بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پروژه کارشناسی

استاد راهنما:

دکتر رضا چهارپاشلو

نگارش:

زهرا دینارondی

شماره دانشجویی:

۹۸۱۵۵۲۱۲۳

خرداد ۱۴۰۱

فهرست مطالب

۱ فضاهای نرم‌دار فازی و فضاهای متریک فازی ۱
۱.۱ مقدمه ۱
۲.۱ ساختارهای توپولوژیکی فازی ۱
۳.۱ فضاهای نرم دار فازی غیر ارشمیدسی ۱۳
۴.۱ فضاهای ضرب داخلی فازی شهودی ۱۶
۱.۴.۱ ویژگی‌های اصلی و نتایج ۱۷
۲.۴.۱ تعامد ۲۲

مراجع ۲۴

فصل ۱

فضاهای نرم‌دار فازی و فضاهای متریک فازی

۱.۱ مقدمه

پروژه‌ی حاضر ترجمه‌ی بخشی از این فصل (صفحه‌ی ۲۶ تا ۴۰) کتاب [۲] می‌باشد و از اواسط بخش زیر (ساختارهای توپولوژیکی فازی) آغاز شده است ولی شماره‌ی تعاریف و قضایا به طور مستقل آورده شده است.

۲.۱ ساختارهای توپولوژیکی فازی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $(Y, N', *')$ یک فضای نرم‌دار فازی باشد. در این صورت گوییم دنباله $\{f_n\}$ متشکل از نگاشت‌های X به Y همگرای یکنواخت به نگاشت f از X به Y است اگر برای هر $r \in (۰, ۱)$ و $t > ۰$، $n_۰ \geq ۱$ وجود داشته باشد به طوری که

$$N'\left(f_n(x) - f(x), t\right) > ۱ - r$$

برای هر $n \geq n_۰$ و $x \in X$.

تعریف ۲.۲.۱. خانواده $\mathcal{F}$ متشکل از نگاشت‌هایی از یک فضای نرم دار فازی $(X, N, *)$ به یک فضای نرم دار فازی کامل $(Y, N', *')$ را هم‌پیوسته می‌گویند اگر برای هر $r \in (۰, ۱)$ و $t > ۰$،

$r_\circ \in (\circ, ۱)$ و $t_\circ > \circ$ وجود داشته باشد به طوری که

$$N\left(x-y, t_\circ\right) > ۱ - r_\circ \quad \Longrightarrow \quad N'(f(x)-f(y), t) > ۱ - r$$

برای هر $f \in \mathcal{F}$.

لم ۳.۲.۱. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای به هم پیوسته از نگاشت‌هایی از یک فضای نرم دار فازی $(X, N, *)$ به یک فضای نرم دار فازی $(Y, N', *')$ باشد. اگر $\{f_n\}$ برای هر نقطه از زیرمجموعه متراکم D از X همگرا شود، آن‌گاه $\{f_n\}$ برای هر نقطه از X همگرا می‌شود و حد تابع پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $s \in (\circ, ۱)$ و $t > \circ$ مشخص باشند. در این صورت می‌توانیم $r \in (\circ, ۱)$ را بدست آوریم به قسمی که

$$(۱-r) *' (۱-r) *' (۱-r) > ۱ - s.$$

از آنجا که $\mathcal{F} = \{f_n\}$ یک خانواده هم‌پیوسته است، برای هر $r \in (\circ, ۱)$ و $t > \circ$، $r_۱ \in (\circ, ۱)$ و $t_۱ > ۱$ وجود دارد به قسمی که برای هر $x, y \in X$،

$$N\left(x-y, t_۱\right) > ۱ - r_۱ \Rightarrow N'\left(f_n(x)-f_n(y), \frac{t}{۳}\right) > ۱ - r$$

برای هر $f_n \in \mathcal{F}$. چون D در X متراکم است، پس

$$y \in B_x\left(r_۱, t_۱\right) \bigcap D$$

و $\{f_n(y)\}$ وجود دارد که به نقطه y همگرا است. چون $\{f_n(y)\}$ دنباله کوشی است، برای هر $r \in (\circ, ۱)$ و $t > \circ$، $n_\circ \geq ۱$ وجود دارد به قسمی که

$$(۱-r) *' (۱-r) *' (۱-r) > ۱ - s.$$

برای هر $m,n \geq n_\circ$. حال برای $x \in X$، داریم:

$$\begin{aligned}
&N'\left(f_n(x)-f_m(x),t\right)\\
&\geq N'\left(f_n(x)-f_n(y),\frac{t}{۳}\right) *' N'\left(f_n(y)-f_m(y),\frac{t}{۳}\right) *' N'\left(f_m(x)-f_m(y),\frac{t}{۳}\right)\\
&\geq (۱-r) *' (۱-r) *' (۱-r)\\
&> ۱-s
\end{aligned}$$

بنابراین $\{f_n(x)\}$ یک دنباله کوشی در Y است. از آنجا که Y کامل است، $\{f_n(x)\}$ همگرا می‌شود و بنابراین فرض می‌کنیم $f(x)=\lim f_n(x)$.

حال ادعا می‌کنیم که f پیوسته است. فرض کنید $s_o \in ۱-r$ و $t_\circ > \circ$ مشخص باشند. در این صورت می‌توانیم $r_\circ \in ۱-r$ را پیدا کنیم به قسمی که

$$N\left(x-y,t_۲\right) > ۱-r_۲ \quad \Longrightarrow \quad N'\left(f_n(x)-f_n(y),\frac{t_\circ}{۳}\right) > ۱-r_\circ$$

باشد. از آنجا که $\mathcal{F}$ هم‌پیوسته است، برای هر $r_\circ \in (\circ,۱)$ و $t_\circ > \circ$، وجود دارد $r_۲ \in (\circ,۱)$ و $t_۲ > \circ$ به قسمی که

$$N\left(x-y,t_۲\right) > ۱-r_۲ \quad \Longrightarrow \quad N'\left(f_n(x)-f_n(y),\frac{t_\circ}{۳}\right) > ۱-r_\circ$$

