
بسم الله الرحمن الرحيم

بررسی بعدهایی از یک مدول و مفاهیم وابسته به آن‌ها

محمد ماسچی زاده

اساتید راهنما:

دکتر احمد حلالی
دکتر علی‌رضا آل هفتتن

خرداد ماه ۹۹

فهرست مطالب

تذکر مهم

در سرتاسر این ارائه، تمام حلقه‌ها یکدار و تمام مدول‌ها یکانی و چپ در نظر گرفته شده‌اند.

مدول‌های متناهی تولید شده و متناهی نشانده شده

تعریف ۱

R–مدول M را **متناهی تولید شده** یا **متناهی مولد** (به اختصار، .f.g) می‌نامیم، اگر برای هر خانواده‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M که $\sum_{i\in I} M_i = M$، زیرمجموعه‌ی متناهی J از I وجود داشته باشد به طوری که $\sum_{j\in J} M_j = M$.

تعریف ۲

R–مدول M را **متناهی نشانده شده** یا **متناهی هم تولید شده** (به اختصار، .f.e) می‌نامیم، اگر برای هر خانواده‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M که $\bigcap_{i\in I} M_i = (0)$، زیرمجموعه‌ی متناهی J از I وجود داشته باشد به طوری که $\bigcap_{j\in J} M_j = (0)$.

مثال ۳

واضح است که گروه آبلی $\mathbb{Z}$ متناهی مولد است ولی $\mathbb{Z}$ متناهی نشانده شده نیست. برعکس، می‌توان نشان داد $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$–مدول .f.e است، اما .f.g نیست.

مدول‌های متناهی تولید شده و متناهی نشانده شده

تعریف ۱

R-مدول M را **متناهی تولید شده** یا **متناهی مولد** (به اختصار، .f.g) می‌نامیم، اگر برای هر خانواده‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M که $\sum_{i\in I} M_i = M$، زیرمجموعه‌ی متناهی J از I وجود داشته باشد به طوری که $\sum_{j\in J} M_j = M$.

تعریف ۲

R-مدول M را **متناهی نشانده شده** یا **متناهی هم تولید شده** (به اختصار، .f.e) می‌نامیم، اگر برای هر خانواده‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M که $\bigcap_{i\in I} M_i = (0)$، زیرمجموعه‌ی متناهی J از I وجود داشته باشد به طوری که $\bigcap_{j\in J} M_j = (0)$.

مثال ۳

واضح است که گروه آبلی $\mathbb{Z}$ متناهی مولد است ولی $\mathbb{Z}$ متناهی نشانده شده نیست. برعکس، می‌توان نشان داد $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول .f.e است، اما .f.g نیست.

مدول‌های متناهی تولید شده و متناهی نشانده شده

تعریف ۱

R-مدول M را **متناهی تولید شده** یا **متناهی مولد** (به اختصار، f.g.) می‌نامیم، اگر برای هر خانواده‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M که $\sum_{i\in I} M_i = M$، زیرمجموعه‌ی متناهی J از I وجود داشته باشد به طوری که $\sum_{j\in J} M_j = M$.

تعریف ۲

R-مدول M را **متناهی نشانده شده** یا **متناهی هم تولید شده** (به اختصار، f.e.) می‌نامیم، اگر برای هر خانواده‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M که $\bigcap_{i\in I} M_i = (0)$، زیرمجموعه‌ی متناهی J از I وجود داشته باشد به طوری که $\bigcap_{j\in J} M_j = (0)$.

مثال ۳

واضح است که گروه آبلی $\mathbb{Z}$ متناهی مولد است ولی $\mathbb{Z}$ متناهی نشانده شده نیست. برعکس، می‌توان نشان داد $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول f.e. است، اما f.g. نیست.

قضیه ۴

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. در این‌صورت:

۱. اگر M متناهی مولد و L زیرمدول سره‌ای از M باشد، آنگاه زیرمدول ماکسیمالی از M وجود دارد که شامل L است.
۲. اگر M، $f.g.$ باشد، آن‌گاه M دارای زیرمدول ماکسیمال است.
۳. اگر M، $f.e.$ باشد، آن‌گاه M دارای زیرمدول مینیمال است.

مدول‌های نوتری و آرتینی

تعریف ۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. گوییم M دارای **شرط زنجیر صعودی** (به اختصار، ACC) روی زیرمدول‌های خود است، اگر برای هر زنجیر صعودی $N_۱ \subseteq N_۲ \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \geq k$ داشته باشیم $N_i = N_k$. M را یک **مدول نوتری** می‌نامیم، هرگاه دارای ACC روی زیرمدول‌های خود باشد.

تعریف ۶

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. گوییم M دارای **شرط زنجیر نزولی** (به اختصار، DCC) روی زیرمدول‌های خود است، اگر برای هر زنجیر نزولی $N_۱ \supseteq N_۲ \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \geq k$ داشته باشیم $N_i = N_k$. M را یک **مدول آرتینی** می‌نامیم، هرگاه دارای DCC روی زیرمدول‌های خود باشد.

مدول‌های نوتری و آرتینی

تعریف ۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. گوییم M دارای **شرط زنجیر صعودی** (به اختصار، ACC) روی زیرمدول‌های خود است، اگر برای هر زنجیر صعودی $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \geq k$ داشته باشیم $N_i = N_k$. M را یک **مدول نوتری** می‌نامیم، هرگاه دارای ACC روی زیرمدول‌های خود باشد.

تعریف ۶

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. گوییم M دارای **شرط زنجیر نزولی** (به اختصار، DCC) روی زیرمدول‌های خود است، اگر برای هر زنجیر نزولی $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i \geq k$ داشته باشیم $N_i = N_k$. M را یک **مدول آرتینی** می‌نامیم، هرگاه دارای DCC روی زیرمدول‌های خود باشد.

تذکر ۷

- حلقه‌ی R را نوتری چپ (آرتینی چپ) می‌نامیم، هرگاه به عنوان یک R–مدول نوتری (آرتینی) باشد.
- طبق قضیه‌ی هاپکینز–لویتزکی هر حلقه‌ی آرتینی، نوتری است ولی مثال زیر نشان می‌دهد هر مدول آرتینی، نوتری نیست.

مثال ۸

به سادگی می‌توان نشان داد که $\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$–مدول نوتری است که آرتینی نیست و برعکس $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$–مدول آرتینی است که نوتری نیست.

تذکر ۷

- حلقه‌ی R را نوتری چپ (آرتینی چپ) می‌نامیم، هرگاه به عنوان یک R-مدول نوتری (آرتینی) باشد.
- طبق قضیه‌ی هاپکینز-لویتزکی هر حلقه‌ی آرتینی، نوتری است ولی مثال زیر نشان می‌دهد هر مدول آرتینی، نوتری نیست.

مثال ۸

به سادگی می‌توان نشان داد که $\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول نوتری است که آرتینی نیست و برعکس $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول آرتینی است که نوتری نیست.

قضیه ۹

برای R-مدول M شرایط زیر معادل هستند:

1. M نوتری است.
2. هر خانواده‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضو ماکسیمال است.
3. هر زیرمدول از M، $f.g.$ است.

قضیه ۱۰

برای R-مدول M شرایط زیر معادل هستند:

1. M آرتینی است.
2. هر خانواده‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضو مینیمال است.
3. هر مدول خارج قسمتی از M، $f.e.$ است.

قضیه ۹

برای R-مدول M شرایط زیر معادل هستند:

۱. M نوتری است.
۲. هر خانواده‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضو ماکسیمال است.
۳. هر زیرمدول از M، $f.g.$ است.

قضیه ۱۰

برای R-مدول M شرایط زیر معادل هستند:

۱. M آرتینی است.
۲. هر خانواده‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضو مینیمال است.
۳. هر مدول خارج قسمتی از M، $f.e.$ است.

قضیه ۱۱

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. در این صورت M نوتری (آرتینی) است اگر وتنها اگر N و $\frac{M}{N}$ نوتری (آرتینی) باشند.

گزاره ۱۲

اگر M مدولی متناهی مولد روی یک حلقه‌ی نوتری (آرتینی) چپ باشد، آن‌گاه M نیز یک مدول نوتری (آرتینی) است.

قضیه ۱۱

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. در این صورت M نوتری (آرتینی) است اگر وتنها اگر N و $\frac{M}{N}$ نوتری (آرتینی) باشند.

گزاره ۱۲

اگر M مدولی متناهی مولد روی یک حلقه‌ی نوتری (آرتینی) چپ باشد، آنگاه M نیز یک مدول نوتری (آرتینی) است.

زیرمدول‌های اساسی و کوچک

تعریف ۱۳

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. زیرمدول N از M را یک **زیرمدول اساسی** در M نامیم و با نماد $N \leq_e M$ نمایش می‌دهیم، اگر برای هر زیرمدول ناصفر مانند K از M داشته باشیم $N \cap K \neq (0)$. به عبارت دیگر، برای هر زیرمدول K از M، $(0) = N \cap K$ نتیجه دهد $K = (0)$. اگر $N \leq_e M$، آن‌گاه M را یک **توسیع اساسی** از N می‌نامیم.

تعریف ۱۴

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. زیرمدول N از M را یک **زیرمدول کوچک** در M نامیم و با نماد $N \ll M$ نمایش می‌دهیم، اگر به ازای هر زیرمدول سره‌ی K از M داشته باشیم $N + K \neq M$. به عبارت دیگر، به ازای هر زیرمدول K از M، $N + K = M$ نتیجه دهد $K = M$. اگر $N \ll M$، آن‌گاه M را یک **پوش کوچک** از $\frac{M}{N}$ می‌نامیم.

زیرمدول‌های اساسی و کوچک

تعریف ۱۳

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. زیرمدول N از M را یک **زیرمدول اساسی** در M نامیم و با نماد $N \leq_e M$ نمایش می‌دهیم، اگر برای هر زیرمدول ناصفر مانند K از M داشته باشیم $N \cap K \neq (0)$. به عبارت دیگر، برای هر زیرمدول K از M، $N \cap K = (0)$ نتیجه دهد $K = (0)$. اگر $N \leq_e M$، آن‌گاه M را یک **توسیع اساسی** از N می‌نامیم.

تعریف ۱۴

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. زیرمدول N از M را یک **زیرمدول کوچک** در M نامیم و با نماد $N \ll M$ نمایش می‌دهیم، اگر به ازای هر زیرمدول سره‌ی K از M داشته باشیم $N + K \neq M$. به عبارت دیگر، به ازای هر زیرمدول K از M، $N + K = M$ نتیجه دهد $K = M$. اگر $N \ll M$، آن‌گاه M را یک **پوش کوچک** از $\frac{M}{N}$ می‌نامیم.

