بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی گرایش جبر

گراف‌های i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر از حلقه‌های جابه‌جایی

نگارش
اقدس خوشوقت

استاد راهنما
دکتر رضا نیک اندیش

اردیبهشت ۱۴۰۱

بسمه تعالی

تاییدیه صحت و اصالت نتایج

اینجانب **اقدس خوشوقت** به شماره دانشجویی ۹۹۱۵۶۱۱۰۷ دانشجوي رشته **ریاضی** مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه نتایج این پایان‌نامه/رساله حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه‌برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر نموده‌ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن، مسؤولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقي و حقوقي و مراجع ذی‌صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده‌ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ‌گونه مسؤولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی : اقدس خوشوقت

امضا و تاریخ :

تقدیم به:

خدایی که آفرید جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را؛

پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم؛

مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر؛

همسرم، اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم.

به نام خدا

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّوجلّ":

از استاد با کمالات و شایسته؛ **جناب آقای دکتر رضا نیک اندیش** که به عنوان استاد راهنما با کمال سعه صدر، حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه و $Z(R)$ نشان دهنده مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر آن باشد. گراف i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر R، گراف ساده $\overline{\Gamma}_i(R)$ با مجموعه رئوس $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ است و دو رأس متمایز x و y از آن با یکدیگر مجاورند اگر و تنها اگر دو عدد طبیعی $n \leq i$ و $m \leq i$ وجود داشته باشند به طوری که $x^n \cdot y^m = 0$ با این شرط که $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$. در این پایان نامه رفتار پالایه $\{\overline{\Gamma}_i(R)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به طور خاص، کمر و قطر $\overline{\Gamma}_i(R)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و مثال‌های مختلفی می‌آوریم.

کلید واژه : گراف مقسوم‌علیه صفر، گراف توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر، گراف پالایش شده i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر

فهرست مطالب

فهرست نمادها

نماد	تعریف	اولین صفحه
$V(G)$	مجموعه رئوس گراف G	۳
$E(G)$	مجموعه یال‌های گراف G	۳
K_n	گراف کامل n رأسی	۵
$\overline{K}_n$	گراف پوچ n رأسی	۵
$K_{m,n}$	گراف دوبخشی کامل $n+m$ رأسی	۵
C_n	گراف دور از مرتبه n	۵
$G[V_\circ]$	زیرگراف القایی روی $V_\circ$	۶
$\cong$	یکریختی گراف‌ها (حلقه‌ها)	۶ (۱۱)
$d(u,v)$	فاصله بین دو رأس u و v	۶
$\mathrm{diam}(G)$	قطر گراف G	۶
$\mathrm{gr}(G)$	کمر گراف G	۶
$a \perp b$	رئوس a و b متعامد هستند	۷
$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی	۱۳
$\mathbb{Q}$	میدان اعداد گویا	۱۰
A^*	مجموعه همه عناصر ناصفر زیرمجموعه A از حلقه R	۱۰
$\trianglelefteq$	ایده‌آل	۱۰
$\leq_e$	ایده‌آل اساسی	۱۱
$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعه همه ایده‌آل‌های اول حلقه R	۱۲

نماد	تعریف	اولین صفحه
$\mathrm{Min}(R)$	مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقه R	۱۲
$\mathrm{Max}(R)$	مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R	۱۳
$\nu(a)$	مرتبه پوچ‌توانی عضو a از حلقه R	۱۳
$\nu(R)$	مرتبه پوچ‌توانی حلقه R	۱۳
$\sqrt{I}$	رادیکال ایده‌آل I	۱۳
$\mathrm{Nil}(R)$	رادیکال پوچ حلقه R	۱۴
$J(R)$	رادیکال جیکوبسن حلقه R	۱۴
$\mathrm{Ann}(X)$	پوچ‌ساز زیرمجموعه X از حلقه R	۱۴
$Z(R)$	مجموعه تمام اعضای مقسوم‌علیه صفر حلقه R	۱۵
R_P	موضعی‌سازی حلقه R در ایده‌آل اول P	۱۶
$\dim(R)$	بُعد حلقه R	۱۶
$\Gamma(R)$	گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه R	۲۳
$\overline{\Gamma}(R)$	گراف توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر حلقه R	۲۳
$\overline{\Gamma}_i(R)$	گراف i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر حلقه R	۴۳
$\sqrt[i]{I}$	$\left\{y \in R \mid \exists \alpha \leq i \quad s.t \quad y^{\alpha} \in I \setminus \{0\}\right\}$	۴۵
$\mathrm{N}^i(R)$	$\{x \in \mathrm{Nil}(R) \mid \nu(x) \leq i\}$	۴۵
$\mathrm{IS}(R)$ و $\mathrm{is}(R)$	به صفحه بیان شده مراجعه کنید	۶۲
$\mathrm{Seq}(R)$	به صفحه بیان شده مراجعه کنید	۶۱

مقدّمه

نسبت دادن یک گراف به یک حلقه به ما توانایی تبدیل ویژگی‌های جبری حلقه به زبان نظریه گراف و برعکس را می‌دهد. بنابراین مطالعه گراف‌های وابسته به حلقه‌ها توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. مقالات بسیاری وجود دارند که روش‌های ترکیبیاتی را برای به دست آوردن نتایج جبری در نظریه حلقه‌ها به کار می‌گیرند. در سال ۱۹۹۹ گراف مقسوم‌علیه صفر ($\Gamma(R)$) توسط اندرسون[۱] و لیوینگستن[۲] در [۱۰] معرفی شد. گرافی با مجموعه رئوس $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ و دو رأس متمایز x و y در $\Gamma(R)$ با هم مجاور هستند اگر وتنها اگر $xy = 0$. با این حال به طور کلی مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر برای بیان ساختار حلقه‌ها کافی نیست. از این‌رو در برخی مقالات نویسندگان برخی شرایط محدود کننده دیگر روی حلقه گذاشته‌اند. به عنوان مثال یکی از سوالات مهم در این زمینه این است که چه موقع یکریختی گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(S)$ از حلقه‌های دلخواه R و S می‌تواند تضمینی برای یکریختی حلقه‌های R و S باشد. نویسندگان زیادی علاقه‌مند به پاسخ دادن به این سوال بوده‌اند (به عنوان نمونه [۹، ۱۲، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲] را ببینید). با این حال می‌توان متوجه شد که تمام حلقه‌های مورد مطالعه در این پژوهش‌ها کاهشی هستند. این واقعیت به نحوی نشان می‌دهد، نیاز به در نظر گرفتن توان‌های مقسوم‌علیه‌های صفر داریم که شامل عناصر پوچ‌توان می‌شود و روابط بیشتری بین مقسوم‌علیه‌های صفر بیان می‌کند. در واقع هدف اصلی معرفی گراف توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر به عنوان تعمیمی از گراف مقسوم‌علیه صفر کلاسیک بررسی چنین روابطی بود (در

[1] Anderson

[2] Livingston

[۱۶] همچنین در کار اخیر اندرسون و مککلوروکین[1] در [۸]).

گراف توسعه یافته مقسومعلیه صفر حلقه R که با $\overline{\Gamma}(R)$ نمایش داده میشود یک گراف ساده وابسته به حلقه R است با مجموعه رئوس $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ و دو رأس متمایز x و y با هم مجاورند اگر وتنها اگر دو عدد طبیعی n و m وجود داشته باشند به طوری که $x^n \cdot y^m = 0$ با این شرط که $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$.

در این رساله همچنین در نظر گرفتن خانوادهای از گرافهای پالایش شده $\{\overline{\Gamma}_i(R)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ به عنوان زیرگرافی از $\overline{\Gamma}(R)$ با شرایط محدود کننده از بالا که به شرح معرفی میکنیم.

برای یک عدد طبیعی i، گراف i–توسعه یافته مقسومعلیه صفر حلقه R که با $\overline{\Gamma}_i(R)$ نمایش داده میشود و مجموعه رئوس آن $Z(R)^*$ است و دو رأس متمایز x و y از آن با یکدیگر مجاورند اگر و تنها اگر دو عدد طبیعی $n \leq i$ و $m \leq i$ وجود داشته باشند به طوری که $x^n \cdot y^m = 0$ با این شرط که $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$. میتوان دریافت که خانواده $\{\overline{\Gamma}_i(R)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ تشکیل یک پالایه از گراف توسعه یافته مقسوم علیه صفر میدهد. مطالعه پالایه $\{\overline{\Gamma}_i(R)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ اطلاعات غنی از روابط بین عناصر مختلف آن و خواص گرافی آنها ارائه میکند.

در فصل اول این پایان نامه ابتدا مقدماتی از نظریه گراف بیان میکنیم، سپس به طور گذرا برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی و مورد نیاز حلقهها را بیان خواهیم کرد.

در فصل دوم ابتدا گراف توسعه یافته مقسومعلیه صفر $\overline{\Gamma}(R)$ معرفی میشود سپس شرایطی را که تحت آن $\Gamma(R)$ و $\overline{\Gamma}(R)$ برابر میشود بیان میکنیم.

در فصل سوم ابتدا گراف i–توسعه یافته مقسومعلیه صفر تعریف میشود، سپس قطر و کمر این گراف را مورد مطالعه قرار میدهیم. همچنین شرایطی را بررسی میکنیم که $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ و در آخر رفتار پالایه $\{\overline{\Gamma}_i(R)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ را مورد مطالعه قرار میدهیم.

[1] McClurkin

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در آغاز این پایان نامه، تعاریف و قضایای مقدماتی نظریه گراف و نظریه حلقه که در فصل‌های بعد استفاده شده‌اند، ارائه می‌کنیم.

۱.۱ نظریه گراف

۱.۱.۱ **تعریف.** گراف[۲] ساده G عبارت است از زوج مرتب $G = \big(V(G), E(G)\big)$ که در آن $V(G)$ یک مجموعه ناتهی و اعضای $E(G)$ زیرمجموعه‌های دوعضوی از V هستند. مجموعه $V(G)$ را مجموعه رئوس و مجموعه $E(G)$ را مجموعه یال‌های گراف G می‌نامند. در این پایان نامه برای نشان دادن این که $\{u, v\}$ یالی از G است، از نماد $u - v$ استفاده خواهیم کرد.

۲.۱.۱ **تعریف.** اگر $u_1, u_2 \in E$، گوییم u_1 با u_2 مجاور است یا u_1 به u_2 وصل است.

[2] graph

۳.۱.۱ تعریف. یالی که یک رأس را به خودش وصل می‌کند طوقه[1] نام دارد.

۴.۱.۱ تعریف. اگر بین دو رأس از یک گراف دو یا بیش از دو یال موجود باشد، یال‌های چندگانه[2] نامیده می‌شوند.

۵.۱.۱ تذکر. گراف‌هایی که در این رساله در نظر گرفته می‌شوند، همگی ساده‌اند، یعنی یال چندگانه و طوقه ندارند.

۶.۱.۱ تعریف. تعداد رئوس گراف G را مرتبه گراف G نامیم و با $|V|$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین تعداد یال‌های گراف G را اندازه گراف G نامیم و با نماد $|E|$ نشان می‌دهیم.

۷.۱.۱ تعریف. H را زیرگراف[3] G گوییم (و می‌نویسیم $H \subseteq G$)، اگر $E(H) \subseteq E(G)$ و $V(H) \subseteq V(G)$.

۸.۱.۱ تعریف. یک گشت[4] در گراف G دنباله‌ای از رئوس مانند $u_۰, u_۱, \ldots, u_k$ است که در آن برای هر $i = ۰, ۱, \ldots, k - ۱$ داریم $u_i u_{i+۱} \in E(G)$.

۹.۱.۱ تعریف. به گشتی که دارای رأس تکراری نباشد، مسیر[5] گوییم. تعداد یال‌های ظاهر شده در یک مسیر را طول[6] می‌نامیم.

۱۰.۱.۱ تعریف. یک مسیر بسته، دور[7] نامیده می‌شود.

[1]loop
[2]multi-edge
[3]subgraph
[4]walk
[5]path
[6]length
[7]cycle

۱۱.۱.۱ تعریف. گراف G را همبند[1] می‌گوییم، هرگاه بین دو رأس متمایز، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر چنین نباشد، گراف را ناهمبند[2] می‌گوییم.

۱۲.۱.۱ تعریف. گراف کامل[3] به گرافی اطلاق می‌شود که بین هر دو رأس آن یال وجود دارد. گراف فاقد یال را گراف پوچ می‌نامیم. معمولاً گراف‌های $n-$رأسی کامل و $n-$رأسی فاقد یال را به ترتیب با K_n و $\overline{K_n}$ نشان می‌دهیم.

۱۳.۱.۱ تعریف. گراف $k-$بخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه رئوس آن را به k زیرمجموعه $X_۱, \dots, X_k$، طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد. در صورتی که $k = ۲$، گراف را دوبخشی[4] می‌نامیم.

۱۴.۱.۱ تعریف. گراف $k-$بخشی کامل، یک گراف ساده $k-$بخشی است که در آن هر رأس به تمام رأس‌هایی که در زیرمجموعه‌ای غیریکسان با آن قرار دارند وصل شده است. در حالتی که $k = ۲$، گراف را دوبخشی کامل می‌نامیم. علاوه بر این، اگر داشته باشیم $|X_۱| = m$ و $|X_۲| = n$ آن‌گاه گراف دوبخشی کامل را با نماد $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

۱۵.۱.۱ قضیه. گراف G دوبخشی است اگر وتنها اگر شامل هیچ دور فردی نباشد.

اثبات. به قضیه ۱.۱۷۲ از [۲] مراجعه شود. □

۱۶.۱.۱ تعریف. گراف دوبخشی کامل G را ستاره[5] می‌نامیم، هرگاه یکی از بخش‌های آن تک رأسی باشد.

۱۷.۱.۱ تعریف. گرافی که یک دور از مرتبه n است را گراف دور می‌نامیم و با نماد C_n نشان می‌دهیم.

[1] connected
[2] disconnected
[3] complete graph
[4] bipartite
[5] star

۱.۱.۱۸ تعریف. فرض کنیم V_0 زیر مجموعه‌ای ناتهی از $V(G)$ باشد. زیرگرافی از G که مجموعه رئوس آن V_0 و مجموعه یال‌هایش برابر مجموعه یال‌هایی از G باشد که هر دو سر آن‌ها در V_0 است، زیرگراف القایی[1] روی V_0 می‌نامیم و با $G[V_0]$ نمایش می‌دهیم.

۱.۱.۱۹ تعریف. گراف‌های G و H را یکریخت[2] نامیم، هرگاه تناظر دوسویی $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ موجود باشد به طوری که

$$xy \in E(G) \Longleftrightarrow f(x)f(y) \in E(H)$$

در این حالت می‌نویسیم $G \cong H$.

۱.۱.۲۰ تعریف. فرض کنیم G گرافی ساده و u و v رئوس گراف G باشند. فاصله[3] بین u و v که با نماد $d(u,v)$ نشان داده می‌شود عبارت است از طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v.

۱.۱.۲۱ تعریف. فرض کنیم G گرافی ساده و همبند باشد. قطر[4] گراف G که با $\operatorname{diam}(G)$ نشان داده می‌شود عبارت است از

$$\operatorname{diam}(G) = \sup\{d(u,v) \;\mid\; \forall u,v \in V\}.$$

اگر G گرافی ناهمبند باشد، آن‌گاه $\operatorname{diam}(G) = \infty$.

۱.۱.۲۲ تعریف. فرض کنیم G یک گراف باشد. کمر[5] گراف G طول کوتاه‌ترین دور در گراف است و با نماد $\operatorname{gr}(G)$ نشان داده می‌شود. اگر گراف G فاقد دور باشد، آن‌گاه $\operatorname{gr}(G) = \infty$.

۱.۱.۲۳ تعریف. فرض کنیم G یک گراف باشد و $a,b \in V(G)$. در این صورت

[1] induced subgraph
[2] isomorphic
[3] distance
[4] diameter
[5] girth

۱. گوییم $a \leqslant b$ هرگاه a و b غیرمجاور[1] باشند و هر همسایه b به a نیز وصل باشد.

۲. گوییم $a \sim b$ هرگاه $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$.

۳. گوییم a و b متعامد[2] هستند و می‌نویسیم $a \perp b$، هرگاه a و b مجاور باشند و هیچ همسایه مشترکی نداشته باشند.

۴. گراف G را تکمیل شده[3] گویند هرگاه برای $a \in V(G)$، رأس b وجود داشته باشد به طوری که $a \perp b$.

۵. گراف G را منحصراً تکمیل شده گویند هرگاه G تکمیل شده باشد و $a \perp b$ و $a \perp c$ نتیجه دهد $b \sim c$.

۲.۱ نظریه حلقه

۱.۲.۱ تعریف. روی مجموعه ناتهی و دلخواه S نگاشت $* : S \times S \longrightarrow S$ را یک عمل دوتایی می‌نامند، هرگاه عمل $*$ روی S به هر زوج مرتب از عناصر S دقیقاً یک عنصر S را نسبت دهد.

عمل دوتایی را با $*, +, \cdot, \cdots$ نشان می‌دهند.

۲.۲.۱ تعریف. مجموعه ناتهی G همراه با عمل دوتایی $*$ را یک نیم‌گروه[4] می‌نامند، هرگاه $*$ یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر در G باشد؛ یعنی برای هر a، b و c عضو R داشته باشیم $a * (b * c) = (a * b) * c$.

۳.۲.۱ تعریف. مجموعه ناتهی G یک گروه[5] است اگر در G عملی مانند $*$ چنان تعریف شده باشد که

[1] non adjacent
[2] orthogonal
[3] completed
[4] semigroup
[5] group

۱. نسبت به عمل $*$ بسته باشد. یعنی:

$$\forall a, b \in G; \quad a * b \in G.$$

۲. نسبت به عمل $*$ شرکت‌پذیر باشد. یعنی:

$$\forall a, b, c \in G; \quad a * (b * c) = (a * b) * c.$$

۳. عضو همانی داشته باشد. یعنی:

$$\exists e \in G \quad s.t. \quad \forall a \in G; \quad a * e = e * a = a.$$

۴. هر عضو وارون‌پذیر باشد. یعنی:

$$\forall a \in G, \quad \exists b \in G; \quad a * b = b * a = e.$$

۴.۲.۱ تعریف. $(G, *)$ را گروه آبلی[۱] می‌نامند، هرگاه :

$$\forall a, b \in G; \quad a * b = b * a.$$

۵.۲.۱ تعریف. مجموعه R را همراه با دو عمل $(+, \cdot)$ حلقه[۲] می‌نامند و به‌صورت $(R, +, \cdot)$ نشان می‌دهند، هرگاه:

[1] Abelian

[2] ring

۱. $(R,+)$ گروه آبلی باشد.

۲. $(R,\cdot)$ نیم‌گروه باشد.

۳. عمل ضرب روی عمل جمع از چپ و راست توزیع‌پذیر[1] باشد. یعنی به ازای هر $a,b,c\in R$:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

۶.۲.۱ تعریف. عضو خنثی نسبت به عمل جمع در حلقه $(R,+,\cdot)$ صفر حلقه نامیده می‌شود و با 0_R نشان داده می‌شود.

۷.۲.۱ تعریف. حلقه R را که در آن نیم‌گروه $(R,\cdot)$ دارای عضو خنثی باشد، حلقه یک‌دار[2] می‌نامند و با نماد 1_R نشان می‌دهند.

۸.۲.۱ تعریف. هرگاه R یک حلقه باشد، عنصر $a\in R$ را عنصر یکال (وارون‌پذیر) می‌نامند، هرگاه دارای وارون ضربی باشد. یعنی

$$\exists b\in R\quad;\quad a\cdot b=b\cdot a=1_R.$$

۹.۲.۱ تعریف. حلقه R را که در آن عمل ضرب دارای خاصیت جابه‌جایی باشد، حلقه جابه‌جایی[3] می‌نامند. به عبارت دیگر

$$\forall a,b\in R\quad ab=ba.$$

۱۰.۲.۱ تذکر. در سرتاسر این پایان نامه همه حلقه‌ها جابه‌جایی و یک‌دار هستند.

[1] distributive

[2] unitary

[3] commutative

۱۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از R باشد. S را زیرحلقه[۱] R می‌نامند و به‌صورت $S \leq R$ نشان می‌دهند، هرگاه $(S, +, \cdot)$ ساختار یک حلقه را داشته باشد.

۱۲.۲.۱ مثال. حلقه $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ زیرحلقه $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ می‌باشد.

۱۳.۲.۱ نمادگذاری. برای زیرمجموعه A از حلقه R قرار می‌دهیم $A^* = A \setminus \{0\}$.

۱۴.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $(R, +, \cdot)$ یک حلقه باشد. در این صورت اگر $(R^*, \cdot)$ یک گروه آبلی باشد، آن‌گاه R را یک میدان[۲] نامند.

۱۵.۲.۱ مثال. حلقه‌های $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ و $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ میدان هستند که به ترتیب میدان اعداد حقیقی و میدان اعداد گویا نامیده می‌شوند.

۱۶.۲.۱ تعریف. زیرمجموعه ناتهی I از حلقه R را ایده‌آل[۳] R می‌نامند و با $I \trianglelefteq R$ نمایش می‌دهند، هرگاه:

$$\forall a, b \in I \quad \Rightarrow \quad a - b \in I,$$

$$\forall a \in I, \quad \forall r \in R \quad \Rightarrow \quad ra \in I.$$

ایده‌آل I را سره[۴] نامند هرگاه $I \neq R$.

۱۷.۲.۱ مثال. فرض کنیم R یک حلقه و $a \in R$. در این صورت می‌توان نشان داد که مجموعه

$$(a) = Ra = \{ar \mid r \in R\}$$

[1] subring
[2] field
[3] ideal
[4] proper

یک ایده‌آل است که ایده‌آل اصلی[۱] تولیده شده توسط a نامیده می‌شود.

۱۸.۲.۱ تعریف. حلقه‌ای که هر ایده‌آل آن اصلی باشد، حلقه ایده‌آل اصلی[۲] نامیده می‌شود.

۱۹.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و $I_1, I_2, \ldots, I_n, I, J$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. در این صورت:

الف) جمع ایده‌آل‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in I_i; \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

ب) ضرب ایده‌آل‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$IJ = \{a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m \mid a_i \in I, b_i \in J; \quad i = 1, \ldots, m\}.$$

۲۰.۲.۱ تعریف. ایده‌آل ناصفر I از حلقه R اساسی[۳] نامیده می‌شود و با نماد $I \leq_e R$ نشان داده می‌شود، اگر I با هر ایده‌آل ناصفر R اشتراک ناصفری داشته باشد. به عبارت دیگر برای هر $0 \neq J \trianglelefteq R$ داریم $I \cap J \neq \{0\}$.

