\leq M\left(x,y,\varphi\left(t_0^{(1)}\right)\right)\\
&\leq \cdots\\
&\leq M\left(x,y,\varphi^{n_1}\left(t_0^{(1)}\right)\right)\\
&\leq M\left(x,y,t_0^{(2)}\right)\\
&\leq M\left(x,y,\varphi\left(t_0^{(2)}\right)\right)\\
&\leq \cdots\\
&\leq M\left(x,y,\varphi^{n_2}\left(t_0^{(2)}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \cdots \\
&\leq M\left(x, y, \varphi^{n_{i-1}}\left(t_{0}^{(i-1)}\right)\right) \\
&\leq M\left(x, y, t_{0}^{(i)}\right) \\
&\leq \cdots \\
&\leq M\left(x, y, \varphi\left(t_{0}^{(i)}\right)\right) \\
&\leq \cdots \\
&\leq M\left(x, y, \varphi^{n_{i}}\left(t_{0}^{(i)}\right)\right) \\
&\leq M\left(x, y, \varphi^{n}\left(t_{0}^{(i)}\right)\right) \\
&\leq M(x, y, t)
\end{aligned}
$$

که نتیجه می‌دهد $M(x,y,t)=1$ برای هر $t>0$؛ یعنی $x=y$.

حالت ۳. فرض کنیم $t_{i+1}=\lim_{n\to\infty}\varphi^{n}\left(t_{0}^{(i)}\right)>0$ برای هر $t_{0}^{(i)}\in L_{t_i}$ و $i\in\{1,2,3,\cdots\}$. طبق ۵.۷.۲، $\inf_{\{t_m\}\in T}\{t_0:\lim_{m\to\infty}t_m=t_0\}=0$. در این صورت، برای هر $t>0$، $\{t_m\}$ وجود دارد به طوری که $\lim_{m\to\infty}t_m=t_0<t$ و بنابراین $k\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $t_m<t$ برای هر $m\geq k$. اما چون $\lim_{n\to\infty}\varphi^{n}\left(t_{0}^{(m)}\right)=t_{m+1}$، $n_m\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\varphi^{n_m}\left(t_{0}^{(m)}\right)<t$ برای هر $n\geq n_m$ و $m\geq k$. چون متریک فازی، نزولی نیست، از (۵.۷.۷)، برای هر $n=j+n_m$ به دست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
1-\varepsilon &< M\left(x, y, t_{1}\right) \\
&\leq M\left(x, y, t_{0}^{(1)}\right) \\
&\leq M\left(x, y, \varphi\left(t_{0}^{(1)}\right)\right) \\
&\leq \cdots \\
&\leq M\left(x, y, \varphi^{n_{1}}\left(t_{0}^{(1)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M\left(x, y, t_{\circ}^{(۲)}\right)\\
&\leq M\left(x, y, \varphi\left(t_{\circ}^{(۲)}\right)\right)\\
&\leq \cdots\\
&\leq M\left(x, y, \varphi^{n_۲}\left(t_{\circ}^{(۲)}\right)\right)\\
&\leq \cdots\\
&\leq M\left(x, y, \varphi^{n_m-۱}\left(t_{\circ}^{(m-۱)}\right)\right)\\
&\leq M\left(x, y, t_{\circ}^{(m)}\right)\\
&\leq \cdots\\
&\leq M\left(x, y, \varphi\left(t_{\circ}^{(m)}\right)\right)\\
&\leq \cdots\\
&\leq M\left(x, y, \varphi^{n_m}\left(t_{\circ}^{(m)}\right)\right)\\
&\leq \cdots\\
&\leq M\left(x, y, \varphi^{n_m+j}\left(t_{\circ}^{(m)}\right)\right)\\
&\leq M\left(x, y, \varphi^{n}\left(t_{\circ}^{(m)}\right)\right)\\
&\leq M(x, y, t)
\end{aligned}
$$

که در آن $m \geq k$ و $j \in \mathbb{N}$. پس نتیجه می‌گیریم $M(x, y, t) = ۱$ برای هر $t > \circ$، یعنی $x = y$.
این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

قضیه ۵.۷.۶. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل منگر با t-نرم کمینه باشد. اگر $T : X \to X$ یک φ-انقباض فازی باشد؛ یعنی، در شرط (۵.۵.۷) صدق کند، که $\varphi \in \Phi_k$ و $\varphi(t) > \circ$ برای هر $t > \circ$. در این صورت T دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد $x_* \in X$ است و به علاوه، دنباله $\{T^n(x_\circ)\}$ به $x_* \in X$ برای هر $x_\circ \in X$ همگرا است.

اثبات. فرض کنیم $x_0 \in X$ و $x_n = Tx_{n-1}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. طبق (۵.۵.۷)، داریم

$$\begin{aligned} M\left(x_n, x_m, \varphi(t)\right) &= M\left(Tx_{n-1}, Tx_{m-1}, \varphi(t)\right) \\ &\geq M\left(x_{n-1}, x_{m-1}, t\right). \end{aligned}$$

برای هر $m, n \in \{2, 3, \cdots\}$ و $t > 0$. طبق ۵.۷.۴ نتیجه می‌گیریم که $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در $(X, M, *)$ است. چون X کامل است، فرض می‌کنیم که $x_n \to x_* \in X$.

اکنون، ثابت می‌کنیم که x_* یک نقطه ثابت T است. داریم

$$M\left(x_*, Tx_*, t\right) \geq M\left(x_*, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * M\left(Tx_n, Tx_*, \frac{t}{2}\right) \geq *a_n * a_n \quad (۵.۷.۸)$$

که در آن $a_n = M\left(x_*, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * M\left(Tx_n, Tx_*, \frac{t}{2}\right)$. توجه داریم که $a_n \to 1$ زمانی که $n \to \infty$. با فرض کردن $n \to \infty$ در (۵.۷.۸)، برای هر $t > 0$ داریم $M\left(x_*, Tx_*, t\right) = 1$. بنابراین $Tx_* = x_*$.

سرانجام، منحصربه‌فرد بودن نقطه ثابت x_* را نشان می‌دهیم. فرض کنیم y_* نقطه ثابت دیگری از T است، یعنی، $Ty_* = y_*$. طبق (۵.۵.۷)، داریم

$$M\left(x_*, y_*, \varphi(t)\right) = M\left(Tx_*, Ty_*, \varphi(t)\right) \geq M\left(x_*, y_*, t\right).$$

برای هر $t > 0$. از قضیه ۵.۷.۵ نتیجه می‌گیریم که $x_* = y_*$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

۵.۸ قضایای نقطه مشترک در فضاهای متریک فازی با استفاده از خاصیت-CLRg

در سال ۲۰۱۱، سینتوناراوات[9] و کومام[10] در [۱۴۴] نشان دادند که مفاهیم خاصیت (E.A) همیشه به کامل بودن (یا بسته بودن) زیرفضاهای زیرین برای وجود نقطه ثابت مشترک نیاز دارند. از این رو آن‌ها ایده حد مشترک[11] را در خاصیت محدوده[12] (به طور خلاصه، CLR) که نیاز به کامل بودن (یا بسته

[9] Sintunaravat
[10] Kumam
[11] common limit
[12] range property

بودن) زیرفضای زیرین را برطرف می‌کند. آن‌ها هم‌چنین برخی از نتایج نقطه ثابت را از طریق این مفهوم در فضاهای متریک فازی ثابت کردند.

اخیراً در [۸۱]، جین[۱۳] و همکاران، مفهوم خاصیت (CLR) را در حالت دوتایی گسترش دادند و هم‌چنین برخی قضایای نقطه ثابت دوتایی را برای یک جفت نگاشت ضعیف سازگار همراه با خاصیت (CLR) در فضاهای متریک فازی ثابت کردند.

هدف از این بخش، بررسی برخی قضایای نقطه ثابت مشترک جدید برای نگاشت‌های ضعیف سازگار است که برخی از شرایط انقباضی تعمیم یافته را تحت برخی از توابع کنترلی با استفاده از حد مشترک در خاصیت محدوده در فضاهای متریک فازی صدق می‌کند.

در این شرایط لازم نیست کامل بودن فضا را فرض کنیم، که در مقایسه با بسیاری از نتایج در نظریه نقطه ثابت، مزیت مهمی‌است. نتایج اصلی در این بخش برخی از نتایج اخیر جین و سایرین در [۸۱] و هم‌چنین نتایج بسیاری در منابع دیگر را تعمیم و گسترش می‌دهند. به عنوان بسط نتیجه اصلی خود، برخی از نتایج نقاط ثابت مشترک چند بعدی را به عنوان نتایج نقطه ثابت مشترک دوتایی/سه‌تایی/چهارتایی بیان می‌کنیم. هم‌چنین، چند مثال برای نشان دادن نتایج اصلی خود ارائه می‌دهیم. برخی از مقدمات زیر را نیز می‌توان در [۱۲۹] یافت.

فرض کنیم N یک عدد صحیح مثبت باشد. از این پس، X نشان‌دهنده یک مجموعه غیر تهی و X^N نشان‌دهنده فضای حاصل ضرب $\overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{N}$ است. هم‌چنین، در سراسر این بخش، n و m نشان دهنده اعداد صحیح مثبت هستند، t یک عدد حقیقی مثبت است، $i, j \in \{۱, ۲, \cdots, N\}$ و $\mathbb{I} := [۰, ۱]$. در ادامه، فرض می‌کنیم $F : X^N \to X$ و $f, g : X \to X$ سه نگاشت باشند. برای اختصار، $g(x)$ با gx نشان داده می‌شود.

تعریف ۵.۸.۱. فرض کنیم $f, g : X \to X$ دو نگاشت باشند. در این صورت می‌گوییم که نقطه $x \in X$:

۱. یک نقطه ثابت f است اگر $fx = x$.

[13] Jain

۲. یک نقطه تلاقی f و g است اگر $fx = gx$.

۳. یک نقطه ثابت مشترک f و g است اگر $fx = gx = x$.

تعریف ۲.۸.۵. ([۲۷]) فرض کنیم $F : X^{۲} \to X$ و $g : X \to X$ دو نگاشت باشند. در این صورت می‌گوییم که نقطه $(x, y) \in X^{۲}$:

۱. یک نقطه ثابت دوتایی F است اگر $F(x, y) = x$ و $F(y, x) = y$.

۲. یک نقطه تلاقی دوتایی F و g است اگر

$$F(x, y) = gx, \quad F(y, x) = gy.$$

۳. یک نقطه ثابت مشترک دوتایی F و g است اگر

$$F(x, y) = gx = x, \quad F(y, x) = gy = y.$$

تعریف ۳.۸.۵. ([۲۳، ۲۸]) فرض کنیم $F : X^{۳} \to X$ و $g : X \to X$ دو نگاشت باشند. در این صورت می‌گوییم نقطه $(x, y, z) \in X^{۳}$:

۱. یک نقطه ثابت سه‌تایی F است اگر

$$F(x, y, z) = x, \quad F(y, x, y) = y, \quad F(z, y, x) = z.$$

۲. نقطه تلاقی سه‌تایی F و g است اگر

$$F(x, y, z) = gx, \quad F(y, x, y) = gy, \quad F(z, y, x) = gz.$$

۳. یک نقطه ثابت مشترک سه‌تایی F و g است اگر

$$F(x, y, z) = gx = x, \quad F(y, x, y) = gy = y, \quad F(z, y, x) = gz = z.$$

تعریف ۴.۸.۵. ([۹۱، ۸۹]) فرض کنیم $F : X^{۴} \to X$ و $g : X \to X$ دو نگاشت باشند. در این صورت می‌گوییم که نقطه $(x, y, z, t) \in X^{۴}$:

۱. یک نقطه ثابت چهارتایی F است اگر

$$F(x,y,z,t)=x,\quad F(y,z,t,x)=y,$$

$$F(z,t,x,y)=z,\quad F(t,x,y,z)=t.$$

۲. یک نقطه تلاقی چهارتایی F و g است اگر

$$F(x,y,z,t)=gx,\quad F(y,z,t,x)=gy,$$

$$F(z,t,x,y)=gz,\quad F(t,x,y,z)=gt.$$

۳. یک نقطه ثابت مشترک چهارتایی F و g است اگر

$$F(x,y,z,t)=gx=x,\quad F(y,z,t,x)=gy=y,$$

$$F(z,t,x,y)=gz=z,\quad F(t,x,y,z)=gt=t.$$

رولدان[14] و همکاران در [۱۲۸، ۱۲۹] مفاهیم نقاط ثابت/تلاقی/مشترک چند بعدی را در فضاهای متریک فازی و فضاهای متریک معرفی کردند. برای تضمین وجود و منحصر به فرد بودن این نقاط، از خاصیت‌ها و نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