مثال ۱۵

۱. اگر I یک ایده‌آل ناصفر در دامنه‌ی صحیح R باشد، آن‌گاه I یک زیرمدول اساسی از R–مدول R است.
۲. اگر I یک ایده‌آل چپ پوچ‌توان در حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه I یک زیرمدول کوچک از R–مدول چپ R است.

تذکر ۱۶

ممکن است یک زیرمدول هم اساسی باشد و هم کوچک، برای مثال به راحتی می‌توان نشان داد هر زیرمدول نابدیهی از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ این چنین است.

مثال ۱۵

1. اگر I یک ایده‌آل ناصفر در دامنه‌ی صحیح R باشد، آن‌گاه I یک زیرمدول اساسی از R-مدول R است.
2. اگر I یک ایده‌آل چپ پوچ‌توان در حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه I یک زیرمدول کوچک از R-مدول چپ R است.

تذکر ۱۶

ممکن است یک زیرمدول هم اساسی باشد و هم کوچک، برای مثال به راحتی می‌توان نشان داد هر زیرمدول نابدیهی از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ این چنین است.

لم ۱۷ (بعضی از خواص زیرمدول‌های اساسی)

فرض کنیم M و M' دو R-مدول و K، N و H زیرمدول‌هایی از M باشند.

1. اگر $N \subseteq K$، آن‌گاه $K \leq_e M$ اگر وتنها اگر $N \leq_e K$ و $M \leq_e N$.
2. اگر $N' \leq_e N$ و $K' \leq_e K$، آن‌گاه $N' \cap K' \leq_e N \cap K$.
3. $H \cap K \leq_e M$ اگر وتنها اگر $H \leq_e M$ و $K \leq_e M$.
4. اگر $N \leq_e M$، آن‌گاه $N \cap K \leq_e K$.
5. اگر $K \subseteq N$ و $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$، آن‌گاه $N \leq_e M$.
6. اگر $f : M' \to M$ یک همریختی باشد و $N \leq_e M$، آن‌گاه $f^{-1}(N) \leq_e M'$.

لم ۱۸ (بعضی از خواص زیرمدول‌های کوچک)

فرض کنیم M و M' دو R-مدول و K، N و H زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت:

1. اگر $N \subseteq K$، آن‌گاه $M \ll N$ اگر وتنها اگر $M \ll K$ و $\frac{M}{K} \ll \frac{N}{K}$.
2. $M \ll H + K$ اگر وتنها اگر $M \ll H$ و $M \ll K$.
3. اگر $f : M \to M'$ یک همریختی باشد و $M \ll N$، آن‌گاه $M' \ll f(N)$.
4. اگر $N \ll K$، آن‌گاه $M \ll K$.
5. اگر N جمعوند مستقیم M باشد، آن‌گاه $M \ll K$ اگر وتنها اگر $N \ll K$.
6. اگر $M \ll N$، آن‌گاه M متناهی مولد است اگر وتنها اگر $\frac{M}{N}$ مولد باشد.

خانواده‌های مستقل و هم‌مستقل از زیرمدول‌ها

تعریف ۱۹

فرض کنیم M یک R-مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های ناصفر M باشد. اگر به‌ازای هر زیرمجموعه‌ی متناهی J از I و برای هر $i \in I \setminus J$ داشته باشیم $\left(\sum_{j\in J} M_j\right) \cap M_i = (0)$، آن‌گاه $\{M_i\}_{i\in I}$ را یک **خانواده‌ی مستقل** و مجموع $\sum_{i\in I} M_i$ را **مجموع مستقیم** زیرمدول‌های M می‌نامیم و آن را با $\bigoplus_{i\in I} M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. خانواده‌ی ناتهی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های سره‌ی M را یک **خانواده‌ی هم‌مستقل** می‌نامیم، اگر برای هر $i \in I$ و هر زیر مجموعه‌ی متناهی J از $I \setminus \{i\}$ داشته باشیم $M_i + \bigcap_{j\in J} M_j = M$. همچنین قرارداد می‌کنیم که اشتراک روی مجموعه‌ی تهی $(J = \varnothing)$، برابر M است.

خانواده‌های مستقل و هم‌مستقل از زیرمدول‌ها

تعریف ۱۹

فرض کنیم M یک R–مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های ناصفر M باشد. اگر به‌ازای هر زیرمجموعه‌ی متناهی J از I و برای هر $i \in I \setminus J$ داشته باشیم $(\circ) = \left(\sum_{j\in J} M_j\right) \cap M_i$، آن‌گاه $\{M_i\}_{i\in I}$ را یک **خانواده‌ی مستقل** و مجموع $\sum_{i\in I} M_i$ را **مجموع مستقیم** زیرمدول‌های M می‌نامیم و آن را با $\bigoplus_{i\in I} M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۰

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. خانواده‌ی ناتهی $\{M_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های سره‌ی M را یک **خانواده‌ی هم‌مستقل** می‌نامیم، اگر برای هر $i \in I$ و هر زیر مجموعه‌ی متناهی J از $I \setminus \{i\}$ داشته باشیم $M = M_i + \bigcap_{j\in J} M_j$. همچنین قرارداد می‌کنیم که اشتراک روی مجموعه‌ی تهی $(J = \varnothing)$، برابر M است.

زیرمدول‌های مکمل و متمم

تعریف ۲۱

فرض کنیم M یک R–مدول و N زیرمدولی از آن باشد. با استفاده از لم زرن می‌توان نشان داد زیرمدول K از M وجود دارد به طوری که $K \cap N = (0)$ و K نسبت به این خاصیت ماکسیمال است. در این صورت K را **مکملِ** N در M می‌نامیم. زیرمدول P از M را **زیرمدول مکمل** می‌نامیم، اگر مکمل یک زیرمدول از M باشد.

لم ۲۲

فرض کنیم M یک R–مدول ، $N \leq M$ و A مکمل N در M باشد. در این‌صورت $N \oplus A \leq_e M$.

زیرمدول‌های مکمل و متمم

تعریف ۲۱

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. با استفاده از لم زرن می‌توان نشان داد زیرمدول K از M وجود دارد به طوری که $K \cap N = (0)$ و K نسبت به این خاصیت ماکسیمال است. در این صورت K را **مکملِ** N در M می‌نامیم. زیرمدول P از M را **زیرمدول مکمل** می‌نامیم، اگر مکمل یک زیرمدول از M باشد.

لم ۲۲

فرض کنیم M یک R-مدول، $N \leq M$ و A مکمل N در M باشد. در این‌صورت $N \oplus A \leq_e M$.

تعریف ۲۳

فرض کنیم N و L زیرمدول‌هایی از R-مدول M باشند. N را متممِ L در M می‌نامیم، اگر $M = L + N$ و N نسبت به این خاصیت مینیمال باشد. همچنین زیرمدول K از M را **زیرمدول متمم** می‌گوییم، اگر متممِ یک زیرمدول از M باشد.

لم ۲۴

فرض کنیم M یک R-مدول و N و L دو زیرمدول از M باشند. در این صورت N متممِ L در M است اگر وتنها اگر $M = L + N$ و $N \cap L \ll N$.

تذکر ۲۵

زیر مدول مکمل در یک R-مدول دلخواه همیشه وجود دارد ولی دوگان آن، زیرمدول متمم این گونه نیست و لزوماً وجود ندارد. برای مثال، هیچ زیرمدول سره‌ی ناصفری از $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$، متمم نیست.

تعریف ۲۳

فرض کنیم N و L زیرمدول‌هایی از R-مدول M باشند. N را متممِ L در M می‌نامیم، اگر $M = N + L$ و N نسبت به این خاصیت مینیمال باشد. همچنین زیرمدول K از M را **زیرمدول متمم** می‌گوییم، اگر متممِ یک زیرمدول از M باشد.

لم ۲۴

فرض کنیم M یک R-مدول و N و L دو زیرمدول از M باشند. در این صورت N متممِ L در M است اگر وتنها اگر $M = N + L$ و $N \cap L \ll N$.

تذکر ۲۵

زیر مدول مکمل در یک R-مدول دلخواه همیشه وجود دارد ولی دوگان آن، زیرمدول متمم این گونه نیست و لزوماً وجود ندارد. برای مثال، هیچ زیرمدول سره‌ی ناصفری از $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$، متمم نیست.

تعریف ۲۳

فرض کنیم N و L زیرمدول‌هایی از R-مدول M باشند. N را متممِ L در M می‌نامیم، اگر $M = N + L$ و N نسبت به این خاصیت مینیمال باشد. همچنین زیرمدول K از M را **زیرمدول متمم** می‌گوییم، اگر متممِ یک زیرمدول از M باشد.

لم ۲۴

فرض کنیم M یک R-مدول و N و L دو زیرمدول از M باشند. در این صورت N متممِ L در M است اگر وتنها اگر $M = N + L$ و $N \cap L \ll N$.

تذکر ۲۵

زیر مدول مکمل در یک R-مدول دلخواه همیشه وجود دارد ولی دوگان آن، زیرمدول متمم این گونه نیست و لزوماً وجود ندارد. برای مثال، هیچ زیرمدول سره‌ی ناصفری از $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$، متمم نیست.

مدول‌های ساده و نیم‌ساده

تعریف ۲۶

R–مدول ناصفر M را **ساده** می‌نامند، هرگاه (0) و M تنها زیرمدول‌های M باشند.

تعریف ۲۷

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. زیرمدول N از M را یک **جمعوند مستقیم** M می‌نامیم، اگر زیرمدولی مانند K از M وجود داشته باشد به طوری که $M = N \oplus K$.

تعریف ۲۸

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. M را **نیم‌ساده** می‌نامیم، اگر هر زیرمدول از M یک جمعوند مستقیم از M باشد. یعنی، به ازای هر زیرمدول N از M، زیرمدولی مانند K از M موجود باشد که $M = N \oplus K$.

مدول‌های ساده و نیم‌ساده

تعریف ۲۶

R–مدول ناصفر M را **ساده** می‌نامند، هرگاه (0) و M تنها زیرمدول‌های M باشند.

تعریف ۲۷

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. زیرمدول N از M را یک **جمعوند مستقیم** M می‌نامیم، اگر زیرمدولی مانند K از M وجود داشته باشد به طوری که $M = K \oplus N$.