۲۱.۲.۱ تعریف. حلقه R را تجزیه‌پذیر[۴] گویند هرگاه حلقه‌های $R_1, R_2, \ldots, R_n$ وجود داشته باشند به طوری که

$$R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n.$$

۲۲.۲.۱ تذکر. فرض کنیم R یک حلقه تجزیه‌پذیر و $I \trianglelefteq R$. در این صورت $I_1 \trianglelefteq R_1$، ...، $I_n \trianglelefteq R_n$

[1]principal ideal
[2]principal ideal ring
[3]essential
[4]decomposable

وجود دارد به طوری که

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n.$$

۲۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $(R, +, \times)$ و $(R', \oplus, \otimes)$ دو حلقه باشند. تابع $f : R \longmapsto R'$ را یک همریختی[1] حلقه‌ای می‌نامند. هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$\forall a, b \in R; \quad f(a+b) = f(a) \oplus f(b),$$

$$\forall a, b \in R; \quad f(a \times b) = f(a) \otimes f(b).$$

۲۴.۲.۱ تعریف. هر همریختی که یک‌به یک و پوشا باشد را یکریختی[2] می‌نامند.

۲۵.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. در این صورت عناصر حلقه $R \times S$ را به صورت $R \times S = \{(a, b) \mid a \in R, b \in S\}$ نشان می‌دهند که با اعمال زیر دارای ساختار حلقه می‌باشد.

۱. $(r, m) + (s, n) = (r+s, m+n)$.

۲. $(r, m)(s, n) = (rs, mn)$.

۲۶.۲.۱ تعریف. در حلقه R ایده‌آل سره P را اول[3] می‌نامند، هرگاه برای هر $a, b \in R$ از $ab \in P$ نتیجه شود $a \in P$ یا $b \in P$. مجموعه همه ایده‌آل‌های اول R را با $\mathrm{Spec}(R)$ نشان می‌دهند.

۲۷.۲.۱ تعریف. ایده‌آل اول P از R ایده‌آل اول مینیمال R[4] نامیده می‌شود، هرگاه ایده‌آل اولی از R مثل Q موجود نباشد که $Q \subset P$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال R را با $\mathrm{Min}(R)$ نمایش می‌دهیم.

[1] homomorphism

[2] isomorphism

[3] prime

[4] minimal prime ideal

۲۸.۲.۱ تعریف. ایده‌آل $M \neq R$ از حلقه R را ماکسیمال[1] می‌نامند، هرگاه به ازای هر ایده‌آل مانند N که $M \subseteq N \subseteq R$ داشته باشیم $M = N$ یا $N = R$. مجموعه همه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R را با $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهند.

۲۹.۲.۱ مثال. در حلقه $\mathbb{Z}$، ایده‌آل (۳) ماکسیمال است.

۳۰.۲.۱ تعریف. عنصر $a \in R$ را خودتوان[2] نامند، هرگاه $a^2 = a$.

۳۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت $a \in R$ را پوچ‌توان[3] می‌نامند، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $a^n = 0$.

۳۲.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و a عنصر پوچ‌توانی از آن باشد. در این صورت مرتبه پوچ‌توانی a که با نماد $\nu(a)$ یا n_a نمایش داده می‌شود، عبارت است از کوچک‌ترین عدد طبیعی k به طوری که $a^k = 0$.

۳۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد. سوپریمم مرتبه پوچ‌توانی عناصر R، درجه پوچ‌توانی R نامیده شده و با نماد $\nu(R)$ نشان داده می‌شود.

۳۴.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. در این صورت $\sqrt{I}$ را رادیکال[4] ایده‌آل I می‌نامند و به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid r^n \in I \quad ; \qquad \exists n \in \mathbb{N}\}.$$

[1] maximal
[2] idempotent
[3] nilpotent
[4] radical

به‌خصوص، $\sqrt{0}$ را با $\mathrm{Nil}(R)$ نشان می‌دهیم و آن را رادیکال پوچ[1] حلقه R می‌نامیم. در واقع

$$\mathrm{Nil}(R) = \{r \in R \mid r^n = 0 \;\; ; \;\; \exists n \in \mathbb{N}\}.$$

این یعنی $\mathrm{Nil}(R)$ مجموعه تمام اعضای پوچ‌توان حلقه R است.

۳۵.۲.۱ تعریف. اشتراک همه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R را رادیکال جیکوبسن R نامیده و با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

۳۶.۲.۱ تعریف. حلقه R را یک حلقه موضعی[2] می‌نامند، هرگاه R تنها دارای یک ایده‌آل ماکسیمال باشد. حلقه موضعی R با ایده‌آل ماکسیمال M را با نماد (R, M) نمایش می‌دهند. بنابراین در چنین حلقه‌هایی داریم $J(R) = M$.

۳۷.۲.۱ تعریف. حلقه R را شبه‌موضعی[3] نامند، هرگاه R فقط تعدادی متناهی ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

۳۸.۲.۱ تعریف. R را یک حلقه نوتری[4] گویند، هرگاه هر زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های R ایستا باشد.

۳۹.۲.۱ تعریف. R را یک حلقه آرتینی[5] گویند، هرگاه هر زنجیر کاهشی از ایده‌آل‌های R ایستا باشد.

۴۰.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و $X \subseteq R$. پوچ‌ساز[6] X با نماد $\mathrm{Ann}_R(X)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Ann}_R(X) = \{a \in R \mid ax = 0 \;\; ; \quad \forall x \in X\}.$$

[1] nil radical
[2] local ring
[3] quasi-local
[4] Noetherian
[5] Artinian
[6] annihilator

در حالت خاص، اگر $x,y \in R$، آن‌گاه $\mathrm{Ann}_R(\{x,y\})$ و $\mathrm{Ann}_R(\{x\})$ را به ترتیب با $\mathrm{Ann}_R(x,y)$ و $\mathrm{Ann}_R(x)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که اگر $x = ۰$، آن‌گاه $\mathrm{Ann}_R(x) = R$.

۴۱.۲.۱ تعریف. عنصر $a \in R$ را مقسوم‌علیه صفر[1] می‌نامند، هرگاه عنصر ناصفر $b \in R$ موجود باشد که $ab = ۰$. مجموعه همه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R را با نماد $Z(R)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$Z(R) = \bigcup_{x \in R^*} \mathrm{Ann}_R(x)$$

۴۲.۲.۱ مثال. در حلقه $(\mathbb{Z}_{۱۲}, +, \cdot)$ عناصر $\bar{۲}$ و $\bar{۶}$ مقسوم‌علیه صفر می‌باشند.

۴۳.۲.۱ تعریف. حلقه R که فاقد مقسوم‌علیه صفر (ناصفر) است را دامنه صحیح[2] می‌نامند.

۴۴.۲.۱ مثال. حلقه‌های $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ و $(\mathbb{Z}_۷, +, \cdot)$ دامنه صحیح هستند.

۴۵.۲.۱ تعریف. حلقه R را یک حلقه کاهشی[3] می‌نامند، هرگاه R هیچ عضو پوچ‌توان ناصفری نداشته باشد. به عبارت دیگر $\mathrm{Nil}(R) = \{۰\}$.

۴۶.۲.۱ تعریف. می‌گوییم که زیرمجموعه S از حلقه R، ضربی بسته است اگر و تنها اگر ۱ عضو S باشد و حاصل‌ضرب هر دو عضو دلخواه از مجموعه S، عضوی از مجموعه S باشد. چنین مجموعه‌ای را مجموعه بسته ضربی[4] می‌گویند و به اختصار با m.c.s نشان می‌دهند.

۴۷.۲.۱ تذکر. فرض کنیم S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R باشد. اگر رابطه $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$\forall (a,s),(b,t) \in R \times S \quad : \quad (a,s) \sim (b,t) \Longleftrightarrow \exists u \in S \;\; s.t \;\; u(ta - sb) = ۰$$

[1] zero-divisor
[2] Integral domain
[3] reduced ring
[4] multiplicatively closed set

آن‌گاه بنا به لم ۱.۵ از [۱]، $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

۴۸.۲.۱ تعریف. با مفروضات تذکر قبل، به ازای هر $(a,s) \in R \times S$، کلاس هم‌ارزی شامل (a,s) را با $\dfrac{a}{s}$ و مجموعه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم. در این صورت بنا به قضیه ۲.۵ از [۱]، $S^{-1}R$ تحت عمل‌های

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{ta+sb}{st} \quad \text{و} \quad \frac{a}{s}\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}$$

(به ازای $a,b \in R$ و $t,s \in S$) یک حلقه است. این حلقه جدید، حلقه کسرها[1] یا حلقه خارج قسمتی R نسبت به S نامیده می‌شود.

۴۹.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $S := R \setminus Z(R)$. واضح است که S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R است. در این حالت حلقه کسرهای R نسبت به S را حلقه کسرهای تام[2] R می‌نامند.

۵۰.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و P ایده‌آل اولی از R باشد. قرار می‌دهیم $S = R \setminus P$. در این صورت می‌توان نشان داد که S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R است. در این حالت حلقه کسرهای $S^{-1}R$ را با R_P نمایش می‌دهیم. این حلقه، یک حلقه موضعی است (طبق لم ۲۰.۵ از [۱]) که حلقه حاصل از موضعی‌سازی[3] R در ایده‌آل اول P نامیده می‌شود.

۵۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد. بُعد[4] حلقه R با نماد $\dim(R)$ نشان داده می‌شود و عبارت است از طول بزرگ‌ترین زنجیری از ایده‌آل‌های اول R.

اکنون قضایای مقدماتی نظریه حلقه را بیان می‌کنیم.

۵۲.۲.۱ لم. فرض کنیم R یک حلقه و $\{I_j\}_{j\in S}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R باشد. در این صورت $\bigcap_{j\in S} I_j$ ایده‌آلی از R است.

[1] quotient ring

[2] total quotient ring

[3] localization

[4] dimension

اثبات. اثبات واضح است. □

۵۳.۲.۱ لم. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $I = R$ اگر و تنها اگر $1_R \in I$.

اثبات. اثبات واضح است. □

۵۴.۲.۱ لم. فرض کنیم R یک حلقه و I_1 و I_2 ایده‌آل‌هایی از R باشند. در این صورت $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$.

اثبات. بنا به تعریف ۱۹.۲.۱، اثبات واضح است. □

۵۵.۲.۱ قضیه. حلقه R یک میدان است اگر و تنها اگر به جز خودش و صفر ایده‌آل دیگری نداشته باشد.

اثبات. اثبات واضح است. □

۵۶.۲.۱ لم. فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از R باشد. در این صورت ایده‌آل ماکسیمالی مانند M از R وجود دارد که $I \subseteq M$.

اثبات. به نتیجه ۳.۱۰ از [۱] مراجعه شود. □

۵۷.۲.۱ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت هر ایده‌آل ماکسیمال R، یک ایده‌آل اول از R است.

اثبات. فرض کنیم I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند به طوری که $I \nsubseteq M$ و $J \nsubseteq M$. چون M ماکسیمال است، داریم $I + M = R$ و $J + M = R$. بنابراین

$$R = (I + M)(J + M) = IJ + IM + MJ + M^2 \subseteq IJ + M.$$

لذا $IJ \nsubseteq M$، پس M اول است. □

۵۸.۲.۱ قضیه (برائر[1]). اگر حلقه R دارای عضو خودتوانی مانند e باشد که $e \neq ۰$ و $e \neq ۱$، آن‌گاه

$$R \cong Re \times R(۱-e).$$

اثبات. به قضیه ۱۰.۲۲ از [۲۳] مراجعه شود. □

۵۹.۲.۱ لم. هر میدان یک دامنه صحیح است.

اثبات. به تذکر ۲۶.۱ از [۱] مراجعه شود. □

۶۰.۲.۱ لم. هر دامنه صحیح متناهی، میدان است.

اثبات. به لم ۲۷.۱ از [۱] مراجعه شود. □

۶۱.۲.۱ لم. فرض کنیم R یک دامنه صحیح باشد. در این صورت R یک حلقه کاهشی است.

اثبات. فرض کنیم R کاهشی نباشد. در این صورت $\mathrm{Nil}(R) \neq \{۰\}$. حال فرض کنیم $x \in \mathrm{Nil}(R)^*$. در این صورت به ازای عدد طبیعی n داریم $x^n = ۰$. با توجه به این‌که $xx^{n-۱} = ۰$ و R دامنه صحیح است، نتیجه می‌گیریم $x^{n-۱} = ۰$. با ادامه این روند به $x = ۰$ می‌رسیم که تناقض است. □

۶۲.۲.۱ لم. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت $\mathrm{Ann}_R\big(Z(R)\big) \subseteq \mathrm{Nil}(R)$.

اثبات. اثبات واضح است. □

۶۳.۲.۱ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی سره از آن باشد. در این صورت

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \in \mathrm{Spec}(R) \\ I \subseteq P}} P.$$

[1] Brauer

در حالت خاص داریم

$$\mathrm{Nil}(R) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} P.$$

اثبات. به قضیه ۵ در صفحه ۱۴۳ از [۳] مراجعه شود. $\square$

۶۴.۲.۱ لم. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $x \in R$. در این‌صورت $\mathrm{Ann}_R(x) = \mathrm{Ann}_R(Rx)$.

اثبات. اثبات واضح است. $\square$

۶۵.۲.۱ لم. اگر R حلقه کاهشی باشد، آنگاه برای هر ایده‌آل سره I از حلقه R داریم:

$$I \cap \mathrm{Ann}_R(I) = (0).$$

اثبات. فرض کنیم $0 \neq x \in I \cap \mathrm{Ann}_R(I)$ باشد. در این‌صورت $x \in I$ و $x \in \mathrm{Ann}_R(I)$ است، پس x هر عضو I از جمله خودش را صفر می‌کند و لذا داریم $x^2 = 0$، که با کاهشی بودن حلقه‌ی R تناقض دارد. $\square$

۶۶.۲.۱ قضیه. اگر R یک حلقه کاهشی باشد، آنگاه $Z(R)$ اجتماعی از ایده‌آل‌های اول مینیمال است.

اثبات. به گزاره ۱.۱ از [۲۵] مراجعه شود. $\square$

۶۷.۲.۱ قضیه. ایده‌آل P در حلقه R یک ایده‌آل اول مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $x \in P$ وجود داشته باشد $y \notin P$ و عدد طبیعی $i \leq \nu(R)$ به طوری که $yx^i = 0$.

اثبات. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول مینیمال باشد. پس PR_P رادیکال پوچ موضعی‌سازی R_P است. بنابراین وجود دارد $z \notin P$ و عدد طبیعی j به طوری که $zx^j = 0$. اما zx پوچ‌توان است، پس می‌توانیم قرار دهیم $i = \nu(zx)$ و $y = z^i$.

برای اثبات برعکس به [۱۸، قضیه ۲.۱] مراجعه شود. □

۶۸.۲.۱ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه تجزیه‌پذیر باشد که $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$. در این‌صورت هر ایده‌آل ماکسیمال از حلقه R، عبارت است از حاصل‌ضرب R_iها در یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه‌ای دیگر. به عنوان نمونه

$$M = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_{j-1} \times M_j \times R_{j+1} \times R_n.$$

یک ایده‌آل ماکسیمال R است. ایده‌آل‌های اول R نیز دارای چنین ساختاری هستند.

اثبات. اثبات واضح است. □

۶۹.۲.۱ قضیه (قضیه ساختاری حلقه‌های آرتینی). هر حلقه غیرموضعی و آرتینی با حاصل‌ضرب تعدادی متناهی از حلقه‌های موضعی و آرتینی یکریخت است.

اثبات. به قضیه ۷.۸ از [۱۳] مراجعه شود. □

۷۰.۲.۱ لم. فرض کنیم R یک حلقه متناهی باشد، در این‌صورت R یک حلقه آرتینی است.

اثبات. اثبات واضح است. □

۷۱.۲.۱ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه آرتینی باشد. در این صورت $J(R)$ پوچ‌توان است.

اثبات. به قضیه ۸ در صفحه ۱۶۹ از [۳] مراجعه شود. □

۷۲.۲.۱ نتیجه. فرض کنیم R یک حلقه آرتینی و موضعی باشد. در این‌صورت ایده‌آل ماکسیمال M پوچ‌توان است.

اثبات. با توجه به قضیه ۷۱.۲.۱، اثبات واضح است. □

۷۳.۲.۱ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه آرتینی باشد. در این‌صورت $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Max}(R)$.

اثبات. به قضیه ۱۰ در صفحه ۱۷۱ از [۳] مراجعه شود. □

۷۴.۲.۱ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه آرتینی و موضعی با ایده‌آل ماکسیمال M باشد. در این‌صورت M یک ایده‌آل اساسی از حلقه R است.

اثبات. فرض کنیم I ایده‌آل ناصفر دلخواهی از حلقه R باشد. در این‌صورت بنابر لم ۵۶.۲.۱، $I \subseteq M$ و در نتیجه $I \cap M = I \neq 0$. پس M یک ایده‌آل اساسی از R است. □

۷۵.۲.۱ لم. فرض کنیم $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ که هر R_i یک حلقه‌ی آرتینی و موضعی است. در این‌صورت هر یک از ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R، یک ایده‌آل اساسی از R هستند.

اثبات. واضح است. □

۷۶.۲.۱ لم. فرض کنیم $R \cong F_1 \times \cdots \times F_n$ که هر F_i یک میدان است. در این‌صورت R یک حلقه کاهشی است.

اثبات. با توجه به لم‌های ۵۹.۲.۱ و ۶۱.۲.۱، هر F_i کاهشی است و در نتیجه R یک حلقه کاهشی است. □

۷۷.۲.۱ قضیه (اجتناب از ایده‌آل‌های اول). فرض کنیم P_1، ...، P_n که $n \geq 2$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند و حداکثر دو تا از آنها اول نباشند. فرض کنیم S زیرگروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است (مثلاً S ممکن است ایده‌آل R یا زیرحلقه R باشد). فرض کنیم

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

در این صورت به ازای jای که $1 \leq j \leq n$، $S \subseteq P_j$.

اثبات. به قضیه ۶۱.۳ از [۱] مراجعه شود. □

فصل ۲

گراف توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر

۱.۲ چه زمانی $\Gamma(R)$ و $\overline{\Gamma}(R)$ برابر می‌شوند؟

در این بخش ابتدا تعریف گراف توسعه یافته مقسوم علیه صفر $\overline{\Gamma}(R)$ را ارائه می‌دهیم. سپس شرایطی را که تحت آن‌ها $\Gamma(R)$ و $\overline{\Gamma}(R)$ برابر می‌شوند، بیان می‌کنیم و در ادامه مثال‌هایی می‌آوریم.

۱.۱.۲ تعریف. گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه R که با $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، گرافی با مجموعه رئوس $Z(R)^* = Z(R)\setminus\{0\}$ است و دو رأس متمایز x و y در $\Gamma(R)$ با هم مجاور هستند اگر وتنها اگر $xy = 0$.

۲.۱.۲ تعریف. گراف توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر حلقه R که با $\overline{\Gamma}(R)$ نمایش داده می‌شود یک گراف ساده وابسته به R است با مجموعه رئوس $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ و دو رأس متمایز x و y با هم مجاورند اگر وتنها اگر دو عدد طبیعی n و m وجود داشته باشند به طوری که $x^n \cdot y^m = 0$ با این شرط که $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$.

۳.۱.۲ قضیه. اگر R یک حلقه باشد، عبارت‌های زیر معادلند:

۱. $\Gamma(R) = \overline{\Gamma}(R)$.

۲. R دارای دو شرط زیر است:

(آ) اگر $\mathrm{Nil}(R) \neq \{0\}$ آن‌گاه هر عضو ناصفر پوچ‌توان دارای حداکثر درجه پوچ‌توان ۲ است.

(ب) برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$، $\mathrm{Ann}(x^2) = \mathrm{Ann}(x)$.

۳. R دارای دو شرط زیر است:

(آ) اگر $\mathrm{Nil}(R) \neq \{0\}$، آن‌گاه هر عضو ناصفر پوچ‌توان دارای حداکثر درجه پوچ‌توان ۲ است.

(ب) برای هر $x \in Z(R)$، $\sqrt{\mathrm{Ann}(x)} \setminus \mathrm{Nil}(R) \subset \mathrm{Ann}(x)$.

برای اثبات این قضیه، به لم زیر نیاز داریم.

۴.۱.۲ لم. اگر R یک حلقه باشد و $x \in R \setminus \{0\}$، آن‌گاه:

۱. اگر x پوچ‌توان باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ داریم $\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathrm{Ann}(x^n)$.

۲. اگر x پوچ‌توان نباشد، آن‌گاه عبارت زیر را داریم:

$\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(x^2)$ اگر و تنها اگر برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، $\mathrm{Ann}(x^n) = \mathrm{Ann}(x)$.

اثبات. ۱. فرض کنیم x عنصر ناصفر، پوچ‌توان از حلقه R باشد. اگر $n_x = 2$، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، $\mathrm{Ann}(x^n) = \mathrm{Ann}(0) = R \supseteq \mathrm{Ann}(x)$ حال فرض کنیم $n_x \geq 3$. به خلاف فرض کنیم که $n \geq 2$ وجود دارد به طوری که $\mathrm{Ann}(x^n) = \mathrm{Ann}(x)$. چون برای $n \geq n_x$ داریم $\mathrm{Ann}(x^n) = \mathrm{Ann}(0) = R$ لذا n باید بین ۲ و $n_x - 1$ باشد، بنابراین داریم $x^{n_x - n} \in \mathrm{Ann}(x^n) = \mathrm{Ann}(x)$. پس $x^{n_x-n}x = x^{n_x-n+1} = 0$ که این تناقض است، چون $2 \leq n_x - n + 1 \leq n_x - 1$.

۲. فرض کنیم x عضوی پوچ‌توان نباشد به طوری که $\mathrm{Ann}(x^2) = \mathrm{Ann}(x)$. فرض کنیم عدد طبیعی $n \geq 2$ وجود دارد به طوری که $y \in \mathrm{Ann}(x^n)$ لذا $yx^n = 0$ و این نتیجه می‌دهد که $yx \in \mathrm{Ann}(x^{n-1})$ به استقراء می‌توان نشان داد $\mathrm{Ann}(x^{n-1}) = \mathrm{Ann}(x)$ و بنابراین $y \in \mathrm{Ann}(x^2) = \mathrm{Ann}(x)$. □

اثبات قضیه ۳.۱.۲. (۲) $\Rightarrow$ (۱) فرض کنیم x یک عضو پوچ‌توان باشد به طوری که $n_x \geq 3$. طبق لم ۴.۱.۲، برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ داریم $\mathrm{Ann}(x) \subsetneq \mathrm{Ann}(x^n)$. می‌توانیم فرض کنیم $2 < n \leq n_x$. فرض کنیم $y \in \mathrm{Ann}(x^n) \setminus \mathrm{Ann}(x)$. در این صورت $x^n y = 0$ و $xy \neq 0$ که این با $\Gamma(R) = \overline{\Gamma}(R)$ در تناقض است. حال اگر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$، آنگاه $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(x^2)$. لذا نشان دادن طرف دیگر شمول باقی می‌ماند. اگر $x \neq y$ یک عضو از $\mathrm{Ann}(x^2)$ باشد، آنگاه x و y در $\overline{\Gamma}(R)$ مجاورند که برابر است با $\Gamma(R)$. بنابراین $xy = 0$ و لذا $y \in \mathrm{Ann}(x)$.

(۳) $\Rightarrow$ (۲) اگر $y \in \sqrt{\mathrm{Ann}(x)} \setminus \mathrm{Nil}(R)$ آنگاه $n \in N^*$ وجود دارد به طوری که $y^n x = 0$ بنابراین طبق لم ۴.۱.۲، $x \in \mathrm{Ann}(y^x) = \mathrm{Ann}(y)$ و درنتیجه $xy = 0$.