برای هر $f_n \in \mathcal{F}$. از آنجا که $\{f_n(x)\}$ به $f(x)$ همگرا می‌شود، برای هر $r_\circ \in (\circ,۱)$ و $t_\circ > \circ$، وجود دارد $n_۱ \geq ۱$ به قسمی که

$$N'\left(f_n(x)-f(x),\frac{t_\circ}{۳}\right) > ۱-r_\circ.$$

همچنین از آنجا که $\{f_n(y)\}$ به $f(y)$ همگرا است، برای هر $r_\circ \in (\circ,۱)$ و $t_\circ > \circ$، وجود دارد $n_۲ \geq ۱$ به قسمی که

$$N'\left(f_n(y)-f(y),\frac{t_\circ}{۳}\right) > ۱-r_\circ$$

برای هر $n \geq n_۲$. اکنون برای هر $n \geq \max\{n_۱, n_۲\}$، داریم

$$\begin{aligned}
& N'\left(f(x)-f(y), t_\circ\right) \\
& \geq N'\left(f(x)-f_n(x), \frac{t_\circ}{۳}\right) *' N'\left(f_n(x)-f_n(y), \frac{t_\circ}{۳}\right) *' N'\left(f_n(y)-f(y), \frac{t_\circ}{۳}\right) \\
& \geq (۱-r_\circ) *' (۱-r_\circ) *' (۱-r_\circ) \\
& > ۱-s_\circ .
\end{aligned}$$

بنابراین، f پیوسته است و این تکمیل کننده اثبات است. $\square$

قضیه ۴.۲.۱ (قضیه آسکولی-ارزیلا[1]). فرض کنید $(X, N, *)$ یک فضای فشرده نرم دار فازی و $(Y, N', *')$ یک فضای نرم دار فازی کامل باشد. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک خانواده هم‌پیوسته‌ی متشکل از نگاشت‌های از X به Y باشد. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{F}$ باشد به قسمی که

$$\overline{\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}}$$

یک زیرمجموعه فشرده از Y برای هر $x \in X$ باشد، آن‌گاه نگاشت پیوسته‌ی f از X به Y و زیردنباله $\{g_n\}$ از $\{f_n\}$ وجود دارد به قسمی که $\{g_n\}$ به طور یکنواخت به f روی X همگرا می‌شود.

اثبات. چون $(X, N, *)$ یک فضای فشرده نرم دار فازی است، از قضیه ۱۹.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که X تفکیک پذیر است. فرض کنید

$$D = \{x_i \ : \ i = ۱, ۲, \cdots\}$$

یک زیرمجموعه متراکم قابل شمارش X باشد. با فرض اینکه برای هر $i \geq ۱$،

$$\overline{\{f_n\left(x_i\right) : n \geq ۱\}}$$

[1] Ascoli-Arzela

زیرمجموعه فشرده‌ی Y است. از آنجا که هر فضای نرم دار فازی، فضای قابل شمارش نوع اول است، هر زیرمجموعه متراکم Y به تبع آن متراکم است. بنابراین، با یک استدلال استاندارد، زیرمجموعه $\{g_n\}$ از $\{f_n\}$ را داریم به قسمی که $\{g_n(x_i)\}$ برای هر $i \geq ۱$ همگرا می‌شود. بنابراین، طبق لم ۳.۲.۱، نگاشت پیوسته‌ی f از X به Y وجود دارد به قسمی که $\{g_n(x)\}$ برای هر $x \in X$ به $f(x)$ همگرا می‌شود.

اکنون ادعا می‌کنیم که $\{g_n\}$ به طور یکنواخت به نگاشت f روی X همگرا می‌شود. فرض کنید $s \in (۰, ۱)$ و $t > ۰$ مشخص باشند. در این صورت می‌توانیم $r \in (۰, ۱)$ را بدست آوریم به قسمی که

$$(۱ - r) *' (۱ - r) *' (۱ - r) > ۱ - s.$$

از آنجا که F هم‌پیوسته است، $r_۰ \in (۰, ۱)$ و وجود دارد به قسمی که

$$N(x - y, t_۱) > ۱ - r_۱ \Rightarrow N'\left(g_n(x), g_n(y), \frac{t}{۳}\right) > ۱ - r$$

برای هر $n \geq ۱$. چون X متراکم است، طبق قضیه ۱۷.۲.۲، f به طور یکنواخت پیوسته است. بنابراین، برای هر $r \in (۰, ۱)$ و $t_۲ > ۰$، وجود دارد $r_۲ \in (۰, ۱)$ و $t_۲ > ۰$ به قسمی که

$$N(x - y, t_۲) > ۱ - r_۲ \Rightarrow N'\left(f(x) - f(y), \frac{t}{۳}\right) > ۱ - r$$

برای همه $x, y \in X$. فرض کنید $r_۰ = \min\{r_۱, r_۲\}$ و $t_۰ = \min\{t_۱, t_۲\}$. چون X فشرده است و D در X متراکم است، داریم

$$X = \bigcup_{i=۱}^{k} B_{x_i}(r_۰, t_۰)$$

برای برخی از $k \geq ۱$. بنابراین برای هر $x \in X$، وجود دارد $i, i \leq i \leq k$، به قسمی که

$$N(x - x_i, t_۰) > ۱ - r_۰.$$

اما چون $r_\circ = \min \{r_۱, r_۲\}$ و $t_\circ = \min \{t_۱, t_۲\}$ است، براساس هم‌پیوستگی $\mathcal{F}$ داریم

$$N'\left(g_n(x) - g_n\left(x_i\right), \frac{t}{۳}\right) > ۱ - r$$

و همچمین براساس پیوستگی یکنواخت f داریم

$$N'\left(f(x) - f\left(x_i\right), \frac{t}{۳}\right) > ۱ - r.$$

از آنجا که $\{g_n\left(x_j\right)\}$ به سمت $f\left(x_j\right)$ همگراست، برای هر $r \in (\circ, ۱)$ و $t > \circ$، وجود دارد $n_\circ \geq ۱$ به قسمی

$$N'\left(g_n\left(x_j\right) - f\left(x_j\right), \frac{t}{۳}\right) > ۱ - r.$$

اکنون برای هر $x \in X$، داریم

$$\begin{aligned}
& N'\left(g_n(x) - f(x), t\right) \\
\geq & N'\left(g_n(x) - g_n\left(x_i\right), \frac{t}{۳}\right) *' N'\left(g_n\left(x_i\right) - f\left(x_i\right), \frac{t}{۳}\right) *' N'\left(f\left(x_i\right) - f(x), \frac{t}{۳}\right) \\
\geq & (۱ - r) *' (۱ - r) *' (۱ - r) \\
> & ۱ - s.
\end{aligned}$$

بنابراین، $\{g_n\}$ به طور یکنواخت به نگاشت f روی X همگرا می‌شود. این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

به یاد داریم که گفته می‌شود یک زیرمجموعه A در $(\mathbb{R}, N, *)$، $\mathcal{F}$-کراندار است اگر وجود داشته باشد $t_\circ > \circ$ و $r_\circ \in (\circ, ۱)$ به قسمی که برای هر $N\left(x, t_\circ\right) > ۱ - r_\circ$، برقرار باشد.