تعریف ۲۸

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. M را **نیم‌ساده** می‌نامیم، اگر هر زیرمدول از M یک جمعوند مستقیم از M باشد. یعنی، به ازای هر زیرمدول N از M، زیرمدولی مانند K از M موجود باشد که $M = N \oplus K$.

مدول‌های ساده و نیم‌ساده

تعریف ۲۶

R-مدول ناصفر M را **ساده** می‌نامند، هرگاه (0) و M تنها زیرمدول‌های M باشند.

تعریف ۲۷

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. زیرمدول N از M را یک **جمعوند مستقیم** M می‌نامیم، اگر زیرمدولی مانند K از M وجود داشته باشد به طوری که $M = K \oplus N$.

تعریف ۲۸

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. M را **نیم‌ساده** می‌نامیم، اگر هر زیرمدول از M یک جمعوند مستقیم از M باشد. یعنی، به ازای هر زیرمدول N از M، زیرمدولی مانند K از M موجود باشد که $M = N \oplus K$.

مثال ۲۹

1. فرض کنیم p یک عدد اول باشد. می‌دانیم $\mathbb{Z}_p \cong \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$، در نتیجه $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$–مدول است که زیرمدول‌های آن دقیقا همان ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_p$ هستند. واضح است که $\mathbb{Z}_p$ زیرمدول غیر بدیهی ندارد، لذا $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$–مدول ساده است.
2. هر مدول ساده، نیم‌ساده است. همچنین، مدول (۰) که ساده نیست، نیم‌ساده است.

لم ۳۰

فرض کنیم M یک R–مدول نیم‌ساده باشد. در این صورت، هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمتی از M نیز نیم‌ساده است.

گزاره ۳۱

فرض کنیم M یک R–مدول نیم‌ساده و ناصفر باشد. در این صورت، M شامل زیرمدولی ساده است.

مثال ۲۹

۱. فرض کنیم p یک عدد اول باشد. می‌دانیم $\mathbb{Z}_p \cong \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$، در نتیجه $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$–مدول است که زیرمدول‌های آن دقیقا همان ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_p$ هستند. واضح است که $\mathbb{Z}_p$ زیرمدول غیر بدیهی ندارد، لذا $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$–مدول ساده است.
۲. هر مدول ساده، نیم‌ساده است. هم‌چنین، مدول $(\circ)$ که ساده نیست، نیم‌ساده است.

لم ۳۰

فرض کنیم M یک R–مدول نیم‌ساده باشد. در این صورت، هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمتی از M نیز نیم‌ساده است.

گزاره ۳۱

فرض کنیم M یک R–مدول نیم‌ساده و ناصفر باشد. در این صورت، M شامل زیرمدولی ساده است.

مثال ۲۹

1. فرض کنیم p یک عدد اول باشد. می‌دانیم $\mathbb{Z}_p \cong \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$، در نتیجه $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$–مدول است که زیرمدول‌های آن دقیقا همان ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_p$ هستند. واضح است که $\mathbb{Z}_p$ زیرمدول غیر بدیهی ندارد، لذا $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$–مدول ساده است.
2. هر مدول ساده، نیم‌ساده است. هم‌چنین، مدول $(\circ)$ که ساده نیست، نیم‌ساده است.

لم ۳۰

فرض کنیم M یک R–مدول نیم‌ساده باشد. در این صورت، هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمتی از M نیز نیم‌ساده است.

گزاره ۳۱

فرض کنیم M یک R–مدول نیم‌ساده و ناصفر باشد. در این صورت، M شامل زیرمدولی ساده است.

مثال ۲۹

۱. فرض کنیم p یک عدد اول باشد. می‌دانیم $\mathbb{Z}_p \cong \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$، در نتیجه $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$–مدول است که زیرمدول‌های آن دقیقا همان ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_p$ هستند. واضح است که $\mathbb{Z}_p$ زیرمدول غیر بدیهی ندارد، لذا $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$–مدول ساده است.
۲. هر مدول ساده، نیم‌ساده است. همچنین، مدول $(\circ)$ که ساده نیست، نیم‌ساده است.

لم ۳۰

فرض کنیم M یک R–مدول نیم‌ساده باشد. در این صورت، هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمتی از M نیز نیم‌ساده است.

گزاره ۳۱

فرض کنیم M یک R–مدول نیم‌ساده و ناصفر باشد. در این صورت، M شامل زیرمدولی ساده است.

قضیه ۳۲

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.

۱. M مجموعی از زیرمدول‌های ساده‌ی خود است.
۲. M مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های ساده‌ی خود است.
۳. M نیم‌ساده است.

تعریف ۳۳

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. مجموع زیرمدول‌های ساده (مینیمال) M را **ساکل** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Soc}(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۴

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال M را **رادیکال** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Rad}(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت:

$$Soc(M) = \sum_{N \in \mathrm{Min}(M)} N = \bigcap_{K \leq_e M} K$$

و

$$Rad(M) = \bigcap_{L \in \mathrm{Max}(M)} L = \sum_{P \ll M} P.$$

تعریف ۳۳

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. مجموع زیرمدول‌های ساده (مینیمال) M را **ساکل** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Soc}(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۴

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال M را **رادیکال** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Rad}(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت:

$$Soc(M)=\sum_{N\in \mathrm{Min}(M)} N=\bigcap_{K\leq_e M} K$$

و

$$Rad(M)=\bigcap_{L\in \mathrm{Max}(M)} L=\sum_{P\ll M} P.$$

تعریف ۳۳

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. مجموع زیرمدول‌های ساده (مینیمال) M را **ساکل** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Soc}(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۴

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال M را **رادیکال** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Rad}(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت:

$$Soc(M) = \sum_{N \in \mathrm{Min}(M)} N = \bigcap_{K \leq_e M} K$$

و

$$Rad(M) = \bigcap_{L \in \mathrm{Max}(M)} L = \sum_{P \ll M} P.$$

تعریف ۳۳

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. مجموع زیرمدول‌های ساده (مینیمال) M را **ساکل** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Soc}(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۴

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال M را **رادیکال** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Rad}(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت:

$$Soc(M) = \sum_{N\in \mathrm{Min}(M)} N = \bigcap_{K\leq_e M} K$$

و

$$Rad(M) = \bigcap_{L\in \mathrm{Max}(M)} L = \sum_{P\ll M} P.$$

تعریف ۳۳

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. مجموع زیرمدول‌های ساده (مینیمال) M را **ساکل** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Soc}(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۴

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال M را **رادیکال** M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{Rad}(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت:

$$Soc(M) = \sum_{N\in \mathrm{Min}(M)} N = \bigcap_{K\leq_e M} K$$

و

$$Rad(M) = \bigcap_{L\in \mathrm{Max}(M)} L = \sum_{P\ll M} P.$$

تجزیه مدول‌ها و قضیه‌ی کرول اشمیت

تعریف ۳۶

فرض کنیم M یک R–مدول ناصفر باشد. M را **تجزیه ناپذیر** نامیم، هرگاه نتوان M را به صورت جمع مستقیم دو زیرمدول ناصفر از M نوشت. به عبارت دیگر M فاقد جمعوند مستقیم غیربدیهی باشد.

مثال ۳۷

واضح است که $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به عنوان $\mathbb{Z}$–مدول، تجزیه ناپذیر هستند.

تجزیه مدول‌ها و قضیه‌ی کرول اشمیت

تعریف ۳۶

فرض کنیم M یک R–مدول ناصفر باشد. M را **تجزیه ناپذیر** نامیم، هرگاه نتوان M را به صورت جمع مستقیم دو زیرمدول ناصفر از M نوشت. به عبارت دیگر M فاقد جمعوند مستقیم غیربدیهی باشد.

مثال ۳۷

واضح است که $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به عنوان $\mathbb{Z}$–مدول، تجزیه ناپذیر هستند.

تعریف ۳۸

فرض کنیم M یک R-مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M باشد. اگر $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$، آن‌گاه $\bigoplus_{i\in I} M_i$ را یک **تجزیه‌ی مستقیم** از M می‌نامیم. در صورتی که برای هر $i \in I$، M_i تجزیه ناپذیر باشد، آن‌گاه $\bigoplus_{i\in I} M_i$ را یک **تجزیه‌ی تجزیه‌ناپذیر** از M می‌گوییم.

قضیه ۳۹ (کرول-اشمیت)

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر با طول متناهی باشد. در این صورت M دارای تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر متناهی $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ است به طوری که برای هر تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k$ داریم $n = k$ و جایگشت σ از $\{1, 2 \ldots, n\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $M_{\sigma(i)} \cong N_i$.

تعریف ۳۸

فرض کنیم M یک R-مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M باشد. اگر $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$، آن‌گاه $\bigoplus_{i\in I} M_i$ را یک **تجزیه‌ی مستقیم** از M می‌نامیم. در صورتی که برای هر $i \in I$، M_i تجزیه ناپذیر باشد، آن‌گاه $\bigoplus_{i\in I} M_i$ را یک **تجزیه‌ی تجزیه‌ناپذیر** از M می‌گوییم.

قضیه ۳۹ (کرول-اشمیت)

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر با طول متناهی باشد. در این صورت M دارای تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر متناهی $M = M_۱ \oplus M_۲ \oplus \cdots \oplus M_n$ است به طوری که برای هر تجزیه‌ی تجزیه ناپذیر $M = N_۱ \oplus N_۲ \oplus \cdots \oplus N_k$ داریم $n = k$ و جایگشت σ از $\{۱, ۲\ldots, n\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $۱ \leq i \leq n$ داریم $N_i \cong M_{\sigma(i)}$.

مدول‌های یکنواخت و بعد یکنواخت

تعریف ۴۰

R–مدول ناصفرِ M را **یکنواخت** نامیم، درصورتی که هر زیرمدول ناصفر از M اساسی باشد یا به طور معادل اشتراک هر دو زیرمدول ناصفر از M، ناصفر باشد. به عنوان مثال $\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$–مدول یکنواخت است.

قضیه ۴۱

فرض کنیم M یک R–مدول ناصفر باشد که هر زیرمدول ناصفر آن دارای یک زیرمدول یکنواخت باشد. در این صورت زیرمدول اساسی N از M وجود دارد که به شکل مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های یکنواخت است؛ یعنی $N = \sum_{i \in I} U_i$ که در آن هر U_i اساسی است.

مدول‌های یکنواخت و بعد یکنواخت

تعریف ۴۰

R-مدول ناصفرِ M را **یکنواخت** نامیم، درصورتی که هر زیرمدول ناصفر از M اساسی باشد یا به طور معادل اشتراک هر دو زیرمدول ناصفر از M، ناصفر باشد. به عنوان مثال $\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول یکنواخت است.