(۱) $\Rightarrow$ (۳) اگر x و y دو رأس مجاور در $\overline{\Gamma}(R)$ باشند، آنگاه وجود دارد دو عدد طبیعی n و m به طوری که $x^n y^m = 0$ با $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$. حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

حالت ۱: اگر $x, y \in \mathrm{Nil}(R)$ و $n_x = n_y = 2$، آنگاه طبق ۲(آ)، $n = m = 1$ که این یعنی x و y دو رأس مجاور در $\Gamma(R)$ هستند.

حالت ۲: اگر $x \notin \mathrm{Nil}(R)$ و $y \in \mathrm{Nil}(R)$، آنگاه طبق ۲(آ)، $m = 1$. بنابراین $x \in \sqrt{\mathrm{Ann}(y)} \setminus \mathrm{Nil}(R)$ و طبق مفروضات $xy = 0$ پس x و y در $\Gamma(R)$ مجاورند.

حالت ۳: اگر $x \notin \mathrm{Nil}(R)$ و $y \notin \mathrm{Nil}(R)$، آنگاه $x \in \sqrt{\mathrm{Ann}(y^m)} \setminus \mathrm{Nil}(R) \subset \mathrm{Ann}(y^m)$ و بنابراین $xy^m = 0$ پس $y \in \sqrt{\mathrm{Ann}(x)} \setminus \mathrm{Nil}(R) \subset \mathrm{Ann}(x)$. □

حال می‌توانیم به عنوان مثال $\mathbb{Z}_{24}$ و $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ و $\mathbb{Z}_2[X,Y]/(XY^2, X^3)$ در نظر بگیریم برای نمونه‌ای

از حلقه R که شامل یک عنصر پوچ‌توان با درجه پوچ‌توانی حداقل ۳ است به طوری که وجود دارد $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$ با $\mathrm{Ann}(x) \neq \mathrm{Ann}(x^{۲})$.

برای نشان دادن این که شرایط (آ) و (ب) از هر دو مورد (۲) و (۳) در قضیه ۳.۱.۲ مستقل هستند، مثال‌های زیر را ارائه می‌دهیم. ابتدا توجه داشته باشید که می‌توان به راحتی نشان داد که شرط ۲(ب) با شرط ۳(ب) معادل است.

۵.۱.۲ مثال. ۱. برای مثال از یک حلقه R که دارای یک عنصر پوچ‌توان با حداکثر درجه پوچ‌توانی ۲ و شامل یک عنصر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$ است به طوری که $\mathrm{Ann}(x^{۲}) \neq \mathrm{Ann}(x)$، می‌توانیم حلقه‌های $\mathbb{Z}_{۲} \times \mathbb{Z}_{۴}$, $\mathbb{Z}_{۱۲}, \mathbb{Z}_{۱۸}, \mathbb{Z}_{۳۶}\mathbb{Z}_{۲}[X,Y] = (XY^{۲}, X^{۲})$ را در نظر بگیریم.

۲. حلقه‌های زیر می‌توانند به عنوان مثالی از یک حلقه R که شامل یک عنصر پوچ‌توان با حداقل درجه پوچ‌توانی ۳ و $\mathbb{Z}_{۲^m} : \mathrm{Nil}(R) = Z(R)$ (با $m \geq ۳$) و $\mathbb{Z}_{۲}[X]/(X^{۳})$ مورد استفاده قرار بگیرند.

با این حال، بدست آوردن مثالی از یک حلقه R که شامل یک عنصر پوچ‌توان با حداقل درجه پوچ‌توانی ۳ به طوری که $Z(R) \neq \mathrm{Nil}(R)$ با $\mathrm{Ann}(x^{۲}) = \mathrm{Ann}(x)$ برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$، آسان به نظر نمی‌رسد. پس، برای ساختن چنین نمونه‌ای، ابتدا باید برخی از ویژگی‌های آن را مشخص کرد. به این منظور، نتیجه زیر ارائه می‌شود.

۶.۱.۲ گزاره. فرض کنیم R یک حلقه باشد که دارای خواص زیر باشد:

$\mathrm{Nil}(R) \neq \{۰\}$، $\mathrm{Nil}(R) \subsetneq Z(R)$ و برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$ داشته باشیم $\mathrm{Ann}(x^{۲}) = \mathrm{Ann}(x)$.

در این صورت، برای هر $y \in \mathrm{Nil}(R)$ و هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$ داریم $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(y)$. در نتیجه، برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$ داریم $\mathrm{Ann}(x)\mathrm{Nil}(R) = \{۰\}$.

اگر علاوه بر آن عنصر $t \in \mathrm{Nil}(R)$ وجود داشته باشد به طوری که $t^۲ \neq ۰$، آن‌گاه برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$ داریم $t \notin \mathrm{Ann}(x)$. درنتیجه، برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$، $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(t) \subset \mathrm{Nil}(R)$ به طوری که $z^۲ = ۰$ برای هر $z \in \mathrm{Ann}(x)$.

اثبات. ابتدا $y \in \mathrm{Nil}(R)$ و $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$ در را نظر بگیرید و فرض کنیم که $\mathrm{Ann}(x) \nsubseteq \mathrm{Ann}(y)$. در این صورت $a \in R$ وجود دارد به طوری که $ax = ۰$ و $ay \neq ۰$. در نتیجه $a(x+y) = ay \neq ۰$. با این حال، برای عدد $n \in \mathbb{N}$ که $y^n = ۰$، داریم $a(x+y)^n = ۰$. این یعنی $\mathrm{Ann}(x+y) \neq \mathrm{Ann}(x+y)^n$ که تناقض است (طبق فرض و لم ۴.۱.۲).

این نشان می‌دهد که برای هر عنصر پوچ‌توان $z \in \mathrm{Ann}(x)$ داریم $z^۲ = ۰$

پس، برای اثبات این باقی مانده که نشان دهیم $\mathrm{Ann}(t) \subset \mathrm{Nil}(R)$. اگر چنین نباشد، آن‌گاه $a \in \mathrm{Ann}(y)$ وجود دارد به طوری که $a \notin \mathrm{Nil}(R)$. بنابراین $\mathrm{Ann}(a) \subset \mathrm{Ann}(y)$. اما $y \in \mathrm{Ann}(a)$ نتیجه می‌دهد که $y^۲ = ۰$ که این تناقض است. □

حال در موقعیتی قرار داریم که مثال مورد نظر را ارائه دهیم. برای این منظور از یک حلقه جدید استفاده می‌کنیم که اخیراً ساخته شده در [۴] معرفی شده است. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی باشد که $۱_R \neq ۰$ و فرض کنیم $M_۱$ و $M_۲$ دو R-زیرمدول از R-جبر L باشند به طوری که

$$(M_۱)^۲ := \{xy \mid x, y \in M_۱\} \subset M_۲.$$

در این صورت تعمیم ۲-بدیهی از R به وسیله ($M_۱$ و $M_۲$) حلقه‌ای است که با $R \ltimes_۲ M_۱ \ltimes M_۲$ نشان داده می‌شود که گروه زمینه آن $A \times M_۱ \times M_۲$ است و عمل ضرب در آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a, m_۱, m_۲)(b, n_۱, n_۲) = (ab, an_۱ + bm_۱, an_۲ + bm_۲ + m_۱n_۱).$$

توجه داریم این ساختار درواقع تعمیمی از تعمیم بدیهی یک حلقه توسط یک مدول است (به عنوان مثال به مرجع [۷] مراجعه کنید). در حقیقت، $R \ltimes_{2} 0 \ltimes M_2$ را می‌توان به عنوان تعمیم بدیهی از حلقه R توسط M_2 در نظر گرفت. توجه داریم که $\mathrm{Nil}(R \ltimes_2 M_1 \ltimes M_2) = \mathrm{Nil}(R) \ltimes_2 M_1 \ltimes M_2$ و

$$Z(R \ltimes_2 M_1 \ltimes M_2) = \{(r, m_1, m_2) \in R \ltimes M_1 \ltimes M_2 \mid r \in Z(R) \cup Z(M_1) \cup Z(M_2)\}.$$

همچنین توجه داریم که اگر M_1 شامل عنصری مانند m باشد که $m^2 \neq 0$، آن‌گاه $(0, m, 0)$ یک عنصر پوچ‌توان با حداکثر درجه پوچ‌توانی ۳ است.

۷.۱.۲ مثال. فرض کنیم $R = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}_2$. در این صورت $\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}_2)/(\{0\} \ltimes \mathbb{Z}_2)$ یک R-مدول با ضرب اسکالر تعریف شده به شکل مقابل است: $(a, \overline{n})x := ax$، برای هر $(a, n, x) \in \mathbb{Z}^3$.

حلقه $S = R \ltimes_2 \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}$ دارای خواص زیر است:

- S شامل عنصری پوچ‌توان با حداکثر درجه پوچ‌توانی ۳ است.
- $\mathrm{Nil}(R) \subsetneq Z(R)$.
- برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$، $\mathrm{Ann}(x^2) = \mathrm{Ann}(x)$.

اثبات. برای به دست آوردن نتیجه کافی است نشان دهیم که برای هر $x \in Z(S) \setminus \mathrm{Nil}(S)$، داریم

$$\mathrm{Ann}(x) = \{((0, \overline{0}), 0, 0); (0, \overline{1}), 0, 0)\}.$$

این برابری یک نتیجه ساده از این واقعیت است که $\mathrm{Nil}(S) = \{((0, \overline{n}), s, t) | (n, s, t) \in \mathbb{Z}^3\}$ و

$$Z(S) \setminus \mathrm{Nil}(S) = \{((2k, \overline{n}), s, t) \mid k \in \mathbb{Z}^* \text{ و } (n, s, t) \in \mathbb{Z}^3\}.$$

$\square$

موارد خاص زیر نتایج ساده‌ای از قضیه ۳.۱.۲ هستند.

۸.۱.۲ نتیجه. فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر R شامل یک عنصر پوچ‌توان با حداکثر درجه پوچ‌توانی ۳ باشد، آن‌گاه $\overline{\Gamma}(R) \neq \Gamma(R)$.

۹.۱.۲ نتیجه. فرض کنیم R یک حلقه کاهشی باشد. در این صورت $\overline{\Gamma}(R) = \Gamma(R)$.

اثبات. فرض کنیم که عنصر $x \in Z(R)^*$ وجود دارد به طوری که $\mathrm{Ann}(x) \neq \mathrm{Ann}(x^2)$. در این صورت $z \in Z(R)^*$ وجود دارد به طوری که $zx^2 = 0$ و $zx \neq 0$ و لذا داریم $zx \in \mathrm{Nil}(R) \setminus \{0\}$ که تناقض است، چون R کاهشی است. $\square$

در ادامه نشان می‌دهیم اگر حلقه R به صورت حاصل ضرب تعداد متناهی حلقه باشد دو گراف $\overline{\Gamma}(R) =$ $\Gamma(R)$ با هم برابرند.

۱۰.۱.۲ گزاره. فرض کنیم $(R_i)_{1\leq i\leq n}$ خانواده متناهی از حلقه‌ها باشد که $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. در این صورت $\overline{\Gamma}(\prod_{i=1}^n R_i) = \Gamma(\prod_{i=1}^n R_i)$ اگر و تنها اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، R_i کاهشی باشد.

اثبات. کافی است قضیه را برای $n = 2$ اثبات کنیم.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم که R_1 کاهشی نباشد. در این صورت $x_1 \neq 0$ وجود دارد به طوری که $x_1^2 = 0$. داریم $(1,0)(x_1,1) = (x_1,0) \neq (0,0)$ اما $(1,0)(x_1,1)^2 = (0,0)$. لذا طبق قضیه ۳.۱.۲ داریم $\overline{\Gamma}(R_1 \times R_2) \neq \Gamma(R_1 \times R_2)$ که تناقض است.

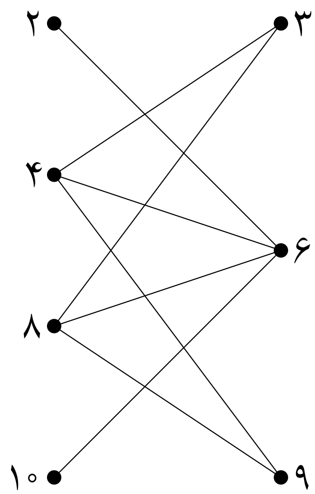
$(\Leftarrow)$ با استفاده از نتیجه ۹.۱.۲ واضح است. $\square$

به عنوان یک نتیجه ساده از گزاره ۱۰.۱.۲، مشخص می‌کنیم که چه زمانی گراف $\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)$ با $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ برابر است.

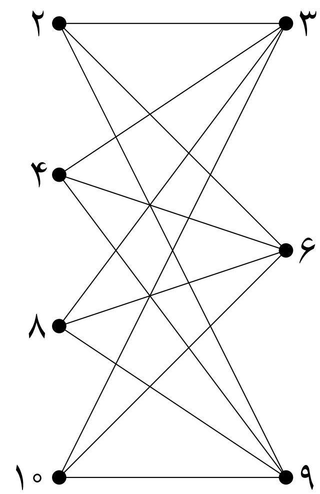
۱۱.۱.۲ نتیجه. فرض کنیم $n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ تجزیه به عامل‌های اول عدد طبیعی n باشد که در آن $k\in\mathbb{N}^*$. فرض کنیم $m:=Sup\{\alpha_i|1\leq i\leq k\}$ در این صورت $\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)\neq\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ اگر و تنها اگر یا $m\geq 3$ باشد یا ($m=2$ و $k\geq 2$).

در نتیجه $\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)=\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ اگر و تنها اگر یا $n=p^2$ که p یک عدد اول است یا برای هر $1\leq i\leq k$، $\alpha_i\neq 2$. در حالت خاص، اگر $\mathbb{Z}_n$ دارای عنصر پوچ‌توان ناصفر باشد، آن‌گاه $\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)=\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ اگر و تنها اگر $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ گراف کامل باشد.

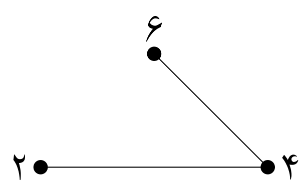
این بخش را با مثال‌هایی ساده به پایان می‌بریم:



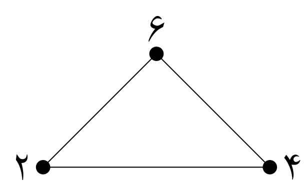
$\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$



$\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_{12})$



$\Gamma(\mathbb{Z}_8)$



$\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_8)$

۲.۲ قطر $\overline{\Gamma}(R)$

در این بخش، قطر گراف توسعه یافته حلقه‌ها را مطالعه می‌کنیم.

مطمئناً، به عنوان توسعه‌ای از گراف کلاسیکال در [۱۰، قضیه ۲.۳]، $\overline{\Gamma}(R)$ دارای حداکثر قطرِ ۳ است.

۱.۲.۲ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت $\overline{\Gamma}(R)$ همبند با $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R)) \leq ۳$ است.

در نتیجه زیر، به عنوان نمونه‌ای از [۱۰، قضیه ۲.۵]، مشخص می‌کنیم که چه زمانی $\overline{\Gamma}(R)$ دارای یک رأس مجاور با همه رئوس دیگر است (به عبارت دیگر $\overline{\Gamma}(R)$ یک گراف ستاره است).

۲.۲.۲ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت رأس x از گراف $\overline{\Gamma}(R)$ وجود دارد که مجاور همه رئوس دیگر است اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times D$ که D دامنه صحیح است، یا داریم $Z(R) = \sqrt{\mathrm{Ann}(x^{n_x-۱})}$.

اثبات. $\Leftarrow$ فرض کنیم x مجاور همه رئوس دیگر گراف $\overline{\Gamma}(R)$ باشد. اگر x عنصر پوچ‌توان باشد، آن‌گاه برای هر عنصر ناصفر مقسوم‌علیه صفر $x \neq y$، دو عدد طبیعی α و β که $y^\alpha \neq ۰$ و $x^\beta \neq ۰$ وجود دارند به طوری که $y^\alpha x^\beta = ۰$ (چون x و y در $\overline{\Gamma}(R)$ مجاور هستند)؛ پس $\beta < n_x$ و $y^\alpha x^{n_x-۱} = ۰$ و از این رو $y \in \sqrt{\mathrm{Ann}(x^{n_x-۱})}$. سرانجام، چون x پوچ‌توان است، پس $x \in \sqrt{\mathrm{Ann}(x^{n_x-۱})}$ و بنابراین $Z(R) = \sqrt{\mathrm{Ann}(x^{n_x-۱})}$.

اگر $x \notin \mathrm{Nil}(R)^*$، آن‌گاه $x^۲ = x$. زیرا در غیر این صورت عدد طبیعی α و β وجود دارند به طوری که $(x^۲)^\alpha x^\beta = x^{۲\alpha+\beta} = ۰$ که این تناقض است؛ چون $x \notin \mathrm{Nil}(R)^*$، بنابراین $R = R_x \oplus R(۱-x)$. لذا، می‌توانیم $R = R_۱ \times R_۲$ به‌گونه‌ای در نظر بگیریم که رأس $(۱,۰)$ که مجاور همه رئوس دیگر است. برای هر $R_۱ \ni z \neq ۱$، $(z,۰)$ مقسوم‌علیه صفر است، بنابراین $n,m \in \mathbb{N}^*$ وجود دارند به طوری که $(z,۰)^n(۱,۰)^m = (۰,۰)$ و $(z,۰)^n \neq (۰,۰)$ که تناقض است. بنابراین $R_۱ \cong \mathbb{Z}_۲$. اگر $R_۲$ دامنه صحیح نباشد، آن‌گاه $۰ \neq t \in Z(R_۲)$ وجود دارد. در این صورت $(۱,t)$ مقسوم‌علیه صفر R است که مجاور $(۱,۰)$ نیست که این تناقض است. پس، $R_۲$ باید یک دامنه صحیح باشد.

($\Leftarrow$) اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times D$ که D دامنه صحیح است، آن‌گاه $(\overline{1}, 0)$ مجاور همه رئوس دیگر است. اگر $0 \neq x \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $Z(R) = \sqrt{\mathrm{Ann}(x^{n_x - 1})}$، آن‌گاه x مجاور همه رئوس دیگر است. □

در ادامه شرایطی را مشخص می‌کنیم که $\overline{\Gamma}(R)$ گراف کامل است. در [10، قضیه ۲.۸]، ثابت شد که گراف $\Gamma(R)$ کامل است اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ یا برای هر $x, y \in Z(R)^*$، $xy = 0$ (به عبارت دیگر $Z(R)^2 = 0$). برای گراف توسعه یافته، نتیجه زیر را داریم:

۳.۲.۲ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه باشد، در این صورت $\overline{\Gamma}(R)$ گراف کامل است اگر و تنها اگر یا $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ یا $Z(R) = \mathrm{Nil}(R)$ و برای هر $x, y \in Z(R)^*$ داشته باشیم $x^{n_x - 1}y^{n_y - 1} = 0$.

اثبات. ($\Rightarrow$) طبق تعریف واضح است.

($\Leftarrow$) فرض کنیم $\overline{\Gamma}(R)$ کامل است.

اگر $Z(R) = \mathrm{Nil}(R)$، آن‌گاه طبق تعریف، برای هر $x \in \mathrm{Nil}(R)$ داریم $x^{n_x - 1}x^{n_x - 1} = 0$. چون $\overline{\Gamma}(R)$ کامل است، برای هر دو عنصر متمایز $x, y \in Z(R)^*$، اعداد طبیعی n و m که $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$ وجود دارند به طوری که $x^n y^m = 0$. از طرفی لزوماً $n < n_x$ و $m < m_y$، بنابراین $x^{n_x - 1}y^{n_y - 1} = 0$.

حال فرض کنیم که $Z(R) \neq \mathrm{Nil}(R)$، چون $\overline{\Gamma}(R)$ کامل است و طبق قضیه ۲.۲.۲ داریم $R \cong \mathbb{Z}_2 \times D$، که D یک دامنه صحیح است، پس برای عناصر متمایز $a, b \in D \setminus \{0\}$، $(0, a)$ و $(0, b)$ در $\overline{\Gamma}(R)$ مجاور هستند. لذا دو عدد طبیعی n و m وجود دارد به طوری که $(0, a)^n(0, b)^m = (0, 0)$، بنابراین $a = 0$ یا $b = 0$ پس لزوماً باید داشته باشیم $D \cong \mathbb{Z}_2$. □

قرار دهید

$$\overline{Z}(R) := \{x^{n_x - 1} | x \in \mathrm{Nil}(R)^*\}$$

و

$$\overline{Z}(R)^{۲} := \{x^{n_x-۱}y^{n_y-۱} | x, y \in \mathrm{Nil}(R)^*\}.$$

حال نتیجه زیر را داریم.

۴.۲.۲ نتیجه. فرض کنیم R یک حلقه باشد به طوری که $\overline{\Gamma}(R) \neq \Gamma(R)$. در این صورت $\overline{\Gamma}(R)$ کامل است اگر و تنها اگر $Z(R) = \mathrm{Nil}(R)$ و $\overline{Z}(R)^{۲} = \{۰\}$.

زمانی که $Z(R) = \mathrm{Nil}(R) \neq \{۰\}$ در [۶، قضیه ۲.۲] قطر گراف $\Gamma(R)$ مورد مطالعه قرار گرفته است. برای گراف توسعه یافته نتیجه زیر را داریم که کمی با [۶، قضیه ۲.۲] متفاوت است:

۵.۲.۲ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه باشد که $Z(R) = \mathrm{Nil}(R) \neq \{۰\}$. در این صورت $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R)) \leq ۲$ و دقیقاً یکی از سه حالت زیر باید رخ دهد.

۱. $|Z(R)^*| = ۱$. در این صورت R یک‌ریخت با $\mathbb{Z}_۴$ یا $\mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$ است و $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۰$.

۲. $|Z(R)^*| \geq ۲$ و $Z(R)^۲ = \{۰\}$. در این صورت $\overline{\Gamma}(R)$ گراف کامل است و $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۱$.

۳. $|Z(R)^*| \geq ۲$ و $Z(R)^۲ \neq \{۰\}$. اگر $\overline{Z}(R)^۲ = ۰$، آنگاه $\overline{\Gamma}(R)$ گراف کامل است و $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۱$. در غیر این صورت $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۲$.

اثبات. ۱. اگر $|Z(R)^*| = ۱$، آنگاه $\overline{\Gamma}(R) = \Gamma(R)$ و لذا طبق [۱۵، گزاره ۲.۲]، داریم $R \cong \mathbb{Z}_۴$ یا $\mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$.

۲. اگر $|Z(R)^*| \geq ۲$ و $Z(R)^۲ = \{۰\}$، آنگاه برای هر $x, y \in Z(R)$ داریم $xy = ۰$. پس $\overline{\Gamma}(R)$ یک گراف کامل است و $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۱$.