تعریف ۵.۸.۵ ([۲]). ۱. نگاشت‌های $f,g:X\to X$ گفته می‌شود که سازگار ضعیف هستند (یا جفت (f,g)، w-سازگار است)

$$fgx=gfx$$

برای هر $x\in X$ به طوری که $fx=gx$. ۲. برای هر $N\in\{۲,۳,۴\}$، نگاشت‌های $F:X^N\to X$ و $g:X\to X$ گفته می‌شود که سازگار ضعیف هستند (یا جفت (F,g)، w°-سازگار است) اگر

(الف) اگر $N=۲$، آنگاه $F(x,y)=gx$ و $F(y,x)=gy$ نتیجه می‌دهد

$$gF(x,y)=F(gx,gy),\quad gF(y,x)=F(gy,gx).$$

(ب) اگر $N=۳$، آنگاه $F(y,x,y)=gy$ ،$F(x,y,z)=gx$ و $F(z,y,x)=gz$ دلالت دارد

$$gF(x,y,z)=F(gx,gy,gz)$$

$$gF(y,x,y)=F(gy,gx,gy)$$

$$gF(z,y,x)=F(gz,gy,gx)$$

[14] Roldán

(c) اگر $N = ۴$، آن‌گاه

$$F(x,y,z,t) = gx, \quad F(y,z,t,x) = gy$$

$$F(z,t,x,y) = gz, \quad F(t,x,y,z) = gt$$

نتیجه می‌دهد

$$gF(x,y,z,t) = F(gx,gy,gz,gt)$$

$$gF(y,z,t,x) = F(gy,gz,gt,gx)$$

$$gF(z,t,x,y) = F(gz,gt,gx,gy)$$

$$gF(t,x,y,z) = F(gt,gx,gy,gz)$$

اخیراً، در [۱۴۴]، سینتوناراوات و کومام مفهوم جدیدی از حد مشترک را در محدوده g (به طور خلاصه، CLRg–خاصیت) در فضاهای متریک فازی و در [۸۱]، جین و همکاران این کار را به فضاهای متریک فازی به تعریف جورج[15] و ویرامانی[16] (به طور خلاصه، *GV-MFMS*) با استفاده از حالت دوتایی به صورت زیر گسترش دادند.

تعریف ۵.۸.۶. ([۸۱]) فرض کنیم $(X, M, *)$ یک *GV-MFMS* باشد. می‌گوییم که دو نگاشت $F : X \times X \to X$ و $g : X \to X$ در CLRg–خاصیت صدق می‌کنند اگر دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\} \subseteq X$ و $p, q \in X$ وجود داشته باشند به طوری که $\{F(x_n, y_n)\}$ و $\{gx_n\}$ به $g(p)$، M–همگرا شوند و $\{F(y_n, x_n)\}$ و $\{gy_n\}$ به $g(q)$، M–همگرا شوند.

فرض کنیم با Φ خانواده همه توابع $\phi : (۰, \infty) \to (۰, \infty)$ را نشان دهیم که در خاصیت‌های زیر صدق می‌کند:

($\Phi_۱$) ϕ غیر نزولی است.

($\Phi_۲$) ϕ نیم–پیوسته بالایی از سمت راست است.

($\Phi_۳$) $\sum_{\substack{k=۱ \\ t>۰}}^{\infty} \phi^k(t) < \infty$ برای هر $t > ۰$، که در آن $\phi^{k+۱}(t) = \phi\left(\phi^k(t)\right)$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ و $t > ۰$.

[15] George
[16] Veeramani

به طور خاص، از $(\Phi_۳)$، نتیجه می‌شود که $\phi(t) < t$ برای هر $t > ۰$ و $\phi \in \Phi$. با استفاده از این خانواده Φ، جین و همکاران در [۸۱] نتیجه زیر را ثابت کردند.

قضیه ۵.۸.۷ ([۸۱]). فرض کنیم $(X, M, *)$ یک *GV-MFMS* باشد و $*$ یک t-نرم پیوسته از نوع H باشد. فرض کنیم $F : X \times X \to X$ و $g : X \to X$ دو نگاشت باشند و فرض کنیم که $\phi \in \Phi$ وجود دارد که در شرط زیر صدق می‌کند

$$M(F(x,y), F(u,v), \phi(t)) \geq M(gx, gu, t) * M(gy, gv, t)$$

برای هر $x, y, u, v \in X$ و $t > ۰$ با شرایط زیر:

(الف) جفت (F, g) سازگار ضعیف است.

(ب) جفت (F, g) در *CLRg*–خاصیت صدق می‌کند.

در این صورت F و g یک نقطه تلاقی دوتایی در X دارند. علاوه بر این، یک نقطه منحصر به فرد $x \in X$ وجود دارد به طوری که $x = F(x, x) = gx$.

۵.۸.۱ نتایج کمکی

اکنون، برخی از نتایج اساسی را که در قضایای اصلی این بخش به آن نیاز داریم، نشان می‌دهیم. ابتدا چند ساختار فازی را در فضای حاصل ضرب X^N معرفی می‌کنیم. در اینجا، فرض کنیم که $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی به تعریف کراموسیل[۱۷] و میشالک[۱۸] یا یک فضای متریک فازی کراموسیل و میشالک (به طور خلاصه KM-FMS) باشد.

لم ۵.۸.۸. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک *KM-FMS* باشد و فرض کنیم $N \in \mathbb{N}$. فضای حاصل ضرب $\overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{N}$ نسخه‌های یکسان X را در نظر بگیرید. نگاشت

$$M^N X^N \times X^N \times [۰, \infty) \to \mathbb{I}$$

[17] Kramosil
[18] Michálek

را به صورت زیر تعریف کنید

$$M^{N}(A,B,t) = \overset{N}{\underset{i=1}{*}} M\left(a_i, b_i, t\right) \tag{5.8.1}$$

برای هر $A = (a_1, a_2, \cdots, a_N), B = (b_1, b_2, \cdots, b_N) \in X^N$ و $t \geq 0$. در این صورت خواص زیر برقرار هستند:

۱. $\left(X^N, M^N, *\right)$ نیز یک فضای متریک فازی است.

۲. فرض کنیم $\{A_n\}$ یک دنباله در X^N باشد که برای هر $n \geq 1$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_n = \left(a_n^1, a_n^2, \cdots, a_n^N\right)$$

و فرض کنیم $A = (a_1, a_2, \cdots, a_N) \in X^N$. در این صورت داریم

$$A_n \xrightarrow{M^N} A \Longleftrightarrow a_n^i \xrightarrow{M} a_i$$

برای هر $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$.

۳. اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای در X^N باشد که در قسمت (۲) تعریف شده است، آن‌گاه $\{A_n\}$ یک دنباله M^N-کوشی است اگر و تنها اگر $\{a_n^i\}$ یک دنباله M-کوشی برای هر $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ باشد.

۴. یک فضای متریک فازی $(X, M, *)$ کامل است اگر و تنها اگر $\left(X^N, M^N, *\right)$ کامل باشد.

اثبات ۱. با در نظر گرفتن این‌که $*$ یک نگاشت پیوسته است، همه خاصیت‌ها بدیهی هستند. ۲. توجه داریم که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$،

$$\begin{aligned} M^N\left(A_n, A, t\right) &= *_{i=1}^{N} M\left(a_n^i, a_i, t\right) \\ &\leq 1 * 1 * \cdots * 1 * M\left(a_n^j, a_j, t\right) * 1 * \cdots * 1 \\ &= M\left(a_n^j, a_j, t\right) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

بنابراین، اگر $A_n \xrightarrow{M^N} A$، آن‌گاه $a_n^j \xrightarrow{M} a_j$ برای هر $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$.

برعکس، فرض کنیم $a_n^i \xrightarrow{M} a_i$ برای هر $i \in \{۱,۲,\cdots,N\}$. چون $*$ یک نگاشت پیوسته است، پس برای هر $t > ۰$ داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} M^N\left(A_n, A, t\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\mathop{*}_{i=۱}^{N} M\left(a_n^i, a_i, t\right)\right)\\
&= \mathop{*}_{i=۱}^{N}\left(\lim_{n\to\infty} M\left(a_n^i, a_i, t\right)\right)\\
&= *^N ۱\\
&= ۱,
\end{aligned}$$

که این یعنی $A_n \xrightarrow{M^N} A$.

۳. به طور مشابه، می‌توان ثابت کرد که برای هر $n, k \in \mathbb{N}$، $j \in \{۱,۲,\cdots,N\}$ و $t > ۰$ داریم

$$M^N\left(A_n, A_k, t\right) \leq M\left(a_n^j, a_k^j, t\right) \leq ۱.$$

بنابراین، اگر $\{A_n\}$ یک دنباله M^N–کوشی باشد، آن‌گاه $\{a_n^j\}$ است یک دنباله M–کوشی برای هر $j \in \{۱,۲,\cdots,N\}$. اثبات برعکس مشابه است.

۴. نتیجه از (۲) و (۳) حاصل می‌شود. بنابراین اثبات کامل می‌شود.

نتیجه قبلی برای فضاهای متریک فازی با تعریف جورج و ویرامانی صادق نیست، زیرا اگرچه $a, b \in (۰,۱]$ ولی لزوماً نتیجه نمی‌گیریم که $a * b > ۰$. بنابراین اصل اول تضمین نمی‌شود.

لم ۵.۸.۹. اگر $(X, M, *)$ یک *GV-MFMS* و $*$ یک t–نرم مثبت باشد، آن‌گاه $\left(X^N, M^N, *\right)$ تعریف شده توسط (۵.۸.۱)، برای هر $t > ۰$ نیز یک *GV-MFMS* است و شرایط (۱)-(۴) در لم ۵.۸.۸ نیز برقرار هستند.

مثبت بودن t–نرم، شرط کافی برای اطمینان از $\left(X^N, M^N, *\right)$ بودن یک *GV-MFMS* می‌باشد، اما در برخی موارد لازم نیست. پس از نماد *GV-MFMS* استفاده می‌کنیم برای نشان دادن این که $\left(X^N, M^N, *\right)$ یک KM-FMS نیز می‌باشد.

نتایج زیر نشان می‌دهد که چگونه مفاهیم دوتایی/سه‌تایی/چهارتایی (به عنوان خواص سازگار ضعیف و CLRg-خاصیت) می‌توانند با استفاده از نگاشت‌های زیر به حالت تک‌بعدی کاهش یابند:

برای هر $N \in \{۲, ۳, ۴\}$ و نگاشت‌های $F : X^N \to X$ و $g : X \to X$، نگاشت $T_F^N, G^N : X^N \to X^N$ به صورت زیر است:

۱. اگر $N = ۲$، آن‌گاه $T_F^۲(x, y) = (F(x, y), F(y, x))$.

۲. اگر $N = ۳$، آن‌گاه $T_F^۳(x, y, z) = (F(x, y, z), F(y, x, y), F(z, y, x))$.

۳. اگر $N = ۴$، آن‌گاه

$$T_F^۴(x, y, z, t) = (F(x, y, z, t), F(y, z, t, x), F(z, t, x, y), F(t, x, y, z))$$

و

۱. اگر $N = ۲$، آن‌گاه $G^۲(x, y) = (gx, gy)$.

۲. اگر $N = ۳$، آن‌گاه $G^۳(x, y, z) = (gx, gy, gz)$.

۳. اگر $N = ۴$، آن‌گاه $G^۴(x, y, z, t) = (gx, gy, gz, gt)$.

برای مثال، لم زیر تضمین می‌کند که مفاهیم چند بعدی نقاط مشترک/ثابت/تلاقی را می‌توان بر حسب T_F^N و G^N تفسیر کرد:

لم ۵.۸.۱۰. برای هر $N \in \{۲, ۳, ۴\}$، فرض کنیم $F : X^N \to X$ و $g : X \to X$ دو نگاشت باشند. در این صورت نقطه $(x_۱, x_۲, \cdots, x_N) \in X^N$:

۱. یک نقطه ثابت دوتایی/سه‌تایی/چهارتایی F است اگر و تنها اگر نقطه ثابت T_F^N باشد.