قضیه ۴۱

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد که هر زیرمدول ناصفر آن دارای یک زیرمدول یکنواخت باشد. در این صورت زیرمدول اساسی N از M وجود دارد که به شکل مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های یکنواخت است؛ یعنی $N = \sum_{i\in I} U_i$ که در آن هر U_i اساسی است.

تعریف ۴۲

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد یکنواخت** یا **بعد گلدی** M را که با نماد $udim(M)$ نمایش می‌دهیم، کوچک‌ترین عدد اصلی تعریف می‌کنیم که بزرگتر یا مساوی عدد اصلی تمام خانواده‌های مستقل از زیرمدول‌های M است.

مثال ۴۳

1. واضح است که $udim(M) = 1$ اگر وتنها اگر M یکنواخت باشد.
2. هر مدول نوتری (آرتینی) ناصفر دارای بعد یکنواخت متناهی است.

تعریف ۴۲

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. **بعد یکنواخت** یا **بعد گلدی** M را که با نماد $udim(M)$ نمایش می‌دهیم، کوچک‌ترین عدد اصلی تعریف می‌کنیم که بزرگتر یا مساوی عدد اصلی تمام خانواده‌های مستقل از زیرمدول‌های M است.

مثال ۴۳

1. واضح است که $udim(M) = ۱$ اگر وتنها اگر M یکنواخت باشد.
2. هر مدول نوتری (آرتینی) ناصفر دارای بعد یکنواخت متناهی است.

تعریف ۴۲

فرض کنیم M یک R−مدول باشد. **بعد یکنواخت** یا **بعد گلدی** M را که با نماد $udim(M)$ نمایش می‌دهیم، کوچک‌ترین عدد اصلی تعریف می‌کنیم که بزرگتر یا مساوی عدد اصلی تمام خانواده‌های مستقل از زیرمدول‌های M است.

مثال ۴۳

1. واضح است که $udim(M) = ۱$ اگر وتنها اگر M یکنواخت باشد.
2. هر مدول نوتری (آرتینی) ناصفر دارای بعد یکنواخت متناهی است.

قضیه ۴۴

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. اگر M دارای بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه یک زیرمدول یکنواخت دارد.

قضیه ۴۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد که شامل یک زیرمدول اساسی به شکل $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ باشد که در آن هر U_λ یک زیرمدول یکنواخت از M است. در این صورت زیرمدول دلخواه N از M اساسی است اگر وتنها اگر برای هر $\lambda \in \Lambda$ داشته باشیم $(0) \neq N \cap U_\lambda$.

قضیه ۴۴

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. اگر M دارای بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه یک زیرمدول یکنواخت دارد.

قضیه ۴۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد که شامل یک زیرمدول اساسی به شکل $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ باشد که در آن هر U_λ یک زیرمدول یکنواخت از M است. در این صورت زیرمدول دلخواه N از M اساسی است اگر وتنها اگر برای هر $\lambda\in\Lambda$ داشته باشیم $N\cap U_\lambda\neq(0)$.

قضیه ۴۶

گزاره‌های زیر برای R-مدول M معادل هستند:

1. $udim(M) < \infty$.
2. عدد طبیعی n و زیرمدول‌های یکنواخت $U_1, U_2, \ldots, U_n$ وجود دارند به طوری که $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M هستند و $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$.
3. $udim(M) = n$.
4. برای هر زنجیر صعودی $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_k \leq_e A_i$.
5. M دارای ACC روی زیرمدول‌های مکمل خود است.
6. برای هر زنجیر نزولی $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_i \leq_e A_k$.

قضیه ۴۶

گزاره‌های زیر برای R-مدول M معادل هستند:

۱. $udim(M) < \infty$.
۲. عدد طبیعی n و زیرمدول‌های یکنواخت $U_1, U_2, \ldots, U_n$ وجود دارند به طوری که $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M هستند و $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$.
۳. $udim(M) = n$.
۴. برای هر زنجیر صعودی $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_k \leq_e A_i$.
۵. M دارای ACC روی زیرمدول‌های مکمل خود است.
۶. برای هر زنجیر نزولی $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_i \leq_e A_k$.

قضیه ۴۶

گزاره‌های زیر برای R-مدول M معادل هستند:

1. $udim(M) < \infty$.
2. عدد طبیعی n و زیرمدول‌های یکنواخت $U_1, U_2, \ldots, U_n$ وجود دارند به طوری که $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M هستند و $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$.
3. $udim(M) = n$.
4. برای هر زنجیر صعودی $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_k \leq_e A_i$.
5. M دارای ACC روی زیرمدول‌های مکمل خود است.
6. برای هر زنجیر نزولی $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_i \leq_e A_k$.

قضیه ۴۶

گزاره‌های زیر برای R-مدول M معادل هستند:

۱. $udim(M) < \infty$.
۲. عدد طبیعی n و زیرمدول‌های یکنواخت $U_۱, U_۲, \ldots, U_n$ وجود دارند به طوری که $\{U_۱, U_۲, \ldots, U_n\}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M هستند و $U_۱ \oplus U_۲ \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$.
۳. $udim(M) = n$.
۴. برای هر زنجیر صعودی $A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_k \leq_e A_i$.
۵. M دارای ACC روی زیرمدول‌های مکمل خود است.
۶. برای هر زنجیر نزولی $A_۱ \supseteq A_۲ \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_i \leq_e A_k$.

قضیه ۴۶

گزاره‌های زیر برای R-مدول M معادل هستند:

1. $udim(M) < \infty$.
2. عدد طبیعی n و زیرمدول‌های یکنواخت $U_۱, U_۲, \ldots, U_n$ وجود دارند به طوری که $\{U_۱, U_۲, \ldots, U_n\}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M هستند و $U_۱ \oplus U_۲ \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$.
3. $udim(M) = n$.
4. برای هر زنجیر صعودی $A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $k \geq i$ داریم $A_k \leq_e A_i$.
5. M دارای ACC روی زیرمدول‌های مکمل خود است.
6. برای هر زنجیر نزولی $A_۱ \supseteq A_۲ \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $k \geq i$ داریم $A_i \leq_e A_k$.

قضیه ۴۶

گزاره‌های زیر برای R-مدول M معادل هستند:

1. $udim(M) < \infty$.
2. عدد طبیعی n و زیرمدول‌های یکنواخت $U_1, U_2, \ldots, U_n$ وجود دارند به طوری که $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M هستند و $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$.
3. $udim(M) = n$.
4. برای هر زنجیر صعودی $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_k \leq_e A_i$.
5. M دارای ACC روی زیرمدول‌های مکمل خود است.
6. برای هر زنجیر نزولی $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_i \leq_e A_k$.

قضیه ۴۶

گزاره‌های زیر برای R-مدول M معادل هستند:

1. $udim(M) < \infty$.
2. عدد طبیعی n و زیرمدول‌های یکنواخت $U_۱, U_۲, \ldots, U_n$ وجود دارند به طوری که $\{U_۱, U_۲, \ldots, U_n\}$ خانواده‌ای مستقل از زیرمدول‌های M هستند و $U_۱ \oplus U_۲ \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$.
3. $udim(M) = n$.
4. برای هر زنجیر صعودی $A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_k \leq_e A_i$.
5. M دارای ACC روی زیرمدول‌های مکمل خود است.
6. برای هر زنجیر نزولی $A_۱ \supseteq A_۲ \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$ داریم $A_i \leq_e A_k$.

قضیه ۴۷

فرض کنیم M یک R-مدول و $A \leq M$. در این صورت، M دارای بعد گلدی متناهی است و $A \leq_e M$ اگر وتنها اگر A دارای بعد گلدی متناهی باشد و $udim(A) = udim(M)$.

گزاره ۴۸

فرض کنیم M یک R-مدول و $N \leq M$. اگر N و $\frac{M}{N}$ دارای بعد گلدی متناهی باشند. آن‌گاه M نیز دارای بعد گلدی متناهی است و $udim(M) \leq udim\left(\frac{M}{N}\right) + udim(N)$.

مدول‌های پوچ و دوگان بعد یکنواخت (بعد پوچ)

تعریف ۴۹

R–مدول ناصفر M را **پوچ** می‌نامیم، اگر هر زیرمدول سره از M در آن کوچک باشد یا به طور معادل M را نتوان به صورت مجموع دو زیرمدول سره‌اش نوشت. بنابراین واضح است که هر مدول تجزیه ناپذیر، پوچ است.

مثال ۵۰

1. مدول M را موضعی می‌نامیم، هرگاه دارای یک زیرمدول ماکسیمال منحصر به فرد باشد. در این صورت واضح است که هر مدول موضعی یک مدول پوچ است.
2. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ و مدول‌های ساده مثال‌های دیگری از مدول‌های پوچ هستند.

لم ۵۱

هر مدول خارج قسمتی از یک مدول پوچ، پوچ است.

مدول‌های پوچ و دوگان بعد یکنواخت (بعد پوچ)

تعریف ۴۹

R–مدول ناصفر M را **پوچ** می‌نامیم، اگر هر زیرمدول سره از M در آن کوچک باشد یا به طور معادل M را نتوان به صورت مجموع دو زیرمدول سره‌اش نوشت. بنابراین واضح است که هر مدول تجزیه ناپذیر، پوچ است.

مثال ۵۰

۱. مدول M را موضعی می‌نامیم، هرگاه دارای یک زیرمدول ماکسیمال منحصر به فرد باشد. در این صورت واضح است که هر مدول موضعی یک مدول پوچ است.
۲. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ و مدول‌های ساده مثال‌های دیگری از مدول‌های پوچ هستند.

لم ۵۱

هر مدول خارج قسمتی از یک مدول پوچ، پوچ است.

مدول‌های پوچ و دوگان بعد یکنواخت (بعد پوچ)

تعریف ۴۹

R–مدول ناصفر M را **پوچ** می‌نامیم، اگر هر زیرمدول سره از M در آن کوچک باشد یا به طور معادل M را نتوان به صورت مجموع دو زیرمدول سره‌اش نوشت. بنابراین واضح است که هر مدول تجزیه ناپذیر، پوچ است.

مثال ۵۰

1. مدول M را موضعی می‌نامیم، هرگاه دارای یک زیرمدول ماکسیمال منحصر به فرد باشد. در این صورت واضح است که هر مدول موضعی یک مدول پوچ است.
2. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ و مدول‌های ساده مثال‌های دیگری از مدول‌های پوچ هستند.