۳. طبق نتیجه ۴.۲.۲، $\overline{\Gamma}(R)$ یک گراف کامل است از این رو $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۱$. در غیر این صورت، $x, y \in Z(R)^*$ وجود دارد به طوری که $x^{n_x-۱}y^{n_y-۱} \neq ۰$ و لذا $xy \notin \{۰, x, y\}$. بنابراین $x - xy - y$ مسیری به طول ۲ بین x و y است. $\square$

اکنون قطر گراف توسعه یافته برای حلقه R که به صورت حاصل ضرب تعداد متناهی حلقه باشد را بررسی می‌کنیم.

۶.۲.۲ گزاره. فرض کنیم $R = \prod_{i=۱}^{n} R_i$ که $(R_i)_{۱\leq i\leq n}$ خانواده متناهی از حلقه‌ها باشد و $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{۱\}$.

۱. اگر $n = ۲$، عبارت‌های زیر را داریم:

(آ) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = \operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر $R_۱ \cong R_۲ \cong \mathbb{Z}_۲$.

(ب) اگر $R_۱$ و $R_۲$ دامنه صحیح باشند که $|R_۱| \geq ۳$ یا $|R_۲| \geq ۳$، آن‌گاه $\Gamma(R) = \overline{\Gamma}(R)$ و $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۲$. در این حالت $\Gamma(R)$ یک گراف دوبخشی کامل است.

(ج) اگر حداقل یکی از $R_۱$ یا $R_۲$ شامل یک مقسوم‌علیه صفر غیر پوچ‌توان باشد، آن‌گاه داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = \operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

(د) اگر حداقل یکی از $R_۱$ یا $R_۲$ دامنه صحیح نباشد به طوری که هر مقسوم‌علیه صفر در هر حلقه با مقسوم‌علیه صفر ناصفر، پوچ‌توان باشد. آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۳$ و $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۲$.

۲. اگر $n \geq ۳$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = \operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

اثبات. **حالت $n = ۲$.** اثبات (آ) و (ب) بدیهی است.

قسمت (ج) را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $R_۱$ دارای مقسوم‌علیه صفر پوچ‌توانی مانند z باشد. در این صورت عنصر $z' \in R_۱$ وجود دارد به طوری که $zz' = ۰$. لذا با استفاده از مسیر زیر در هر دو گراف $\Gamma(R)$

و $\overline{\Gamma}(R)$، $(z,۱)-(z',۰)-(۰,۱)-(۱,۰)$ و این نکته که هیچ رأس مجاور بین $(۱,۰)$ و $(z,۱)$ وجود ندارد، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = \mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

(د) فقط حالتی را اثبات می‌کنیم که برای مثال، $R_۱$ دامنه صحیح نباشد به طوری که هر مقسوم‌علیه صفر پوچ‌توان باشد و $R_۲$ دامنه صحیح باشد. ابتدا از همان مسیر بالا استفاده می‌کنیم، داریم $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۳$. با این حال در $\overline{\Gamma}(R)$ برای هر $z \in Z(R_۱)^* = \mathrm{Nil}(R_۱)$ داریم $d((۱,۰),(z,۱)) = ۱$. اکنون داریم $Z(R)^* = T_۱ \bigcup T_۲ \bigcup T_۳ \bigcup T_۴$ که $T_۱ = \{(a,۰) \mid \text{منظم است } a\}$، $T_۲ = \{(b,۰) \mid b \in Z(R_۱)\}$، $T_۳ = \{(۰,x) \mid x \in R_۲\}$ و $T_۴ = \{(a,x) \mid a \in Z(R_۱), x \in R_۲\}$ باشند. یک بررسی ساده بین هر دو عنصر متمایز نشان می‌دهد که $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۲$.

حالت ۳ $n \geq ۳$. توجه داریم که $(۰,۱,۱,\dots,۱)-(۱,۰,۰,\dots,۰)-(۰,۰,\dots,۰,۱)-(۱,۱,\dots,۱,۰)$ کوتاه‌ترین مسیر بین $(۰,۱,۱,\dots,۱)$ و $(۱,۱,۱,\dots,۰)$ است. □

گزاره ۶.۲.۲، در برخی از موارد به تعیین قطر روی $\mathbb{Z}_n$ کمک می‌کند.

۷.۲.۲ گزاره. برای عدد مثبت $n \in \mathbb{N}^*$، گزاره‌های زیر برقرار هستند:

۱. اگر $n = ۲^۲$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma})(\mathbb{Z}_n) = ۰$.

۲. اگر $n = ۲^m$ و $m > ۲$ یا $n = p^m$ که p عدد اول فرد است و $m \geq ۲$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma})(\mathbb{Z}_n) = ۱$.
در این حالت گراف $\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)$ کامل است.

۳. اگر $n = p^\alpha q^\beta$ که p و q اعداد اول متمایز هستند، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)) = ۲$. در این حالت،

- اگر $p = ۲$ و $\alpha = \beta = ۱$، آن‌گاه $\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)$ گراف ستاره است.
- اگر $(p = ۲$، $\alpha = ۲$ و $\beta = ۱)$ یا $n = pq$، آن‌گاه $\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)$ گراف دوبخشی کامل است.

۴. اگر $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$ تجزیه n به اعداد اول باشد که برای $i\neq j$، $p_i\neq p_j$ و $k\geq 3$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n))=3$.

اثبات. ۱. فرض کنیم $n=2^2$؛ در این صورت $Z(\mathbb{Z}_4)^*=\{\overline{2}\}$ و لذا $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_4))=0$.

۲. فرض کنیم $n=2^m$ که $m>2$ یا $n=p^m$ که p عدد اول فرد است و $m\geq 2$. در این صورت اگر $n=2^m$ آن‌گاه همه مقسوم‌علیه‌های $\mathbb{Z}_n$ مضرب ۲ هستند و اگر $n=p^m$ آن‌گاه همه مقسوم‌علیه‌های صفر $\mathbb{Z}_n$ مضرب p هستند. واضح است که همه مقسوم‌علیه‌ها مجاور یکدیگر هستند، بنابراین $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n))=1$ و $\overline{\Gamma}(R)$ گراف کامل است.

۳. فرض کنیم $n=p^\alpha q^\beta$ که p و q اعداد اول متمایز هستند در این صورت، طبق گزاره ۶.۲.۲ داریم $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n))=2$.

اگر $n=2q$، آن‌گاه $Z(\mathbb{Z}_n)^*=\{\overline{2h}/0<h<q\}\cup\{\overline{q}\}$ پس، $\overline{q}$ مجاور همه رئوس دیگر است و $d(\overline{2h},\overline{2h'})=2$ که $0<h<q$ و $0<h'<q$. از این رو، $\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_{2q})$ گراف ستاره است.

اگر $n=4q$، آن‌گاه $Z(\mathbb{Z}_n)^*=\{\overline{2h}/0<h<2q\}\cup\{\overline{q}\}$. دو مجموعه $A:=\{\overline{2h}/0<h<2q$ و $h\neq q\}$ و $B:=\{\overline{kq}/0<k<4\}$ به صورت یک افراز از $Z(\mathbb{Z}_n)^*$ هستند و لذا این نشان می‌دهد که $\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)$ گراف دوبخشی کامل است.

۴. از گزاره ۶.۲.۲ نتیجه می‌شود. $\square$

۳.۲ دور $\overline{\Gamma}(R)$

در این بخش، کمر گراف $\overline{\Gamma}(R)$ را مطالعه می‌کنیم.

از آنجا که $\Gamma(R)$ زیر گرافی از $\overline{\Gamma}(R)$ است لذا طبق [۹، قضیه ۲.۴]، داریم $\operatorname{gr}(\overline{\Gamma}(R))\in\{3,4,\infty\}$.

در حالت کلاسیک چند نمونه از حلقه R وجود دارد به طوری که $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = \infty$. نتیجه زیر نشان می‌دهد که وقتی $\overline{\Gamma}(R) \neq \Gamma(R)$، داریم $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) \in \{۳, ۴\}$.

۱.۳.۲ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر $\overline{\Gamma}(R) \neq \Gamma(R)$، آن‌گاه $\overline{\Gamma}(R)$ دارای دور است.

اثبات. چون $\overline{\Gamma}(R) \neq \Gamma(R)$ لذا طبق قضیه ۳.۱.۲، یا عنصر پوچ‌توان x با $n_x \geq ۳$ وجود دارد یا عنصر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$ وجود دارد به طوری که $\mathrm{Ann}(x) \neq \mathrm{Ann}(x^۲)$. برای حالت اول، داریم $x - (x + x^{n_x - ۱}) - x^{n_x - ۱} - x$ یک دور به طول ۳ است. برای حالت دوم $y \in Z(R)^*$ وجود دارد به طوری که $yx^۲ = ۰$ و $yx \neq ۰$. اگر $y^۲ = ۰$ آن‌گاه $y - (x + y) - xy - y$ یک دور به طول ۳ است. در غیر این صورت $x - yx - x^۲ - y - x$ یک دور به طول ۴ است. $\square$

۲.۳.۲ نتیجه. اگر R شامل عنصر پوچ‌توانی با درجه پوچ‌توانی بزرگتر یا مساوی ۳ باشد، آن‌گاه $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

۳.۳.۲ نتیجه. اگر عناصر x و z از $Z(R)^*$ وجود داشته باشند به طوری که $x \notin \mathrm{Nil}(R)$، $z^۲ = ۰$، $zx \neq ۰$ و $zx^۲ = ۰$ آن‌گاه $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

در [۶، قضیه ۲.۱۱]، زمانی که $Z(R) = \mathrm{Nil}(R) \neq \{۰\}$، کمر گراف $\Gamma(R)$ مورد مطالعه قرار گرفته است. برای گراف توسعه یافته، نتیجه تا حدی متفاوت زیر را داریم.

۴.۳.۲ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه باشد که $Z(R) = \mathrm{Nil}(R) \neq \{۰\}$. در این صورت دقیقا یکی از سه حالت زیر باید رخ دهد.

۱. اگر $|Z(R)^*| = ۱$، آن‌گاه R یک‌ریخت با $\mathbb{Z}_۴$ یا $\mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$ است و $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = \infty$.

۲. اگر $|Z(R)^*| = ۲$، آن‌گاه R یک‌ریخت با $\mathbb{Z}_۹$ یا $\mathbb{Z}_۳[X]/(X^۲)$ است و $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = \infty$.

۳. اگر $|Z(R)^*| = ۳$، آنگاه R یک‌ریخت با $\mathbb{Z}_۸$، $\mathbb{Z}_۲[X]/(X^۳)$، $\mathbb{Z}_۴[X]/(۲X, X^۲-۲)$، $\mathbb{Z}_۲[X,Y]/(X,Y)^۲$، $\mathbb{Z}_۴[X]/(۲,X)^۲$، $\mathbb{Z}_۴[X]/(X^۲+X+۱)$ یا $\mathbb{F}_۴[X]/(X^۲)$ است و $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

۴. اگر $|Z(R)^*| \geq ۴$، آنگاه $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

اثبات. همه حکم‌ها از [۶، قضیه ۲.۱۱]، نتیجه می‌شوند به جز موارد زیر:

برای $R \cong \mathbb{Z}_۸$، $۲-۶-۴-۲$ یک دور به طول ۳ است.

برای $R \cong \mathbb{Z}_۲[X]/(X^۳)$، $X - X^۲ - (X^۲+X) - X$ یک دور به طول ۳ است.

نهایتاً برای $R \cong \mathbb{Z}_۴[X]/(۲X, X^۲-۲)$، $۲ - X - (X-۲) - ۲$ یک دور به طول ۳ است. □

[۵، قضیه ۲.۳ و ۲.۵] اجازه می‌دهد شرایطی را برقرار کنیم که در آن $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۴$. یعنی، نتایج زیر را داریم.

۵.۳.۲ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه با $\mathrm{Nil}(R) \neq ۰$ و $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = ۴$ باشد. در این صورت $\overline{\Gamma}(R) \neq \Gamma(R)$ نتیجه می‌دهد که $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۴$ و $\overline{\Gamma}(R)$ گراف دوبخشی کامل است.

اثبات. با توجه به [۵، قضیه ۲.۳] داریم $R \cong D \times B$ که D دامنه صحیح با $|D| \geq ۳$ است و $B = \mathbb{Z}_۴$ یا $\mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$. در این صورت $Z(R) = A \cup B$ که $A = \{(a,x) | a \in D$ و $x \in \{۰;۲\}\}$ و $B = \{(۰,n) | n \in \mathbb{Z}_۴\}$. می‌توان نشان داد در $\overline{\Gamma}(R)$ هر عنصر از A به همه عناصر B متصل است به طوری که $\overline{\Gamma}(R)$ گراف دوبخشی کامل است و لذا $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۴$. □

۶.۳.۲ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه با $\mathrm{Nil}(R) \neq ۰$ و $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = \infty$ باشد. در این صورت دقیقاً یکی از موارد زیر رخ می‌دهد:

۱. $\Gamma(R) = \overline{\Gamma}(R)$ گراف تک رأس یا ستاره است. در این حالت $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}) = \infty$.

۲. $\Gamma(R) = \overline{K}^{1,3}$ (به عبارت دیگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ یا $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$) در این حالت $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = 4$ و $\overline{\Gamma}(R) \neq \Gamma(R)$.

اثبات. با استفاده از [۵، قضیه ۲.۵] و زمانی که $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ یا $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$، در گراف $\overline{\Gamma}(R)$ دور $(1,0) - (0,1) - (1,2) - (0,2) - (1,0)$ را به طول ۴ داریم. □

در [۹، قضیه ۳.۵]، مفهوم گراف تکمیل شده برای دسته‌بندی حلقه کسرهای R که R یک حلقه فون نیومن[1] منظم کاهشی است به کار می‌رود. در گزاره ۸.۳.۲، تلاش می‌کنیم نتیجه مشابهی را ارائه کنیم. در حقیقت، زمانی که $\overline{\Gamma}(R) \neq \Gamma(R)$ تنها نشان می‌دهیم $\overline{\Gamma}(R)$ تکمیل شده است و این شرط کافی برای صفر بعدی بودن $T(R)$ است. برعکس این مطلب همچنان یک مسئله باز باقی مانده است. برای اثبات به لم زیر نیاز داریم:

۷.۳.۲ لم. فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر دو عنصر متعامد $x, y \in Z(R)^*$ و $n, m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ وجود داشته باشند به طوری که $x^n y^m = 0$ که $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$، آن‌گاه $x^n + y^m$ یک عنصر منظم در R است.

اثبات. فرض کنیم $z \in R \setminus \{0\}$ وجود داشته باشد به طوری که $z(x^n + y^m) = 0$. فرض کنیم $t = zx^n = -zy^m$. در این صورت $tx^n = ty^m = 0$. اگر $t = x$، آن‌گاه $x^{n+1} = 0$. از $t = zx^n$ نتیجه می‌گیریم $x^n = zx^{2n-1} = 0$ که تناقض است زیرا $x^n \neq 0$. به طور مشابه اثبات می‌شود که $t \neq y$. همچنین، اگر $t \neq 0$، آن‌گاه t مجاور x و y است که تناقض است زیرا $x \perp_{\overline{\Gamma}(R)} y$. پس $t = 0$ و همچنین $zx^n = -zy^m = 0$. در ادامه کافی است اثبات کنیم $z \neq x$ و $z \neq y$. در واقع، اگر $z = x$، آن‌گاه $x^{n+1} = 0$. لذا x مجاور x^2 است (زیرا $x^{n+1} = x^2x^{n-1}$ و $x^2 \neq x$). اکنون از $xy^m = 0$ داریم $x^2y^m = 0$. پس x^2 مجاور x و y است که تناقض است. به طور مشابه $z \neq y$ اثبات می‌شود. □

[1] von Neumann

۸.۳.۲ گزاره. فرض کنیم R یک حلقه باشد که $\overline{\Gamma}(R) \neq \Gamma(R)$. اگر $\overline{\Gamma}(R)$ تکمیل شده باشد، آن‌گاه $T(R)$ صفر بعدی است.

اثبات. ابتدا، توجه داریم که همه عناصر پوچ‌توان R دارای درجه پوچ‌توانی حداکثر ۲ هستند (زیرا $\overline{\Gamma}(R)$ تکمیل شده است). پس طبق قضیه ۳.۱.۲، عنصر $x_\circ \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$ وجود دارد به طوری که $\mathrm{Ann}(x) \neq \mathrm{Ann}(x^۲)$ و این نشان می‌دهد که $z_\circ \in Z(R)$ وجود دارد به طوری که $z_\circ x_\circ \neq \circ$ و $z_\circ x_\circ^۲ = \circ$. همچنین توجه داریم که طبق نتیجه ۳.۳.۲ داریم $z_\circ \notin \mathrm{Nil}(R)$. حال، برای نشان دادن این‌که $T(R)$ صفر بعدی است، کافی است نشان دهیم که ایده‌آل اول نامینیمال Q از R شامل یک عنصر منظم از R است. فرض کنیم $P \subset Q$ دو ایده‌آل اول متمایز از R باشند لذا $x \in Q \setminus P$ وجود دارد. اما توجه داریم که $x \notin \mathrm{Nil}(R)$. حالت‌های احتمالی زیر را داریم:

حالت ۱ (x مجاور $x_\circ$ است): پس $x_\circ \in Q$، طبق لم ۷.۳.۲، عناصر $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ وجود دارد به طوری که $x_\circ^\alpha + x^\beta$ یک عنصر منظم از R است که متعلق به Q است.

حالت ۲ (x مجاور $z_\circ$ است): اثبات مشابه حالت ۱ است.

حالت ۳ ($x_\circ \notin P$): پس $xx_\circ \in Q \setminus P$ از این‌که $xx_\circ$ مجاور $z_\circ$ است و با کمک لم ۷.۳.۲ نتیجه می‌گیریم عنصر $x^۲x_\circ^۲ + z_\circ$ منظم است و متعلق به Q است.

حالت ۴ ($x_\circ \in P$): اگر $z_\circ \notin P$، آن‌گاه $xz_\circ \in Q \setminus P$ لذا $xz_\circ$ مجاور $x_\circ$ است. طبق لم ۷.۳.۲، عنصر $xz_\circ + x_\circ^۲$ منظم و متعلق به Q است. اگر $z_\circ \in P$، آن‌گاه $x_\circ^۲ + z_\circ$ منظم و متعلق به Q است چون $x_\circ^۲ z_\circ = \circ$. □

اکنون کمر گراف توسعه یافته حلقه R که به صورت حاصل ضرب تعداد متناهی حلقه است، را بررسی می‌کنیم.

۹.۳.۲ گزاره. فرض کنیم $R = \prod_{i=۱}^{n} R_i$ که $(R_i)_{۱\leq i\leq n}$ خانواده متناهی از حلقه‌ها باشد و $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{۱\}$.

۱. اگر $n = ۲$ گزاره‌های زیر را داریم:

(آ) $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = \mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = \infty$ اگر و تنها اگر $R_۱$ و $R_۲$ دامنه صحیح باشند و حداقل یکی از آنها با $\mathbb{Z}_۲$ یکریخت باشد.

(ب) اگر $R_۱$ و $R_۲$ دامنه صحیح باشند که $|R_۱| \geq ۳$ و $|R_۲| \geq ۳$، آنگاه $\Gamma(R)) = \overline{\Gamma}(R)$ و $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = ۴$.

(ج) اگر حداقل یکی از $R_۱$ و $R_۲$ دامنه صحیح نباشند، آنگاه $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = \mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

۲. اگر $n \geq ۳$، آنگاه $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = \mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

اثبات. **حالت** $n = ۳$. اثبات (آ) و (ب) بدیهی است.

قسمت (c) را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم که $R_۱$ شامل مقسوم‌علیه صفر z است. در این صورت عنصر $z' \in R_۱$ وجود دارد به طوری که $zz' = ۰$. لذا $(z, ۰) - (۰, ۱) - (z', ۱) - (z, ۰)$ یک دور به طول ۳ است. بنابراین $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = \mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

حالت $n = ۳$. $(۱, ۰, \dots, ۰, ۰) - (۰, ۰, ۱, \dots, ۰) - (۰, ۱, ۰, \dots, ۰) - (۱, ۰, ۰, \dots, ۰)$ یک دور به طول ۳ است. پس $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = \mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$. □

از گزاره ۹.۳.۲ می‌توان در برخی موارد برای تعیین کمر حلقه $\mathbb{Z}_n$ استفاده کرد.

۱۰.۳.۲ گزاره. برای عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}^*$، گزاره‌های زیر برقرار است:

۱. اگر $n = ۲^۲$ یا $n = ۳^۲$ یا $n = ۲p$ که p عدد اول فرد است، آنگاه $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)) = \infty$.

۲. اگر $n = pq$ یا $n = ۴p$ که p و q اعداد اول فرد هستند، آنگاه $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)) = ۴$.

۳. داریم $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_n)) = ۳$ اگر یکی از سه حالت زیر رخ دهد:

(آ) $n=p^m$ که $m>۲$ و p اول است،

(ب) $n=p^۲$ که $p>۳$ و اول است،

(ج) $n=\prod_{i=۱}^{k}p_i^{\alpha_i}$ تجزیه n به عامل‌های اول است که برای هر $i\neq j$، $p_i\neq p_j$ و $k\geq ۳$.

اثبات. ۱. اگر $n=۲^۲$ یا $n=۳^۲$، آنگاه به ترتیب $|Z(R)^*|=۱$ یا $|Z(R)^*|=۲$، از این رو $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R))=\infty$. اگر $n=۲p$، آنگاه $\overline{\Gamma}(R)$ گراف ستاره است (به گزاره ۲.۲.۷ مراجعه کنید) و بنابراین $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R))=\infty$.

۲. اگر $n=pq$ یا $n=۴p$ که p و q اعداد اول فرد هستند، آنگاه $\overline{\Gamma}(R)$ گراف دوبخشی کامل است (به گزاره ۲.۲.۷ مراجعه کنید). پس $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R))=۴$.

۳. برای دو حالت (آ) و (ب)، $\overline{\Gamma}(R)$ کامل است (به گزاره ۲.۲.۷ مراجعه کنید). از این رو $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}(R))=$

۳. برای حالت سوم، دور $\overline{p_۱^{\alpha_۱}p_۳^{\alpha_۳}}-\overline{p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}}-\overline{p_۲^{\alpha_۲}p_۳^{\alpha_۳}}-\overline{p_۱^{\alpha_۱}p_۳^{\alpha_۳}}$ به طول ۳ را داریم. □

فصل ۳

گراف i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر

۱.۳ قطر و کمر $\overline{\Gamma}_i(R)$

۱.۱.۳ تعریف. برای یک عدد طبیعی i، گراف i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر حلقه R که با $\overline{\Gamma}_i(R)$ نمایش داده می‌شود و مجموعه رئوس آن $Z(R)^*$ است و دو رأس متمایز x و y از آن با یکدیگر مجاورند اگر و تنها اگر دو عدد طبیعی $n \leq i$ و $m \leq i$ وجود داشته باشند به طوری که $x^n \cdot y^m = ۰$ با این شرط که $x^n \neq ۰$ و $y^m \neq ۰$.