۲. نقطه انطباق دوتایی/سه‌تایی/چهارتایی F و g است اگر و تنها اگر نقطه تلاقی T_F^N و G^N باشد.

۳. یک نقطه ثابت مشترک دوتایی/سه‌تایی/چهارتایی F و g است اگر و تنها اگر یک نقطه ثابت مشترک T_F^N و G^N باشد.

لم ۵.۸.۱۱. برای هر $N \in \{۲, ۳, ۴\}$، دو نگاشت $F : X^N \to X$ و $g : X \to X$، w-سازگار هستند اگر و تنها اگر T_F^N و G^N، w-سازگار باشند.

اثبات. برای سادگی، اثبات را در حالت $N=۲$ نشان می‌دهیم. در این صورت داریم

F و g، w-سازگار هستند

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \left[\left\{\begin{array}{l} F(x,y)=gx \\ F(y,x)=gy \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} gF(x,y)=F(gx,gy) \\ gF(y,x)=F(gy,gx) \end{array}\right\}\right] \\
&\Longleftrightarrow \left[\left(\begin{array}{c} F(x,y), \\ F(y,x) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} gx, \\ gy \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} F(gx,gy), \\ F(gy,gx) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} gF(x,y), \\ gF(y,x) \end{array}\right)\right] \\
&\Longleftrightarrow \left[T_F^۲(x,y)=G^۲(x,y) \Rightarrow T_F^۲G^۲(x,y)=G^۲T_F^۲(x,y)\right]
\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$ $T_F^۲$ و $G^۲$، w-سازگار هستند

اخیراً در [۱۴۴]، سینتوناراوات و کومام، مفهوم جدید حد مشترک را در محدوده g (به طور خلاصه، CLRg-خاصیت) معرفی کردند و جین و همکاران در [۸۱] این کار را به فضاهای متریک میشالک‌وکراموسیل-فازی تعمیم دادند، یعنی به KM-FMS در حالت دوتایی. اکنون ما از این موضوع به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

تعریف ۵.۸.۱۲. فرض کنیم (X,M) یک KM-FMS تحت t-نرم پیوسته باشد. می‌گوییم دو نگاشت $f,g:X\to X$ دارای CLRg-خاصیت هستند اگر دنباله $\{x_n\}$ در X و نقطه $z\in X$ وجود داشته باشد به طوری که دنباله‌های $\{fx_n\}$ و $\{gx_n\}$ هر دو M-همگرا باشند و

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = gz.$$

لم ۵.۸.۱۳. فرض کنیم (X,M) یک *KM-FMS* تحت t-نرم پیوسته باشد و $N\in\{۲,۳,۴\}$ طوری باشد که (X^N,M^N) یک *KM-FMS* است. فرض کنیم $F:X^N\to X$ و $g:X\to X$ دو نگاشت باشند. در این صورت F و g در *CLRg*-خاصیت (چند بعدی) صدق می‌کنند اگر و تنها اگر T_F^N و G^N *CLRg*-خاصیت (تک بعدی) صدق کنند.

اثبات. برای سادگی، اثبات را در حالت $N=۲$ نشان می‌دهیم. طبق قسمت (۲) از ۵.۸.۸، نتیجه می‌شود که

F و g در CLRg-خاصیت صدق می‌کنند

$$\Longleftrightarrow \exists \{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X, p, q \in X : \begin{cases} F(x_n, y_n) \xrightarrow{M} g(p), \\ F(y_n, x_n) \xrightarrow{M} g(q), \\ gx_n \xrightarrow{M} g(p), \\ gy_n \xrightarrow{M} g(q) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \exists \{(x_n, y_n)\} \subseteq X^{۲}, (p, q) \in X^{۲} : \begin{cases} F(x_n, y_n) \xrightarrow{M^{۲}} g(p), \\ F(y_n, x_n) \xrightarrow{M^{۲}} g(q), \\ gx_n \xrightarrow{M^{۲}} g(p), \\ gy_n \xrightarrow{M^{۲}} g(q) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \exists \{(x_n, y_n)\} \subseteq X^{۲}, (p, q) \in X^{۲} : \begin{cases} T_F^{۲}(x_n, y_n) \xrightarrow{M^{۲}} G^{۲}(p, q) \\ G^{۲}(x_n, y_n) \xrightarrow{M^{۲}} G^{۲}(p, q) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ $T_F^{۲}$ و $G^{۲}$ در CLRg-خاصیت صدق می‌کنند

$\square$

۵.۸.۲ قضایای نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های با CLRg-خاصیت

در این بخش نتایج اصلی خود را نشان می‌دهیم و در حالت خاص از آن‌ها به موارد جالبی می‌رسیم.

لم ۵.۸.۱۴. فرض کنیم (X, M) یک *KM-FMS* تحت t-نرم پیوسته $*$ و $f, g : X \to X$ نگاشت‌هایی با *CLRg*-خاصیت باشند. فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد و $z \in X$ به گونه‌ای باشد که $\{fx_n\} \to g(z)$ و $\{gx_n\} \to g(z)$ زمانی که $n \to \infty$. همچنین فرض کنیم $N \in \mathbb{N}$ و $\phi : (۰, \infty) \to (۰, \infty)$ وجود دارد به طوری که $\phi(t) \leq t$ برای هر $t \in (۰, \infty)$ و

$$M(fx, fy, \phi(t)) \geq *^N M(gx, gy, t) \tag{۵.۸.۲}$$

برای هر $x, y \in X$ و $t > ۰$. در این صورت $fz = gz$، یعنی f و g یک نقطه تلاقی دارند.

اثبات. اولاً، توجه داریم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، چون $M\left(fx_n, fz, \cdot\right)$ یک تابع غیر نزولی است، داریم

$$\begin{aligned} M\left(fx_n, fz, t\right) &\geq M\left(fx_n, fz, \phi(t)\right) \\ &\geq *^N M\left(gx_n, gz, t\right) \end{aligned}$$

برای هر $t > 0$. چون $gz \to \{gx_n\}$ زمانی که $n \to \infty$، پس $\lim_{n\to\infty} M\left(gx_n, gz, t\right) = 1$ برای هر $t > 0$. چون $*$ یک نگاشت پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که برای هر $t > 0$،

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} M\left(fx_n, fz, t\right) &\geq \lim_{n\to\infty} \left(*^N M\left(gx_n, gz, t\right)\right) \\ &= *^N \left(\lim_{n\to\infty} M\left(gx_n, gz, t\right)\right) \\ &= *^N 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

بنابراین، $fz \to \{fx_n\}$ زمانی که $n \to \infty$. با در نظر گرفتن این‌که $gz \to \{fx_n\}$ زمانی که $n \to \infty$، منحصر به فرد بودن حد ثابت می‌کند که $fz = gz$. $\square$

در نتیجه قبلی، ما فقط تابع $\phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ را در نظر گرفتیم به طوری که $\phi(t) \leq t$ برای هر $t \in (0, \infty)$. مقدار $\phi(0)$، اگرچه وجود دارد، مهم نیست زیرا همگرایی برای هر $t > 0$ بررسی می‌شود. با این حال، نشان دادن این‌که چرا ϕ نمی‌تواند مقدار ۰ را بگیرد نیز راحت است.

در [۸۰]، جاکیمسکی[19] به اصطلاح اصل نقطه ثابت باناخ را برای برخی انقباضات غیرخطی در فضاهای متریک احتمالی کامل یا به طور معادل، در فضاهای متریک فازی کامل به معنای کراموسیل و میشالک حل کرد. با استفاده از نمادگذاری ما، او شرایط انقباضی زیر را مطالعه کرد:

$$M(fx, fy, \phi(t)) \geq M(x, y, t) \tag{5.8.3}$$

برای هر $x, y \in X$ و $t > 0$. همچنین، او اشاره کرد که اگر نقطه $t_0 > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi\left(t_0\right) = 0$ باشد، آن‌گاه شرط (۵.۸.۲) نتیجه می‌دهد که

$$0 = M(fx, fx, 0) = M\left(fx, fx, \phi\left(t_0\right)\right) \geq M\left(gx, gx, t_0\right) = 1$$

[19] Jachymski

که یک تناقض است. به بیان خودش، اگر نقطه $t_\circ > \circ$ وجود داشته باشد که $\phi\left(t_\circ\right) = \circ$ باشد، کلاس φ-انقباضات احتمالاتی تهی است. در نتیجه، منطقی است که فرض کنیم $\phi(t) > \circ$ برای هر $t > \circ$.

تعریف ۵.۸.۱۵. فرض کنیم خانواده همه توابع $\phi : (\circ, \infty) \to (\circ, \infty)$ را با Φ' نشان دهیم به طوری که در خاصیت‌های زیر صدق کنند:

(Φ'_1) برای هر $t > \circ$، $\circ < \phi(t)$.

(Φ'_2) برای هر $t > \circ$، $\lim_{k\to\infty} \phi^k(t) = \circ$.

با شرط (Φ'_2)، همچنین داریم

$$\phi(t) < t$$

برای هر $t > \circ$. بدیهی است که $\Phi \subset \Phi'$.

نتیجه اصلی این بخش قضیه زیر است.

قضیه ۵.۸.۱۶. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک *KM-FMS* باشد به طوری که $*$ یک t-نرم نوع H باشد و $f, g : X \to X$ نگاشت‌های سازگار ضعیف دارای *CLRg*-خاصیت باشند. . فرض کنیم $\phi \in \Phi'$ و $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$M(fx, fy, \phi(t)) \geq *^N M(gx, gy, t) \tag{۵.۸.۴}$$

برای هر $x, y \in X$ و $t > \circ$. در این صورت f و g دارای a نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد هستند، یعنی یک نقطه منحصر به فرد $\omega \in X$ وجود دارد به طوری که $f\omega = g\omega = \omega$.

علاوه بر این، اگر $z \in X$ یک نقطه تلاقی دلخواه از f و g باشد، آن‌گاه $\omega = fz = gz$ تنها نقطه ثابت مشترک آن‌هاست.

اثبات. چون f و g دارای CLRg-خاصیت هستند، یک دنباله $\{x_n\}$ در X و یک نقطه $z \in X$ وجود دارد به طوری که $\{fx_n\} \to g(z)$ و $\{gx_n\} \to g(z)$ زمانی که $n \to \infty$. طبق ۵.۸.۱۴

داریم $fz = gz$. در طول بقیه اثبات، فرض می‌کنیم z یک نقطه تلاقی دلخواه از f و g باشد. قرار می‌دهیم $\omega = fz = gz$.

اکنون، نشان می‌دهیم که ω یک نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد از f و g است. با در نظر گرفتن این‌که f و g نگاشت‌های سازگار ضعیفی هستند، نتیجه می‌گیریم

$$fz = gz \Longrightarrow fgz = gfz \Longrightarrow f\omega = g\omega.$$

حال ادعا می‌کنیم که $g\omega = \omega$. در واقع، $\varepsilon, t > ۰$ دلخواه را در نظر می‌گیریم. چون $*$ از نوع H است، $\eta \in (۰, ۱)$ وجود دارد به طوری که اگر $a \in (۱ - \eta, ۱]$، آن‌گاه داریم

$$*^m a > ۱ - \varepsilon \tag{۵.۸.۵}$$

برای هر $m \in \mathbb{N}$. با استفاده از (KM-6) در تعریف ۲.۱.۲، می‌دانیم که

$$\lim_{s \to \infty} M(g\omega, \omega, s) = ۱$$

و بنابراین $t_\circ > ۰$ وجود دارد به طوری که $M\left(g\omega, \omega, t_\circ\right) > ۱ - \eta$. اکنون با اعمال (۵.۸.۵)، نتیجه می‌شود که

$$*^m M\left(g\omega, \omega, t_\circ\right) > ۱ - \varepsilon \tag{۵.۸.۶}$$

برای هر $m \in \mathbb{N}$. توجه داریم که

$$\begin{aligned} M\left(g\omega, \omega, \phi\left(t_\circ\right)\right) &= M\left(gfz, fz, \phi\left(t_\circ\right)\right) \\ &= M\left(fgz, fz, \phi\left(t_\circ\right)\right) \\ &\geq *^N M\left(ggz, gz, t_\circ\right) \\ &= *^N M\left(g\omega, \omega, t_\circ\right). \end{aligned}$$