لم ۵۱

هر مدول خارج قسمتی از یک مدول پوچ، پوچ است.

مدول‌های پوچ و دوگان بعد یکنواخت (بعد پوچ)

تعریف ۴۹

R-مدول ناصفر M را **پوچ** می‌نامیم، اگر هر زیرمدول سره از M در آن کوچک باشد یا به طور معادل M را نتوان به صورت مجموع دو زیرمدول سره‌اش نوشت. بنابراین واضح است که هر مدول تجزیه ناپذیر، پوچ است.

مثال ۵۰

1. مدول M را موضعی می‌نامیم، هرگاه دارای یک زیرمدول ماکسیمال منحصر به فرد باشد. در این صورت واضح است که هر مدول موضعی یک مدول پوچ است.
2. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ و مدول‌های ساده مثال‌های دیگری از مدول‌های پوچ هستند.

لم ۵۱

هر مدول خارج قسمتی از یک مدول پوچ، پوچ است.

قضیه ۵۲

برای R-مدول ناصفر M گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. M شامل هیچ خانواده‌ی هم‌مستقل نامتناهی از زیرمدول‌هایش نیست.
۲. M دارای یک خانواده‌ی هم‌مستقل متناهیِ $\{N_1, \ldots, N_n\}$ است به طوری که $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \ll M$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، $\frac{M}{N_i}$ یک مدول پوچ است.
۳. $\sup\{k \mid$ شامل یک خانواده‌ی هم‌مستقل با عدد اصلی k است $M\} = n < \infty$.

تعریف ۵۳

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. گوییم M دارای **بعد پوچ** متناهی است، اگر در یکی از شرایط معادل قضیه‌ی قبل صدق کند. همچنین عدد n در قضیه‌ی قبل را بعد پوچ M می‌نامیم و با نماد $hdim(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵۲

برای R-مدول ناصفر M گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. M شامل هیچ خانواده‌ی هم‌مستقل نامتناهی از زیرمدول‌هایش نیست.
۲. M دارای یک خانواده‌ی هم‌مستقل متناهیِ $\{N_1, \ldots, N_n\}$ است به طوری که $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \ll M$ و برای هر $1 \le i \le n$، $\frac{M}{N_i}$ یک مدول پوچ است.
۳. $\sup\{k \mid$ شامل یک خانواده‌ی هم‌مستقل با عدد اصلی k است $M\} = n < \infty$.

تعریف ۵۳

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. گوییم M دارای **بعد پوچ** متناهی است، اگر در یکی از شرایط معادل قضیه‌ی قبل صدق کند. همچنین عدد n در قضیه‌ی قبل را بعد پوچ M می‌نامیم و با نماد $hdim(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵۲

برای R-مدول ناصفر M گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. M شامل هیچ خانواده‌ی هم‌مستقل نامتناهی از زیرمدول‌هایش نیست.
۲. M دارای یک خانواده‌ی هم‌مستقل متناهیِ $\{N_1, \ldots, N_n\}$ است به طوری که $M \ll \bigcap_{i=1}^{n} N_i$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، $\frac{M}{N_i}$ یک مدول پوچ است.
۳. $\sup\{k \mid$ شامل یک خانواده‌ی هم‌مستقل با عدد اصلی k است $M\} = n < \infty$.

تعریف ۵۳

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. گوییم M دارای **بعد پوچ** متناهی است، اگر در یکی از شرایط معادل قضیه‌ی قبل صدق کند. همچنین عدد n در قضیه‌ی قبل را بعد پوچ M می‌نامیم و با نماد $hdim(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵۲

برای R-مدول ناصفر M گزاره‌های زیر معادل هستند:

1. M شامل هیچ خانواده‌ی هم‌مستقل نامتناهی از زیرمدول‌هایش نیست.
2. M دارای یک خانواده‌ی هم‌مستقل متناهیِ $\{N_1, \ldots, N_n\}$ است به طوری که $M \ll \bigcap_{i=1}^{n} N_i$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، $\frac{M}{N_i}$ یک مدول پوچ است.
3. $\infty > n = \sup\{k \mid$ است k شامل یک خانواده‌ی هم‌مستقل با عدد اصلی $M\}$.

تعریف ۵۳

فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. گوییم M دارای **بعد پوچ** متناهی است، اگر در یکی از شرایط معادل قضیه‌ی قبل صدق کند. همچنین عدد n در قضیه‌ی قبل را بعد پوچ M می‌نامیم و با نماد $hdim(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵۲

برای R–مدول ناصفر M گزاره‌های زیر معادل هستند:

1. M شامل هیچ خانواده‌ی هم‌مستقل نامتناهی از زیرمدول‌هایش نیست.
2. M دارای یک خانواده‌ی هم‌مستقل متناهیِ $\{N_1, \dots, N_n\}$ است به طوری که $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \ll M$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، $\frac{M}{N_i}$ یک مدول پوچ است.
3. $\sup\{k \mid$ شامل یک خانواده‌ی هم‌مستقل با عدد اصلی k است $M\} = n < \infty$.

تعریف ۵۳

فرض کنیم M یک R–مدول ناصفر باشد. گوییم M دارای **بعد پوچ** متناهی است، اگر در یکی از شرایط معادل قضیه‌ی قبل صدق کند. همچنین عدد n در قضیه‌ی قبل را بعد پوچ M می‌نامیم و با نماد $hdim(M)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۵۴

۱. واضح است که M پوچ است اگر وتنها اگر هر خانواده‌ی هم‌مستقل از M تک عضوی باشد اگر وتنها اگر $hdim(M) = ۱$.
۲. ثابت شده که هر مدول آرتینی دارای بعد پوچ متناهی است.

گزاره ۵۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت:

۱. اگر $M \ll N$، آن‌گاه $hdim(M) = hdim\left(\frac{M}{N}\right)$. برعکس، اگر M دارای بعد پوچ متناهی باشد و $hdim(M) = hdim\left(\frac{M}{N}\right)$، آن‌گاه $M \ll N$.
۲. اگر N و $\frac{M}{N}$ دارای بعد پوچ متناهی باشند، آن‌گاه M نیز دارای بعد پوچ متناهی است.

مثال ۵۴

1. واضح است که M پوچ است اگر وتنها اگر هر خانواده‌ی هم‌مستقل از M تک عضوی باشد اگر وتنها اگر $hdim(M) = ۱$.
2. ثابت شده که هر مدول آرتینی دارای بعد پوچ متناهی است.

گزاره ۵۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت:

1. اگر $M \ll N$، آن‌گاه $hdim\left(\frac{M}{N}\right) = hdim(M)$. برعکس، اگر M دارای بعد پوچ متناهی باشد و $hdim\left(\frac{M}{N}\right) = hdim(M)$، آن‌گاه $M \ll N$.
2. اگر N و $\frac{M}{N}$ دارای بعد پوچ متناهی باشند، آن‌گاه M نیز دارای بعد پوچ متناهی است.

مثال ۵۴

۱. واضح است که M پوچ است اگر وتنها اگر هر خانواده‌ی هم‌مستقل از M تک عضوی باشد اگر وتنها اگر ۱ $= hdim(M)$.
۲. ثابت شده که هر مدول آرتینی دارای بعد پوچ متناهی است.

گزاره ۵۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت:

۱. اگر $N \ll M$، آن‌گاه $hdim(M) = hdim\left(\frac{M}{N}\right)$. برعکس، اگر M دارای بعد پوچ متناهی باشد و $hdim(M) = hdim\left(\frac{M}{N}\right)$، آن‌گاه $N \ll M$.
۲. اگر N و $\frac{M}{N}$ دارای بعد پوچ متناهی باشند، آن‌گاه M نیز دارای بعد پوچ متناهی است.

مثال ۵۴

1. واضح است که M پوچ است اگر وتنها اگر هر خانواده‌ی هم‌مستقل از M تک عضوی باشد اگر وتنها اگر $hdim(M) = ۱$.
2. ثابت شده که هر مدول آرتینی دارای بعد پوچ متناهی است.

گزاره ۵۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت:

1. اگر $M \ll N$، آن‌گاه $hdim(M) = hdim\left(\frac{M}{N}\right)$. برعکس، اگر M دارای بعد پوچ متناهی باشد و $hdim(M) = hdim\left(\frac{M}{N}\right)$، آن‌گاه $M \ll N$.
2. اگر N و $\frac{M}{N}$ دارای بعد پوچ متناهی باشند، آن‌گاه M نیز دارای بعد پوچ متناهی است.

مثال ۵۴

۱. واضح است که M پوچ است اگر وتنها اگر هر خانواده‌ی هم‌مستقل از M تک عضوی باشد اگر وتنها اگر $hdim(M) = ۱$.
۲. ثابت شده که هر مدول آرتینی دارای بعد پوچ متناهی است.

گزاره ۵۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدول‌هایی از M باشند. در این صورت:

۱. اگر $M \ll N$، آن‌گاه $hdim(M) = hdim\left(\frac{M}{N}\right)$. برعکس، اگر M دارای بعد پوچ متناهی باشد و $hdim(M) = hdim\left(\frac{M}{N}\right)$، آن‌گاه $N \ll M$.
۲. اگر N و $\frac{M}{N}$ دارای بعد پوچ متناهی باشند، آن‌گاه M نیز دارای بعد پوچ متناهی است.

بعد کرول

تعریف ۵۶

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد کرول** M را با نماد $k-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $k-dim(M) = -1$ اگر وتنها اگر $M = (0)$.
- فرض کنیم بعد کرول مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $k-dim(M) = \alpha$ درصورتی که $k-dim(M) \nless \alpha$ و برای هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M مانند $\cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots \supseteq M_2 \supseteq M_1$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geqslant k$ داشته باشیم $k-dim\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right) < \alpha$.

قرارداد ۵۷

اگر R یک حلقه باشد، آنگاه $k-dim(R)$ به معنی بعد کرول حلقه‌ی R به عنوان یک R-مدول می‌باشد.

بعد کرول

تعریف ۵۶

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد کرول** M را با نماد $k-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $k-dim(M) = -1$ اگر وتنها اگر $M = (0)$.
- فرض کنیم بعد کرول مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $k-dim(M) = \alpha$ درصورتی که $k-dim(M) \nless \alpha$ و برای هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M مانند $\cdots \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geqslant k$ داشته باشیم $k-dim\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right) < \alpha$.

قرارداد ۵۷

اگر R یک حلقه باشد، آن‌گاه $k-dim(R)$ به معنی بعد کرول حلقه‌ی R به عنوان یک R-مدول می‌باشد.