لم ۵.۲.۱. یک زیرمجموعه A از $\mathbb{R}$، $\mathcal{F}$-کراندار در $(\mathbb{R}, N, *)$ است. اگر و فقط اگر کراندار در $\mathbb{R}$ باشد.

اثبات. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای در $\mathbb{R}$ باشد که $\mathcal{F}$-کراندار در $(\mathbb{R}, N, *)$ است، باشد. در این صورت $t_\circ > \circ$ و $r_\circ \in (\circ, ۱)$ وجود دارد به قسمی که $N(x, t_\circ) > ۱ - r_\circ$ برای هر $x \in A$ برقرار است. بنابراین داریم

$$t_\circ \geq E_{r_\circ, N}(x) = |x| E_{r_\circ, N}(۱).$$

اکنون $E_{r_\circ, N}(۱) \neq \circ$ است. اگر قرار دهیم $k = \frac{t_\circ}{E_{r_\circ, N}(۱)}$. در این صورت داریم $|x| \leq k$ برای هر $x \in A$، یعنی A کراندار در $\mathbb{R}$ است.

عکس لم به راحتی قابل مشاهده است. این اثبات را کامل می‌کند. □

لم ۶.۲.۱. یک دنباله در یک فضای نرم دار فازی همگرا است اگر و تنها اگر در همگرا باشد.

اثبات. فرض کنید $\beta_n \to \beta$ در $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت، طبق لم ۱۵.۲.۲، داریم

$$E_{\lambda, N}(\beta_n - \beta) = |\beta_n - \beta| E_{\lambda, N}(۱) \to \circ.$$

بنابراین، طبق قسمت (۳) لم ۱۵.۲.۲، $\beta_n \xrightarrow{N} \beta$ برقرار است.

برعکس، فرض کنید $\beta_n \xrightarrow{N} \beta$ باشد. در این صورت از طریق لم ۱۵.۲.۲،

$$\lim_{n \to +\infty} |\beta_n - \beta| E_{\lambda, N}(۱) = \lim_{n \to +\infty} E_{\lambda, N}(\beta_n - \beta) = \circ.$$

اکنون $E_{\lambda, N}(۱) \neq \circ$ و همچنین $\beta_n \to \beta$ در $\mathbb{R}$ است. این اثبات را تکمیل می‌کند. □

نتیجه ۷.۲.۱. اگر یک دنباله حقیقی $\{\beta_n\}$ F-کراندار باشد، آن‌گاه حداقل یک نقطه حدی دارد.

لم ۸.۲.۱. زیرمجموعه A از $\mathbb{R}$ در $(\mathbb{R}, N, *)$، F-کراندار است اگر و تنها اگر در $\mathbb{R}$ کراندار باشد.

اثبات. فرض کنید A یک مجموعه F-کراندار در $(\mathbb{R}, N, *)$ باشد. در این صورت، $t_\circ > \circ$ و $r_\circ \in (\circ, ۱)$ وجود دارد به قسمی که

$$N(x, t_\circ) > ۱ - r_\circ$$

برای هر $x \in A$ و بنابراین

$$t_\circ \geq E_{r_\circ,N}(x) = |x| E_{r_\circ,N}(۱).$$

اکنون $E_{r_\circ,N}(۱) \neq \circ$ برقرار است. اگر قرار دهیم $k = \frac{t_\circ}{E_{r_\circ,N}(T)}$، در این صورت برای هر $x \in A$، $|x| \leq k$ را داریم یعنی A کراندار در $\mathbb{R}$ است.

عکس لم به راحتی قابل مشاهده است. این اثبات را کامل می کند. $\square$

تعریف ۹.۲.۱. سه‌تایی $(\mathbb{R}^n, \Phi, *)$ را یک فضای نرم‌دار فازی اقلیدسی می‌نامند اگر $*$ یک t-نرم پیوسته باشد و $\Phi(x,t)$ یک نرم اقلیدسی فازی باشد که به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\Phi(x,t) = \prod_{j=۱}^{n} N\left(x_j, t\right)$$

جایی که $\prod_{j=۱}^{n} a_j = a_۱ *' \cdots *' a_n$، $*T \gg *'$، $x = (x_۱, \cdots, x_n)$، $t > \circ$ و N یک نرم فازی است.

به‌عنوان مثال فرض کنید

$$\Phi(x,t) = \exp\left(\frac{\|x\|}{t}\right)^{-۱}, \quad N\left(x_j, t\right) = \exp\left(\frac{|x_j|}{t}\right)^{-۱}, * = \min .$$

در این صورت، $\Phi(x,t) = \min_j N\left(x_j, t\right)$، یا به طور هم ارز $\|x\| = \max_j |x_j|$ را داریم.

لم ۱۰.۲.۱. فرض کنید که فرضیات تعریف ۹.۲.۱ برقرار هستند. در این صورت $(\mathbb{R}^n, \Phi, *)$ یک فضای نرم‌دار فازی است.

اثبات. برای نابرابری مثلثی (N3) فرض کنید که $x, y \in X$ و $t, s > ۰$. در این صورت داریم

$$
\begin{aligned}
\Phi(x,t) * \Phi(y,s) &= \prod_{j=۱}^{n} N\left(x_j, t\right) * \prod_{j=۱}^{n} N\left(y_j, s\right) \\
&= \left(N\left(x_۱, t\right) *' \cdots *' N\left(x_n, t\right)\right) * \left(N\left(y_۱, t\right) *' \cdots *' N\left(y_n, t\right)\right) \\
&\leq \left(\left(N\left(x_۱, t\right) * N\left(y_۱, t\right)\right) *' \cdots *' \left(N\left(x_n, t\right) * N\left(y_n, t\right)\right)\right) \\
&\leq N\left(x_۱ + y_۱, t+s\right) *' \cdots *' N\left(x_n + y_n, t+s\right) \\
&= \prod_{j=۱}^{n} N\left(x_j + y_j, t+s\right) \\
&= \Phi(x+y, t+s)
\end{aligned}
$$

این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

لم ۱۱.۲.۱. فرض کنید $(\mathbb{R}^n, \Phi, *)$ یک فضای نرم دار اقلیدسی فازی و A یک زیرمجموعه نامتناهی و F-کراندار است. در این صورت A حداقل یک نقطه حدی دارد.