علاوه بر این، داریم

$$
\begin{aligned}
M\left(g\omega,\omega,\phi^{۲}\left(t_{\circ}\right)\right) &= M\left(fgz,fz,\phi\left(\phi\left(t_{\circ}\right)\right)\right)\\
&\geq *^{N}M\left(ggz,gz,\phi\left(t_{\circ}\right)\right)\\
&= *^{N}M\left(g\omega,\omega,\phi\left(t_{\circ}\right)\right)\\
&\geq *^{N}\left(*^{N}M\left(g\omega,\omega,t_{\circ}\right)\right)\\
&= *^{N^{۲}}M\left(g\omega,\omega,t_{\circ}\right).
\end{aligned}
$$

با تکرار این استدلال، می‌توان با استقرا ثابت کرد که

$$M\left(g\omega,\omega,\phi^{k}\left(t_{\circ}\right)\right) \geq *^{N^{k}}M\left(g\omega,\omega,t_{\circ}\right) \tag{۵.۸.۷}$$

برای هر $k\in\mathbb{N}$. چون $\phi\in\Phi'$، داریم $\phi^{k}\left(t_{\circ}\right)\to\circ$ زمانی که $n\to\infty$. همچنین، چون $t>\circ$، $k_{\circ}\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\phi^{k_{\circ}}\left(t_{\circ}\right)<t$. اکنون از (۵.۸.۶) و (۵.۸.۷) نتیجه می‌شود که

$$
\begin{aligned}
M(g\omega,\omega,t) &\geq M\left(g\omega,\omega,\phi^{k_{\circ}}\left(t_{\circ}\right)\right)\\
&\geq *^{N^{k_{\circ}}}M\left(g\omega,\omega,t_{\circ}\right)\\
&> ۱-\varepsilon.
\end{aligned}
$$

چون $\varepsilon,t>\circ$ دلخواه هستند، نتیجه می‌گیریم که $M(g\omega,\omega,t)=۱$ برای هر $t>\circ$، یعنی $g\omega=\omega$. این ثابت می‌کند که $f\omega=g\omega=\omega$ و بنابراین ω یک نقطه ثابت مشترک f و g است.

برای اثبات منحصر به فرد بودن نقطه ثابت مشترک ω از f و g، فرض کنیم $y\in X$ نقطه ثابت دیگر f و g باشد، یعنی $fy=gy=y$. $\varepsilon,t>\circ$ ثابت و دلخواه را در نظر می‌گیریم. چون $*$ از نوع H است، $\eta\in(\circ,۱)$ وجود دارد که در (۵.۸.۵) صدق می‌کند. با استفاده از تعریف *GV-MFMS*، می‌دانیم که $\lim_{s\to\infty}M(\omega,y,s)=۱$ و بنابراین $t_{\circ}>\circ$ وجود دارد به طوری که $M\left(\omega,y,t_{\circ}\right)>۱-\eta$. با استفاده از (۵.۸.۵)، نتیجه می‌شود که

$$*^{m}M\left(\omega,y,t_{\circ}\right)>۱-\varepsilon$$

برای هر $m \in \mathbb{N}$. توجه داریم که

$$\begin{aligned} M\left(\omega, y, \phi\left(t_{0}\right)\right) &= M\left(f\omega, fy, \phi\left(t_{0}\right)\right) \\ &\geq *^{N} M\left(g\omega, gy, t_{0}\right) \\ &= *^{N} M\left(\omega, y, t_{0}\right). \end{aligned}$$

علاوه بر این، داریم

$$\begin{aligned} M\left(\omega, y, \phi^{2}\left(t_{0}\right)\right) &= M\left(f\omega, fy, \phi\left(\phi\left(t_{0}\right)\right)\right) \\ &\geq *^{N} M\left(g\omega, gy, \phi\left(t_{0}\right)\right) \\ &= *^{N} M\left(\omega, y, \phi\left(t_{0}\right)\right) \\ &\geq *^{N}\left(*^{N} M\left(\omega, y, t_{0}\right)\right) \\ &= *^{N^{2}} M\left(\omega, y, t_{0}\right) \end{aligned}$$

با تکرار این استدلال، هم‌چنین می‌توان با استقراء نیز اثبات کرد که

$$M\left(\omega, y, \phi^{k}\left(t_{0}\right)\right) \geq *^{N^{k}} M\left(\omega, y, t_{0}\right)$$

برای هر $k \in \mathbb{N}$. چون $\phi \in \Phi$، پس داریم $\phi^{k}\left(t_{0}\right) \rightarrow 0$ زمانی که $n \rightarrow \infty$. هم‌چنین، چون $t > 0$، $k_{0} \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\phi^{k_{0}}\left(t_{0}\right) < t$. بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} M(\omega, y, t) &\geq M\left(\omega, y, \phi^{k_{0}}\left(t_{0}\right)\right) \\ &\geq *^{N^{k_{0}}} M\left(\omega, y, t_{0}\right) \\ &> 1-\varepsilon. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن این‌که $\varepsilon, t > 0$ دلخواه هستند، نتیجه می‌گیریم که برای هر $t > 0$، $M(\omega, y, t) = 1$؛ یعنی $\omega = y$. این ثابت می‌کند که f و g یک نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد دارند و لذا اثبات کامل است. $\square$

توجه داریم که یکی از مزایای اصلی قضیه قبلی این است که ما فرض نمی‌کنیم که $(X, M, *)$، مانند اکثر نتایج در نظریه نقطه ثابت، کامل است.

مثال ۵.۸.۱۷. فرض کنیم $X = (\circ, \infty)$ دارای متریک فازی استاندارد M وابسته به متریک اقلیدسی $d_e(x,y) = |xy|$ در X باشد. یعنی، M به صورت زیر تعریف می‌شود

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \circ, & t = \circ \text{ اگر} \\ \frac{t}{d_e(x,y)+t}, & t > \circ \text{ اگر} \end{cases}$$

در این صورت (X, M) یک FMS تحت $* = \min$ است. فرض کنیم $f, g : X \to X$ نگاشت‌هایی باشند که برای هر $x \in X$ به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$fx = \begin{cases} ۱, & \circ < x \leq ۱ \text{ اگر} \\ x, & ۱ < x < ۲ \text{ اگر} \\ ۲, & x \geq ۲ \text{ اگر} \end{cases} \qquad gx = \begin{cases} ۵, & \circ < x \leq ۱ \text{ اگر} \\ ۹ - ۴x, & ۱ < x < ۲ \text{ اگر} \\ ۱, & x \geq ۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

نگاشت‌های f و g سازگار ضعیف هستند، زیرا اگر $fx = gx$، آن‌گاه $x \in (۱, ۲)$ و تساوی $x = ۹ - ۴x$ دارای جواب منحصربه‌فرد $\omega_\circ = \frac{۹}{۵}$ می‌باشد. در این نقطه داریم $fg\left(\frac{۹}{۵}\right) = gf\left(\frac{۹}{۵}\right)$. علاوه بر این، با استفاده از این که f و g پیوسته هستند و دنباله $\{x_n\}$ برای هر $n \geq ۱$ با ضابطه $x_n = \frac{۹n-۴}{۵n}$ تعریف می‌شود، نتیجه می‌گیریم $fx_n \to g\omega_\circ$ و $\{gx_n\} \to g\omega_\circ$ زمانی که $n \to \infty$ و بنابراین f و g دارای CLRg−خاصیت هستند. اگر برای هر $t > \circ$ فرض کنیم $\phi(t) = \frac{t}{۴}$. آن‌گاه به راحتی می‌توانیم نشان می‌دهیم که f و g با استفاده از $N = ۱$، در شرایط انقباضی (۵.۸.۴) صدق می‌کنند. در این صورت f و g یک نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد دارند که $\omega_\circ = \frac{۹}{۵}$ است.

در مرحله بعد، نحوه استفاده از قضیه ۵.۸.۱۶ را برای به دست آوردن نتایجی در نقاط ثابت مشترک، سه‌تایی و چهارتایی نشان می‌دهیم. ما فقط باید نتیجه اصلی خود را به حالت X^N، جایی که $N \in \{۲, ۳, ۴\}$ اختصاص دهیم. با $N = ۲$ شروع می‌کنیم.

نتیجه ۵.۸.۱۸. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک *KM-FMS* باشد به طوری که $*$ یک t−نرم از نوع H باشد. فرض کنیم $F : X^۲ \to X$ و $g : X \to X$ دو نگاشت سازگار ضعیف دارای *CLRg*−خاصیت باشند. همچنین فرض کنیم $\phi \in \Phi'$ وجود دارد به طوری که

$$M(F(x,y), F(u,v), \phi(t)) \geq M(gx, gu, t) * M(gy, gv, t) \qquad (۵.۸.۸)$$

برای هر $x, y, u, v \in X$ و $t > ۰$. در این صورت F و g یک نقطه ثابت مشترک دوتایی منحصر به فرد ω دارند. علاوه بر این، ω به شکل $\omega = (z, z)$ است، که در آن $z \in X$.

اثبات. طبق قسمت (۱) و (۲) از ۵.۸.۸، $(X^۲, M^۲, *)$ یک FMS کامل است. طبق لم ۵.۸.۱۱، $T_F^۲$ و $G^۲$ w-سازگار هستند. طبق لم ۵.۸.۱۳، $T_F^۲$ و $G^۲$ در CLRg-خاصیت صدق می‌کنند.

سرانجام، شرط انقباضی (۵.۸.۸) و جابه‌جایی $*$ نتیجه می‌دهد که

$$
\begin{aligned}
& M^۲\left(T_F^۲(x, y), T_F^۲(u, v), \phi(t)\right) \\
= & M^۲((F(x, y), F(y, x)), (F(u, v), F(v, u)), \phi(t)) \\
= & M(F(x, y), F(u, v), \phi(t)) \\
& * M(F(y, x), F(v, u), \phi(t)) \\
\geq & [M(gx, gu, t) * M(gy, gv, t) \\
& * [M(gy, gv, t) * M(gx, gu, t) \\
= & *^۲ [M(gx, gu, t) * M(gy, gv, t)] \\
= & *^۲ M^۲((gx, gy), (gu, gv), t) \\
= & *^۲ M^۲\left(G^۲(x, y), G^۲(u, v), t\right).
\end{aligned}
$$

اکنون طبق قضیه ۵.۸.۱۶، $T_F^۲$ و $G^۲$ یک نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد دارند، یعنی یک نقطه $\omega = (\omega_۱, \omega_۲) \in X^۲$ به طوری که $T_F^۲\omega = G^۲\omega = \omega$. طبق قسمت (۳) از ۵.۸.۱۰، ω نقطه ثابت مشترک دوتایی منحصر به فرد F و g است. با پیروی نقطه به نقطه استدلال برهان قبلی، می‌توان اثبات کرد

$$
M(\omega_۱, \omega_۲, t) > ۱ - \varepsilon
$$

برای هر $\varepsilon, t > ۰$، بنابراین $\omega_۱ = \omega_۲$ و ω به شکل (z, z) است که این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

نتیجه ۵.۸.۲۰. قضیه ۵.۸.۷ بلافاصله از نتیجه ۵.۸.۱۸ نتیجه می‌شود.

نتیجه ۵.۸.۷ از دو جهت بهتر از قضیه ۵.۸.۷ است:

۱. در نتیجه ۵.۸.۱۸، از $\phi \in \Phi'$ استفاده می‌کنیم و Φ' یک کلاس از توابع عمومی‌تر از Φ است.

۲. نتیجه ما برای فضاهای متریک فازی به معنای کراموسیل و میشالک معتبر است و بنابراین آن‌ها برای فضاهای متریک فازی به معنای جورج و ویرامانی نیز معتبر هستند.

نتیجه ۵.۸.۲۰. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک *KM-FMS* باشد به طوری که $*$ یک t-نرم از نوع H باشد. فرض کنیم $F : X^۳ \to X$ و $g : X \to X$ سازگار ضعیف دارای *CLRg*-خاصیت باشند. فرض کنیم $\phi \in \Phi'$ وجود دارد به طوری که

$$M(F(x,y,z), F(u,v,w), \phi(t))$$

$$\geq M(gx, gu, t) * M(gy, gv, t) * M(gz, gw, t)$$

برای هر $x, y, z, u, v, w \in X$ و $t > ۰$. در این صورت F و g یک نقطه ثابت مشترک سه‌تایی ω دارند. علاوه بر این، ω به شکل $\omega = (z, z, z)$ است که $z \in X$ است.