بعد کرول

تعریف ۵۶

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد کرول** M را با نماد $k-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $k-dim(M) = -۱$ اگر وتنها اگر $M = (۰)$.
- فرض کنیم بعد کرول مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $k-dim(M) = \alpha$ درصورتی که $k-dim(M) \nless \alpha$ و برای هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M مانند $\cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots \supseteq M_۲ \supseteq M_۱$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq k$ داشته باشیم $k-dim\left(\frac{M_n}{M_{n+۱}}\right) < \alpha$.

قرارداد ۵۷

اگر R یک حلقه باشد، آن‌گاه $k-dim(R)$ به معنی بعد کرول حلقه‌ی R به عنوان یک R-مدول می‌باشد.

بعد کرول

تعریف ۵۶

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد کرول** M را با نماد $k-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $k-dim(M) = -1$ اگر وتنها اگر $M = (0)$.
- فرض کنیم بعد کرول مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $k-dim(M) = \alpha$ درصورتی که $k-dim(M) \nless \alpha$ و برای هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M مانند $\cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots \supseteq M_2 \supseteq M_1$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geqslant k$ داشته باشیم $k-dim\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right) < \alpha$.

قرارداد ۵۷

اگر R یک حلقه باشد، آن‌گاه $k-dim(R)$ به معنی بعد کرول حلقه‌ی R به عنوان یک R-مدول می‌باشد.

بعد کرول

تعریف ۵۶

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد کرول** M را با نماد $k-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $k-dim(M) = -۱$ اگر وتنها اگر $M = (۰)$.
- فرض کنیم بعد کرول مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $k-dim(M) = \alpha$ درصورتی که $k-dim(M) \not< \alpha$ و برای هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M مانند $\cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots \supseteq M_۲ \supseteq M_۱$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geqslant k$ داشته باشیم $k-dim\left(\frac{M_n}{M_{n+۱}}\right) < \alpha$.

قرارداد ۵۷

اگر R یک حلقه باشد، آن‌گاه $k-dim(R)$ به معنی بعد کرول حلقه‌ی R به عنوان یک R-مدول می‌باشد.

تذکر ۵۸

۱. طبق تعریف، واضح است که عدد ترتیبی α در تعریف بعد نوتری، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $\alpha = k-dim(M)$ است.

۲. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $k-dim(M)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $k-dim(N)$ و $k-dim\left(\frac{M}{N}\right)$ نیز وجود دارند. به علاوه $k-dim(N) \leq k-dim(M)$ و $k-dim\left(\frac{M}{N}\right) \leq k-dim(M)$.

مثال ۵۹

۱. اگر M یک R-مدول باشد، آن‌گاه واضح است که $k-dim(M) = ۰$ اگر وتنها اگر M آرتینی باشد.

۲. اگر M یک R-مدول باشد و $k-dim(M) = ۱$، آن‌گاه برای هر زنجیر $M_۱ \supseteq M_۲ \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$، $\frac{M_i}{M_{i+۱}}$ آرتینی است. برای مثال، $k-dim(\mathbb{Z}) = ۱$.

تذکر ۵۸

1. طبق تعریف، واضح است که عدد ترتیبی α در تعریف بعد نوتری، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $k-dim(M)=\alpha$ است.
2. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $k-dim(M)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $k-dim(N)$ و $k-dim\left(\frac{M}{N}\right)$ نیز وجود دارند. به علاوه $k-dim(N)\leq k-dim(M)$ و $k-dim\left(\frac{M}{N}\right)\leq k-dim(M)$.

مثال ۵۹

1. اگر M یک R-مدول باشد، آن‌گاه واضح است که $k-dim(M)=0$ اگر وتنها اگر M آرتینی باشد.
2. اگر M یک R-مدول باشد و $k-dim(M)=1$، آن‌گاه برای هر زنجیر $M_1\supseteq M_2\supseteq\cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i\geq k$، $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ آرتینی است. برای مثال، $k-dim(\mathbb{Z})=1$.

تذکر ۵۸

۱. طبق تعریف، واضح است که عدد ترتیبی α در تعریف بعد نوتری، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $k-dim(M) = \alpha$ است.
۲. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $k-dim(M)$ وجود داشته باشد، آنگاه $k-dim(N)$ و $k-dim\left(\frac{M}{N}\right)$ نیز وجود دارند. به علاوه $k-dim(N) \leq k-dim(M)$ و $k-dim\left(\frac{M}{N}\right) \leq k-dim(M)$.

مثال ۵۹

۱. اگر M یک R-مدول باشد، آنگاه واضح است که $k-dim(M) = 0$ اگر وتنها اگر M آرتینی باشد.
۲. اگر M یک R-مدول باشد و $k-dim(M) = 1$، آنگاه برای هر زنجیر $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$، $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ آرتینی است. برای مثال، $k-dim(\mathbb{Z}) = 1$.

تذکر ۵۸

۱. طبق تعریف، واضح است که عدد ترتیبی α در تعریف بعد نوتری، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $k-dim(M) = \alpha$ است.
۲. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $k-dim(M)$ وجود داشته باشد، آنگاه $k-dim(N)$ و $k-dim\left(\frac{M}{N}\right)$ نیز وجود دارند. به علاوه $k-dim(N) \leq k-dim(M)$ و $k-dim\left(\frac{M}{N}\right) \leq k-dim(M)$.

مثال ۵۹

۱. اگر M یک R-مدول باشد، آنگاه واضح است که $k-dim(M) = ۰$ اگر وتنها اگر M آرتینی باشد.
۲. اگر M یک R-مدول باشد و $k-dim(M) = ۱$، آنگاه برای هر زنجیر $M_۱ \supseteq M_۲ \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$، $\frac{M_i}{M_{i+۱}}$ آرتینی است. برای مثال، $k-dim(\mathbb{Z}) = ۱$.

تذکر ۵۸

1. طبق تعریف، واضح است که عدد ترتیبی α در تعریف بعد نوتری، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $k-dim(M)=\alpha$ است.
2. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $k-dim(M)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $k-dim(N)$ و $k-dim\left(\frac{M}{N}\right)$ نیز وجود دارند. به علاوه $k-dim(N)\leq k-dim(M)$ و $k-dim\left(\frac{M}{N}\right)\leq k-dim(M)$.

مثال ۵۹

1. اگر M یک R-مدول باشد، آن‌گاه واضح است که $k-dim(M)=0$ اگر وتنها اگر M آرتینی باشد.
2. اگر M یک R-مدول باشد و $k-dim(M)=1$، آن‌گاه برای هر زنجیر $M_1\supseteq M_2\supseteq\cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i\geqslant k$، $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ آرتینی است. برای مثال، $k-dim(\mathbb{Z})=1$.

گزاره ۶۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر بعد کرول M وجود داشته باشد، آنگاه M دارای بعد گلدی متناهی است.

گزاره ۶۱

اگر حلقه‌ی R دارای بعد کرول باشد، آنگاه هر ایده‌آل پوچ R، پوچ‌توان است.

گزاره ۶۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر بعد کرول M وجود داشته باشد، آن‌گاه M دارای بعد گلدی متناهی است.

گزاره ۶۱

اگر حلقه‌ی R دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل پوچ R، پوچ‌توان است.

لم ۶۲

اگر هر زیرمدول سره از R-مدول M دارای بعد کرول باشد آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است و $k\text{-}dim(M) = \sup\{k\text{-}dim(N) \mid N \subsetneq M\}$.

لم ۶۳

اگر هر مدول خارج قسمتی سره از R-مدول M دارای بعد کرول باشد آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است و $k\text{-}dim(M) \leq \sup\left\{k\text{-}dim\left(\frac{M}{N}\right) \mid (0) \neq N \leq M\right\} + 1$.

گزاره ۶۴

هر مدول نوتری دارای بعد کرول است.

لم ۶۲

اگر هر زیرمدول سره از R-مدول M دارای بعد کرول باشد آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است و $k-dim(M) = \sup\{k-dim(N) \mid N \subsetneq M\}$.

لم ۶۳

اگر هر مدول خارج قسمتی سره از R-مدول M دارای بعد کرول باشد آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است و $k-dim(M) \leq \sup\left\{k-dim\left(\frac{M}{N}\right) \mid (0) \neq N \leq M\right\} + 1$.

گزاره ۶۴

هر مدول نوتری دارای بعد کرول است.

لم ۶۲

اگر هر زیرمدول سره از R−مدول M دارای بعد کرول باشد آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است و $k\text{−}dim(M) = \sup\{k\text{−}dim(N) \mid N \subsetneq M\}$.

لم ۶۳

اگر هر مدول خارج قسمتی سره از R−مدول M دارای بعد کرول باشد آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است و $k\text{−}dim(M) \leq \sup\left\{k\text{−}dim\left(\frac{M}{N}\right) \mid (0) \neq N \leq M\right\} + 1$.

گزاره ۶۴

هر مدول نوتری دارای بعد کرول است.

قضیه ۶۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. در این‌صورت

$$k-dim(M) = \sup\left\{k-dim(N), k-dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}.$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

نتیجه ۶۶

$k-dim(M_۱ \oplus \cdots \oplus M_n) = \sup\{k-dim(M_۱), \ldots, k-dim(M_n)\}$. هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

لم ۶۷

فرض کنیم M یک R-مدول متناهی مولد باشد و R دارای بعد کرول باشد، در این‌صورت $k-dim(M) \le k-dim(R)$.

قضیه ۶۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. در این‌صورت

$$k\!-\!dim(M) = \sup\left\{k\!-\!dim(N), k\!-\!dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}.$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

نتیجه ۶۶

$k\!-\!dim\,(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) = \sup\{k\!-\!dim(M_1), \ldots, k\!-\!dim(M_n)\}$. هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

لم ۶۷

فرض کنیم M یک R-مدول متناهی مولد باشد و R دارای بعد کرول باشد، در این‌صورت $k\!-\!dim(M) \leq k\!-\!dim(R)$.

قضیه ۶۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. در این‌صورت

$$k-dim(M) = \sup\left\{k-dim(N), k-dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}.$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

نتیجه ۶۶

$k-dim\,(M_۱ \oplus \cdots \oplus M_n) = \sup\{k-dim(M_۱), \ldots, k-dim(M_n)\}$. هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

لم ۶۷

فرض کنیم M یک R-مدول متناهی مولد باشد و R دارای بعد کرول باشد، در این‌صورت $k-dim(M) \leq k-dim(R)$.