اثبات. فرض کنید $\left\{x^{(m)}\right\}$ یک دنباله نامتناهی در A باشد. چون A، F-کراندار است، بنابراین، $\left\{x^{(m)}\right\}_{m\geq ۱}$. در نتیجه، وجود دارد $t_\circ > ۰$ و $r_\circ \in (۰, ۱)$ به قسمی که

$$
۱ - r_\circ < \Phi\left(x, t_\circ\right)
$$

برای هر $x \in A$ که نشان می‌دهد $E_{r_\circ, \Phi}(x) \leq t_\circ$. با این وجود، داریم

$$
\begin{aligned}
E_{r_\circ, \Phi}(x) &= \inf\left\{t > ۰ : ۱ - r_\circ < \Phi(x,t)\right\} \\
&= \inf\left\{t > ۰ : ۱ - r_\circ < \prod_{j=۱}^{n} N\left(x_j, t\right)\right\} \\
&\geq \inf\left\{t > ۰ : ۱ - r_\circ < N\left(x_j, t\right)\right\} \\
&= E_{r_\circ, N}\left(x_j\right)
\end{aligned}
$$

برای هر $n \leq j \leq ۱$. بنابراین، $|x_j| \leq k$ در آن $k = \frac{t_\circ}{E_{r_\circ, N(I)}}$ است، یعنی دنباله حقیقی $\left\{x_j^{(m)}\right\}$ برای هر $j \in \{۱, \cdots, n\}$ کراندار است. بنابراین، زیردنباله $\left\{x_۱^{(m_{k_۱})}\right\}$ وجود دارد که با توجه به نرم فازی N، به $x_۱$ در A همگرا است. دنباله متناظر $\left\{x_۲^{(m_{k_۱})}\right\}$ کراندار است و بنابراین زیردنباله $\left\{x_۲^{(m_{k_۲})}\right\}$ از $\left\{x_۲^{(m_{k_۱})}\right\}$ وجود دارد که با توجه به نرم فازی N به $x_۲$ همگرا است.

با ادامه این روند، دنباله $\{x^{(m_k)}\}$ را پیدا می‌کنیم که به یک نقطه $x = (x_۱, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ همگراست. این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

لم ۱۲.۲.۱. فرض کنید $(\mathbb{R}^n, \Phi, *)$ یک فضای نرم دار اقلیدسی فازی باشد. فرض کنید

$$\{Q_۱, Q_۲, \cdots\}$$

مجموعه‌ای قابل شمارش از زیرمجموعه غیرتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد به قسمی که $Q_{k+۱} \subseteq Q_k$، هر Q_k بسته است و $Q_۱$، F-کراندار است. در این صورت، $\bigcap_{k=۱}^{\infty}$ غیر تهی و بسته است.

اثبات. با استفاده از لم فوق، اثبات مانند حالت کلاسیک پیش می‌رود (به قضیه ۳.۲۵ در [۱] مراجعه کنید). $\square$

یک گوی n بُعدی $B_x(r, t)$ را به‌عنوان یک گوی منطقی در نظر می‌گیریم اگر $x \in \mathbb{Q}^n, r_\circ \in (\circ, ۱)$ و $t \in \mathbb{Q}^+$ برقرار باشد.

قضیه ۱۳.۲.۱. فرض کنید $(\mathbb{R}^n, \Phi, *)$ یک فضای نرم دار اقلیدسی فازی است که در آن $*$، در (۲.۲.۱) صدق می‌کند. فرض کنید $G = \{A_۱, A_۲, \cdots\}$ مجموعه قابل شمارشی از گوی‌های باز منطقی n بعدی باشد. اگر $x \in \mathbb{R}^n$ و S یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ که شامل X هم می‌شود، باشد، در این صورت، $A_k \in G$ وجود دارد به قسمی که $x \in A_k \subseteq S$ برای بعضی $k \geq ۱$ برقرار است.

اثبات. ازآنجاکه $x \in S$ و S باز است، وجود دارد $r \in (\circ, ۱)$ و $t > \circ$ به قسمی‌که $B_x(r, t) \subseteq S$.

اکنون می‌توانیم $\eta \in (۰,۱)$ را به دست آوریم به قسمی که

$$۱ - r < (۱-\eta) * (۱-\eta).$$

فرض کنید $\{\xi_k\}_{k=۱}^{n}$ دنباله متناهی است به قسمی که

$$۱ - \eta < \prod_{k=۱}^{n} (۱-\xi_k).$$

و $x = (x_۱, \cdots, x_n)$ می‌باشد. در این صورت می توانیم $y = (y_۱, \cdots, y_n) \in \mathbb{Q}^n$ را به دست بیاوریم به قسمی که

$$(۱-\xi_k) < N\left(x_k - y_k, \frac{t}{۲}\right).$$

بنابراین، داریم

$$(۱-\xi_k) < N\left(x_k - y_k, \frac{t}{۲}\right).$$

و بنابراین $x \in B_y\left(\eta, \frac{t}{۲}\right)$.

اکنون ثابت می‌کنیم که $B_y\left(\eta, \frac{t}{۲}\right) \subseteq B_x(r,t)$ است. فرض کنید $z \in B_y\left(\eta, \frac{t}{۲}\right)$ باشد. در این صورت داریم

$$\Phi\left(y - z, \frac{t}{۲}\right) > ۱ - \eta$$

و بنابراین،

$$۱ - r < (۱-\eta) * (۱-\eta) \leq \Phi\left(x - y, \frac{t}{۲}\right) * \Phi\left(y - z, \frac{t}{۲}\right) \leq \Phi(x - z, t).$$

از طرف دیگر، $t_۰ \in \mathbb{Q}$ وجود دارد به قسمی که $t_۰ < \frac{t}{۲}$ و

$$x \in B_y(\eta, t_۰) \subseteq B_y\left(\eta, \frac{t}{۲}\right) \subseteq B_x(r,t) \subseteq S.$$

اکنون $B_y(\eta, t_۰) \in G$ را داریم. این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

نتیجه ۱۴.۲.۱. در یک فضای نرم دار اقلیدسی فازی $(\mathbb{R}^n, \Phi, *)$ که در آن $*$، در شرط (۲.۲.۱) صدق می‌کند، هر مجموعه بسته و F-کراندار فشرده است.

اثبات. شبیه به برهان قضیه ۳.۲۹ در [۱] است. □

نتیجه ۱۵.۲.۱. فرض کنید $(\mathbb{R}^n, \Phi, *)$ یک فضای نرم دار اقلیدسی فازی است که در آن $*$، در (۲.۲.۱) صدق می‌کند و $S \subseteq \mathbb{R}^n$. در این صورت S مجموعه‌ای فشرده است اگر و تنها اگر F-کراندار و بسته باشد.

نتیجه ۱۶.۲.۱. فضای نرم دار اقلیدسی فازی $(\mathbb{R}^n, \Phi, *)$ کامل است.