نتیجه ۵.۸.۲۱. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک *KM-FMS* باشد به طوری که $*$ یک t-نرم از نوع H باشد. فرض کنیم $F : X^۴ \to X$ و $g : X \to X$ نگاشت سازگار ضعیف دارای *CLRg*-خاصیت باشند. فرض کنیم $\phi \in \Phi'$ وجود دارد به طوری که

$$M\left(F\left(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\right), F\left(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴\right), \phi(t)\right) \geq \mathop{*}_{i=۱}^{۴} M\left(gx_i, gy_i, t\right)$$

برای هر $\left(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\right), \left(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴\right) \in X^۴$ و $t > ۰$. در این صورت F و g یک نقطه ثابت مشترک چهارتایی ω دارند. علاوه بر این، ω به شکل $\omega = (z, z, z, z)$ است، که در آن $z \in X$ است.

در ادامه، قضیه ۵.۸.۱۶ را به حالتی اختصاص می‌دهیم که در آن g نگاشت همانی در X است.

نتیجه ۵.۸.۲۲. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک *KM-FMS* باشد به طوری که $*$ یک t-نرم از نوع H باشد و $f : X \to X$ یک نگاشت باشد به طوری که یک دنباله M-همگرا مانند $\{x_n\}$ در X وجود داشته باشد که در

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

صدق می‌کند. فرض کنیم $\phi \in \Phi'$ و $N \in \mathbb{N}$ وجود دارند به طوری که

$$M(fx, fy, \phi(t)) \geq *^N M(x, y, t)$$

برای هر $x, y \in X$ و $t > ۰$. در این صورت f یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

ما به خواننده واگذار کردیم تا نتیجه‌های ۵.۸.۱۸، ۵.۸.۲۰ و ؟؟ را در حالتی که g نگاشت همانی روی X می‌باشد، اختصاص دهند. برای پایان این بخش، قضیه ۵.۸.۱۶ را به حالتی که در آن برای هر $t > ۰$، $\phi(t) = kt$ که $k \in (۰, ۱)$، اختصاص می‌دهیم.

نتیجه ۵.۸.۲۳. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک *FMS* باشد به طوری که $*$ یک t-نرم نوع H باشد و $f, g : X \to X$ دو نگاشت سازگار ضعیف دارای *CLRg*-خاصیت باشند. فرض کنیم $k \in (۰, ۱)$ و $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$M(fx, fy, kt) \geq *^N M(gx, gy, t)$$

برای هر $x, y \in X$ و $t > ۰$. در این صورت f و g یک نقطه ثابت مشترک منحصربفرد دارند، یعنی یک $\omega \in X$ یکتا وجود دارد به طوری که $f\omega = g\omega = \omega$.

علاوه بر این، اگر $z \in X$ هر نقطه تلاقی از f و g باشد، آن‌گاه $\omega = fz = gz$ تنها نقطه ثابت مشترک آن‌هاست.

اکنون، ما فقط نتیجه قبلی را به حالت چهارتایی اختصاص می‌دهیم تا این نتیجه را با قضیه ۱۸ در رولدان و همکاران مقایسه کنیم [۱۲۹].

نتیجه ۵.۸.۲۴. فرض کنیم $(X, M, *)$، یک *KM-FMS* باشد به طوری که $*$ یک t-نرم از نوع H باشد. فرض کنیم $F : X^۴ \to X$ و $g : X \to X$ دو نگاشت سازگار ضعیف دارای *CLRg*-خاصیت باشند. فرض کنیم $k \in (۰, ۱)$ وجود دارد به طوری که

$$M\left(F\left(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\right), F\left(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴\right), kt\right) \geq \mathop{*}_{i=۱}^{۴} M\left(gx_i, gy_i, t\right)$$

برای هر $(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴) \in X^۴$ ، $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ و $t > ۰$. در این صورت F و g یک نقطه ثابت مشترک چهارتایی ω دارند. علاوه بر این، ω به شکل $\omega = (z, z, z, z)$ است، که در آن $z \in X$ است.

تذکر ۵.۸.۲۳. توجه داریم که اگر نگاشت‌ها خاصیت .E.A را به معنای عامری و متوکل [۱] (در حالت تک بعدی) و $f(X) \subseteq g(X)$ یا به معنای جین و همکاران [۸۱] (در حالت دوتایی) و $F\left(X^N\right) \subseteq g(X)$ صدق کنند، آن‌گاه نتایج قبلی نیز صادق است. زیرا خاصیت E.A. در هر دو مورد قوی‌تر از CLRg−خاصیت است.

۵.۹ دنباله‌های ψ-انقباضی فازی و قضایای نقطه ثابت

در این بخش، از نتایج [۵۹] برای ارائه یک قضیه نقطه ثابت در زمینه فضاهای متریک فازی به معنای جورج و ویرامانی استفاده می‌کنیم. به عنوان پیامدهای نتایج، می‌توانیم برخی از قضیه‌های نقطه ثابت را که میهت[۲۰] در [۱۱۱] و برخی از قضیه‌های نقطه ثابت که واردوسکی[۲۱] در [۱۴۷] اثبات کرده‌اند به دست آوریم. هم‌چنین، ما تا حدی سوالات باز در مورد دنباله‌های کوشی و شرایط انقباضی مطرح شده توسط واردوسکی [۱۴۷] را حل می‌کنیم.

اولین تلاش برای گسترش قضیه انقباض معروف باناخ در تنظیمات KM-FMS توسط گارابیک[۲۲] در [۵۶] انجام شد. بعدها، گرگوری[۲۳] و ساپنا[۲۴] [۳۷] مفهوم دیگری از نگاشت انقباضی فازی ارائه کردند و کاربرد آن را در نظریه نقطه ثابت در هر دو زمینه فضاهای متریک فازی که در بالا ذکر شد مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها در مطالعه خود، نیاز به اضافه شدن شرایط اضافی برای کامل بودن فضاهای متریک فازی برای به دست آوردن برخی قضایای نقطه ثابت داشتند که تفاوت‌های قابل توجهی با نظریه کلاسیک دارند. بنابراین، در [۳۷]، سؤال زیر فرمول‌بندی شد:

(Q1): آیا یک دنباله انقباضی فازی یک دنباله کوشی به معنای جورج و ویرامانی است؟

---
[20] Mihet
[21] Wardowski
[22] Grabiec
[23] Gregori
[24] Sapena

در [۱۱۱]، میهت نشان داد که پاسخ به این سوال در زمینه KM-FMS منفی است [۱۱۱، تذکر ۳.۱]. بعدها، این مفهوم از یک نگاشت انقباضی فازی و سایر مواردی که در مراجع ظاهر شده توسط میهت در [۱۱۱] در معرفی مفهوم نگاشت ψ-انقباضی فازی تعمیم داده شد و او چند قضیه نقطه ثابت را برای کلاس KM-FMSهای غیر ارشمیدسی کامل به دست آورد.

اخیرا واردوسکی [۱۴۷] مشارکت جدیدی در مطالعه نظریه نقطه ثابت در فضاهای متریک فازی داشته است. نویسنده در [۱۴۷] مفهوم نگاشت‌های H-انقباضی فازی (تعریف ۲.۹) را معرفی کرده است که تعمیم مفهوم ارائه شده توسط گرگوری و ساپنا می‌باشد. او قضیه نقطه ثابت زیر را در فضاهای متریک کامل فازی کامل به معنای جورج و ویرامانی به دست آورد.

قضیه ۵.۹.۱ (واردوسکی [۱۴۷]). فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل باشد و $f : X \to X$ یک نگاشت H-انقباضی فازی نسبت به $\eta \in H$ باشد طوری که

(a) برای هر $x \in X, k \in \mathbb{N}$ و هر دنباله $(0, \infty) \supset \{t_i\}$ با $t_i \searrow 0$ داشته باشیم $\prod_{i=1}^{k} M\left(x, f(x), t_i\right) \neq 0$.

(b) اگر $r * s > 0$، آن‌گاه برای هر $r, s \in \{M(x, f(x), t) : x \in X, t > 0\}$ داشته باشیم $\eta(r * s) \leq \eta(r) + \eta(s)$.

(c) $\{\eta\left(M\left(x, f(x), t_i\right)\right) : i \in \mathbb{N}\}$ برای هر $x \in X$ و هر دنباله $(0, \infty) \supset \{t_i\}$ با $t_i \searrow 0$ کران‌دار باشد.

در این صورت f یک نقطه ثابت منحصر به فرد $x^* \in X$ دارد و برای هر $x_0 \in X$، دنباله $\{f^n\left(x_0\right)\}$ به نقطه x^* همگرا می‌شود.

واردوسکی در [۱۴۷] سؤال زیر را مطرح کرد: (Q2): آیا می‌توان شرط (a) را در قضیه اخیر حذف کرد؟

توجه داریم که اخیرا، گرگوری و مینان[۲۵] در [۵۸] نشان داده‌اند که کلاس نگاشت‌های H-انقباضی فازی مشمول در کلاس نگاشت‌های ψ-انقباضی است.

در این بخش، سؤال (Q1) را برای کلاس (کلی‌تر) نگاشت‌های ψ-انقباضی فازی زمانی که M قوی است (لم ۳.۱۲) یا M برای هر $x, y \in X$ در $\bigwedge_t > \circ M(x,y,t) > \circ$ صدق می‌کند (نتیجه ۳.۸) به صورت مثبت پاسخ داده شده است. سپس یک قضیه نقطه ثابت فازی (قضیه ۳.۳) بیان می‌شود. در نتیجه، به صورت مثبت، به سؤال (Q2) پاسخ داده می‌شود و علاوه بر این، شرط (b) در قضیه فوق نیز قابل حذف است (نتیجه ۳.۶). همچنین، به عنوان نتیجه‌ای لم ۳.۱۲، یک قضیه نقطه ثابت بیان شده توسط میهت (قضیه ۳.۱۳) نتیجه می‌شود.

تعریف ۵.۹.۲ (گرگوری و روماگورا [۶۱]). متریک فازی M روی X ایستا نامیده می‌شود اگر M به t بستگی نداشته باشد؛ یعنی، برای هر $x, y \in X$، تابع $M_{x,y}(t) = M(x,y,t)$ ثابت باشد. در این حالت به جای $M(x,y,t)$، $M(x,y)$ می‌نویسیم.

تعریف ۵.۹.۳. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد. متریک فازی M (یا فضای متریک فازی $(X, M, *)$) قوی (غیر ارشمیدسی) نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y, z \in X$ و $t > \circ$ در شرط زیر صدق کند.

$$M(x,z,t) \geq M(x,y,t) * M(y,z,t).$$

تعریف ۵.۹.۴ (میهت [۱۱۱]). فرض کنیم Ψ خانواده تمام نگاشت‌های $\psi : (\circ, ۱] \to (\circ, ۱]$ باشد به طوری که ψ پیوسته و غیر نزولی باشد و برای هر $t \in (\circ, ۱)$، $\psi(t) > t$. فرض کنیم $\psi \in \Psi$.

۱. نگاشت $f : X \to X$ یک نگاشت ψ-انقباضی فازی نامیده می‌شود اگر

$$M(f(x), f(y), t) \geq \psi(M(x,y,t)) \qquad (۵.۹.۱)$$

برای هر $x, y \in X$ و $t > \circ$.

[25] Minan

۲. دنباله $\{x_n\}$ در X یک دنباله ψ-انقباضی فازی نامیده می‌شود اگر

$$M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, t\right) \geq \psi\left(M\left(x_n, x_{n+1}, t\right)\right) \qquad (۵.۹.۲)$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $t > 0$.

تعریف ۵.۹.۵ (واردووسکی [۱۴۷]). خانواده نگاشت‌های $\eta : (0, 1] \to [0, \infty)$ که دو شرط زیر صدق می‌کند را با H نشان می‌دهیم.

(H1) η، $(0, 1]$ را به $[0, \infty)$ ببرد.

(H2) η نزولی اکید باشد.

گوییم نگاشت $f : X \to X$ یک نگاشت H-انقباضی نسبت به $\eta \in H$ است اگر $k \in (0, 1)$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in X$ و $t > 0$ در شرط زیر صدق کند.

$$\eta(M(f(x), f(y), t)) \leq k\eta(M(x, y, t)).$$

در [۵۸]، گرگوری و مینانا گزاره زیر را ارائه کردند که به کلاس نگاشت‌های ψ-انقباضی فازی و کلاس نگاشت‌های H-انقباضی فازی مربوط می‌شود.