این بخش به مطالعه قطر و کمر گراف i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر اختصاص یافته است. قطعاً گراف i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر خصوصیات مشخصی را از گراف مقسوم‌علیه صفر به ارث می‌برد. به عنوان مثال، مشهور است که $\Gamma(R)$ یک گراف همبند با $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) \leq ۳$ و $\operatorname{gr}(\Gamma(R)) \in \{۳, ۴, \infty\}$ است. بنابراین برای هر $i \in \mathbb{N}^*$، $\overline{\Gamma}_i(R)$ نیز گرافی همبند با $\operatorname{diam}\left(\overline{\Gamma}_i(R)\right) \leq ۳$ و $\operatorname{gr}\left(\overline{\Gamma}_i(R)\right) \in \{۳, ۴, \infty\}$ می‌باشد. قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر کلاسیک به طور کامل بررسی شده است (به عنوان مثال، [۵، ۶، ۱۰، ۱۱، ۱۴، ۲۴] را ببینید). لذا همان‌طور که در ادامه نشان داده می‌شود، این مقالات می‌توانند به

تعیین قطر و کمر گراف i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر کمک کنند. یادآوری می‌کنیم که بنا به نتیجه ۹.۱.۲، اگر R یک حلقه کاهشی باشد، آن‌گاه $\overline{\Gamma}(R) = \Gamma(R)$. بنابراین فقط علاقه‌مند به بررسی حلقه‌های دارای رادیکال پوچ غیر صفر هستیم. در این حالت نتیجه شناخته شده زیر را در مورد کمر $\Gamma(R)$ داریم.

۲.۱.۳ قضیه (قضیه ۲.۳ و ۲.۵ از [۱۱]). اگر $\mathrm{Nil}(R)$ غیر صفر باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرار هستند:

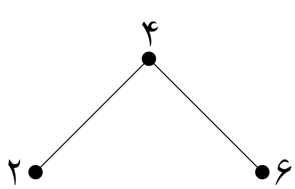
۱. $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = ۴$ اگر و تنها اگر $R \cong D \times B$ که D یک دامنه صحیح با $|D| \geq ۳$ است و $B = \mathbb{Z}_۴$ یا $B = \mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$.

۲. $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = \infty$ اگر و تنها اگر $R \cong B$ یا $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times B$ که $B = \mathbb{Z}_۴$ یا $B = \mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$ یا $\Gamma(R)$ گراف ستاره باشد.

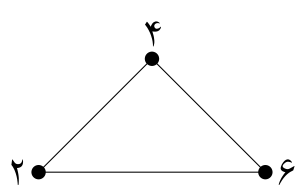
از قضیه قبل نتیجه می‌گیریم که اگر $\Gamma(R) \neq \overline{\Gamma}_i(R)$، آن‌گاه $\overline{\Gamma}_i(R)$ دارای دور است. در این حالت یا $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}_i(R)) = ۴$ یا $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}_i(R)) = ۳$. مورد اول را می‌توان به صورت زیر مشخص کرد.

۳.۱.۳ نتیجه. فرض کنیم $i \geq ۲$ یک عدد صحیح باشد که $\Gamma(R) \neq \overline{\Gamma}_i(R)$. در این صورت $\overline{\Gamma}_i(R)$ دارای دور است و $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}_i(R)) = ۴$ اگر و تنها اگر $R \cong D \times B$ که D یک دامنه صحیح است و $B = \mathbb{Z}_۴$ یا $B = \mathbb{Z}_۲[X]/(X^۲)$.

توجه داریم حالتی که $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) = \infty$ و $\Gamma(R) \neq \overline{\Gamma}_i(R)$ متناظر با این است که $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره باشد و طبق [۱۷، قضیه ۱.۷] (همچنین [۱۱، تذکر ۲.۶]) این حالت رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_۸$ یا $R \cong \mathbb{Z}_۲[X]/(X^۳)$. لذا در این صورت $\mathrm{gr}(\overline{\Gamma}_i(R)) = ۳$.



$\overline{\Gamma}_۱(\mathbb{Z}_۸)$



$\overline{\Gamma}_۲(\mathbb{Z}_۸)$

توجه داریم که می‌توان مثالی را ارائه کرد که $\operatorname{gr}(\Gamma(R)) = \operatorname{gr}(\overline{\Gamma}_i(R)) = ۳$ و $\Gamma(R) \neq \overline{\Gamma}_i(R)$. به عنوان مثال، برای هر عدد صحیح اول p، $R = \mathbb{Z}_{p^۲} \times \mathbb{Z}_{p^۲}$ را در نظر بگیرید.

در مورد قطر، چند حالت برای بررسی وجود دارد. با این حالت شروع می‌کنیم که چه زمانی $\overline{\Gamma}_i(R)$ دارای رأسی است که با تمام رئوس دیگر مجاور است؛ یعنی، $\overline{\Gamma}_i(R)$ دارای یک زیرگراف ستاره است. هم‌چنین به تشخیص حالتی که گراف‌ها دارای قطر ۱ هستند نیز کمک می‌کند.

برای ادامه کار، نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم.

برای ایده‌آل I از R، نماد $\sqrt[i]{I}$ را برای معرفی مجموعه

$$\Big\{y \in R \;\mid\; \exists \alpha \leq i \quad s.t \quad y^{\alpha} \in I \setminus \{۰\}\Big\}$$

استفاده می‌کنیم. توجه داریم که $\sqrt[i]{I} = I \setminus \{۰\}$. بنابراین $\sqrt[i]{I} = \emptyset$ یعنی $I = \{۰\}$. علاوه بر این، پالایه زیر از رادیکال پوچ R را در نظر می‌گیریم:

برای عدد صحیح مثبت i، از $\mathrm{N}^i(R)$ برای نشان دادن مجموعه $\{x \in \operatorname{Nil}(R) \mid \nu(x) \leq i\}$ استفاده می‌کنیم. توجه داریم که $\operatorname{Nil}(R) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{N}^i(R)$.

قضیه زیر نظیر [۱۶، قضیه ۳.۲] است.

۴.۱.۳ قضیه. فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. در این صورت یک رأس در $\overline{\Gamma}_i(R)$ وجود دارد به طوری که مجاور همه رئوس دیگر است اگر و تنها اگر یا $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times D$ که D یک دامنه صحیح است یا $z \in R^*$ وجود دارد به طوری که $Z(R)^* = \sqrt[i]{\operatorname{Ann}(z)}$.

قضیه فوق نتیجه‌ای از دو لم زیر است که جزئیات هر دو را در ادامه بیان می‌کنیم.

۵.۱.۳ لم. فرض کنیم i یک عدد طبیعی و $x \in N^{i+۱}$ عضوی پوچ‌توان از R باشد. در این صورت x به عنوان رأسی از $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور همه رئوس دیگر است اگر و تنها اگر $Z(R)^* = \sqrt[i]{\operatorname{Ann}(x^{\nu(x)-۱})}$.

اثبات. از تعریف $\sqrt[i]{I}$ برای ایده‌آل I از R نتیجه می‌شود. □

واضح است که اگر $\overline{\Gamma}_i(R)$ کامل و R دارای عنصر پوچ‌توان غیر صفر باشد، آن‌گاه برای هر عنصر پوچ‌توان x از R داریم $Z(R)^* = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}(x^{\nu(x)-۱})}$. با این حال مثالی از یک حلقه ارائه می‌کنیم که همه عناصر پوچ‌توان آن، برای $i = ۲$، در شرایط لم ۵.۱.۳ صدق می‌کنند ولی گراف توسعه یافته وابسته به آن کامل نیست (به مثال ۸.۱.۳ مراجعه کنید).

۶.۱.۳ لم. فرض کنیم x یک عضو غیر پوچ‌توان از $Z(R)^*$ و i یک عدد طبیعی باشد. در این صورت x به عنوان یک رأس از $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور همه رئوس دیگر است اگر و تنها اگر x خودتوان باشد، $xR \cong \mathbb{Z}_۲$ و $R(۱-x)$ دامنه صحیح باشد.

اثبات. کافی است طرف رفت را اثبات کنیم. ابتدا توجه داریم که $x = x^۲$، زیرا در غیر این صورت دو عدد طبیعی $\alpha, \beta \le i$ وجود دارند به طوری که $(x^۲)^\alpha x^\beta = x^{۲\alpha+\beta} = ۰$ و این با $x \notin \mathrm{Nil}(R)$ تناقض دارد. به علاوه اگر فرض کنیم $xR \neq \mathbb{Z}_۲$، آن‌گاه $y \in R$ وجود دارد به طوری که $xy \notin \{۰, x\}$. در این حالت x مجاور xy است (زیرا x مجاور همه رئوس دیگر است). بنابراین $n, m \le i$ وجود دارند به طوری که $xy^m = (xy)^m x^n = ۰$ و $xy^m = (xy)^m \neq ۰$ که تناقض است. در ادامه کافی است ثابت کنیم $R(۱-x)$ یک دامنه صحیح است. اگر چنین نباشد، آن‌گاه $R(۱-x)$ شامل یک مقسوم‌علیه صفر ناصفر مانند $(۱-x)z$ است. پس $x + (۱-x)z$ مقسوم علیه صفر R است. اما این رأس مجاور x نیست و این یک تناقض است. □

اکنون آماده هستیم که مشخص کنیم چه زمانی $\overline{\Gamma}_i(R)$ یک گراف کامل است.

۷.۱.۳ قضیه. برای عدد طبیعی i، گراف $\overline{\Gamma}_i(R)$ کامل است اگر و تنها اگر یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

۱. $Z(R) \neq \mathrm{Nil}(R)$ و $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$.

۲. $Z(R)=\mathrm{Nil}(R)$ و دو عبارت زیر برقرار باشد:

(آ) برای هر $x\in \mathrm{N}^i$ داشته باشیم $Z(R)^*=\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(x^{\nu(x)-1}\right)}$.

(ب) برای هر $x\in \mathrm{Nil}(R)\setminus \mathrm{N}^i$ داشته باشیم $Z(R)^*=\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)}$.

اثبات. با استفاده از لم‌های ۵.۱.۳ و ۶.۱.۳ و اثبات آن‌ها حاصل می‌شود. $\square$

۸.۱.۳ مثال. ۱. حلقه $\mathbb{R}[X,Y]/\left(XY^2,Y^3\right)$ نمونه حلقه‌ای است که در شرایط لم ۵.۱.۳ صدق می‌کند بدون آن‌که گراف توسعه یافته وابسته به آن کامل باشد. یعنی داریم:

- $\overline{\Gamma}_1\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(XY^2,Y^3\right)\right)\neq\overline{\Gamma}_2\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(XY^2,Y^3\right)\right)$ (به این دلیل که $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ در $\overline{\Gamma}_2\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(XY^2,Y^3\right)\right)$ مجاور هستند ولی در $\overline{\Gamma}_1\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(XY^2,Y^3\right)\right)$ مجاور نیستند و
- برای $i\geq 1$ داریم $Z\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(XY^2,Y^3\right)\right)^*=\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(\overline{Y}^2\right)}$، اما
- گراف $\overline{\Gamma}_2\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(XY^2,Y^3\right)\right)$ کامل نیست (زیرا $\overline{X}$ مجاور $\overline{X+Y}$ نیست).

۲. حلقه $\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^2,XY^2,Y^3\right)$ شرایط حکم (۲) از قضیه ۷.۱.۳ را داراست. یعنی،

- $\overline{\Gamma}_1\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^2,XY^2,Y^3\right)\right)\neq\overline{\Gamma}_2\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^2,XY^2,Y^3\right)\right)$ و
- $\overline{\Gamma}_2\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^2,XY^2,Y^3\right)\right)$ یک گراف کامل است.

در ادامه حالتی که قطر گراف بیش از ۱ (یعنی ۲ یا ۳) باشد را بررسی می‌کنیم که عمدتاً علاقه‌مند به گراف‌های وابسته به حلقه‌های غیر کاهشی هستیم. زیرا زمانی که R کاهشی است، بنا به نتیجه ۹.۱.۲، $\overline{\Gamma}(R)=\Gamma(R)$. به‌علاوه، واضح است که برای هر عدد طبیعی i داریم $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}_i(R))\leq \mathrm{diam}(\Gamma(R))$.
نتیجه زیر را یادآوری می‌کنیم.

۹.۱.۳ قضیه (قسمت‌های (۳) و (۴) قضیه ۲.۶ از [۲۴]). اگر $\mathrm{Nil}(R) \neq 0$، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱. $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 2$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ ایده‌آلی باشد که مربع آن صفر نیست و برای هر دو عضو مقسوم‌علیه صفر $a \neq b$ داشته باشیم $\mathrm{Ann}\left((a,b)\right) \neq (0)$.

۲. $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 3$ اگر و تنها اگر مقسوم‌علیه‌های صفر $a \neq b$ وجود داشته باشند به طوری که $\mathrm{Ann}\left((a,b)\right) = (0)$.

با استفاده از این نکته که فاصله بین یک مقسوم‌علیه صفر و هر عنصر پوچ‌توان در $\Gamma(R)$ حداکثر ۲ است، نتیجه زیر تعمیمی از [۷، قضیه ۲.۸] است.

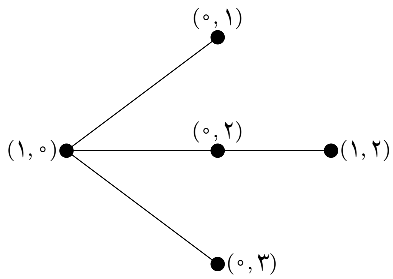
۱۰.۱.۳ قضیه. فرض کنیم $i > 1$ یک عدد طبیعی باشد. اگر $\Gamma(R) \neq \overline{\Gamma}_i(R)$، آن‌گاه $\mathrm{diam}\left(\overline{\Gamma}_i(R)\right) = 3$ اگر و تنها اگر مقسوم‌علیه‌های ناصفر غیر پوچ‌توان $a \neq b$ و دو عدد طبیعی n و m وجود داشته باشند به طوری که $\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left((a^n, b^m)\right)} = \emptyset$.

اثبات. با استفاده از همان استدلال اثبات قضیه ۶.۱.۲ به دست می‌آید. □

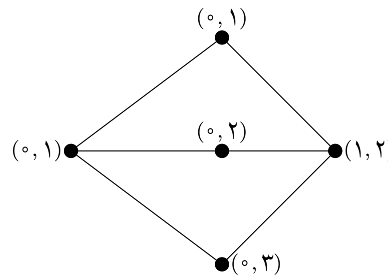
در ادامه مثال‌هایی را بیان می‌کنیم که نشان می‌دهند حالت‌های مختلف مرتبط با قضیه ۱۰.۱.۳ می‌توانند رخ دهند.

۱۱.۱.۳ مثال. ۱. اگر R را $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $\overline{\Gamma}_1(R) \neq \overline{\Gamma}_2(R)$. زیرا به عنوان مثال، فاصله $(1,1,2)$ و $(0,0,1)$ در $\Gamma(R)$ برابر با ۳ است ولی در $\overline{\Gamma}_2(R)$ به هم متصل هستند. با این وجود $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = \mathrm{diam}\left(\overline{\Gamma}_2(R)\right) = 3$. برای مثال، فاصله $(1,1,0)$ و $(0,1,1)$ در $\Gamma(R)$ و $\overline{\Gamma}_2(R)$ برابر با ۳ است.

۲. اگر R را $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$، آن‌گاه $\overline{\Gamma}_1(R) \neq \overline{\Gamma}_2(R)$. برای مثال، فاصله بین $(1,2)$ و $(0,1)$ در $\Gamma(R)$ برابر با ۳ است و مسیر $(0,1) - (1,0) - (0,2) - (1,2)$ تنها مسیری است که آن‌ها را به هم متصل می‌کند. اما فاصله $(1,2)$ و $(0,1)$ در $\overline{\Gamma}_2(R)$ فقط ۱ است، چون $(0,0) = (0,1)^2(1,2)$. هم‌چنین داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = 3$ و $\operatorname{diam}\left(\overline{\Gamma}_2(R)\right) = 2$.



$\overline{\Gamma}_1\left(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4\right)$



$\overline{\Gamma}_2\left(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4\right)$

در [۲۴، قضیه ۲.۲]، لوکاس[1] توصیف زیبایی از قطر ۲ بر حسب ایده‌آل‌های اول مینیمال ارائه کرد. در واقع او نشان داد برای حلقه کاهشی R که در آن $Z(R)$ ایده‌آل نباشد، قطر $\Gamma(R)$ کمتر یا مساوی ۲ است اگر و تنها اگر R دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد. بنا به قضیه ۶۶.۲.۱، اگر R کاهشی باشد، آن‌گاه $Z(R)$ به صورت اجتماعی از ایده‌آل‌های اول مینیمال است.

در ادامه نتیجه‌ای مشابه با نتیجه لوکاس را برای گراف $\nu(R)$-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر با این فرض که $Z(R)$ یک اجتماع متناهی از ایده‌آل اول مینیمال است، ارائه می‌کنیم. برای این کار ابتدا به بیان چند لم نیاز داریم.

۱۲.۱.۳ لم. [۲۵، گزاره ۱.۵] فرض کنیم $\{P_1, \ldots, P_n\}$ (که $n \in \mathbb{N}^*$) یک مجموعه متناهی از ایده‌آل‌های اول مینیمال متمایز R باشد و $S := R \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_n)$. در این صورت $R_S \cong R_{P_1} \oplus \cdots \oplus R_{P_n}$.

در ادامه از این نکته که $\Gamma(\mathrm{T}(R))$ و $\Gamma(R)$ یکریخت هستند استفاده خواهیم کرد. هم‌چنین، $\overline{\Gamma}(R)$ و $\overline{\Gamma}(\mathrm{T}(R))$ نیز یکریخت هستند که در ادامه آن را اثبات می‌کنیم. در واقع، برای اثبات از همان استدلال [۹،

[1] Lucas

قضیه ۲.۲] پیروی می‌کنیم که بر اساس مطالعه کاردینال کلاس‌های هم ارزی $\Gamma(\mathrm{T}(R))$ و $\Gamma(R)$ است. برخی از نکاتی که در اثبات [۹، قضیه ۲.۲] آورده شده است را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم $S = R - Z(R)$ و $\mathrm{T} = \mathrm{T}(R)$. برای هر $x, y \in R$ و $z, w \in \mathrm{T}$، روابط هم ارزی را در R و T (که به ترتیب با $\sim_R$ و $\sim_{\mathrm{T}}$ مشخص شده‌اند) به ترتیب به صورت $x \sim_R y$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Ann}_R(x) = \mathrm{Ann}_R(y)$ و $z \sim_{\mathrm{T}} w$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Ann}_{\mathrm{T}}(z) = \mathrm{Ann}_{\mathrm{T}}(w)$ تعریف می‌کنیم. کلاس‌های هم ارزی آن‌ها را نیز به ترتیب با $[a]_R$ و $[a/۱]_{\mathrm{T}}$ نمایش می‌دهیم. توجه داریم که $\mathrm{Ann}_{\mathrm{T}}(x/t) = \mathrm{Ann}_R(x)_S$ و $\mathrm{Ann}_{\mathrm{T}}(x/t) \cap R = \mathrm{Ann}_R(x)$. بنابراین برای هر $x \in R$ و $s \in S$ داریم $[x/۱]_{\mathrm{T}} = ([x]_R)_S$ و $[x/s]_{\mathrm{T}} \cap R = [x]_R$. بنابراین با استفاده از این که $Z(\mathrm{T}) = Z(R)_S$ داریم $Z(R)^* = \bigcup_{j \in I} [a_j]_R$ و $Z(\mathrm{T})^* = \bigcup_{j \in I} [a_j/۱]_{\mathrm{T}}$. از طرف دیگر ثابت می‌شود که برای هر $a \in Z(R)^*$ داریم $|[a/۱]_{\mathrm{T}}| = |[a]_R|$. بنابراین تابع دوسویی $\phi_j : [a_j]_R \to [a_j/۱]_{\mathrm{T}}$ وجود دارد و نگاشت $\phi : Z(R)^* \to Z(\mathrm{T})^*$ با تعریف $\phi(x) = \phi_j(x)$ که $x \in [a_j]_R$، خوش تعریف است.

هم‌چنین به لم زیر نیاز داریم.

۱۳.۱.۳ لم. فرض کنیم R یک حلقه و $x, y \in R$. در این صورت $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y)$ اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\mathrm{Ann}\,(x^\alpha) = \mathrm{Ann}\,(y^\alpha)$.

اثبات. فرض کنیم $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y)$. فقط کافی است اثبات کنیم که برای عدد طبیعی $\alpha \in \mathbb{N}$ داریم $\mathrm{Ann}\,(x^\alpha) \subset \mathrm{Ann}\,(y^\alpha)$. فرض کنیم $z \in \mathrm{Ann}\,(x^\alpha)$. پس داریم $zx^{\alpha-۱} \in \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y)$ که نشان می‌دهد $zx^{\alpha-۲}y \in \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y)$ و لذا $zx^{\alpha-۲}y^۲ = ۰$. این فرایند را ادامه می‌دهیم تا زمانی که به دست آوریم $zx^{\alpha-\alpha}y^\alpha = zy^\alpha = ۰$. بنابراین اثبات تمام است. □

۱۴.۱.۳ گزاره. فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد و $\mathrm{T}(R)$ نشان دهنده حلقه خارج قسمتی تام R باشد. در این صورت گراف‌های $\overline{\Gamma}_i(\mathrm{T}(R))$ و $\overline{\Gamma}_i(R)$ یکریخت هستند.

اثبات. کافی است نشان دهیم x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور هستند اگر و تنها اگر $\phi(x)$ و $\phi(y)$ در $\overline{\Gamma}_i(\mathrm{T}(R))$ مجاور باشند. این کار را با عبور از یک سری عبارات معادل انجام خواهیم داد. طبق تعریف x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاورند اگر و تنها اگر $\alpha, \beta \leq i$ وجود داشته باشند به طوری که $x^\alpha y^\beta = ۰$ با این شرط که $x^\alpha \neq ۰$ و $y^\beta \neq ۰$. بنابراین $(x/۱)^\alpha (y/۱)^\beta = ۰$ که $(x/۱)^\alpha \neq ۰$ و $(y/۱)^\beta \neq ۰$ یا به طور معادل، $y/۱ \in \sqrt[i]{\mathrm{Ann}_{\mathrm{T}}\left((x/۱)^\alpha\right)} = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}_{\mathrm{T}}\left(\phi(x)^\alpha\right)}$ و این معادل است با این‌که $\alpha, \gamma \leq i$ وجود داشته باشند به طوری که $\phi(x)^\alpha (y/۱)^\gamma = ۰$ که $\phi(x)^\alpha \neq ۰$ و $(y/۱)^\gamma \neq ۰$. لذا داریم

$$\phi(x) \in \sqrt[i]{\mathrm{Ann}_{\mathrm{T}}\left((y/۱)^\gamma\right)} = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}_{\mathrm{T}}\left(\phi(y)^\gamma\right)}$$

که این معادل است با این که $\phi(x)$ و $\phi(y)$ در $\overline{\Gamma}_i(\mathrm{T}(R))$ مجاور هستند. بنابراین $\overline{\Gamma}_i(R)$ و $\overline{\Gamma}_i(\mathrm{T})$ گراف‌هایی یکریخت هستند. $\square$

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم قضیه یاد شده را اثبات کنیم.

۱۵.۱.۳ قضیه. فرض کنیم $\nu(R)$ متناهی باشد و $Z(R)$ به صورت یک اجتماع متناهی از ایده‌آل‌های اول مینیمال R باشد. فرض کنیم $i \geq \nu(R)$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت قطر $\overline{\Gamma}_i(R)$ کمتر یا مساوی ۲ است اگر و تنها اگر R حداکثر دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد.