اثبات. فرض کنید $\{x_m\}$ یک دنباله کوشی در فضای نرم دار اقلیدسی فازی $(\mathbb{R}^n, \Phi, *)$ است. چون

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\Phi}\left(x_n - x_m\right) &= \inf\left\{t > ۰ : \Phi\left(x_n - x_m, t\right) > ۱ - \lambda\right\} \\ &= \inf\left\{t > ۰ : \prod_{j=۱}^{n} N\left(x_{m,j} - x_{n,j}, t\right) > ۱ - \lambda\right\} \\ &\geq \inf\left\{t > ۰ : N\left(x_{m,j} - x_{n,j}, t\right) > ۱ - \lambda\right\} \\ &= E_{\lambda,N}\left(x_{m,j} - x_{n,j}\right) = \left|x_{m,j} - x_{n,j}\right| E_{\lambda,N}(۱) \end{aligned}$$

دنباله $\{x_{m,j}\}$ برای هر $j = ۱, \cdots, n$ یک دنباله کوشی در $\mathbb{R}$ است و بنابراین، به نقطه‌ای در $x_j \in \mathbb{R}$ همگرا می‌شود. پس، از طریق لم ۱۵.۲.۲، دنباله $\{x_{m,j}\}$ در فضای نرم دار فازی $(\mathbb{R}, N, *)$ همگرا است.

اکنون، ثابت می‌کنیم که $\{x_m\}$ به نقطه‌ی $x = (x_۱, \cdots, x_n)$ همگرا می‌شود. در واقع، داریم

$$\lim_{m\to\infty} \Phi\left(x_m - x, t\right) = \lim_{m\to\infty} \prod_{j=۱}^{n} N\left(x_{m,j} - x_j, t\right) = ۱ *' \cdots *' ۱ = ۱.$$

این اثبات را کامل می کند. □

۳.۱ فضاهای نرم دار فازی غیر ارشمیدسی

منظور ما از میدان غیر ارشمیدسی یک میدان $\mathcal{K}$ با یک تابع (ارزیابی) $|\cdot|$ از $\mathcal{K}$ به $[\circ, \infty)$ است به قسمی که برای هر $r, s \in \mathcal{K}$،

۱. $|r| = \circ$ اگر و تنها اگر $r = \circ$.

۲. $|rs| = |r||s|$.

۳. $|r + s| \leq \max\{|r|, |s|\}$.

واضح است $|۱| = |-۱| = ۱$ و $|n| \leq ۱$ برای هر $n \geq ۱$ است. مقصود ما از ارزیابی بدیهی نگاشت $|\cdot|$ این است که هر چیزی غیر از صفر را ۱ و $|\circ| = \circ$ در نظر بگیریم.

فرض کنید X یک فضای برداری بر روی میدان $\mathcal{K}$ با یک ارزیابی غیر بدیهی $|\cdot|$ باشد، یعنی $a_\circ \in \mathcal{K}$ وجود دارد به قسمی که $|a_\circ|$ در $\{\circ, ۱\}$ نباشد.

مهمترین نمونه‌های فضای غیر ارشمیدسی اعداد p ای هستند. در سال ۱۸۹۷ در [۳] اعداد pای را به‌عنوان عدد نظری مشابه سری توانی در آنالیز مختلط کشف کرد. عدد اول p را مشخص کنید. برای هر عدد گویای غیر صفر x، یک عدد صحیح منحصر به فرد $n_x \in \mathbb{Z}$ به قسمی که $x = \frac{a}{b}p^{n_x}$ باشد، جایی که a و b اعداد صحیحی هستند که بر y بخش‌پذیر نیستند. بنابراین، $|x|_p := p^{-n_x}$ یک ترم غیر ارشمیدسی روی $\mathbb{Q}$ را مشخص می کند. تکمیل $\mathbb{Q}$ با توجه به متریک $d(x, y) = |x - y|_p$ با $\mathbb{Q}_p$ نشان داده می‌شود، که به آن میدان اعداد pای می‌گویند.

تابع $\|\cdot\| : X \to [\circ, \infty)$ را یک نرم غیر ارشمیدسی می نامند به شرطی که در شرایط زیر صدق کند.

(NAN1) $\|x\| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$.

(NAN2) برای هر $r \in \mathcal{K}$ و $x \in X$، $\|rx\| = |r|\|x\|$.

(NAN3) نامساوی مثلثی قوی (فوق العاده)، یعنی

$$\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

برای هر $x, y \in X$.

در این صورت $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم دار غیر ارشمیدسی نامیده می‌شود.

با توجه به این واقعیت که

$$\|x_n - x_m\| \leq \max\left\{\|x_{j+1} - x_j\| : m \leq j \leq n-1\right\}$$

برای هر $n, m \geq 1$ با $n > m$، دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در X است اگر و تنها اگر $\{x_{n+1} - x_n\}$ در یک فضای نرم دار غیر ارشمیدسی به صفر همگرا شود.

مقصود ما از یک فضای نرم دار غیر ارشمیدسی کامل فضایی است که در آن هر دنباله کوشی همگرا می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱. یک فضای نرم دار فازی غیر ارشمیدسی (که به اختصار فضای نرم دار فازی NA می‌گویند)، سه‌تایی $(X, N, *)$ است، که در آن X یک فضای خطی روی میدان غیر ارشمیدسی $\mathcal{K}$ است، $*$ یک t-نرم پیوسته است و N یک مجموعه فازی روی $X \times (0, \infty)$ است که برای هر $x, y \in X$ و $t, s > 0$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(NAN1) $N(x,t) > 0$.

(NAN2) $N(x,t) = 1$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(NAN3) $N(\alpha x, t) = N\left(x, \frac{t}{|\alpha|}\right)$، برای هر $\alpha \neq 0$.

(NAN4) $N(x,t) * N(y,s) \leq N(x+y, \max\{t,s\})$.

(NAN5) $N(x,.) : (0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ پیوسته است.

(NAN6) $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$ و $\lim_{t\to 0} N(x,t) = 0$.

به راحتی می‌توان فهمید که اگر (NAN4) برقرار باشد، آنگاه

$$N(x+y,t) \geq N(x,t) * N(y,t)$$

برقرار است.

مثال ۲.۳.۱. فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای خطی نرم دار غیر ارشمیدسی باشد. قرار دهید

$$N(x,t) = \frac{t}{t+\|x\|}$$

برای هر $x \in X$ و $t > ۰$. در این صورت (X, N, min) یک فضای نرم دار فازی غیر ارشمیدسی است.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید $(X, N, *)$ یک فضای نرم دار فازی غیر ارشمیدسی باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد.