گزاره ۵.۹.۶ (گرگوری و مینانا [۵۸]). کلاس نگاشت‌های H-انقباضی فازی مشمول در کلاس نگاشت‌های ψ-انقباضی فازی است.

در [۱۱۲]، میهت مفهوم یک نگاشت H-انقباضی فازی را تعمیم داد و نیاز به نگاشت f را همانطور که در تعریف زیر می‌بینیم حذف کرد. ما این دسته بزرگتر از نگاشت‌های انقباضی فازی را با نگاشت‌های H_w-انقباضی فازی نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۹.۷ (میهت [۱۱۲]). فرض کنیم H_w خانواده همه نگاشت‌های پیوسته و نزولی اکید $\eta : (0, 1] \to [0, \infty)$ با $\eta(1) = 0$ باشد و $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد. گوییم نگاشت $f : X \to X$، H_w-انقباضی نسبت به $\eta \in H_w$ است اگر $k \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ و $t > 0$ در شرط زیر صدق کند.

$$\eta(M(f(x),f(y),t)) \leq k\eta(M(x,y,t)) \qquad (۵.۹.۴)$$

قضیه ۵.۹.۸ (میهت [۱۱۲]). فرض کنیم $*_g$ نرم اکید تولید شده توسط نگاشت $g \in H_w$ باشد. فرض کنیم $(X,M,*)$ یک فضای متریک *KM*-فازی کامل با $*_g \geq *$ باشد. در این صورت هر نگاشت H_w-انقباضی فازی $f : X \to X$ برای g دارای یک نقطه ثابت است در صورتی که $\lim_{t\to 0^+} M(x,f(x),t) > 0$ برای یک $x \in X$ ($\lim_{t\to 0^+}$ نشان دهنده حد یک طرفه است زمانی که t از سمت راست به ۰ نزدیک می‌شود).

تذکر ۵.۹.۹. در هر دو تعریف اصلی نگاشت ψ-انقباضی فازی و نگاشت فازی H_w-انقباضی، دامنه تعریف ψ و η برابر با $[0,1]$ است، چون نویسنده مطالعه خود را برای KM-FMS انجام داده است.

اکنون هدف از این بخش پاسخ به سوال واردوسکی است که مطالعه خود را در فضاهای متریک فازی انجام داده است. پس در تعریف ۵.۹.۴ و ۵.۹.۷، دامنه مذکور را به $(0,1]$ تغییر داده‌ایم، زیرا در فضای متریک فازی $M(x,y,t) > 0$ برای هر $x,y \in X$ و هر $t > 0$. بنابراین نیازی به تعریف ψ و η در ۰ نیست. اکنون، نتایج ما نیز می‌تواند برای KM-FMS ایجاد شود. (در واقع، در اثبات قضایای ذکر شده، این واقعیت که $M(x,y,t)$ می‌تواند مقدار ۰ را برای برخی $x,y \in X$ و $t > 0$ بگیرد، هیچ نقشی ندارد).

۵.۹.۱ قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های ψ-انقباضی فازی

ما این بخش را با دو لم بعدی تحت اصطلاحات بالا برای نتایج اصلی آغاز می‌کنیم.

لم ۵.۹.۱۰. اگر $\psi \in \Psi$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 1$ برای هر $t \in (0,1]$.

اثبات. فرض کنیم که $t_0 \in (0,1)$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t_0) \neq 1$. توجه داریم که $\psi^{n+1}(t_0) > \psi^n(t_0)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. در این صورت دنباله $\{\psi^n(t_0)\}$ در $(0,1]$ همگرا می‌شود، زیرا صعودی اکید است.

فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t_\circ) = l$ برای یک $l \in (\circ, ۱)$. در این صورت، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\psi^n(t_\circ) \leq l$ و بنابراین $\psi(\psi^{n-۱}(t_\circ)) \leq l$ و طبق پیوستگی ψ، داریم

$$l \geq \psi\left(\lim_{n\to\infty} \psi^{n-۱}(t_\circ)\right) = \psi(l) > l$$

که تناقض است. $\square$

لم ۵.۹.۱۱. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی و $\{x_n\}$ یک دنباله ψ-انقباضی فازی در X باشد. اگر $\bigwedge_{t>\circ} M(x_\circ, x_۱, t) > \circ$، آن‌گاه $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است.

اثبات. فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله ψ-انقباضی فازی در X باشد و فرض کنیم که

$$\bigwedge_{t>\circ} M(x_\circ, x_۱, t) = a > \circ.$$

اکنون نشان می‌دهیم

$$\lim_{n\to\infty}\left(\bigwedge M(x_n, x_{n+۱}, t)\right) = ۱.$$

برای این‌کار، ابتدا با استقراء روی n ثابت می‌کنیم که

$$\bigwedge_{t>\circ} M(x_n, x_{n+۱}, t) \geq \psi^n(a) \tag{۵.۹.۵}$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$. چون $\{x_n\}$ یک دنباله ψ-انقباضی فازی است، برای هر $t > \circ$ داریم

$$M(x_۱, x_۲, t) \geq \psi(M(x_\circ, x_۱, t)) \geq \psi()$$

و لذا

$$\bigwedge_{t>\circ} M(x_۱, x_۲, t) \geq \psi(a).$$

فرض کنیم $\bigwedge_{t>\circ} M(x_n, x_{n+۱}, t) \geq \psi^n(a)$ برای یک $n \in \mathbb{N}$. اکنون مشاهده می‌شود که نامساوی برای $n+۱$ برقرار است. مانند فوق، چون $\{x_n\}$ یک دنباله ψ-انقباضی فازی است، برای هر $t > \circ$،

داریم

$$\begin{aligned} M\left(x_{n+۱}, x_{n+۲}, t\right) &\geq \psi\left(M\left(x_n, x_{n+۱}, t\right)\right) \\ &\geq \psi\left(\bigwedge M\left(x_n, x_{n+۱}, t\right)\right) \\ &\geq> ۰ \\ &\geq \left(\psi^n(a)\right). \end{aligned}$$

که در آن، نامساوی دوم نتیجه‌ای است از این‌که $M(x, y, \cdot)$ برای هر $x, y \in X$ غیر نزولی و ψ صعودی است و آخرین نامساوی با استفاده از فرض استقرا به دست می‌آید. در این صورت داریم

$$\bigwedge_{t>۰} M\left(x_{n+۱}, x_{n+۲}, t\right) \geq \psi^{n+۱}(a).$$

بنابراین داریم

$$\bigwedge_{t>۰} M\left(x_n, x_{n+۱}, t\right) \geq \psi^n(a)$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ و به همین ترتیب، با گرفتن حد $n \to \infty$ و استفاده از ۵.۹.۱۰ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left(\bigwedge_{t>۰} M\left(x_n, x_{n+۱}, t\right)\right) \geq \lim_{n\to\infty} \psi^n(a) = ۱.$$

بنابراین، نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty}\left(\bigwedge_{t>۰} M\left(x_n, x_{n+۱}, t\right)\right) = ۱$.

اکنون با برهان خلف نشان می‌دهیم که $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی نیست. در این صورت $\epsilon \in (۰, ۱)$ و $t_۰ > ۰$ وجود دارند به طوری که برای هر $k \in \mathbb{N}$ بتوانیم $m(k), n(k) \in \mathbb{N}$ با $m(k) > n(k) \geq k$ و

$$M\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}, t_۰\right) \leq ۱ - \epsilon$$

پیدا کنیم. $k \in \mathbb{N}$ را ثابت در نظر می‌گیریم. در این صورت می‌توانیم $m(k), n(k) \in \mathbb{N}$ بیابیم به طوری که $m(k) > n(k) \geq k$ و

$$M\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}, t_۰\right) \leq ۱ - \epsilon.$$

حال برای $n(k)$ داده شده، $m_n(k)$ را به عنوان کوچکترین عدد صحیح انتخاب می‌کنیم به طوری که $m_n(k) > n(k)$ و

$$M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_\circ\right) \leq ۱ - \epsilon.$$

در این صورت داریم

$$M\left(x_{m_n(k)-۱}, x_{n(k)}, t_\circ\right) > ۱ - \epsilon.$$

اکنون ثابت می‌کنیم که $\lim_{k\to\infty} M\left(x_{m_n}(k), x_{n(k)}, t_\circ\right) = ۱ - \epsilon$. برای هر $k \in \mathbb{N}$ و $\delta \in (\circ, t_\circ)$ داریم

$$\begin{aligned} ۱ - \epsilon &\geq M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_\circ\right) \\ &\geq M\left(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)-۱}, \delta\right) * M\left(x_{m_n(k)-۱}, x_{n(k)}, t_\circ - \delta\right). \end{aligned}$$

در این صورت، برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} ۱ - \epsilon &\geq M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_\circ\right) \\ &\geq \lim_{\delta\to\circ}\left(M\left(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)-۱}, \delta\right) * M\left(x_{m_n(k)-۱}, x_{n(k)}, t_\circ - \delta\right)\right) \\ &= \left(\lim_{\delta\to\circ} M\left(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)-۱}, \delta\right)\right)\left(\lim_{\delta\to\circ} M\left(x_{m_n(k)-۱}, x_{n(k)}, t_\circ - \delta\right)\right) \\ &= \left(\bigwedge_{t>\circ} M\left(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)-۱}, t\right)\right) * M\left(x_{m_n(k)-۱}, x_{n(k)}, t_\circ\right). \end{aligned}$$

که در آن، تساوی اول با استفاده از پیوستگی $*$ به دست آمده است و تساوی دوم نتیجه این است که $M(x, y, \cdot)$ برای هر $x, y \in X$ غیر نزولی و پیوسته است. بنابراین، نتیجه می‌شود که

$$\limsup_{k\to\infty} M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_\circ\right) \leq ۱ - \epsilon$$

و

$$\begin{aligned} &\liminf_{k\to\infty} M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_\circ\right) \\ \geq\ &\lim_{k\to\infty}\left(\left(\bigwedge M\left(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)-۱}, t\right)\right) * M\left(x_{m_n(k)-۱}, x_{n(k)}, t_\circ\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \left(\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{t>۰} M\left(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)-۱}, t\right)\right)\right) * \left(\lim_{k\to\infty} M\left(x_{\ m_n(k)-۱, x_{n(k)}, t_۰}\right)\right)$$
$$\geq ۱ * (۱-\epsilon)$$
$$= ۱-\epsilon$$

و لذا

$$\begin{aligned} ۱-\epsilon &\geq \limsup_k M\left(x_{m_{n(k)}}, x_{n(k)}, t_۰\right) \\ &\geq \liminf_k M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_۰\right) \\ &\geq ۱-\epsilon. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\lim_k M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_۰\right) = ۱-\epsilon$$

از سوی دیگر، برای هر $k \in \mathbb{N}$ و $\delta \in (۰, t_۰/۲)$، داریم

$$\begin{aligned} &M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_۰\right) \\ \geq &M\left(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)+۱}, \delta\right) * M\left(x_{m_n(k)+۱}, x_{n(k)+۱}, t_۰ - ۲\delta\right) \\ &* M\left(x_{n(k)+۱}, x_{n(k)}, \delta\right) \\ \geq &M\left(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)+۱}, \delta\right) * \psi\left(M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_۰ - ۲\delta\right)\right) \\ &* M\left(x_{n(k)+۱}, x_{n(k)}, \delta\right). \end{aligned}$$

با گرفتن حد $\delta \to ۰$، نتیجه می‌شود که برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} &M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_۰\right) \\ \geq &\left(\bigwedge_{t>۰} M\left(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)+۱}, t\right)\right) \\ &* \psi\left(M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_۰\right)\right) * \left(\bigwedge_{t>۰} M\left(x_{n(k)+۱}, x_{n(k)}, t\right)\right). \end{aligned}$$

با فرض کردن $k \to \infty$، طبق پیوستگی $*$ و پیوستگی ψ، داریم

$$\begin{aligned}
&1-\epsilon \\
&= \lim_{k\to\infty} M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_0\right) \\
&\geq \left(\lim_{k\to\infty}\left(\bigwedge_{t>0} M\left(x_{m_n(k)}, x_{m_n(k)+1}, t\right)\right)\right) * \psi\left(\lim_{k\to\infty} M\left(x_{m_n(k)}, x_{n(k)}, t_0\right)\right) \\
&\quad * \left(\left(\lim_{k\to\infty}\bigwedge_{t>0} M\left(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}, t\right)\right)\right) \\
&= 1 * \psi(1-\epsilon) * 1 \\
&= \psi(1-\epsilon) \\
&> 1-\epsilon
\end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

قضیه زیر یک مشخص‌سازی از کلاس نگاشت‌های ψ-انقباضی فازی با یک نقطه ثابت منحصر به فرد در یک فضای متریک فازی کامل ارائه می‌دهد.