قضیه ۶۸

فرض کنیم M یک R-مدولِ دارای بعد کرول باشد. اگر $M = \sum_{i\in I} N_i$ و برای‌هر $i \in I$، $k-dim(N_i) \preceq \alpha$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $k-dim(M) \preceq \alpha$.

نتیجه ۶۹

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر M و R دارای بعد کرول باشند، آن‌گاه $k-dim(M) \preceq k-dim(R)$.

قضیه ۷۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر برای‌هر زیرمدول نابدیهی N از M، N یا $\frac{M}{N}$ دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است.

قضیه ۶۸

فرض کنیم M یک R-مدولِ دارای بعد کرول باشد. اگر $M = \sum_{i\in I} N_i$ و برای‌هر $i \in I$، $k\text{-}dim(N_i) \preceq \alpha$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $k\text{-}dim(M) \preceq \alpha$.

نتیجه ۶۹

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر M و R دارای بعد کرول باشند، آن‌گاه $k\text{-}dim(M) \preceq k\text{-}dim(R)$.

قضیه ۷۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر برای‌هر زیرمدول نابدیهی N از M، N یا $\frac{M}{N}$ دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است.

قضیه ۶۸

فرض کنیم M یک R-مدولِ دارای بعد کرول باشد. اگر $M = \sum_{i\in I} N_i$ و برای‌هر $i \in I$، $k\text{-}dim(N_i) \preceq \alpha$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $k\text{-}dim(M) \preceq \alpha$.

نتیجه ۶۹

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر M و R دارای بعد کرول باشند، آن‌گاه $k\text{-}dim(M) \preceq k\text{-}dim(R)$.

قضیه ۷۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر برای‌هر زیرمدول نابدیهی N از M، N یا $\frac{M}{N}$ دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است.

مدول‌های بحرانی

تعریف ۷۱

فرض کنیم α یک عدد ترتیبی باشد. R-مدول M را α-**بحرانی** می‌نامیم، هرگاه $k-dim(M) = \alpha$ و برای هر زیرمدول ناصفر مانند N از M داشته باشیم $k-dim\left(\frac{M}{N}\right) < k-dim(M)$. همچنین R-مدول M را بحرانی نامیم، هرگاه عدد ترتیبی α وجود داشته باشد به‌طوری که M یک مدول α-بحرانی باشد.

مثال ۷۲

به آسانی می‌توان نشان داد که مدول‌های ۰-بحرانی دقیقا همان مدول‌های ساده هستند.

گزاره ۷۳

فرض کنیم M یک R-مدول α-بحرانی باشد. در این صورت هر زیرمدول ناصفر از M، نیز α-بحرانی است.

مدول‌های بحرانی

تعریف ۷۱

فرض کنیم α یک عدد ترتیبی باشد. R-مدول M را α-**بحرانی** می‌نامیم، هرگاه $k-dim(M)=\alpha$ و برای هر زیرمدول ناصفر مانند N از M داشته باشیم $k-dim\left(\frac{M}{N}\right)<k-dim(M)$. همچنین R-مدول M را بحرانی نامیم، هرگاه عدد ترتیبی α وجود داشته باشد به‌طوری که M یک مدول α-بحرانی باشد.

مثال ۷۲

به آسانی می‌توان نشان داد که مدول‌های ۰-بحرانی دقیقا همان مدول‌های ساده هستند.

گزاره ۷۳

فرض کنیم M یک R-مدول α-بحرانی باشد. در این صورت هر زیرمدول ناصفر از M، نیز α-بحرانی است.

مدول‌های بحرانی

تعریف ۷۱

فرض کنیم α یک عدد ترتیبی باشد. R-مدول M را α-**بحرانی** می‌نامیم، هرگاه $k-dim(M) = \alpha$ و برای هر زیرمدول ناصفر مانند N از M داشته باشیم $k-dim\left(\frac{M}{N}\right) < k-dim(M)$. همچنین R-مدول M را بحرانی نامیم، هرگاه عدد ترتیبی α وجود داشته باشد به‌طوری که M یک مدول α-بحرانی باشد.

مثال ۷۲

به آسانی می‌توان نشان داد که مدول‌های ۰-بحرانی دقیقا همان مدول‌های ساده هستند.

گزاره ۷۳

فرض کنیم M یک R-مدول α-بحرانی باشد. در این صورت هر زیرمدول ناصفر از M، نیز α-بحرانی است.

قضیه ۷۴

هر R-مدول ناصفر که بعد کرول داشته باشد، دارای زیرمدول بحرانی است.

تعریف ۷۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. M را **مدول تکریخت** می‌نامیم، اگر برای هر زیرمدول N از M، هر همریختی $f : N \to M$ تکریختی باشد.

گزاره ۷۶

فرض کنیم M یک R-مدول α-بحرانی باشد. در این صورت:

1. M یکنواخت است.
2. M تجزیه ناپذیر است.
3. M تکریخت است.

قضیه ۷۴

هر R–مدول ناصفر که بعد کرول داشته باشد، دارای زیرمدول بحرانی است.

تعریف ۷۵

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. M را **مدول تکریخت** می‌نامیم، اگر برای هر زیرمدول N از M، هر همریختی $f : N \to M$ تکریختی باشد.

گزاره ۷۶

فرض کنیم M یک R–مدول α–بحرانی باشد. در این صورت:

۱. M یکنواخت است.
۲. M تجزیه ناپذیر است.
۳. M تکریخت است.

قضیه ۷۴

هر R-مدول ناصفر که بعد کرول داشته باشد، دارای زیرمدول بحرانی است.

تعریف ۷۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. M را **مدول تکریخت** می‌نامیم، اگر برای هر زیرمدول N از M، هر همریختی $f : N \to M$ تکریختی باشد.

گزاره ۷۶

فرض کنیم M یک R-مدول α-بحرانی باشد. در این صورت:

۱. M یکنواخت است.
۲. M تجزیه ناپذیر است.
۳. M تکریخت است.

قضیه ۷۴

هر R-مدول ناصفر که بعد کرول داشته باشد، دارای زیرمدول بحرانی است.

تعریف ۷۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. M را **مدول تکریخت** می‌نامیم، اگر برای هر زیرمدول N از M، هر همریختی $f : N \to M$ تکریختی باشد.

گزاره ۷۶

فرض کنیم M یک R-مدول α-بحرانی باشد. در این صورت:

1. M یکنواخت است.
2. M تجزیه ناپذیر است.
3. M تکریخت است.

قضیه ۷۴

هر R–مدول ناصفر که بعد کرول داشته باشد، دارای زیرمدول بحرانی است.

تعریف ۷۵

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. M را **مدول تکریخت** می‌نامیم، اگر برای هر زیرمدول N از M، هر همریختی $f : N \to M$ تکریختی باشد.

گزاره ۷۶

فرض کنیم M یک R–مدول α–بحرانی باشد. در این صورت:

1. M یکنواخت است.
2. M تجزیه ناپذیر است.
3. M تکریخت است.

قضیه ۷۴

هر R-مدول ناصفر که بعد کرول داشته باشد، دارای زیرمدول بحرانی است.

تعریف ۷۵

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. M را **مدول تکریخت** می‌نامیم، اگر برای هر زیرمدول N از M، هر همریختی $f : N \to M$ تکریختی باشد.

گزاره ۷۶

فرض کنیم M یک R-مدول α-بحرانی باشد. در این صورت:

۱. M یکنواخت است.
۲. M تجزیه ناپذیر است.
۳. M تکریخت است.

قضیه ۷۷

فرض کنیم بعد کرول R-مدول M وجود داشته باشد. در این صورت M دارای یک زیرمدول اساسی است که به شکل جمع مستقیم تعدادی متناهی از زیرمدول‌های بحرانی می‌باشد.

گزاره ۷۸

هر خانواده از زیرمدول‌های بحرانیِ R-مدول M که دارای بعد کرول متمایز باشند، یک خانواده‌ی مستقل هستند.

لم ۷۹

فرض کنیم R یک حلقه‌ی دارای بعد کرول و I یک ایده‌آل چپ بحرانی از R باشد. در این صورت $I^{۲} = (۰)$ یا عضو ناصفر x از I وجود دارد که $\mathrm{Ann}(x) \cap I = (۰)$.

قضیه ۷۷

فرض کنیم بعد کرول R-مدول M وجود داشته باشد. در این صورت M دارای یک زیرمدول اساسی است که به شکل جمع مستقیم تعدادی متناهی از زیرمدول‌های بحرانی می‌باشد.

گزاره ۷۸

هر خانواده از زیرمدول‌های بحرانیِ R-مدول M که دارای بعد کرول متمایز باشند، یک خانواده‌ی مستقل هستند.

لم ۷۹

فرض کنیم R یک حلقه‌ی دارای بعد کرول و I یک ایده‌آل چپ بحرانی از R باشد. در این صورت $I^{۲} = (۰)$ یا عضو ناصفر x از I وجود دارد که $\mathrm{Ann}(x) \cap I = (۰)$.

قضیه ۷۷

فرض کنیم بعد کرول R-مدول M وجود داشته باشد. در این صورت M دارای یک زیرمدول اساسی است که به شکل جمع مستقیم تعدادی متناهی از زیرمدول‌های بحرانی می‌باشد.

گزاره ۷۸

هر خانواده از زیرمدول‌های بحرانیِ R-مدول M که دارای بعد کرول متمایز باشند، یک خانواده‌ی مستقل هستند.

لم ۷۹

فرض کنیم R یک حلقه‌ی دارای بعد کرول و I یک ایده‌آل چپ بحرانی از R باشد. در این صورت $I^{۲} = (۰)$ یا عضو ناصفر x از I وجود دارد که $\mathrm{Ann}(x) \cap I = (۰)$.

بعد نوتری

تعریف ۸۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد نوتری** M را با نماد $n-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $n-dim(M) = -۱$ اگر وتنها اگر $M = (۰)$.
- فرض کنیم بعد نوتری مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $n-dim(M) = \alpha$ در صورتی که $n-dim(M) \nless \alpha$ و برای هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M مانند $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq \cdots$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $n \geq k$، داشته باشیم $n-dim\left(\frac{M_{n+۱}}{M_n}\right) < \alpha$.

بعد نوتری

تعریف ۸۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد نوتری** M را با نماد $n-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $n-dim(M) = -۱$ اگر وتنها اگر $M = (۰)$.
- فرض کنیم بعد نوتری مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $n-dim(M) = \alpha$ در صورتی که $n-dim(M) \not< \alpha$ و برای هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M مانند $\cdots \subseteq M_۲ \subseteq M_۱$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $n \geq k$، داشته باشیم $n-dim\left(\frac{M_{n+۱}}{M_n}\right) < \alpha$.