۱. دنباله $\{x_n\}$ را همگرا می‌گویند اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\lim_{n\to\infty} N\left(x_n - x, t\right) = ۱$$

برای $t > ۰$ باشد. در این حالت نقطه x حد دنباله $\{x_n\}$ نامیده می‌شود.

۲. دنباله $\{x_n\}$ در X دنباله کوشی محسوب می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ و $t > ۰$، وجود داشته باشد $n_۰ \geq ۱$ به طوری که برای هر $n \geq n_۰$ و $p > ۰$،

$$N\left(x_{n+p} - x_n, t\right) > ۱ - \varepsilon.$$

۳. اگر هر دنباله کوشی در X همگرا باشد، آنگاه فضای نرم دار فازی، کامل نامیده می‌شود و فضای نرم دار فازی غیر ارشمیدسی $(X, N, *)$، یک فضای غیر ارشمیدسی باناخ نامیده می شود.

تذکر ۴.۳.۱ ([۴]). فرض کنید (X, N, min) یک فضای نرم دار فازی غیر ارشمیدسی باشد. در این صورت داریم

$$N\left(x_{n+p}-x_n, t\right) \geq \min \left\{N\left(x_{n+j+۱}-x_{n+j}, t\right): j=۰, ۱, ۲, \cdots, p-۱\right\}.$$

بنابراین، دنباله $\{x_n\}$ در X یک دنباله کوشی است اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ و $t > ۰$، وجود داشته باشد $n_۰ \geq ۱$، به قسمی که برای هر $n \geq n_۰$،

$$N\left(x_{n+۱}-x_n, t\right) > ۱-\varepsilon.$$

۴.۱ فضاهای ضرب داخلی فازی شهودی

در کل این بخش فرض کنید

$$\mathcal{H}(t)= \begin{cases}۱_{L^*}, & t>۰ \\ ۰_{L^*}, & t \leq ۰\end{cases}$$

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید ϕ, φ مجموعه‌های فازی از $X^۲ \times (۰, +\infty)$ به $[۰, ۱]$ باشد به طوری که $\phi(x, y, t)+\varphi(x, y, t) \leq ۱$ برای هر $x, y \in X$ و $t > ۰$ است. یک فضای ضرب داخلی فازی شهودی (به اختصار فضای IFIP) سه تایی $(X, \mathcal{F}_{\phi,\varphi}, \mathcal{T})$ است، که در آن X فضای برداری حقیقی، $\mathcal{T}$ یک نرم t–قابل نمایش پیوسته و $\mathcal{F}_{\phi,\varphi}$ مجموعه فازی شهودی روی $X^۲ \times \mathbb{R}$ است که برای هر $x, y, z \in X$ و $t \in \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(IFI1) $\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x, y, ۰) = ۰$.

(IFI2) $\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x, y, t) = \mathcal{F}_{\mu,v}(y, x, t)$.

(IFI3) $\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x, x, t) = \mathcal{H}(t)$، برای هر $t \in \mathbb{R}$، اگر و تنها اگر $x = ۰$.

(IFI4) برای هر عدد حقیقی α،

$$\mathcal{F}_{\phi, \varphi}(\alpha x, y, t)= \begin{cases}\mathcal{F}_{\phi, \varphi}\left(x, y, \frac{t}{\alpha}\right), & \alpha>۰ \\ \mathcal{H}(t), & \alpha=۰ \\ \mathcal{N}_s\left(\mathcal{F}_{\phi, \varphi}\left(x, y, \frac{t}{\alpha}\right)\right), & \alpha<۰\end{cases}$$

(IFI5) $\sup\left\{\mathcal{T}\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,z,s),\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(y,z,r)\right)\right\}=\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x+y,z,t)$.

(IFI6) $\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,y\cdot):\mathbb{R}\to[0,1]$ روی $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ پیوسته است.

(IFI7) $\lim_{t\to+\infty}\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,y,t)=1_{L^*}$.

مثال ۲.۴.۱. فرض کنید $(X,<\cdot,\cdot>)$ یک فضای ضرب داخلی عادی،

$$\mathcal{T}(a,b)=(a_1b_1,\min\{a_2+b_2,1\})$$

برای هر $a=(a_1,a_2)$ و $b=(b_1,b_2)\in L^*$ و ϕ,φ مجموعه‌های فازی در $X^2\times(0,\infty)$ باشد. تعریف کنید

$$\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,y,t)=\begin{cases}(\phi(x,y,t),\varphi(x,y,t))=\left(\frac{m|<x,y>|^{1/2}}{kt^{n/2}+m|<x,y>|^{1/2}},\frac{kt^{n/2}}{kt^{n/2}+m|<x,y>|^{1/2}}\right), & t>0,\\ 0, \quad t\le 0\end{cases}$$

برای هر $k,m,n\in\mathbb{R}^+$. در این صورت، $(X,\mathcal{F}_{\phi,\varphi},\mathcal{T})$ یک فضای IFIP است. به ویژه اگر $k=m=n=1$ باشد، آن‌گاه داریم

$$\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,y,t)=\begin{cases}(\phi(x,y,t),\varphi(x,y,t))=\left(\frac{|<x,y>|^{1/2}}{t^{1/2}+|<x,y>|^{1/2}},\frac{t^{1/2}}{t^{1/2}+|<x,y>|^{1/2}}\right), & t>0,\\ 0 \quad t\le 0\end{cases}$$

که به آن ضرب داخلی فازی شهودی القایی توسط ضرب داخلی $\langle\cdot\rangle$ و $\langle\cdot\rangle$ می‌گویند.

۱.۴.۱ ویژگی‌های اصلی و نتایج

فرض کنید $(X,\mathcal{F}_{\phi,\varphi},\mathcal{T})$ یک فضای IFIP باشد و برای هر $z\in X$، عبارت زیر را قرار می‌دهیم

$$\xi_z=\{\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,z,\cdot):x\in X\}.$$

جمع و ضرب اسکالر را روی ξ_z، برای هر $\alpha, t \in \mathbb{R}$، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \alpha \odot \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,z,t) = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(\alpha x,z,t), \\ \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,z,t) \oplus \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(y,z,t) = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x+y,z,t) \end{cases} \tag{۱.۱}$$

قضیه زیر به سادگی قابل اثبات است.

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{F}_{\phi,\uparrow}, \mathcal{T})$ یک فضای *IFIP* با نرم t-قابل نمایش پیوسته $\mathcal{T}$ باشد. در این صورت، بر اساس اعمالی که در (۱.۱) گفته شد، مجموعه ξ_z یک فضای خطی حقیقی است و ξ_z تصویر همسانی از X محسوب می‌شود.