قضیه ۵.۹.۱۲. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل باشد و $f : X \to X$ یک نگاشت ψ-انقباضی فازی باشد. در این صورت f یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد اگر و تنها اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $\bigwedge_{t>0} M(x, f(x), t) > 0$.

اثبات. فرض کنیم f یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد. در این صورت $x \in X$ وجود دارد به طوری که $x = f(x)$. بنابراین $M(x, f(x), t) = M(x, x, t) = 1$ برای هر $t > 0$ و لذا

$$\bigwedge_{t>0} M(x, f(x), t) = 1.$$

برعکس، فرض کنیم که $x \in X$ وجود دارد به طوری که

$$\bigwedge_{t>0} M(x, f(x), t) > 0.$$

گیریم $x_\circ = x$ و برای هر $n \geq ۱$ فرض کنیم $x_n = f^n(x)$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} M\left(x_{n+۱}, x_{n+۲}, t\right) &= M\left(f\left(x_n\right), f\left(x_{n+۱}\right), t\right) \\ &\geq \psi\left(M\left(x_n, x_{n+۱}, t\right)\right). \end{aligned}$$

بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله ψ-انقباضی فازی است. علاوه بر این داریم

$$\bigwedge_{t>\circ} M\left(x_\circ, x_۱, t\right) = \bigwedge_{t>\circ} M(x, f(x), t) > \circ.$$

طبق لم فوق، $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است و چون $(X, M, *)$ کامل است، $y \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n\to\infty} M\left(x_n, y, t\right) = ۱$ برای هر $t > \circ$. از طرفی داریم

$$M\left(f(y), x_{n+۱}, t\right) \geq \psi\left(M\left(y, x_n, t\right)\right)$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $t > \circ$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} M(f(y), y, t) &= \lim_{n\to\infty} M\left(f(y), x_{n+۱}, t\right) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \psi\left(M\left(y, x_n, t\right)\right) \\ &= ۱ \end{aligned}$$

برای هر $t > \circ$. بنابراین y یک نقطه ثابت f است. با استفاده از گزاره ۳٫۱ در [۱۱۱]، می‌توانیم نشان دهیم که این نقطه ثابت، منحصر به فرد است.

□

در ادامه، نشان داده شده است که قضایای نقطه ثابت واردوسکی [۱۴۷، قضیه ۳.۲] و میهت [۱۱۲، قضیه ۲.۴] را می‌توان بدون هیچ شرط اضافی روی t-نرم، به عنوان نتیجه‌هایی از قضایای اصلی ما به دست آورد.

ابتدا، در گزاره زیر، رابطه بین مشخص‌سازی در قضیه ۵.۹.۱۲ و شرایط ارائه شده توسط میهت و واردوسکی را مشاهده می‌کنیم.

گزاره ۵.۹.۱۳. فرض کنیم $(X,M,*)$ یک فضای متریک فازی، $\eta\in H$ و $f:X\to X$ یک نگاشت باشد. برای هر $x\in X$، موارد زیر معادل هستند:

۱. $\bigwedge t>\circ M(x,f(x),t)>\circ$.

۲. $\lim_{t\to\circ^+} M(x,f(x),t)>\circ$.

۳. $\{\eta\left(M\left(x,f(x),t_i\right)\right):i\in\mathbb{N}\}$ برای هر دنباله $\{t_i\}\subset(\circ,\infty)$ که به $\circ$ همگرا باشد، کران‌دار است (برای توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$).

اثبات. بدیهی است که (۱) و (۲) معادل هستند زیرا $M(x,f(x),\cdot)$ غیر نزولی است. هم‌چنین بدیهی است که (۲) $\Rightarrow$ (۳). برای نتیجه گیری اثبات، نشان می‌دهیم که (۳) $\Rightarrow$ (۱).

فرض کنیم $\bigwedge_{t>\circ} M(x,f(x),t)>\circ$ و دنباله $\{t_i\}\subset(\circ,\infty)$ را در نظر می‌گیریم که به $\circ$ همگرا است. فرض کنیم $a=\bigwedge_{t>\circ} M(x,f(x),t)\in(\circ,۱)$. در این صورت $M\left(x,f(x),t_i\right)\geq a$ برای هر $i\in\mathbb{N}$. چون η نزولی اکید است، داریم

$$\eta\left(M\left(x,f(x),t_i\right)\right)\leq\eta(a)$$

برای هر $i\in\mathbb{N}$. از سوی دیگر، $\eta(a)<\infty$، زیرا η نزولی اکید است و $(\circ,۱)$ را به $[\circ,\infty)$ می‌برد. بنابراین داریم

$$\sup\left\{\eta\left(M\left(x,f(x),t_i\right)\right):i\in\mathbb{N}\right\}\leq\eta(a)<\infty$$

که این اثبات را کامل می‌کند. □

در ادامه، نشان می‌دهیم که کلاس نگاشت‌های H_w-انقباضی فازی نیز مشمول در کلاس نگاشت‌های ψ-انقباضی فازی است.

گزاره ۵.۹.۱۴. هر نگاشت H_w-انقباضی فازی یک نگاشت ψ-انقباضی فازی است.

اثبات. فرض کنیم $(X,M,*)$ یک فضای متریک فازی باشد. فرض کنیم که نگاشت $f:X\to X$ نسبت به H_w-انقباضی است. در این صورت $\eta\in H_w$، $k\in(\circ,۱)$ وجود دارد به طوری که برای هر

$x, y \in X$ و $t > ۰$،

$$\eta(M(f(x), f(y), t)) \leq k\eta(M(x, y, t)). \qquad (۵.۹.۶)$$

اگر η پوشا باشد، آن‌گاه f یک نگاشت H–انقباضی فازی است و بنابراین، طبق گزاره ۵.۹.۶، f یک نگاشت ψ–انقباضی فازی است.

حال فرض کنیم که η پوشا نیست. چون η پیوسته و نزولی اکید است، $a \in (۰, \infty)$ وجود دارد به طوری که $\sup\{\eta(t) : t \in]۰, ۱]\} = a$. در این صورت $\eta([۰, ۱]) = [۰, a)$ و $\eta^{-۱} : [۰, a) \to (۰, ۱]$ اکنون خوش تعریف است و نیز به طور بدیهی یک تابع پیوسته است. فرض کنیم $\psi : (۰, ۱] \to (۰, ۱]$ یک تابع باشد، که در آن $\psi(t) = \eta^{-۱}(k\eta(t))$ برای هر $t \in]۰, ۱]$.

اکنون، می‌توان دید که $\psi \in \Psi$. بدیهی است که ψ پیوسته است. فرض کنیم $s, t \in (۰, ۱]$ که $s < t$. چون η نزولی اکید است، نتیجه می‌شود که $k\eta(s) > k\eta(t)$. به علاوه، $\eta^{-۱}$ نیز نزولی اکید است و لذا

$$\eta^{-۱}(k\eta(s)) < \eta^{-۱}(k\eta(t)).$$

بنابراین $\psi(s) < \psi(t)$ و بنابراین ψ صعودی است.

حال نشان می‌دهیم که $\psi(t) > t$ برای هر $t \in (۰, ۱)$. در واقع، فرض می‌کنیم که $\psi(t_۰) \leq t_۰$ برای یک $t_۰ \in (۰, ۱)$. در این صورت $t_۰ \geq \eta^{-۱}(k\eta(t_۰))$ و لذا

$$\eta(t_۰) \leq k\eta(t_۰)$$

که یک تناقض است زیرا $k \in (۰, ۱)$. بنابراین، $\psi \in \Psi$.

در نهایت، می‌توان دید که f یک نگاشت ψ–انقباضی فازی است. در واقع، طبق تعریف ψ و (۵.۹.۶) داریم

$$\begin{aligned} M(f(x), f(y), t) &= \eta^{-۱}(\eta(M(f(x), f(y), t))) \\ &\geq \eta^{-۱}(k \cdot \eta(M(x, y, t))) \\ &= \psi(M(x, y, t)) \end{aligned}$$

که این اثبات را کامل می‌کند. □

نتیجه آخرین گزاره و قضیه ۵.۹.۱۲، نتیجه زیر است که به دو معنا تعمیمی از قضیه ارائه شده توسط واردوسکی می‌باشد [۱۴۷، قضیه ۳.۲]. توجه داریم که این نتیجه بدون هیچ محدودیتی در t-نرم به دست آمده است و همچنین برای کلاس نگاشت‌های H_w-انقباضی فازی ایجاد شده است.

نتیجه زیر نیز نتیجه‌ای را که توسط میهت [۱۱۲، قضیه ۲.۴] ارائه شده است، تعمیم می‌دهد.

نتیجه ۵.۹.۱۵. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل باشد و $f : X \to X$ یک نگاشت H_w-انقباضی فازی باشد. اگر $\bigwedge_{t>0} M(x, f(x), t) > 0$ برای هر $x \in X$، آن‌گاه f یک نقطه ثابت منحصر به فرد $x^* \in X$ دارد و برای هر $x \in X$، دنباله $\{f^n(x)\}$ به نقطه x^* همگرا می‌شود.

اثبات. فرض کنیم f یک نگاشت H_w-انقباضی فازی است. طبق آخرین گزاره، f یک نگاشت ψ-انقباضی فازی است. پس، طبق قضیه ۵.۹.۱۲، f یک نقطه ثابت منحصر به فرد $x^* \in X$ دارد.

فرض کنیم $x \in X$ و دنباله $\{f^n(x)\}$ را در نظر می‌گیریم. با تقلید از اثبات قضیه ۵.۹.۱۲، می‌توانیم نشان دهیم که $\{f^n(x)\}$ به نقطه x^* همگرا می‌شود. □

تذکر ۵.۹.۱۶. با در نظر گرفتن گزاره ۵.۹.۱۳، نتیجه اخیر یک پاسخ مثبت به سؤال مطرح شده توسط واردوسکی است [۹، نتیجه‌گیری]. زیرا $H \subseteq H_w$. علاوه بر این، این نتیجه نشان می‌دهد که شرط (b) در قضیه واردوسکی نیز می‌تواند حذف شود.

شرط خواسته شده در قضیه ۵.۹.۱۲ ($x \in X$ وجود دارد به طوری که $\bigwedge_{t>0} M(x, f(x), t) > 0$) شامل خود-نگاشتی است که در آن وجود یک نقطه ثابت مطالعه شده است. می‌توان دریافت که در مطالعه وجود نقطه ثابت از خودنگاشت، بهتر است هیچ محدودیتی در خودنگاشت‌ها ظاهر نشود، زیرا بیان آن می‌تواند پیچیده باشد. در واقع، معمولاً شرایط در یک قضیه نقطه ثابت در فضای تعریف خودنگاشت داده می‌شود. در ادامه، دو نتیجه به دست می‌آوریم که در آن شرایط خواسته شده شامل خودنگاشت نیست. این نتایج با در نظر گرفتن لم ۵.۹.۱۱ و قضیه ۵.۹.۱۲ فوراً به دست می‌آیند.

نتیجه ۵.۹.۱۷. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی باشد به طوری که

$$\bigwedge_{t>0} M(x,y,t) > 0$$

برای هر $x, y \in X$. در این صورت، هر دنباله ψ-انقباضی فازی یک دنباله کوشی است.

نتیجه ۵.۹.۱۸. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل باشد به طوری که

$$\bigwedge_{t>0} M(x,y,t) > 0$$

برای هر $x, y \in X$ و فرض کنیم $f : X \to X$ یک نگاشت ψ-انقباضی فازی باشد. در این صورت، f یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

تذکر ۵.۹.۱۹. توجه کنید که هر متریک فازی ثابت M در X شرایط صدق می‌کند

$$M(x,y) = \bigwedge_{t>0} M(x,y,t) > 0$$

برای هر $x, y \in X$.

در مثال زیر، متریک‌های فازی غیر ایستایی را می‌بینیم که در این شرط صدق می‌کنند.