بعد نوتری

تعریف ۸۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد نوتری** M را با نماد $n-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $n-dim(M) = -۱$ اگر وتنها اگر $M = (۰)$.
- فرض کنیم بعد نوتری مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $n-dim(M) = \alpha$ در صورتی که $n-dim(M) \nless \alpha$ و برای هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M مانند $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq \cdots$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $n \geq k$، داشته باشیم $n-dim\left(\frac{M_{n+۱}}{M_n}\right) < \alpha$.

بعد نوتری

تعریف ۸۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد نوتری** M را با نماد $n-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $n-dim(M) = -۱$ اگر وتنها اگر $M = (۰)$.
- فرض کنیم بعد نوتری مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $n-dim(M) = \alpha$ در صورتی که $n-dim(M) \nless \alpha$ و برای هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M مانند $\cdots \subseteq M_۲ \subseteq M_۱$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $n \geq k$، داشته باشیم $n-dim\left(\frac{M_{n+۱}}{M_n}\right) < \alpha$.

بعد نوتری

تعریف ۸۰

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. **بعد نوتری** M را با نماد $n-dim(M)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از استقرای ترامتناهی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $n-dim(M) = -۱$ اگر وتنها اگر $M = (۰)$.
- فرض کنیم بعد نوتری مدول M برای اعداد ترتیبی کمتر از α تعریف شده باشد.
- تعریف می‌کنیم $n-dim(M) = \alpha$ در صورتی که $n-dim(M) \nless \alpha$ و برای هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M مانند $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq \cdots$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $n \geq k$، داشته باشیم $n-dim\left(\frac{M_{n+۱}}{M_n}\right) < \alpha$.

تذکر ۸۱

1. طبق تعریف، واضح است که عدد ترتیبی α در تعریف بعد نوتری، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $\alpha = n{-}dim(M)$ است.
2. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $n{-}dim(M)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $n{-}dim(N)$ و $n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right)$ نیز وجود دارند. به علاوه $n{-}dim(N) \leq n{-}dim(M)$ و $n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right) \leq n{-}dim(M)$.

مثال ۸۲

1. واضح است که $n{-}dim(M) = 0$ اگر وتنها اگر M نوتری باشد.
2. اگر $n{-}dim(M) = 1$، آن‌گاه برای هر زنجیر $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$، $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ نوتری است. برای مثال، واضح است که $n{-}dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = 1$.

تذکر ۸۱

1. طبق تعریف، واضح است که عدد ترتیبی α در تعریف بعد نوتری، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $n-dim(M) = \alpha$ است.
2. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $n-dim(M)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $n-dim(N)$ و $n-dim\left(\frac{M}{N}\right)$ نیز وجود دارند. به علاوه $n-dim(N) \leq n-dim(M)$ و $n-dim\left(\frac{M}{N}\right) \leq n-dim(M)$.

مثال ۸۲

1. واضح است که $n-dim(M) = ۰$ اگر وتنها اگر M نوتری باشد.
2. اگر $n-dim(M) = ۱$، آن‌گاه برای هر زنجیر $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$، $\frac{M_{i+۱}}{M_i}$ نوتری است. برای مثال، واضح است که $n-dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = ۱$.

تذکر ۸۱

١. طبق تعریف، واضح است که عدد ترتیبی α در تعریف بعد نوتری، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $\alpha = n\!-\!dim(M)$ است.
٢. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $n\!-\!dim(M)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $n\!-\!dim(N)$ و $n\!-\!dim\left(\frac{M}{N}\right)$ نیز وجود دارند. به علاوه $n\!-\!dim(N) \leq n\!-\!dim(M)$ و $n\!-\!dim\left(\frac{M}{N}\right) \leq n\!-\!dim(M)$.

مثال ۸۲

١. واضح است که $n\!-\!dim(M) = 0$ اگر وتنها اگر M نوتری باشد.
٢. اگر $n\!-\!dim(M) = 1$، آن‌گاه برای هر زنجیر $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$، $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ نوتری است. برای مثال، واضح است که $n\!-\!dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = 1$.

تذکر ۸۱

1. طبق تعریف، واضح است که عدد ترتیبی α در تعریف بعد نوتری، کوچکترین عدد ترتیبی با خاصیت $n-dim(M) = \alpha$ است.
2. فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. اگر $n-dim(M)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $n-dim(N)$ و $n-dim\left(\frac{M}{N}\right)$ نیز وجود دارند. به علاوه $n-dim(N) \leq n-dim(M)$ و $n-dim\left(\frac{M}{N}\right) \leq n-dim(M)$.

مثال ۸۲

1. واضح است که $n-dim(M) = 0$ اگر وتنها اگر M نوتری باشد.
2. اگر $n-dim(M) = 1$، آن‌گاه برای هر زنجیر $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که برای هر $i \geq k$، $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ نوتری است. برای مثال، واضح است که $n-dim(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = 1$.

گزاره ۸۳

اگر هر مدول خارج قسمتی سره از R-مدول M دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد نوتری است و

$$n\text{-}dim(M) = \sup\left\{n\text{-}dim\left(\frac{M}{N}\right) \mid (\circ) \neq N \leq M\right\}.$$

گزاره ۸۴

اگر هر زیرمدول سره از R-مدول M دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد نوتری است و

$$n\text{-}dim(M) \leq \sup\{n\text{-}dim(N) \mid N \lneq M\} + ١.$$

گزاره ۸۳

اگر هر مدول خارج قسمتی سره از R-مدول M دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد نوتری است و

$$n\text{-}dim(M) = \sup\left\{n\text{-}dim\left(\frac{M}{N}\right) \mid (0) \neq N \leq M\right\}.$$

گزاره ۸۴

اگر هر زیرمدول سره از R-مدول M دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد نوتری است و

$$n\text{-}dim(M) \leq \sup\{n\text{-}dim(N) \mid N \lneq M\} + 1.$$

قضیه ۸۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. در این‌صورت

$$n{-}dim(M) = \sup\left\{n{-}dim(N), n{-}dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

نتیجه ۸۶

فرض کنیم $M_1, \ldots, M_n$، R-مدول باشند. در این صورت $n{-}dim\,(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) = \sup\{n{-}dim(M_1), \ldots, n{-}dim(M_n)\}$. هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

گزاره ۸۷

اگر M یک R-مدول و R دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه $n{-}dim(M) \le n{-}dim(R)$.

قضیه ۸۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. در این‌صورت

$$n-dim(M) = \sup\left\{n-dim(N), n-dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

نتیجه ۸۶

فرض کنیم $M_1, \ldots, M_n$، R-مدول باشند. در این صورت
$n-dim\left(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n\right) = \sup\{n-dim(M_1), \ldots, n-dim(M_n)\}$. هرگاه
یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

گزاره ۸۷

اگر M یک R-مدول و R دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه $n-dim(M) \leq n-dim(R)$.

قضیه ۸۵

فرض کنیم M یک R-مدول و N زیرمدولی از آن باشد. در این‌صورت

$$n\!-\!dim(M) = \sup\left\{n\!-\!dim(N), n\!-\!dim\left(\frac{M}{N}\right)\right\}$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

نتیجه ۸۶

فرض کنیم $M_1, \ldots, M_n$، R-مدول باشند. در این صورت
$n\!-\!dim\,(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) = \sup\{n\!-\!dim(M_1), \ldots, n\!-\!dim(M_n)\}$. هرگاه
یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

گزاره ۸۷

اگر M یک R-مدول و R دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه $n\!-\!dim(M) \leq n\!-\!dim(R)$.

قضیه ۸۸

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. اگر برای‌هر زیرمدول نابدیهی N از M، N یا $\frac{M}{N}$ دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد نوتری است.

گزاره ۸۹

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. اگر M دارای بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه

$$n\!-\!dim(M) = \sup\left\{n\!-\!dim\left(\frac{M}{E}\right) \;\middle|\; E \leq_e M\right\}.$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

قضیه ۸۸

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر برای‌هر زیرمدول نابدیهی N از M، N یا $\frac{M}{N}$ دارای بعد نوتری باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد نوتری است.

گزاره ۸۹

فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر M دارای بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه

$$n-dim(M) = \sup\left\{n-dim\left(\frac{M}{E}\right) \;\middle|\; E \leq_e M\right\}.$$

هرگاه یک طرف تساوی وجود داشته باشد.

قضیه ۹۰

فرض کنیم M یک R-مدول دلخواه باشد. M دارای بعد نوتری است اگر وتنها اگر دارای بعد کرول باشد.

نتیجه ۹۱

1. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر بعد نوتری M وجود داشته باشد، آنگاه M دارای بعد گلدی متناهی است.
2. هر مدول آرتینی دارای بعد نوتری است.

قضیه ۹۰

فرض کنیم M یک R-مدول دلخواه باشد. M دارای بعد نوتری است اگر وتنها اگر دارای بعد کرول باشد.

نتیجه ۹۱

۱. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر بعد نوتری M وجود داشته باشد، آن‌گاه M دارای بعد گلدی متناهی است.
۲. هر مدول آرتینی دارای بعد نوتری است.

قضیه ۹۰

فرض کنیم M یک R-مدول دلخواه باشد. M دارای بعد نوتری است اگر وتنها اگر دارای بعد کرول باشد.

نتیجه ۹۱

1. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر بعد نوتری M وجود داشته باشد، آنگاه M دارای بعد گلدی متناهی است.
2. هر مدول آرتینی دارای بعد نوتری است.

قضیه ۹۰

فرض کنیم M یک R-مدول دلخواه باشد. M دارای بعد نوتری است اگر وتنها اگر دارای بعد کرول باشد.

نتیجه ۹۱

1. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر بعد نوتری M وجود داشته باشد، آنگاه M دارای بعد گلدی متناهی است.
2. هر مدول آرتینی دارای بعد نوتری است.

گزاره ۹۲

فرض کنیم M یک R-مدول و $A_1, A_2, \dots, A_k$ زیرمدول‌هایی از M باشند.
اگر برای هر $k \leqslant i \leq 1$ داشته باشیم $n-dim\left(\frac{M}{A_i}\right) = \alpha$، آن‌گاه

$$n-dim\left(\frac{M}{\cap_{i=1}^{k} A_i}\right) = \sup\left\{n-dim\left(\frac{M}{A_i}\right)\right\}_{i=1}^{k}.$$


باسپاس از توجه شما