اثبات. ($\Rightarrow$) فرض کنیم R بیش از ۲ ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد. فقط حالتی را که R ۳ ایده‌آل اول مینیمال مثل $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ داشته باشد در نظر می‌گیریم، حالت کلی به طور مشابه ثابت می‌شود. در این صورت مجموعه عناصر منظم R دقیقاً برابر با $S := R \setminus (P_۱ \cup P_۲ \cup P_۳)$ می‌باشد. پس طبق لم ۱۲.۱.۳ داریم $R_S \cong R_{P_۱} \oplus R_{P_۲} \oplus R_{P_۳}$. در این صورت نتیجه حاصل می‌شود، زیرا گراف i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر حلقه و گراف حلقه کسرهای آن یکریخت هستند (گزاره ۱۴.۱.۳ را ببینید). از طرفی، چون در گراف i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر وابسته به سه حلقه هستیم، واضح است که فاصله بین دو عنصر

$(۱,۱,۰)$ و $(۰,۱,۱)$ برابر با ۳ است.

($\Leftarrow$) فرض کنیم R فقط دو ایده‌آل اول مینیمال P و Q دارد به طوری که $Z(R) = P\cup Q$. حال فرض کنیم $x_۱, x_۲ \in Z(R)^*$ متمایز باشند. نشان می‌دهیم $x_۱$ و $x_۲$ در $\overline{\Gamma}_i(R)$ یا همسایه هستند و یا همسایه مشترک دارند. چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: فرض کنیم $x_۱ \in P\setminus Q$ و $x_۲ \in Q\setminus P$. در این صورت $x_۱$ و $x_۲$ پوچ‌توان نیستند، اما $x_۱x_۲$ پوچ‌توان است. بنابراین $x_۱$ و $x_۲$ در $\overline{\Gamma}_i(R)$ برای $i \geq \nu(R)$، همسایه هستند.

حالت ۲: فرض کنیم $x_۱, x_۲ \in P\setminus Q$. در این صورت بنا به لم ۶۷.۲.۱، $y_۱$ و $y_۲$ در $R\setminus P$ وجود دارند به طوری که برای i $a, b \leq \nu(R) \leq i$ داریم $x_۱^a y_۱ = ۰ = x_۲^b y_۲$. لذا $y_۱$ و $y_۲$ در $Q\setminus P$ هستند. پس $y_۱y_۲ \in Q\setminus P$ و بنابراین $y_۱y_۲ \notin \{۰, x_۱, x_۲\}$. در نتیجه، $y_۱y_۲$ با $x_۱$ و $x_۲$ مجاور است.

حالت ۳: فرض کنیم $x_۱ \in P\setminus Q$ و $x_۲ \in P\cap Q = \mathrm{Nil}(R)$. مجدداً بنا به لم ۶۷.۲.۱، $z \in Q\setminus P$ وجود دارد به طوری که $x_۱^i z = ۰$. به خصوص، z پوچ‌توان نیست و لذا $z \neq x_۲$. اگر $zx_۲ = ۰$ آن‌گاه اثبات تمام است. در غیر این صورت $x_۱$ و $zx_۲$ مجاور هستند. داریم $(zx_۲)\, x_۲^{\nu(x_۲)-۱} = ۰$ بنابراین یا $x_۲ = zx_۲$ که در این حالت $x_۱$ و $x_۲$ مجاور هستند، یا $x_۲ \neq zx_۲$ که در این حالت $x_۱$ و $x_۲$ دارای یک همسایه مشترک هستند.

حالت ۴: فرض کنیم $x_۱, x_۲ \in P\cap Q = \mathrm{Nil}(R)$. اگر $x_۱x_۲ = ۰$، آن‌گاه $x_۱$ و $x_۲$ مجاور هستند. در غیر این صورت $x_۱x_۲$ همسایه مشترک $x_۱$ و $x_۲$ است. □

۱۶.۱.۳ تذکر. توجه داریم که در قضیه ۱۵.۱.۳، لازم است فرض را برا $i \geq \nu(R)$ قرار دهیم. در واقع همان‌طور که در قسمت دوم مثال ۱۱.۱.۳ نشان دادیم $\mathrm{diam}\left(\overline{\Gamma}_۱\left(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۴\right)\right) = ۳$، اما $\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۴$ دارای دو ایده‌آل اول مینیمال است. این مثال را می‌توان به حالت نامتناهی تعمیم داد. دو حلقه

$$R' = \mathbb{Z}_۲\left[\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}\right] / \left(\{X_j^j\}_{j\in\mathbb{N}^*}\right)$$

و $R = \mathbb{Z}_۲ \times R'$ را در نظر می‌گیریم. رئوس $(۰,۱)$ و $\left(۱, \overline{X_j}\right)$ برای $j \leq i$ در $\overline{\Gamma}_i(R)$ همسایه هستند و فاصله آن‌ها برای $j > i$ برابر با ۳ است. پس برای هر i داریم $\operatorname{diam}\left(\overline{\Gamma}_i(R)\right) = ۳$.

هم‌چنین، وقتی که حلقه R حداکثر دارای دو ایده‌آل اول مینیمال است، زمانی که $\operatorname{diam}\left(\overline{\Gamma}_i(R)\right) \leq ۲$، نمی‌توانیم این شرط را که $Z(R)$ یک اجتماع متناهی از ایده‌آل اول مینیمال R است، حذف کنیم.

۱۷.۱.۳ مثال. ۱. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_۲[X,Y,Z]_{(X,Y,Z)}/(XY, XZ, YZ)$. در این صورت

$$\operatorname{Spec}(R) = \{(\overline{Y}, \overline{Z}), (\overline{X}, \overline{Z}), (\overline{X}, \overline{Y}), (\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})\}.$$

و $Z(R)$ برابر با اجتماع سه ایده‌آل اول مینیمال است. بنابراین داریم

$$\mathrm{T}(R) \cong \mathbb{Z}_۲(X) \oplus \mathbb{Z}_۲(Y) \oplus \mathbb{Z}_۲(Z).$$

کوتاه‌ترین مسیر بین $(۱,۱,۰)$ و $(۰,۱,۱)$ از طریق $(۰,۰,۱)$ و $(۱,۰,۰)$ می‌باشد. بر این اساس کوتاه‌ترین مسیر بین $\overline{\frac{X+Y}{X+Y+Z}}$ و $\overline{\frac{Y+Z}{X+Y+Z}}$ از طریق $\overline{\frac{Z}{X+Y+Z}}$ و $\overline{\frac{X}{X+Y+Z}}$ می‌باشد. پس $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(R)) = ۳$.

۲. اکنون حلقه $R' = \mathbb{Z}_۲\left[\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}\right]_{\left(\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}\right)} / \left(\{X_iX_j\}_{i,j\in\mathbb{N}^*, i\neq j}\right)$ را در نظر می‌گیریم. همه ایده‌آل‌های اول مینیمال R توسط همه $\overline{X_i}$ تولید می‌شود به جز یکی و $Z(R)$ ایده‌آل ماکسیمال تولید شده توسط همه $\overline{X_i}$ها است. هر عنصر از R' را می‌توان توسط تعدادی متناهی متغیر نشان داد، از این رو برای هر $f, g \in R'$، یک $k \in \mathbb{N}^*$ وجود دارد به طوری که $f\overline{X_k} = g\overline{X_k} = ۰$. بنابراین $\operatorname{diam}\left(\overline{\Gamma}\left(R'\right)\right) = ۲$.

۲.۳ چه زمانی $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$؟

در این بخش شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن‌ها داشته باشیم $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$. یادآوری می‌کنیم که برای عدد طبیعی i، از $\mathrm{N}^i(R)$ برای نشان دادن مجموعه $\{x \in \mathrm{Nil}(R) \mid \nu(x) \leq i\}$ استفاده می‌شود. هم‌چنین برای ایده‌آل I از R، قرار می‌دهیم

$$\sqrt[i]{\mathrm{I}} := \{y \in R \mid \exists \alpha \leq i \;\; s.t. \;\; y^\alpha \in \mathrm{I} \setminus \{0\}\}.$$

توجه داریم که $\mathrm{Nil}(R) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{N}^i(R)$. علاوه بر این، برای هر $x \in R$ داریم $\sqrt[j]{\mathrm{Ann}\,(x^{i})} \subseteq \sqrt[j]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})}$ و $\sqrt[j]{\mathrm{Ann}\,(x^{i})} \subseteq \sqrt[j+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{i})}$.

برای اثبات اولین نتیجه اصلی به چند لم نیاز داریم.

۱.۲.۳ لم. فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. اگر $\overline{\Gamma}_i(R) \neq \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$، آن‌گاه $x, y \in Z(R)^*$ و $m \leq i+1$ وجود دارند به طوری که $x^{i+1}y^m = 0$ که $x^{i+1} \neq 0$ و $x^i y^m \neq 0$. به عبارت دیگر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{N}^{i+1}$ و $y \in \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})} \setminus \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^{i})}$.

اثبات. چون $\overline{\Gamma}_i(R) \neq \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$، پس $x, y \in Z(R)^*$ وجود دارند که در $\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ و در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور نیستند. لذا، $n, m \leq i+1$ وجود دارند به طوری که $x^n y^m = 0$ که $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$. می‌توانیم فرض کنیم که برای هر $n' < n$ و هر $m' < m$ داریم $x^{n'}y^m \neq 0$ و $x^n y^{m'} \neq 0$. به علاوه، چون x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور نیستند، باید داشته باشیم $n = i+1$ or $m = i+1$. از این رو $x^{i+1}y^m = 0$ یا $x^n y^{i+1} = 0$. □

از لم قبل نتیجه زیر را به دست می‌آوریم که یک شرط کافی برای برقراری تساوی $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ ارائه می‌دهد.

۲.۲.۳ نتیجه. فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. اگر $Z(R)=\mathrm{N}^{i+1}(R)$، آنگاه $\overline{\Gamma}_i(R)=\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$.

توجه داریم که اگر $Z(R)=\mathrm{N}^{i+1}(R)$، آنگاه برای هر $k\geq i$، $Z(R)=\mathrm{Nil}(R)=\mathrm{N}^{i+1}(R)$ یک ایده‌آل اول است و $\overline{\Gamma}_k(R)=\overline{\Gamma}_i(R)$. به عنوان مثال، اگر R یک حلقه آرتینی باشد، آنگاه برای هر $k\geq \nu(R)-1$ داریم $\overline{\Gamma}_k(R)=\overline{\Gamma}_{\nu(R)-1}(R)$. اما اگر فقط فرض کنیم که $\mathrm{Nil}(R)=\mathrm{N}^{i+1}(R)$، ممکن است داشته باشیم $\overline{\Gamma}_i(R)\subsetneqq\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$. مثلاً، $\overline{\Gamma}_2\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^3,XY^3\right)\right)\subsetneqq\overline{\Gamma}_3\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^3,XY^3\right)\right)$ و $\mathrm{Nil}\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^3,XY^3\right)\right)=\mathrm{N}^3\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^3,XY^3\right)\right)=(\overline{X})$. از این رو یک شرط کافی دیگر لازم است تا $\overline{\Gamma}_i(R)=\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$، که در قضیه ۴.۲.۳ آمده است.

نتیجه زیر در ادامه پایان‌نامه کاربرد دارد.

۳.۲.۳ گزاره. فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. اگر $\overline{\Gamma}_i(R)=\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$، آنگاه $\nu(R)\leq 2i$.

اثبات. فرض کنیم یک عضو پوچ‌توان مانند x وجود داشته باشد به طوری که $\nu(x)\geq 2i+1$. هم‌چنین، فرض کنیم که برای عدد طبیعی $k\geq 1$ داریم $\nu(x)=2i+k$. اگر $k\geq 2$، آنگاه $x^{i+1}x^{i+k-1}=0$ که $x^{i+1}\neq 0$ و $x^{i+k-1}\neq 0$. بنابراین x و x^{i+k-1} در $\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ مجاور هستند. پس طبق فرض داریم $x^ix^{i+k-1}=0$ که با $\nu(x)=2i+k$ در تناقض است. لذا $k=1$. در نتیجه x^2+x و x در $\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ مجاور هستند ولی در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور نیستند که این تناقض است. $\square$

توجه داریم که عکس گزاره ۳.۲.۳ در حالت کلی برقرار نیست. مثلاً داریم

$$\overline{\Gamma}_2\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^4,XY^3\right)\right)\neq\overline{\Gamma}_3\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^4,XY^3\right)\right).$$

هرچند درجه پوچ‌توانی حلقه $\mathbb{R}[X,Y]/\left(X^4,XY^3\right)$ برابر با ۴ است.

۴.۲.۳ قضیه. فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. عبارات زیر معادل هستند.

۱. $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$.

۲. $Z(R) = \mathrm{N}^{i+1}(R)$ یا برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{N}^{i+1}(R)$ داریم $\sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})} = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^i)}$.

۳. $Z(R) = \mathrm{N}^{i+1}(R)$ یا برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{N}^{i+1}(R)$ داریم $\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})} = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^i)}$ و $\sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})} = \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^i)}$.

اثبات. (۲) $\Leftarrow$ (۱). می‌توانیم فرض کنیم که $Z(R) \neq \mathrm{N}^{i+1}(R)$. فرض کنیم $x \in Z(R) \setminus \mathrm{N}^{i+1}(R)$ و $y \in \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})}$. اگر $y = x$، آن‌گاه x پوچ‌توان است، پس طبق گزاره ۳.۲.۳، $\nu(x) \leq 2i$ و $x \in \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^i)}$. لذا می‌توانیم فرض کنیم که $y \neq x$. در این صورت $\alpha \leq i+1$ وجود دارد به طوری که $y^\alpha x^{i+1} = 0$ و $y^\alpha \neq 0$. پس y و x در $\overline{\Gamma}_{i+1}(R) = \overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور هستند. لذا $\alpha, \beta \leq i$ وجود دارند به طوری که $x^\alpha y^\beta = 0$ که $x^\alpha \neq 0$ و $y^\beta \neq 0$. پس $x^i y^\beta = 0$. در نتیجه $y \in \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^i)}$.

(۳) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم $x \in Z(R) \setminus N^{i+1}(R)$. در این صورت

$$\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})} \subseteq \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})} = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^i)}$$

و $\sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^i)} \subseteq \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^i)} = \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})}$. بدین ترتیب $\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^i)} = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})}$ و $\sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})} = \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^i)}$.

(۱) $\Leftarrow$ (۳). اگر $Z(R) = \mathrm{N}^{i+1}(R)$، آن‌گاه اثبات از نتیجه ۲.۲.۳ به دست می‌آید. پس فرض کنیم که $Z(R) \neq \mathrm{N}^{i+1}(R)$. فرض کنیم x و y دو رأس مجاور در $\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ باشند. در این صورت $n, m \leq i+1$ وجود دارند به طوری که $x^n y^m = 0$ که $x^n \neq 0$ و $y^m \neq 0$. اگر $m \leq i$ و $n \leq i$، آن‌گاه x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور هستند. در غیر این صورت، n یا m باید برابر با $i+1$ باشند. فرض کنیم $n = i+1$. لذا $\sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^i)} = \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})} \ni y$. پس $k \leq i+1$ وجود دارد به طوری که $y^k x^i = 0$ with

$y^k \neq 0$. اگر $i \leq k$، آنگاه x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور هستند. در غیر این صورت داریم $y^{i+1}x^i = 0$ که نتیجه می‌دهد $x \in \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(y^{i+1})} = \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(y^i)}$. بنابراین x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور هستند. □

توجه داریم که حتی اگر $Z(R) = \mathrm{N}^{i+1}(R)$، ممکن است عدد صحیح $k < i$ وجود داشته باشد به طوری که $\overline{\Gamma}_k(R) = \overline{\Gamma}_{k+1}(R)$ (برای مثال به قضیه ۶.۳.۳ مراجعه کنید). در واقع برای دیدن این که چه زمانی $\overline{\Gamma}_k(R) \neq \overline{\Gamma}_{k+1}(R)$، بنا به قضیه ۴.۲.۳، کافی است بررسی کنیم که چه زمانی $x \in Z(R) \setminus N^{k+1}(R)$ وجود دارد که در $\sqrt[k+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{k+1})} \neq \sqrt[k]{\mathrm{Ann}\,(x^k)}$ صدق کند. با این حال، بررسی شرط اخیر در حالت کلی ساده نیست مگر در موارد خاص مانند موردی که $k = 1$، همان‌طور که در قضیه ۱.۳.۳ نشان داده می‌شود. هدف بعدی ما این است که شرایطی که $\overline{\Gamma}_{i+1}(R) \neq \overline{\Gamma}_i(R)$ را به روشی ساده‌تر مشخص کنیم، یعنی از نظر درجه پوچ‌توانی. برای این کار به لم زیر نیاز داریم.

۵.۲.۳ لم. فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. اگر $\overline{\Gamma}_i(R) \neq \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$، آنگاه $x, y \in Z(R)^*$ وجود دارند به طوری که xy یک عنصر پوچ‌توان با درجه پوچ‌توانی $i + 1$ یا $\nu(y)$ است.

اثبات. فرض کنیم $\overline{\Gamma}_i(R) \neq \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$، آنگاه طبق لم ۱.۲.۳، $x, y \in Z(R)^*$ وجود دارند به طوری که $x^{i+1} \neq 0$ و $y \in \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\,(x^{i+1})} \setminus \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^i)}$. به خصوص، $(xy)^{i+1} = 0$. بنابراین $\nu(xy) \leq i+1$. پس دو حالت داریم:

حالت اول: اگر $\nu(xy) = i + 1$، آنگاه اثبات تمام است.

حالت دوم: اگر $\nu(xy) \leq i$، آنگاه $(xy)^{\nu(xy)} = 0$ که این نتیجه می‌دهد $x^i y^{\nu(xy)} = 0$. چون $y \notin \sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,(x^i)}$ داریم $y^{\nu(xy)} = 0$. پس $y \in \mathrm{Nil}(R)$ و $\nu(y) \leq \nu(xy)$. از طرف دیگر، $\nu(xy) \leq \nu(y)$ لذا $\nu(xy) = \nu(y)$. □

۶.۲.۳ قضیه. فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. در این صورت $\overline{\Gamma}_i(R) \neq \overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ اگر و تنها اگر $Z(R) \neq \mathrm{N}^{i+1}(R)$ و $x \in Z(R) \setminus \mathrm{N}^{i+1}(R)$ و $y \in Z(R)^*$ وجود داشته باشند که $x \neq y$ به طوری که

یا:

۱. $\nu(xy)=i+1$ و $y\in \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)}$؛ یا

۲. $\nu(xy)\leq i$ و $y\in \mathrm{Nil}(R)$ که $\nu(y)=\nu(xy)$ و $y^{\nu(y)-1}\in \mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)\setminus \mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)$.

اثبات. ($\Rightarrow$) ابتدا طبق نتیجه ۲.۲.۳ داریم $Z(R)\neq \mathrm{N}^{i+1}(R)$. حال، چون $\overline{\Gamma}_{i+1}(R)\neq\overline{\Gamma}_i(R)$، پس x و $y\in Z(R)^*$ وجود دارند که در $\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ مجاور هستند ولی در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور نیستند، این نتیجه می‌دهد که $m\leq i+1$ وجود دارد به طوری که $x^{i+1}y^m=0$ و $x^{i+1}\neq 0$ و $y^m\neq 0$. لذا $\nu(xy)\leq i+1$. اگر $\nu(xy)=i+1$، آنگاه (۱) رخ می‌دهد. در غیر این صورت، $\nu(xy)\leq i$. داریم $x^{\nu(xy)}y^{\nu(xy)}=0$، پس چون x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور نیستند داریم $y^{\nu(xy)}=0$. پس $y\in \mathrm{Nil}(R)$ و $\nu(y)=\nu(xy)\leq i$. از طرف دیگر داریم $x^{i+1}y^m=0$ و $y^m\neq 0$. لذا $x^{i+1}y^{\nu(y)-1}=0$. پس $y^{\nu(y)-1}\in \mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)$. اما چون x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور نیستند داریم $y^{\nu(y)-1}\notin \mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)$.

($\Leftarrow$) فرض کنیم $x\in Z(R)\setminus N^{i+1}(R)$ و $y\in Z(R)^*$ وجود دارند به طوری که (۱) برقرار باشد. توجه داریم که $y\in \sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)}$ نشان می‌دهد که x و y در $\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ مجاور هستند. چون $\nu(xy)=i+1$، x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور نیستند. پس $\overline{\Gamma}_i(R)\neq\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$.

حال فرض کنیم $x\in Z(R)\setminus N^{i+1}(R)$ و $y\in Z(R)$ وجود دارند به طوری که (۲) برقرار باشد. در این صورت $y^{\nu(y)-1}x^{i+1}=0$ و $y^{\nu(y)-1}x^{i}\neq 0$ که این نشان می‌دهد x و $y^{\nu(y)-1}$ در $\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ مجاورند اما در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاور نیستند. بنابراین $\overline{\Gamma}_{i+1}(R)\neq\overline{\Gamma}_i(R)$. $\square$

حال می‌توان پرسید آیا $\overline{\Gamma}_{\nu(R)}(R)=\overline{\Gamma}_{\nu(R)+1}(R)$. با این حال، با استفاده از قضیه ۶.۲.۳ می‌توانیم یک مثال نقض بسازیم. به وضوح، با استفاده از شرط دوم قضیه ۶.۲.۳ داریم

$$\overline{\Gamma}_3\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(Y^2X^4,Y^3\right)\right)\neq\overline{\Gamma}_4\left(\mathbb{R}[X,Y]/\left(Y^2X^4,Y^3\right)\right).$$

اگرچه درجه پوچ‌توانی حلقه $\mathbb{R}[X,Y]/\left(Y^{2}X^{4},Y^{3}\right)$ برابر با سه است.

برای حلقه‌ای که در آن درجه پوچ‌توانی هر عنصر $x\in \mathrm{Nil}(R)$ مخالف با $i+1$ است، یک توصیف ساده‌تر برای $\overline{\Gamma}_i(R)=\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ به دست می‌آوریم که در مطالعه گراف‌های توسعه یافته ضرب مستقیم متناهی حلقه‌ها مفید خواهد بود.

۷.۲.۳ گزاره. فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد و برای هر $x\in\mathrm{Nil}(R)$، $\nu(x)\neq i+1$. در این صورت $\overline{\Gamma}_i(R)=\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ اگر و تنها اگر یا $Z(R)=\mathrm{N}^{i+1}(R)$ و یا برای هر $x\in Z(R)\setminus \mathrm{N}^{i+1}(R)$ داشته باشیم $\mathrm{N}^{2}(R)\cap \mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)=\mathrm{N}^{2}(R)\cap\mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)$.

اثبات. $(\Rightarrow)$ فرض کنیم $x\in Z(R)\setminus\mathrm{N}^{i+1}(R)$، $z\in\mathrm{N}^{2}$ و $z\in\mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)$. در این صورت $zx^{i+1}=0$. پس z و x در $\overline{\Gamma}_{i+1}(R)$ مجاور هستند. لذا طبق فرض z و x در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاورند، از این رو $zx^{i}=0$. بنابراین $z\in\mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)$.