مثال ۵.۹.۲۰. ۱. فضای متریک فازی $((0,\infty), M, \cdot)$ را در نظر بگیرید که در آن M به صورت

$$M(x,y,t) = \frac{\min\{x,y\}+t}{\max\{x,y\}+t}.$$

داده شده است. در این صورت داریم

$$\bigwedge_{t>0} M(x,y,t) = \frac{\min\{x,y\}}{\max\{x,y\}} > 0$$

برای هر $x, y \in (0,\infty)$.

۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و M را روی $X^2 \times (0,\infty)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M(x,y,t) = \frac{t+1}{t+1+d(x,y)}.$$

به سادگی می‌توان دید که $(X, M, \cdot)$ یک فضای متریک فازی است و

$$\bigwedge_{t>0} M(x,y,t) = \frac{1}{1+d(x,y)} > 0$$

برای هر $x, y \in X$. توجه داریم که متریک فازی استاندارد $(X, M_d, \cdot)$ در شرط فوق صدق نمی‌کند. در واقع داریم

$$\bigwedge_{t>0} M_d(x,y,t) = \bigwedge_{t>0} \frac{t}{t+d(x,y)} = 0$$

برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$.

به عنوان نتیجه‌ای از نتیجه ۵.۹.۱۷، لم زیر را به دست می‌آوریم.

لم ۵.۹.۲۱. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی قوی باشد. در این صورت هر دنباله ψ-انقباضی فازی یک دنباله کوشی است.

اثبات. فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله ψ-انقباضی فازی باشد. نشان می‌دهیم که برای هر $t > 0$ داریم $\lim_{n,m\to\infty} M(x_n, x_m, t) = 1$. فرض کنیم $t > 0$ ثابت باشد. متریک فازی ایستا که برای هر $x, y \in X$ به صورت

$$M_t(x,y) = M(x,y,t)$$

تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم. چون M_t ثابت است، طبق تذکر ۵.۹.۱۹، شرایط نتیجه ۵.۹.۱۷ برقرار هستند.

از سوی دیگر، $\{x_n\}$ یک دنباله ψ-انقباضی فازی برای M_t است. در واقع داریم

$$\begin{aligned} M_t(x_{n+1}, x_{n+2}) &= M(x_{n+1}, x_{n+2}, t) \\ &\geq \psi(M(x_n, x_{n+1}, t)) \\ &= \psi(M_t(x_n, x_{n+1})) \end{aligned}$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$. در این صورت، طبق نتیجه ۵.۹.۱۷، $\{x_n\}$ یک دنباله M_t-کوشی است؛ یعنی

$$\lim_{n,m\to\infty} M_t(x_n, x_m) = 1$$

و لذا

$$\lim_{n,m\to\infty} M\left(x_n, x_m, t\right) = \lim_{n,m} M_t\left(x_n, x_m\right)$$
$$= ۱.$$

با در نظر گرفتن این‌که $t > ۰$ دلخواه است، برای هر $t > ۰$ داریم $\lim_{n,m} M\left(x_n, x_m, t\right) = ۱$ و بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. $\square$

اکنون، از لم فوق برای به دست آوردن قضیه نقطه ثابت میهت [۱۱۱، قضیه ۳.۰۱]، در فضای متریک فازی (به معنای جورج و ویرامانی) استفاده می‌کنیم.

قضیه ۵.۹.۲۲. فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی کامل (غیر ارشمیدسی) قوی باشد و $f : X \to X$ یک نگاشت ψ-انقباضی فازی باشد. در این صورت f دارای نقطه ثابت منحصر به فرد a است.

اثبات. فرض کنیم $x_۰ \in X$ و $x_n = f^n\left(x_۰\right)$ را برای هر $n \geq ۱$ در نظر می‌گیریم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\{x_n\}$ یک دنباله ψ-انقباضی فازی است. پس بنا به لم قبل، $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است و بنابراین همگرا است. اکنون با استفاده از روشی مشابه با پایان اثبات قضیه ۵.۹.۱۲، می‌توان نشان داد که f یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد. $\square$

تذکر ۵.۹.۲۳. همانطور که قبلاً دیدیم متریک فازی استاندارد M_d در شرط $\bigwedge_{t>۰} M_d(x, y, t) > ۰$، برای هر $x, y \in X$ صدق نمی‌کند و لذا نتیجه ۵.۹.۱۸ نمی‌تواند روی آن اعمال شود. اما قضیه ۵.۹.۲۲ را می‌توان روی M_d اعمال کرد، زیرا همان‌طور که می‌دانیم، M_d قوی است.

۶ فواصل تعمیم یافته و قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک فازی

در این فصل، فاصله تعمیم یافته در فضاهای متریک فازی را مطالعه می‌کنیم و با استفاده از فواصل تعمیم یافته، چند قضیه نقطه ثابت را برای برخی از نگاشت‌های انقباضی در فضاهای متریک فازی اثبات می‌کنیم. در بخش اول، ما ρ-فاصله را در فضاهای متریک فازی مطالعه می‌کنیم که تعمیم مفهوم w-فاصله در فضای متریک است که توسط کادا[۲۶] و همکاران در [۸۵] معرفی شده است. هم‌چنین، چند مثال می‌آوریم و برخی از خاصیت‌های ρ-فاصله را در بررسی می‌کنیم و چند قضیه نقطه ثابت را تحت انقباض ρ-فاصله در فضاهای متریک فازی اثبات می‌کنیم. در بخش دوم، ρ-فاصله را در فضاهای متریک $\mathcal{L}$-فازی بررسی می‌کنیم و چند قضیه نقطه ثابت را در این فضاها اثبات می‌کنیم. در بخش سوم، انقباض زیر را در نظر می‌گیریم:

فرض کنیم $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی، m نشان دهنده ρ-فاصله روی X و T یک نگاشت از X به خودش باشد. هم‌چنین فرض کنیم برای هر $\lambda > ۰$، $k \in (۰, ۱)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ و $t > ۰$ داشته باشیم

$$m(x, y, t) > ۱ - \lambda \Rightarrow m(Tx, Ty, t) > ۱ - k\lambda.$$

برای انقباض فوق در فضاهای متریک فازی، برخی از قضیه‌های نقطه ثابت را اثبات می‌کنیم.

[26] Kada

۶.۱ ρ-فاصله‌ها در فضاهای متریک فازی

اخیراً کادا و همکاران در [۸۵]، مفهوم w-فاصله را در فضاهای متریک معرفی کردند و برخی از قضایای نقطه ثابت را برای تعدادی از نگاشت‌های انقباضی با استفاده از w-فاصله اثبات کردند.

در این بخش با استفاده از مفهوم w-فاصله، ρ-فاصله را روی یک فضای متریک فازی تعریف می‌کنیم.

مراجع

[1] M. Aamri, D. El. Moutawakil, Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions. J. Math. Anal. Appl. 270, 181–188 (2002)

[2] M. Abbas, M.A. Khan, S. Radenovic, Common coupled fixed point theorems in cone metric spaces for w-compatible mappings. Appl. Math. Comput. 217, 195–202 (2010)

[3] M. Abbas, B. Ali, W. Sintunavarat, P. Kumam, Tripled fixed point and tripled coincidence point theorems in intuitionistic fuzzy normed spaces. Fixed Point Theory Appl. 2012, 187 (2012)

[4] H. Adibi, Y.J. Cho, D. O'Regan, R. Saadati, Common fixed point theorems in $\mathcal{L}$-fuzzy metric spaces. Appl. Math. Comput. 182, 820–828 (2006)

[6] C. Alaca, D. Turkoglu, C. Yildiz, Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces. Chaos Solitons Fractals 29, 1073–1079 (2006)

[9] I. Altun, D. Mihe¸t, Ordered non-Archimedean fuzzy metric spaces and some fixed point results. Fixed Point Theory Appl. 2010, 11 pp., Article ID 782680 (2010)

[23] V. Berinde, M. Borcut, Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces. Nonlinear Anal. 74, 4889–4897 (2011)

[27] T.G. Bhaskar, V. Lakshmikantham, J.V. Devi, Monotone iterative technique for functional differential equations with retardation and anticipation. Nonlinear Anal. 66, 2237–2242 (2007)

[28] M. Borcut, V. Berinde, Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces. Appl. Math. Comput. 218, 5929–5936 (2012)

[37] L. ´ Ciri´c, S.N. Ješi´c, M.M. Milovanovi´c, J.S. Ume, On the steepest descent approximation method for the zeros of generalized accretive operators. Nonlinear Anal. 69, 763–769 (2008)

[52] A. George, P. Veeramani, On some result in fuzzy metric spaces. Fuzzy Sets Syst. 64, 395–399 (1994)

[56] M. Grabiec, Fixed points in fuzzy metric spaces. Fuzzy Sets Syst. 27, 385—389 (1988)

[58] V. Gregori, J.J. Miñana, Some remarks on fuzzy contractive mapping. Fuzzy Sets Syst. 251, 101–103 (2014)

[59] V. Gregori, J.J. Miñana, On fuzzy ψ-contractive sequences and fixed point theorems. Fuzzy Sets Syst. 300, 93–101 (2016)

[61] V. Gregori, S. Romaguera, Characterizing completable fuzzy metric spaces. Fuzzy Sets Syst. 144, 411–420 (2004)

[68] O. Hadži´c, E. Pap, M. Budincevi´c, Countable extension of triangular norms and their applications to the fixed point theory in probabilistic metric spaces. Kybernetica 38, 363–381 (2002)

[69] O. Hadži´c, E. Pap, V. Radu, Generalized contraction mapping principles in probabilistic metric spaces. Acta Math. Hungar. 101, 131–148 (2003)

[80] J. Jachymski, On probabilistic ϕ-contractions on Menger spaces. Nonlinear Anal. 73, 2199–2203 (2010)

[81] M. Jain, K. Tas, S. Kumar, N. Gupta, Coupled fixed point theorems for a pair of weakly compatible maps along with CLRg property in fuzzy metric spaces. J. Appl. Math. 2012, 13 pp., Article ID 961210 (2012)

[82] J. Jin, C. Zhu, Z. Wu, H. Wu Some results for common fixed point on ϕ-contractions in k-partially ordered fuzzy metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl. 10(4), 2052–2065 (2017)

[84] G. Jungck, Commuting maps and fixed points. Am. Math. Mon. 83, 261–263 (1976)

[85] O. Kada, T. Suzuki, W. Takahashi, Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces Math. Jpn. 44, 381–391 (1996)

[89] E. Karapınar, Quadruple fixed point theorems for weak φ-contractions. ISRN Math. Anal. 2011, 16 pp., Article ID 989423 (2011)

[91] E. Karapınar, N.V. Luong, Quadruple fixed point theorems for nonlinear contractions. Comput. Math. Appl. 64, 1839–1848 (2012)

[111] D. Mihe¸t, Fuzzy ψ-contractive mappings in non-Archimedean fuzzy metric spaces. Fuzzy Sets Syst. 159, 739–744 (2008)

[112] D.Mihe¸t, A note on fuzzy contractive mappings in fuzzy metric spaces. Fuzzy Sets Syst. 251, 83–91 (2014)

[119] J.H. Park, Intuitionistic fuzzy metric spaces. Chaos Solitons Fractals 22, 1039–1046 (2004)

[125] A. Razani, M. Shirdaryazdi, Some results on fixed points in the fuzzy metric space. J. Appl. Math. Comput. 20, 401–408 (2006)

[128] A. Roldán, J. Martínez-Moreno, C. Roldán, Multidimensional fixed point theorems in partially ordered complete metric spaces. J. Math. Anal. Appl. 396, 536–545 (2012)

[129] A. Roldán, J. Martínez-Moreno, C. Roldán, Y.J. Cho, Multidimensional coincidence point results for compatible mappings in partially ordered fuzzy metric spaces. Fuzzy Sets Syst. 251, 71–82 (2014)

[130] S. Romaguera, A. Sapena, P. Tirado, The Banach fixed point theorem in fuzzy quasi-metric spaces with application to the domain of words. Topol. Appl. 154, 2196–2203 (2007)

[133] R. Saadati, A. Razani, H. Adibi, A common fixed point theorem in L-fuzzy metric spaces. Chaos Solitons Fractals 33, 358–363 (2007)

[144] W. Sintunavarat, P. Kumam, Common fixed point theorems for a pair of weakly compatible mappings in fuzzy metric spaces. J. Appl. Math. 2011, 14 pp., Article ID 637958 (2011)

[147] D. Wardowski, Fuzzy contractive mappings and fixed points in fuzzy metric spaces. Fuzzy Sets Syst. 222, 108–114 (2013)