اکنون فرض کنید $\xi = \{\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,y,\cdot) \mid x,y \in X\}$ برقرار باشد ترتیب جزئی $\leq_{L^*}$ در ξ را به صورت زیر تعیین کنید

$$\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,y,\cdot) \leq L^* \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(x',y',\cdot\right) \Longleftrightarrow \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,y,t) \leq L^* \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(x',y',t\right)$$

برای هر $t \in \mathbb{R}$ و بنابراین از طریق قرار دادن $\langle x,y \rangle = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(x,y,\cdot)$، به راحتی می‌توان دید که حاصل ضرب درونی فازی شهودی کاملا شبیه ضرب داخلی عادی است زیرا از شروط (IFI-1) تا (IFI-5) و قضیه ۳.۴.۱ تبعیت می‌کند، که طبق آن برای هر $x,y,z \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم:

(a) $< x,y >=< y,x >$.

(b) $< x,x > \geq_{L^*} \mathcal{H}$، در حالت خاص، $\langle x,x \rangle = \mathcal{H}$ اگر و تنها اگر $x = ۰_{L^*}$.

(c) $< \alpha x,y >= \alpha \odot < x,y >$.

(d) $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle \oplus \langle y,z \rangle$.

اکنون نامساوی شوارتز را در فضاهای IFIP اثبات می‌کنیم.

قضیه ۴.۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{F}_{\phi,\varphi}, \mathcal{T})$ یک فضای *IFIP* با یک نرم t-قابل نمایش پیوسته $\mathcal{T}$ با $\mathcal{T}(a,a) >_{L^*}$ باشد. در این صورت برای هر $u,v \in X$ و $t,s > ۰$، داریم

$$\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(u,v,ts) \geq_{L^*} \mathcal{T}\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u,u,t^۲\right), \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(v,v,s^۲\right)\right) \tag{۲.۱}$$

اثبات. فرض کنید $\alpha = -\frac{s}{t}$؛ یعنی $\alpha t + s = ۰$. قرار می‌دهیم

$$a = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u, u, s^{۲}\right), \quad b = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(\alpha v, u, \alpha t s), \quad c = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(\alpha v, \alpha v, \alpha^{۲} t^{۲}\right).$$

بنا به (IFI-1) و (IFI-5) داریم

$$\begin{aligned} ۰_{L^*} &= \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u + \alpha v, u + \alpha v, (\alpha t + s)^{۲}\right) \\ &\geq_{L^*} \mathcal{T}(\mathcal{T}(a, b), \mathcal{T}(b, c)) \\ &= \mathcal{T}^{۲}(a, (\mathcal{T}(b, b), c) \\ &\geq L^* \mathcal{T}(a, \mathcal{T}(b, c)). \end{aligned}$$

حال تعریف می‌کنیم

$$c = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(\alpha v, \alpha v, \alpha^{۲} t^{۲}\right) = \mathcal{N}_s\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(v, \alpha v, \alpha t^{۲}\right)\right) = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(v, v, t^{۲}\right)$$

و

$$b = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(\alpha v, u, \alpha t s) = \mathcal{N}_s\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(v, u, t s)\right).$$

با جای‌گذاری c و b در نامساوی فوق، داریم

$$\begin{aligned} ۰_{L^*} \geq_{L^*} & \mathcal{T}^{۲}\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u, u, s^{۲}\right), \mathcal{N}_s\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(v, u, t s)\right), \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(v, v, t^{۲}\right)\right) \\ =& \mathcal{T}^{۲}\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u, u, s^{۲}\right), \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(v, v, t^{۲}\right)\right), \mathcal{N}_s\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(v, u, t s)\right) \\ \geq_{L^*} & \left(\left(\phi\left(u, u, s^{۲}\right) * \phi\left(v, v, t^{۲}\right)\right) + ۱ - \phi(v, u, t s) - ۱\right. \\ & \left(\varphi\left(u, u, s^{۲}\right) \diamond \varphi\left(v, v, t^{۲}\right)\right) + ۱ - \varphi(v, u, t s) - ۱\right) \end{aligned}$$

این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

لم ۵.۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{F}_{\phi,\varphi}, \mathcal{T})$ یک فضای *IFIP* با یک نرم t-قابل نمایش پیوسته $\mathcal{T}$ باشد. در این صورت، $\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(p, q, \cdot)$ نسبت به t برای هر $p, q \in X$، غیر نزولی است.

اثبات. فرض کنید $t < s$ باشد. در این صورت $k = s - t > 0$ و

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(p,q,t) &= \mathcal{T}\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(p,q,t), 1_{L^*}\right) \\
&= \mathcal{T}\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(p,q,t), \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(0,q,k)\right) \\
&\leq L^* \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(p,q,t+k) \\
&= \mathcal{F}_{\phi,\varphi}(p,q,s)
\end{aligned}$$

این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

قضیه ۶.۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{F}_{\phi,\varphi}, \mathcal{T})$ یک فضای *IFIP* با نرم t–قابل نمایش پیوسته $\mathcal{T}$ با $\mathcal{T}(a,a) >_{L^*}$ باشد. در این صورت، X یک فضای نرم دار فازی شهودی حقیقی (فضای *IFN*) است.

اثبات. تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{P}_{\phi,\varphi}(x,t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(x,x,t^2\right), & t > 0 \end{cases}$$

اکنون نشان می‌دهیم که $\mathcal{P}_{\phi,\varphi}$ در شروط تعریف ۱.۴.۱ صدق می‌کند. برای هر $x, y \in X, t_1 > 0$ و $t_2 > 0$، با فرض

$$a = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(x,x,t_1^2\right), \quad b = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(x,y,t_1 t_2\right), \quad c = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(y,y,t_2^2\right).$$

از (IFI-5) و نامساوی شوارتز، داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\phi,\varphi}\left(x+y, t_1+t_2\right) &= \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(x+y, x+y, (t_1+t_2)^2\right) \\
&\geq L^* \mathcal{T}(\mathcal{T}(a,b), \mathcal{T}(b,c)) = \mathcal{T}^2(a,c,(\mathcal{T}(b,b)) \\
&\geq L^* \mathcal{T}(a, \mathcal{T}(c,b)) = \mathcal{T}(\mathcal{T}(a,b),c) \\
&\geq L^* \mathcal{T}(\mathcal{T}(a,c), \mathcal{T}(a,c)) \geq_{L^*} \mathcal{T}(a,c) \\
&= \mathcal{T}\left(\mathcal{P}_{\phi,\varphi}\left(x,t_1\right), \mathcal{P}_{\phi,\varphi}\left(x,t_2\right)\right)
\end{aligned}$$

سایر شروط را می توان با استفاده از (IFI6) و (IFI-7) مشاهده کرد که این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

همانطور که در [۵، ۶] اشاره شد، هر فضای IFI فضای هاوسدورف است. زیرا هر فضای IFIP یک فضای IFI (حقیقی) است و در توپولوژی τ_F از طریق خانواده همسایگی‌ها القاء می شود:

$$\{\mathcal{U}_p(\varepsilon,\lambda), p\in X, \varepsilon>۰, ۰<\lambda<۱\}$$

که در آن $\mathcal{U}_p(\varepsilon,\lambda)=\{x\in X:\mathcal{P}(x-p,\varepsilon)>L^*\mathcal{N}_s(\lambda)\}$.