$(\Leftarrow)$ طبق قضیه ۴.۲.۳، کافی است نشان دهیم اگر $x\in Z(R)\setminus\mathrm{N}^{i+1}(R)$ و $y\in\sqrt[i+1]{\mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)}$، آن‌گاه $y\in\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)}$. چون $x^{i+1}y^{i+1}=0$ و طبق فرض، $\nu(x)\neq i+1$ داریم $\nu(xy)\leq i$. بنابراین اگر $y\notin\mathrm{Nil}(R)$، آن‌گاه $y\in\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)}$ و اثبات تمام است. از طرف دیگر، اگر $y\in\mathrm{Nil}(R)$، آن‌گاه $y^{\nu(y)-1}x^{i+1}=0$. بنابراین $y^{\nu(y)-1}\in\mathrm{N}^{2}\cap\mathrm{Ann}\left(x^{i+1}\right)=\mathrm{N}^{2}\cap\mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)$ که نتیجه می‌دهد $y\in\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\left(x^{i}\right)}$. □

توجه داریم که $\mathbb{Z}_{12}$ شرایط قضیه ۷.۲.۳ را برای $i=2$ با $Z\left(\mathbb{Z}_{12}\right)\neq\mathrm{N}^{3}\left(\mathbb{Z}_{12}\right)$ دارد.

۸.۲.۳ لم. فرض کنیم R و S دو حلقه و i یک عدد طبیعی باشد. در این صورت از $\overline{\Gamma}_i(R\times \mathrm{S})=\overline{\Gamma}_{i+1}(R\times\mathrm{S})$ نتیجه می‌گیریم که برای هر عنصر پوچ‌توان $x\in R$ یا $x\in\mathrm{S}$ داریم $\nu(x)\neq i+1$.

اثبات. فرض کنیم عنصر پوچ‌توان $x\in R$ با درجه پوچ‌توانی $i+1$ وجود دارد. در این صورت $(1,0)(x,1)^{i+1}=(0,0)$ و برای هر $n,m\leq i$، $(1,0)^{n}(x,1)^{m}\neq(0,0)$.

پس $(۱,۰)$ و $(x,۱)$ در $\overline{\Gamma}_{i+۱}(R\times \mathrm{S})$ اما در $\overline{\Gamma}_i(R\times \mathrm{S})$ مجاور نیستند که تناقض است. $\square$

در ادامه، اگر R یک حاصل ضرب متناهی از حلقه‌ها باشد، آن‌گاه زمانی که $\overline{\Gamma}_i(R)=\overline{\Gamma}_{i+۱}(R)$ را مشخص می‌کنیم.

۹.۲.۳ قضیه. فرض کنیم $(R_j)_{۱\leq j\leq n}$ یک خانواده متناهی از حلقه‌ها باشد که $n\geq ۲$ و i یک عدد طبیعی باشد. در این صورت $\overline{\Gamma}_i\left(\prod_{j=۱}^n R_j\right)=\overline{\Gamma}_{i+۱}\left(\prod_{j=۱}^n R_j\right)$ اگر و تنها اگر دو گزاره زیر برقرار باشد.

۱. برای هر $۱\leq j\leq n$، $\overline{\Gamma}_i\left(R_j\right)=\overline{\Gamma}_{i+۱}\left(R_j\right)$.

۲. برای هر $۱\leq j\leq n$ و $x\in \mathrm{Nil}\left(R_j\right)$ داریم $\nu(x)\neq i+۱$.

اثبات. $(\Rightarrow)$ عبارت (۲) از لم ۸.۲.۳ نتیجه می‌شود. برای اثبات عبارت (۱) فرض کنیم $۱\leq j\leq n$ و $x_j,y_j\in Z^*\left(R_j\right)$ در $\overline{\Gamma}_{i+۱}\left(R_j\right)$ مجاور هستند. در این صورت دو عدد طبیعی $\alpha,\beta\leq i+۱$ وجود دارند به طوری که $x_j^\alpha y_j^\beta=۰$ که $x_j^\alpha\neq ۰$ و $y_j^\beta\neq ۰$. پس خواهیم داشت

$$(۰,\ldots,۰,x_j,۰,\ldots,۰)^\alpha(۰,\ldots,۰,y_j,۰,\ldots,۰)^\beta=(۰,\ldots,۰).$$

بنابراین $(۰,\ldots,۰,x_j,۰,\ldots,۰)$ و $(۰,\ldots,۰,y_j,۰,\ldots,۰)$ در $\overline{\Gamma}_{i+۱}\left(\prod_{j=۱}^n R_j\right)$ مجاور هستند. طبق فرض $(۰,\ldots,۰,x_j,۰,\ldots,۰)$ و $(۰,\ldots,۰,y_j,۰,\ldots,۰)$ در $\overline{\Gamma}_i\left(\prod_{j=۱}^n R_j\right)$ نیز مجاور هستند. پس $n,m\leq i$ وجود دارند به طوری که $x_j^n y_j^m=۰$ با $x_j^\alpha\neq ۰$ و $y_j^m\neq ۰$. بنابراین x_j و y_j در $\overline{\Gamma}_i\left(R_j\right)$ مجاورند.

$(\Leftarrow)$ برای اثبات کافی است حالت $n=۲$ را بررسی کنیم. برای این، ثابت می‌کنیم که شرط دوم قضیه ۴.۲.۳ برقرار است. فرض کنیم $(a,b)\in \sqrt[i+۱]{\mathrm{Ann}\left((x,y)^{i+۱}\right)}$. در این صورت $\alpha\leq i+۱$ وجود دارد به طوری که $(a,b)^\alpha(x,y)^{i+۱}=۰$ و $(a,b)^\alpha\neq ۰$. طبق (۲) داریم $\nu((a,b)(x,y))\leq i$. پس اگر $(a,b)\notin$

$\mathrm{Nil}\,(R_۱\times R_۲)$، آن‌گاه $(a,b)\in\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,((x,y)^i)}$. از طرف دیگر، اگر $(a,b)\in\mathrm{Nil}\,(R_۱\times R_۲)$، آن‌گاه $(a,b)^{\nu(a,b)-۱}(x,y)^{i+۱}=(۰,۰)$. لذا، $a^{\nu(a,b)-۱}x^{i+۱}=۰$ و $b^{\nu(a,b)-۱}y^{i+۱}=۰$. با استفاده از (۱) و (۲) و ۷.۲.۳ داریم $a^{\nu(a,b)-۱}x^{i}=۰$ و $b^{\nu(a,b)-۱}y^{i}=۰$. پس $(a,b)^{\nu(a,b)-۱}(x,y)^i=(۰,۰)$ بنابراین $(a,b)\in\sqrt[i]{\mathrm{Ann}\,((x,y)^i)}$. □

به عنوان یک نتیجه ساده، نتیجه زیر را در حلقه‌های آرتینی به دست می‌آوریم.

۱۰.۲.۳ نتیجه. اگر R یک حلقه آرتینی باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱. اگر R موضعی باشد، آن‌گاه برای هر $k\geq\nu(R)-۱$ داریم $\overline{\Gamma}_k(R)=\overline{\Gamma}_{k+۱}(R)$.

۲. اگر R موضعی نباشد، آن‌گاه برای هر $k\geq\nu(R)$ داریم $\overline{\Gamma}_k(R)=\overline{\Gamma}_{k+۱}(R)$.

اثبات. (۱) این حالت بعد از نتیجه ۲.۲.۳ بیان شده است.

(۲). از قضیه ۹.۲.۳ نتیجه می‌شود، زیرا حلقه‌های آرتینی ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های آرتینی موضعی هستند. □

۳.۳ پالایه $\{\overline{\Gamma}_i(R)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$

در این بخش، رفتار پالایه $\{\overline{\Gamma}_i(R)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ را مطالعه می‌کنیم. این کار را می‌توان از طریق دنباله $(s(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$، به صورت زیر بیان کرد:

اگر $\Gamma_n(R)=\Gamma_{n+۱}(R)$، آن‌گاه $s(n)=۱$ و در غیر این صورت $s(n)=۰$. این دنباله با $\mathrm{Seq}(R)$ نشان داده می‌شود. حلقه‌هایی مانند R وجود دارند که هر جمله $\mathrm{Seq}(R)$ صفر است، مانند $\mathbb{R}\,[\{X_i\}]\,/\,(\{X_۱X_i{}^i\})$. با این حال، نشان می‌دهیم هرگاه $\mathrm{Seq}(R)$ دارای یک جمله ناصفر باشد، آن‌گاه

دنباله $\mathrm{Seq}(R)$ ایستا است؛ یعنی بعد از یک جمله مشخص، همه جمله‌ها برابر ۱ است (قضیه ۳.۳.۳ را ببینید). بنابراین اولین عنصر غیر صفر و اولین عنصر غیر صفر با ناصفرهای پس از آن مورد توجه خاصی قرار دارند. ما آن‌ها را به شرح زیر بیان می‌کنیم.

$$\mathrm{is}(R) := \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \overline{\Gamma}_k(R) = \overline{\Gamma}_{k+1}(R)\right\}$$

و

$$\mathrm{IS}(R) := \min\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall k \geq n : \overline{\Gamma}_k(R) = \overline{\Gamma}_{k+1}(R)\right\}.$$

اگر همه جمله‌های $\mathrm{Seq}(R)$ صفر باشند، آن‌گاه داریم $\mathrm{is}(R) = \mathrm{IS}(R) = \infty$.

توجه داریم که $\mathrm{IS}(R)$ نشان می‌دهد که در کجا پالایه $\{\overline{\Gamma}_i(R)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ ایستا است. روشن است که در حالتی که حلقه R متناهی است، $\mathrm{IS}(R)$ نیز متناهی است. یکی از نتایج اصلی این بخش مربوط به حلقه $\mathbb{Z}_n$ است (قضیه ۷.۳.۳ را ببینید). هم‌چنین علاقه‌مند به مطالعه روابط بین $\mathrm{is}(R)$ و $\mathrm{IS}(R)$ هستیم. واضح است که $\mathrm{is}(R) \leq \mathrm{IS}(R)$. در واقع خواهیم دید که $\mathrm{IS}(R)$ می‌تواند محدود کننده $\mathrm{is}(R)$ باشد (قضیه ۳.۳.۳ را ملاحظه کنید). هم‌چنین نشان خواهیم داد اگر $\mathrm{is}(R) = ۱$، آن‌گاه $\mathrm{IS}(R) = ۱$ نیز چنین است. این اولین نتیجه اصلی در این بخش است.

بدیهی است که $\overline{\Gamma}_{\mathrm{IS}(R)}(R) = \overline{\Gamma}(R)$. از طرف دیگر، اگر برای عدد طبیعی i داشته باشیم $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}(R)$، آن‌گاه $\mathrm{IS}(R) \leq i$. نتیجه زیر شرایطی را نشان می‌دهد که گراف توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر منطبق با تمام گراف‌های i-توسعه یافته مقسوم‌علیه صفر است. این حالت معادل است با این که $\Gamma(R) = \overline{\Gamma}(R)$ که این تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{Nil}(R)$، $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}\left(x^۲\right)$ و برای هر $x \in \mathrm{Nil}(R)$، $\nu(x) = ۲$ (قضیه ۲.۱ از [۱۶] را ملاحظه کنید).

۱.۳.۳ قضیه. عبارت‌های زیر معادلند:

۱. $\overline{\Gamma}_۱(R)=\overline{\Gamma}_۲(R)$.

۲. $\Gamma(R)=\overline{\Gamma}(R)$.

۳. برای هر $x\in Z(R)\setminus \mathrm{N}^۲(R)$، $\mathrm{Ann}(x)=\mathrm{Ann}\left(x^۲\right)$.

به خصوص، $\mathrm{is}(R)=۱$ اگر و تنها اگر $\mathrm{IS}(R)=۱$. در این حالت، دنباله $\mathrm{Seq}(R)$ ثابت است و تمام جمله‌ها برابر با ۱ هستند. به علاوه طبق گزاره ۳.۲.۳، اگر یکی از شرایط بالا رخ دهد، آن‌گاه $\mathrm{Nil}(R)=\mathrm{N}^۲(R)$.

اثبات. هم ارزی (۳) $\Leftrightarrow$ (۱) نتیجه مستقیم قضیه ۴.۲.۳ برای $i=۱$ است. پس فقط نیازمند اثبات (۲) $\Rightarrow$ (۱) هستیم. فرض کنیم x و y دو رأس مجاور در $\overline{\Gamma}(R)$ باشند. در این صورت $n,m\in\mathbb{N}$ وجود دارند به طوری که $x^ny^m=۰$، $x^n\neq ۰$ و $y^m\neq ۰$. اگر x و y در $\overline{\Gamma}_۲(R)$ مجاور باشند، آن‌گاه x و y در $\Gamma(R)$ مجاور هستند. در غیر این صورت، دو حالت زیر رخ می‌دهند:

حالتی که $x^۲=۰$ یا $y^۲=۰$. می‌توانیم فرض کنیم که $n\leq m$. در این صورت $x^۲=۰$ و لذا $xy^m=۰$. چون x و y در $\overline{\Gamma}_۲(R)$ مجاور نیستند، پس $m\geq ۳$. مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم.

$$T=\{\alpha \mid xy^\alpha=۰ \text{ و } y^\alpha\neq ۰\}.$$

چون $m\in T$، $T\neq\emptyset$. پس T دارای مینیمم است که آن را با t نشان می‌دهیم. داریم $xy^{t-۲}y^۲=xy^t=۰$، بنابراین $xy^{t-۲}$ و y در $\overline{\Gamma}_۲(R)=\Gamma(R)$ مجاورند، از این رو $xy^{t-۱}=xy^{t-۲}y=۰$. این نتیجه می‌دهد که $t-۱\in T$، با این حقیقت که t مینیمم T است در تناقض است.

حالت دوم، حالتی که $x^۲y^۲\neq ۰$: مجموعه S را چنین در نظر می‌گیریم

$$S=\{\alpha \mid x^ny^\alpha=۰ \text{ و } y^\alpha\neq ۰\}.$$

چون $m \in S$، $S \neq \emptyset$. فرض کنیم $s := \min S$. اگر $s \geq ۲$، آن‌گاه $x^ny^{s-۲}y^۲ = x^ny^s = ۰$ که این نتیجه می‌دهد $x^ny^{s-۲}$ و y در $\overline{\Gamma}_۲(R) = \Gamma(R)$ مجاورند. پس $x^ny^{s-۱} = x^ny^{s-۲}y = ۰$، بنابراین $s - ۱ \in S$ و این تناقض است. اگر $s = ۱$، مجموعه U را چنین در نظر می‌گیریم

$$U = \{\alpha \mid yx^{\alpha} = ۰ \text{ و } x^{\alpha} \neq ۰\}.$$

چون $n \in U$، $U \neq \emptyset$. فرض کنیم $u := \min U$. داریم $yx^u = ۰$ و $x^u \neq ۰$. چون $x^۲y^۲ \neq ۰$، داریم $u \geq ۳$. به‌علاوه، $yx^{u-۲}x^۲ = ۰$، بنابراین $yx^{u-۲}$ و x در $\overline{\Gamma}_۲(R) = \Gamma(R)$ مجاور هستند، لذا $yx^{u-۲}x = ۰$، پس $yx^{u-۱} = ۰$ که این نتیجه می‌دهد $u - ۱ \in U$ که این با u مینیمم U است در تناقض است. □

قضیه فوق این سوال را به وجود می‌آورد که اگر $i \in \mathbb{N}^*$ وجود داشته باشد به طوری که $\overline{\Gamma}(R) = \overline{\Gamma}_i(R)$، می‌توان نتیجه گرفت $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+۱}(R)$؟ مثال زیر به این سوال پاسخ منفی می‌دهد.

۲.۳.۳ گزاره. فرض کنیم p و q دو عدد اول و n یک عدد طبیعی باشد. گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱. $\overline{\Gamma}_{n-۲}(\mathbb{Z}_{p^nq}) = \overline{\Gamma}_{n-۱}(\mathbb{Z}_{p^nq})$ اگر و تنها اگر $n \geq ۴$.

۲. برای هر $n > ۱$، $\overline{\Gamma}_{n-۱}(\mathbb{Z}_{p^nq}) \neq \overline{\Gamma}_n(\mathbb{Z}_{p^nq})$.

اثبات. ۱. اگر $\overline{\Gamma}_{n-۲}(\mathbb{Z}_{p^nq}) = \overline{\Gamma}_{n-۱}(\mathbb{Z}_{p^nq})$، آن‌گاه بنا به گزاره ۳.۲.۳ داریم $\nu(pq) = n \leq ۲(n-۲)$. بنابراین $n \geq ۴$. برعکس، فرض کنیم که $n \geq ۴$. طبق قضیه ۴.۲.۳ کافی است که نشان دهیم برای هر $x \in Z(R) \setminus \mathrm{N}^{n-۱}$، $\sqrt[n-۲]{\mathrm{Ann}(x^{n-۲})} \subset \sqrt[n-۱]{\mathrm{Ann}(x^{n-۱})}$. عناصر $x \in Z(R) \setminus N^{n-۱}$ و $y \in \sqrt[n-۱]{\mathrm{Ann}(x^{n-۱})}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\alpha \leq n-۱$ وجود دارد به طوری که $x^{n-۱}y^{\alpha} = ۰$

و $y^{\alpha} \neq ۰$. داریم $x = kp^aq^b$ و $y = k'p^cq^d$ که $\gcd(kk', pq) = ۱$. چون $x \in Z(R)$، باید داشته باشیم $a + b > ۰$. از طرف دیگر، $x \notin \mathrm{N}^{n-۱}$، بنابراین $a \leq ۱$ یا $b = ۰$. حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۱: $a = ۰$ و $b > ۰$. داریم $p^n \mid y^{\alpha}$ و $p^nq \nmid y^{\alpha}$. پس $c \geq ۲$ و $d = ۰$. به علاوه، $(n-۲)c \geq ۲n - ۴ \geq n$، بنابراین $p^n \mid y^{n-۲}$ و $y \in \sqrt[n-۲]{\mathrm{Ann}\,(x^{n-۲})}$.

حالت ۲: $a = ۱$. داریم $p^n \mid x^{n-۱}y^{\alpha}$ و $p^n \nmid x^{n-۱}$. پس $p \mid y$. اگر $c = ۱$، آن‌گاه $p^n \mid x^{n-۲}y^۲$ و $y^۲ \neq ۰$، بنابراین $y \in \sqrt[۲]{\mathrm{Ann}\,(x^{n-۲})} \subset \sqrt[n-۲]{\mathrm{Ann}\,(x^{n-۲})}$. اگر $c > ۱$، آن‌گاه $p^n \mid x^{n-۲}y$، بنابراین $y \in \sqrt[n-۲]{\mathrm{Ann}\,(x^{n-۲})}$.

حالت ۳: $a \geq ۲$ و $b = ۰$. چون $q \nmid x$، پس $q \mid y$ به علاوه، $(n-۲)a \geq ۲n - ۴ \geq n$، بنابراین $p^n \mid x^{n-۲}$. پس $p^nq \mid x^{n-۲}y$. بنابراین $y \in \sqrt[n-۲]{\mathrm{Ann}\,(x^{n-۲})}$.

۲. داریم $p^nq = ۰$ و $p^{n-۱}q^{n-۱} \neq ۰$. پس p و q در $\overline{\Gamma}_n(\mathbb{Z}_{p^nq})$ مجاورند و در $\overline{\Gamma}_{n-۱}(\mathbb{Z}_{p^nq})$ مجاور نیستند. بنابراین $\overline{\Gamma}_{n-۱}(\mathbb{Z}_{p^nq}) \neq \overline{\Gamma}_n(\mathbb{Z}_{p^nq})$. □

اکنون روشن است که $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+۱}(R)$ شرط کافی برای ایستا بودن پالایه $\{\overline{\Gamma}_i(R)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ در اندیس iام نیست. با این حال، ثابت می‌کنیم که این شرط، برای ایستا بودن پالایه پس از اندیس مشخصی، کافی است. دومین نتیجه اصلی زیر را در این بخش داریم:

۳.۳.۳ قضیه. اگر برای یک عدد طبیعی i داشته باشیم $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+۱}(R)$، آن‌گاه $\overline{\Gamma}_{۲i}(R) = \overline{\Gamma}(R)$.

برای اثبات این قضیه از لم زیر استفاده خواهیم کرد.

۴.۳.۳ لم. فرض کنیم $\overline{\Gamma}_i(R) = \overline{\Gamma}_{i+۱}(R)$ برای $i \in \mathbb{N}^*$، $x \in Z(R)^*$ و $y \in N^۲$. اگر x و y برای $n \in \mathbb{N}^*$ در $\overline{\Gamma}_n(R)$ مجاور باشند، آن‌گاه x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاورند.