فرض کنید $(X,\mathcal{F}_{\phi,\varphi},\mathcal{T})$ یک فضای IFIP باشد که در شروط قضیه ۶.۴.۱ صدق می‌کند. گفته می‌شود که دنباله $\{x_n\}$ در X به نقطه $x\in X$، τ_F-همگرا است (و نوشته می‌شود $x_n\xrightarrow{\tau_F}x$)، اگر برای هر $\varepsilon>۰$ و $۰<\lambda<۱$، وجود داشته باشد یک عدد صحیح مثبت $N_۰=N_۰(\varepsilon,\lambda)$ به قسمی که

$$\mathcal{P}\left(x_n-x,\varepsilon\right)>L^*\mathcal{N}_s(\lambda)$$

زمانی که $n\geq N_۰$ باشد.

قضیه ۷.۴.۱. فرض کنید $(X,\mathcal{F}_{\phi,\varphi},\mathcal{T})$ یک فضای *IFIP* باشد که در شروط قضیه ۶.۴.۱ صدق می‌کند. فرض کنیم که $\{u_n\}$ یک دنباله در X باشد به طوری که $u_n\overset{\tau_F}{\to}۰$. در این صورت برای هر $v\in X$، $\epsilon>۰$ و $۰<\lambda<۱$، $N=N(\epsilon,\lambda)$ وجود دارد به طوری که

$$\mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u_n,u_n,(\varepsilon/t_۰)^۲\right)>_{L^*}\mathcal{N}_s(a)$$

زمانی که $n\geq N$.

اثبات. برای هر $۰<\lambda<۱$، می‌توانیم $a,b\in(۰,۱)$ پیدا کنیم به طوری که

$$\mathcal{T}\left(\mathcal{N}_s(a),\mathcal{N}_s(b)>L^*\mathcal{N}_s(\lambda)\right. \tag{۳.۱}$$

طبق تعریف فضای IFIP و لم ۵.۴.۱، وجود دارد $t_۰>۰$ به طوری که

$$\mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(v,v,t_۰^۲\right)>_{L^*}\mathcal{N}_s(b).$$

چون $u_n \overset{\tau_F}{\to} \circ$، برای هر عدد a، وجود دارد $n_\circ$ به طوری که

$$\mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u_n, u_n, (\varepsilon/t_\circ)^{۲}\right) >_{L^*} \mathcal{N}_s(a)$$

هر وقت $n \geq n_\circ$ باشد. بر اساس نابرابری شوارتز، برای هر $v \in X$،

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u_n, v, \varepsilon\right) &= \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u_n, v, (\varepsilon/t_\circ)\, t_\circ\right)\\ &\geq_{L^*} \mathcal{T}\left(\mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u_n, u_n, (\varepsilon/t_\circ)^{۲}\right), \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(v, v, t_\circ^{۲}\right)\right)\\ &\geq_{L^*} \mathcal{T}\left(\mathcal{N}_s(a), \mathcal{N}_s(b)\right)\\ &>_{L^*} \mathcal{N}_s(\lambda)\end{aligned}$$

□

تعریف ۸.۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{F}_{\phi,\varphi}, \mathcal{T})$ یک فضای IFIP باشد و $\{u_n\}$ دنباله‌ای در X باشد به طوری که $u_n \xrightarrow{\tau T} u_\circ \in X$. در این صورت، برای هر $v \in X$، $\mathcal{F}_{\phi,\varphi}$ IF-پیوسته نامیده می‌شود اگر

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u_n, v, t\right) = \mathcal{F}_{\phi,\varphi}\left(u_\circ, v, t\right).$$

۲.۴.۱ تعامد

اکنون مفهوم تعامد در یک فضای IFIP را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۹.۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{F}_{\phi,\varphi}, \mathcal{T})$ یک فضای IFIP باشد. گفته می‌شود نقاط $u, v \in X$ متعامد هستند اگر

$$\mathcal{F}_{\phi,\varphi}(u, v, t) = \mathcal{H}(t)$$

برای هر $t \in \mathbb{R}$. متعامد بودن $u, v \in X$ با نماد $u \perp v$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۱۰.۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{F}_{\phi,\varphi}, \mathcal{T})$ یک فضای IFIP باشد. تعامد ویژگی‌های زیر را دارد:

(O1) برای هر $u \in X$، $u \perp \circ$.

(O2) اگر $v \perp u$، آن‌گاه $u \perp v$.

(O3) اگر $u \perp u$، آن‌گاه $u = \circ$.

(O4) اگر برای هر $i = ۱, ۲, \cdots, n$ داشته باشیم $u_i \perp u$، آن‌گاه $\left(\sum_{i=۱}^{n} u_i\right) \perp u$.

(O5) اگر $v \perp u$، آن‌گاه برای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم $av \perp u$.

(O6) اگر $\mathcal{F}_{\phi,\varphi}$، IF-پیوسته باشد، $u_n \xrightarrow{\tau J} u$ و برای هر $n = ۱, ۲, \cdots$ داشته باشیم $u_n \perp v$، آن‌گاه $u \perp v$.

مراجع

[1] T.M. Apostol, Mathematical Analysis, 2nd edn. (Addison-Wesley, Massachusetts, 1975)

[2] Y. J. Cho, T. M. Rassias, R. Saadati, Fuzzy Operator Theory in Mathematical Analysis, (Springer International Publishing 2018)

[3] K. Hensel, Über eine neue Begrundung der Theorie der algebraischen Zahlen. Jahres. Deutsch. Math. Verein 6, 83–88 (1897)

[4] A.K. Mirmostafaee, M.S. Moslehian, Fuzzy stability of additive mappings in non- Archimedean fuzzy normed spaces. Fuzzy Sets Syst. 160, 1643–1652 (2009)

[5] J.H. Park, Intuitionistic fuzzy metric spaces. Chaos Solitons Fractals 22, 1039–1046 (2004)

[6] R. Saadati, J.H. Park, On the intuitionistic fuzzy topological spaces. Chaos Solitons Fractals 27, 331–344 (2006).