اثبات. مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم.

$$T=\left\{t\in\mathbb{N}^* \mid x^t y=\text{۰ و } x^t\neq \text{۰}\right\}.$$

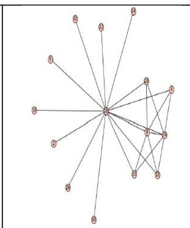
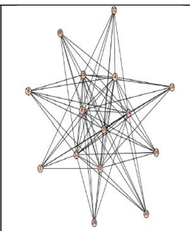
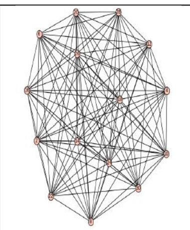
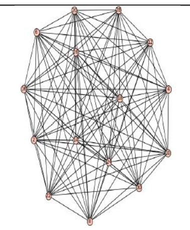
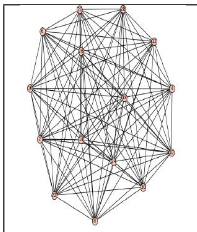
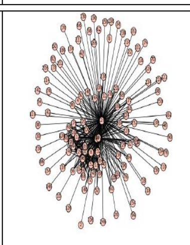
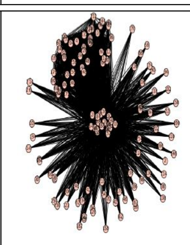
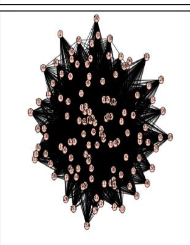
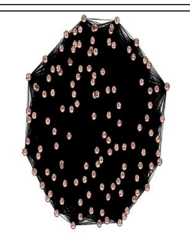
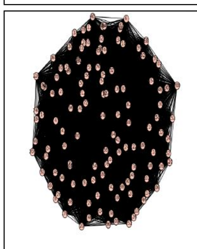
چون x و y در $\overline{\Gamma}_n(R)$ و $y\in N^{۲}$، T ناتهی است. فرض کنیم $t=\min T$. اگر $i>t$، آن‌گاه $x^{i+۱}\left(x^{t-i-۱}y\right)=۰$. چون $x^{i+۱}\neq ۰$ و $x\neq x^{t-i-۱}y$ (چون $x^{۲}\neq ۰$)، پس x و $x^{t-i-۱}y$ در $\overline{\Gamma}_i(R)=\overline{\Gamma}_{i+۱}(R)$ مجاورند. پس $x^{t-۱}y=x^ix^{t-i-۱}y=۰$، لذا $t-۱\in T$ و این با مینیمم بودن t در تناقض است. پس $i\leq t$ و x و y در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاورند. □

اثبات قضیه ۳.۳.۳. فرض کنیم x و y دو رأس مجاور در $\overline{\Gamma}(R)$ باشند. نشان می‌دهیم x و y در $\overline{\Gamma}_{۲i}(R)$ مجاورند. طبق تعریف، دو عدد طبیعی n و m وجود دارند به طوری که $x^ny^m=۰$ به طوری که $x^n\neq ۰$ و $y^m\neq ۰$. می‌توانیم فرض کنیم $m\geq n$. اگر $xy=۰$، آن‌گاه x و y در $\overline{\Gamma}_{۲i}(R)$ مجاورند. در غیر این صورت xy پوچ‌توان است و با استفاده از قضیه ۴.۲.۳ داریم $\nu(xy)\leq ۲i$. بنابراین داریم $x^{\nu(xy)}y^{\nu(xy)}=۰$. سه حالت برای بررسی وجود دارد. اگر $x^{\nu(xy)}\neq ۰$ و $y^{\nu(xy)}\neq ۰$، آن‌گاه x و y در $\overline{\Gamma}_{۲i}(R)$ مجاورند. اگر $x^{\nu(xy)}=۰$، آن‌گاه $m\leq n<\nu(xy)\leq ۲i$ که این نتیجه می‌دهد x و y در $\overline{\Gamma}_{۲i}(R)$ مجاورند. اگر $x^{\nu(xy)}\neq ۰$ و $y^{\nu(xy)}=۰$، آن‌گاه $m<\nu(xy)=\nu(y)$ که این نتیجه می‌دهد $x^ny^{\nu(y)-۱}=۰$. با استفاده از این حقیقت که $y^{\nu(y)-۱}\in N^{۲}$ و با استفاده از لم ۴.۳.۳، نتیجه می‌گیریم که x و $y^{\nu(y)-۱}$ در $\overline{\Gamma}_i(R)$ مجاورند. به‌علاوه، $\nu(y)-۱\leq ۲i$، بنابراین x و $y^{\nu(y)-۱}$ در $\overline{\Gamma}_{۲i}(R)$ مجاورند که این اثبات را تمام می‌کند. □

این پایان‌نامه را با مطالعه دنباله $\operatorname{Seq}(\mathbb{Z}_n)$ به پایان می‌بریم. در حقیقت استدلال‌های مورد استفاده در این‌جا، برای حلقه‌های ایده‌آل اصلی هم قابل استفاده است. به عبارت دیگر، حلقه آرتینی موضعی با ایده‌آل ماکسیمال اصلی m یا به طور معادل حلقه‌هایی که هر ایده‌آل آن‌ها اصلی و توانی از m است. برای سادگی

کار را به مطالعه روی حلقه $\mathbb{Z}_n$ محدود می‌کنیم.

ابتدا، مورد $\mathbb{Z}_{pm}$ را بررسی می‌کنیم. برای وقتی که p عدد صحیح اول و m عدد طبیعی است. اجازه دهید مشاهدات زیر را مورد بحث قرار دهیم. طبق گزاره ۳.۲.۳، $\overline{\Gamma}_i(\mathbb{Z}_{p^m}) = \overline{\Gamma}_{i+1}(\mathbb{Z}_{p^m})$ نشان می‌دهد که برای هر عنصر پوچ‌توان $x \in \mathbb{Z}_{p^m}$، $\nu(x) \le 2i$ که این نشان می‌دهد $m \le 2i$ و بنابراین $i \ge \frac{m}{2}$. در شکل زیر چند مثال از $\overline{\Gamma}_i(\mathbb{Z}_{2^m})$ ارائه می‌دهیم.

	$\overline{\Gamma}_1(\mathbb{Z}_{2^m})$	$\overline{\Gamma}_2(\mathbb{Z}_{2^m})$	$\overline{\Gamma}_3(\mathbb{Z}_{2^m})$	$\overline{\Gamma}_4(\mathbb{Z}_{2^m})$	$\overline{\Gamma}_5(\mathbb{Z}_{2^m})$
$m = 5$					
$m = 8$					

از نمونه‌های مورد مطالعه، حدس می‌زنیم که اگر m زوج باشد، آن‌گاه کوچک‌ترین اندیس i که برای آن $\overline{\Gamma}_i(\mathbb{Z}_{p^m}) = \overline{\Gamma}_{i+1}(\mathbb{Z}_{p^m})$، $\frac{m}{2}$ است و در غیر این صورت $\frac{m+1}{2}$ است. معادلاً، $\overline{\Gamma}_i(\mathbb{Z}_{p^m}) = \overline{\Gamma}_{i+1}(\mathbb{Z}_{p^m})$ اگر $i \ge \frac{m}{2}$. علاوه بر این، اشاره خواهیم کرد که $\overline{\Gamma}_i(\mathbb{Z}_{p^m}) = \overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_{p^m})$ زمانی که $\overline{\Gamma}_i(\mathbb{Z}_{p^m}) = \overline{\Gamma}_{i+1}(\mathbb{Z}_{pm})$. در حقیقت، می‌توانیم ثابت کنیم که برای هر $i \ge \frac{m}{2}$، $\overline{\Gamma}_i(\mathbb{Z}_{pm})$ کامل است.

در اثبات لم زیر $\lfloor x \rfloor$ به معنی کف (جزء صحیح) عدد x است.

۵.۳.۳ لم. فرض کنیم p یک عدد اول و m یک عدد طبیعی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱. اگر m زوج باشد، آن‌گاه $\overline{\Gamma}_{\frac{m}{2}}(\mathbb{Z}_{pm})$ کامل است.

۲. اگر m فرد باشد، آن‌گاه $\overline{\Gamma}_{\frac{m+1}{2}}\left(\mathbb{Z}_{p^m}\right)$ کامل است.

اثبات. فرض کنیم $n = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$؛ به عبارت دیگر، $m = 2n$ اگر m زوج باشد، یا $m = 2n - 1$ اگر m فرد باشد. نشان می‌دهیم برای هر $x \in Z\left(\mathbb{Z}\left(p^m\right)\right)^*$، $\alpha \leq n$ وجود دارد به طوری که $p^n \mid x^\alpha$ اما $p^m \nmid x^\alpha$. در نتیجه، برای هر $x_1, x_2 \in Z\left(\mathbb{Z}_{pm}\right)^*$ و $\alpha_1, \alpha_2 \leq n$ مناسب داریم $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} = 0$ و $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2} \neq 0$ که این یعنی x_1 و x_2 در $\overline{\Gamma}_n\left(\mathbb{Z}_{p^m}\right)$ مجاورند.

فرض کنیم $x \in Z\left(\mathbb{Z}_{pm}\right)^*$. داریم $x = kp^a$، وقتی که $\gcd(k,p) = 1$ و $a > 0$. اگر $a = 1$، $\alpha = n$ بگیرید. اگر $a \geq n$، $\alpha = 1$ بگیرید. در غیر این صورت، $2 \leq a \leq n - 1$ و در نتیجه $3 \leq \nu(x) \leq n$. $\alpha = \nu(x) - 1$ بگیرید. داریم $p^m \mid x^{\nu(x)}$، بنابراین $m \leq a(\alpha + 1)$. پس $a\alpha \geq m - a \geq m - n + 1 \geq n$. □

اکنون در موقعیتی هستیم که دو نتیجه اصلی آخر را ارائه دهیم. در زیر یکی از نتایج مستقیم گزاره قبلی آمده است.

۶.۳.۳ قضیه. فرض کنیم m و i دو عدد طبیعی و p یک عدد اول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

۱. $\overline{\Gamma}_i\left(\mathbb{Z}_{p^m}\right) = \overline{\Gamma}_{i+1}\left(\mathbb{Z}_{p^m}\right)$.

۲. $i \geq \frac{m}{2}$.

۳. $\overline{\Gamma}_i\left(\mathbb{Z}_{p^m}\right)$ کامل است.

۴. $\overline{\Gamma}_i\left(\mathbb{Z}_{p^m}\right) = \overline{\Gamma}\left(\mathbb{Z}_{p^m}\right)$.

در نتیجه

- $\mathrm{is}\left(\mathbb{Z}_{p^m}\right)=\mathrm{IS}\left(\mathbb{Z}_{p^m}\right)=\frac{m}{۲}$، اگر m زوج باشد و
- $(\mathbb{Z}_{pm})=\mathrm{IS}\left(\mathbb{Z}_{pm}\right)=\frac{m+۱}{۲}$، اگر m فرد باشد.

برای حالتی که n یک عدد طبیعی با بیش از دو مقسوم‌علیه اول، قضیه زیر را مربوط به $\mathrm{Seq}\left(\mathbb{Z}_n\right)$ داریم.

۷.۳.۳ قضیه. فرض کنیم $n=\prod_{k=۱}^{m}p_k^{\alpha_k}$ تجزیه عدد طبیعی n به عوامل اول باشد که $m>۱$ و $\alpha_۱\geq\alpha_۲\geq\cdots\geq\alpha_m$. در این صورت $\mathrm{IS}\left(\mathbb{Z}_n\right)=\alpha_۱$ و دنباله $\mathrm{Seq}\left(\mathbb{Z}_n\right)=(s_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ به یکی از دو شکل زیر می‌باشد.

۱. اگر $\alpha_۱$ زوج باشد، آنگاه $\mathrm{is}\left(\mathbb{Z}_n\right)\geq\frac{\alpha_۱}{۲}$ و برای هر $i\in\left\{\frac{\alpha_۱}{۲},\ldots,\alpha_۱-۱\right\}$، $s_i=۰$ اگر و تنها اگر $j\in\{۱,\ldots,m\}$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha_j=i+۱$.

۲. اگر $\alpha_۱$ فرد باشد، آنگاه $\mathrm{is}\left(\mathbb{Z}_n\right)\geq\frac{\alpha_۱+۱}{۲}$ و برای هر $i\in\left\{\frac{\alpha_۱+۱}{۲},\ldots,\alpha_۱-۱\right\}$، $s_i=۰$ اگر و تنها اگر $j\in\{۱,\ldots,m\}$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha_j=i+۱$.

اثبات. طبق قضیه ۹.۲.۳، $\overline{\Gamma}_i\left(\mathbb{Z}_n\right)=\overline{\Gamma}_{i+۱}\left(\mathbb{Z}_n\right)$ اگر و تنها اگر برای هر $۱\leq k\leq m$ داشته باشیم $\overline{\Gamma}_i\left(\mathbb{Z}_{{p_k}^{\alpha_k}}\right)=\overline{\Gamma}_{i+۱}\left(\mathbb{Z}_{p_k\alpha_k}\right)$ و برای هر $x\in\mathrm{Nil}\left(\mathbb{Z}_{{p_k}^{\alpha_k}}\right)$، $\nu(x)\neq i+۱$. توجه داریم که برای $x\in\mathbb{Z}_{p_k\alpha_k}$ داریم $x\in\mathrm{Nil}\left(\mathbb{Z}_{p_k\alpha_k}\right)$ اگر و تنها اگر $p_k\mid x$ اگر و تنها اگر $x\in\mathrm{N}^{\alpha_k}$. در حالت خاص، برای هر $x\in\mathrm{Nil}\left(\mathbb{Z}_{p_k}\alpha_k\right)$ داریم $\nu(x)\leq\alpha_k$ و برای $\alpha_k>۱$، $x\in\mathrm{Nil}\left(\mathbb{Z}_{p_k}\alpha_k\right)$ وجود دارد به طوری که $\nu(x)=\alpha_k$. حال فرض کنیم $\nu(x)<\alpha_k$ که نشان می‌دهد $x\mid p_k^a$، برای a دلخواه به طوری که $a\nu(x)>\alpha_k$. به خصوص، $a>۲$ و در نتیجه $\nu(x)\leq\left\lceil\frac{\alpha_k}{۲}\right\rceil$.

از قضیه ۶.۳.۳ نتیجه می‌گیریم $\overline{\Gamma}_i\left(\mathbb{Z}_{p_k\alpha_k}\right)=\overline{\Gamma}_{i+۱}\left(\mathbb{Z}_{p_k\alpha_k}\right)$ اگر و تنها اگر $i\geq\left\lceil\frac{\alpha_k}{۲}\right\rceil$. در نتیجه $\mathrm{is}\left(\mathbb{Z}_n\right)\geq\frac{\alpha_۱}{۲}$. به‌علاوه، برای $i\geq\frac{\alpha_۱}{۲}$، $s_i=۰$ اگر و تنها اگر $x\in\mathrm{Nil}\left(\mathbb{Z}_{p_k\alpha_k}\right)$ وجود داشته باشد به

طوری که $\nu(x)=i+1$؛ به عبارت دیگر، $\alpha_j=i+1$ برای $j\in\{1,\ldots,m\}$. نهایتاً، α_1 بالاترین مرتبه پوچ‌توانی است. بنابراین $s_{\alpha_1-1}=0$ و $s_i=1$ برای $i\geq\alpha_1$؛ به عبارت دیگر، $\mathrm{IS}\left(\mathbb{Z}_n\right)=\alpha_1$. $\square$

در قضیه ۶.۳.۳ نشان داده شده است که برای یک عدد اول p و یک عدد طبیعی i، دنباله $\mathrm{Seq}\left(\mathbb{Z}_{p^{2i}}\right)$ به شکل زیر خواهد بود.

$$S_i := 0,0,\ldots,0,\overbrace{1}^{i},1,1,\ldots$$

دنباله S_i دنباله‌ای یکتا است که برای آن داریم $\mathrm{is}(R)=\mathrm{IS}(R)=i$. نتیجه زیر همه اعداد صحیح n که $\mathrm{Seq}\left(\mathbb{Z}_n\right)=S_i$ را تعیین می‌کند.

۸.۳.۳ نتیجه. فرض کنیم i یک عدد طبیعی باشد. اگر برای عدد طبیعی n داشته باشیم $\mathrm{Seq}\left(\mathbb{Z}_n\right)=S_i$، آن‌گاه یا $n=p^{2i}$ یا $n=p^{2i-1}$ برای یک عدد اول p است یا n دارای تجزیه‌ای به یکی از شکل‌های زیر باشد.

$$n=p_i^{i}p_{i-1}^{i-1}p_{i-2}^{i-2}\ldots p_{\frac{i}{2}+1}^{\frac{i}{2}+1}\ldots p_r^{\alpha_r}\ldots p_1^{\alpha_1}$$

یا

$$n={p_i}^{i}{p_{i-1}}^{i-1}{p_{i-2}}^{i-2}\ldots p_{\frac{i+1}{2}+1}^{\frac{i+1}{2}+1}\ldots {p_r}^{\alpha_r}\ldots {p_1}^{\alpha_1}$$

زمانی که $\alpha_r\leq i$ برای هر $k\in\{1,\ldots,r\}$.

نمایه

نمایه

نمایه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Abelian .... آبلی

annihilator .... پوچ‌ساز

Artinian .... آرتینی

B

bipartite .... دوبخشی

C

commutative .... جابه‌جایی

complete graph .... گراف کامل

completed .... تکمیل شده

connected .... همبند

cycle .... دور

D

decomposable .... تجزیه‌پذیر

diameter .... قطر

dimension .... بُعد

disconnected .... ناهمبند

distance .... فاصله

distributive .... توزیع‌پذیر

E

essential .... اساسی

F

field .... میدان

G

girth .... کمر

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

graph .... گراف

group .... گروه

H

homomorphism .... همریختی

I

ideal .... ایده‌آل

idempotent .... خودتوان

induced subgraph .... زیرگراف القایی

Integral domain .... دامنه صحیح

isomorphic .... یکریخت

isomorphism .... یکریختی

L

length .... طول

local ring .... حلقه موضعی

localization .... موضعی‌سازی

loop .... طوقه

M

maximal .... ماکسیمال

minimal prime ideal .... ایده‌آل اول مینیمال

multi-edge .... یال چندگانه

multiplicatively closed set . مجموعه بسته ضربی

N

nil radical .... رادیکال پوچ

nilpotent .... پوچ‌توان

Noetherian .... نوتری

non adjacent .... غیرمجاور

O

orthogonal .... متعامد

P

path .... مسیر

prime .... اول

principal ideal .... ایده‌آل اصلی

principal ideal ring .... حلقه ایده‌آل اصلی

proper .... سره

Q

quasi-local .... شبه‌موضعی

quotient ring .... حلقه کسرها

R

radical .... رادیکال

reduced ring .... حلقه کاهشی

ring .... حلقه

S

semigroup .... نیم‌گروه

star .... ستاره

subgraph .... زیرگراف

subring .... زیرحلقه

T

total quotient ring .... حلقه کسرهای تام

U

unitary .... یک‌دار

W

walk .... گشت

Z

zero-divisor .... مقسوم‌علیه صفر

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

آبلی .... Abelian

آرتینی .... Artinian

اساسی .... essential

اول .... prime

ایده‌آل .... ideal

ایده‌آل اصلی .... principal ideal

ایده‌آل اول مینیمال .... minimal prime ideal

ب

بُعد .... dimension

پ

پوچ‌توان .... nilpotent

پوچ‌ساز .... annihilator

ت

تجزیه‌پذیر .... decomposable

تکمیل شده .... completed

توزیع‌پذیر .... distributive

ج

جابه‌جایی .... commutative

ح

حلقه .... ring

حلقه ایده‌آل اصلی .... principal ideal ring

حلقه کاهشی .... reduced ring

حلقه کسرها .... quotient ring

حلقه کسرهای تام .... total quotient ring

حلقه موضعی .... local ring

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

خ

خودتوان .... idempotent

د

دامنه صحیح .... Integral domain

دوبخشی .... bipartite

دور .... cycle

ر

رادیکال .... radical

رادیکال پوچ .... nil radical

ز

زیرحلقه .... subring

زیرگراف .... subgraph

زیرگراف القایی .... induced subgraph

س

ستاره .... star

سره .... proper

ش

شبه‌موضعی .... quasi-local

ط

طوقه .... loop

طول .... length

غ

غیرمجاور .... non adjacent

ف

فاصله .... distance

ق

قطر .... diameter

ک

کمر .... girth

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

گ

گراف .... graph

گراف کامل .... complete graph

گروه .... group

گشت .... walk

م

ماکسیمال .... maximal

متعامد .... orthogonal

مجموعه بسته ضربی . multiplicatively closed set

مسیر .... path

مقسوم‌علیه صفر .... zero-divisor

موضعی‌سازی .... localization

میدان .... field

ن

ناهمبند .... disconnected

نوتری .... Noetherian

نیم‌گروه .... semigroup

ه

همبند .... connected

همریختی .... homomorphism

ی

یال چندگانه .... multi-edge

یک‌دار .... unitary

یکریخت .... isomorphic

یکریختی .... isomorphism

مراجع

[۱] رودنی شارپ، گام‌هایی در جبر تعویض‌پذیر، ترجمه محمدمهدی ابراهیمی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۵.

[۲] داگلاس برنت وست، آشنایی با نظریه گراف، ترجمه بیژن شمس، انتشارات گسترش علوم پایه، ۱۳۸۱.

[۳] سیامک یاسمی و محمدرضا پورنکی، مقدمه‌ای بر نظریه مدول‌ها، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۴.

[4] D. D. Anderson, D. Bennis, B. Fahid and A. Shaiea, On n-trivial extension of rings. Preprint.

[5] D. F. Anderson, On the diameter and girth of a zero divisor graph II. Houston J Math 34 (2008), 361-371.

[6] D. F. Anderson and A. Badawi, On the zero-divisor graph of a ring. J. Algebra 36 (2008), 3073-3092.

[7] D. F. Anderson and M. Winders, Idealization of a module. Journal of Commutative Algebra 1 (2009), 3-56.

[8] D. F. Anderson and G. McClurkin, Generalizations of the zero-divisor graph, Inter. Elec. J. Algeb. 27, (2020), 237–262.

[9] D. F. Anderson, R. Levy and J. Shapiro, Zero-divisor graphs, von Neumann regular rings, and Boolean algebras, J. Pure Appl. Algebra 180 (2003), 221–241.

[10] D. F. Anderson and P. S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, J. Algebra 217 (1999), 434–447.

[11] D. F. Anderson and S. B. Mulay, On the diameter and girth of a zero-divisor graph, J. Pure Appl. Algebra 210 (2007), 543–550.

[12] D. F. Anderson, A. Frazier, A. Lauve and P. S. Livingston, The Zero-Divisor Graph of a Commutative ring, II, Lect. Notes Pure Appl. Math. 220 (2001), New York, Basel: Marcel Dekker, 61–72.

[13] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, publication company, (1969).

[14] M. Axtell, J. Coykendall and J. Stickles, Zero-divisor graphs of polynomial and power series over commutative rings, Comm. Algebra 33 (2005), 2043–2050.

[15] I. Beck, Coloring of commutative rings. J. Algebra 116 (1988), 208-226.

[16] D. Bennis, J. Mikram and F. Taraza, On the extended zero-divisor graph of commutative rings, Turk. J. Math. 40 (2016), 376–388.

[17] F. DeMeyer, K. Schneider, Automorphisms and zero-divisor graphs of commutative rings, in Commutative rings (Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY, 2002), pp. 25–37.

[18] J. A. Huckaba, Commutative Rings with Zero Divisors, New York/Basel : Marcel Dekker (1988).

[19] J. D. LaGrange, Complemented zero-divisor graphs and Boolean rings, J. Algebra 315 (2007), 600–611.

[20] J. D. LaGrange, Rationally $\aleph_\alpha$-complete commutative rings of quotients, J. Algebra Appl. 8 (2009), 601–615.

[21] J. D. LaGrange, Characterizations of three classes of zero-divisor graphs, Canad. Math. Bull. 55 (2012) 127–137.

[22] J. D. LaGrange, Invariants and isomorphism theorems for zero-divisor graphs of commutative rings of quotients, J. Commut. Algebra 6 (2014), 407–438.

[23] T. Y. Lam, A First course in Non-Commutative Rings, Springer-Verlag New York, Inc. (1994).

[24] T. G. Lucas, The diameter of a zero divisor graph, J. Algebra 301 (2006), 3533–3558.

[25] E. Matlis, The minimal prime spectrum of a reduced ring, Illinois J. Math. 27 (1983), 353–391.

Abstract

Let R be a ring and $Z(R)$ denoted the set of all zero-divisors of R. The i-extended zero-divisor graph of R, is the simple graph $\overline{\Gamma}_i(R)$ with vertex set $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ and such that two distinct vertices x and y are adjacent if and only if there exist two positive integers $n \leq i$ and $m \leq i$ such that $x^n y^m = 0$ with $x^n \neq 0$ and $y^m \neq 0$. In this thesis, we study the behaviour of the filtration $\{\overline{\Gamma}_i(R)\}_{i \in \mathbb{N}^*}$. In particular, we characterize girth and diameter of $\overline{\Gamma_i}(R)$ and give various examples.

Key Words : Zero-divisor graph; Extended zero-divisor graph, Filtration of i-extended zero-divisor graph

Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran

College of Basic Science

Departement of Mathematics

Thesis Submitted for the Degree of Master of Science in Algebra

The i-extended zero-divisor graphs of commutative rings

By

Aghdas Koshvaght

Supervisor

Dr. Reza Nikandish

Date

May 2022