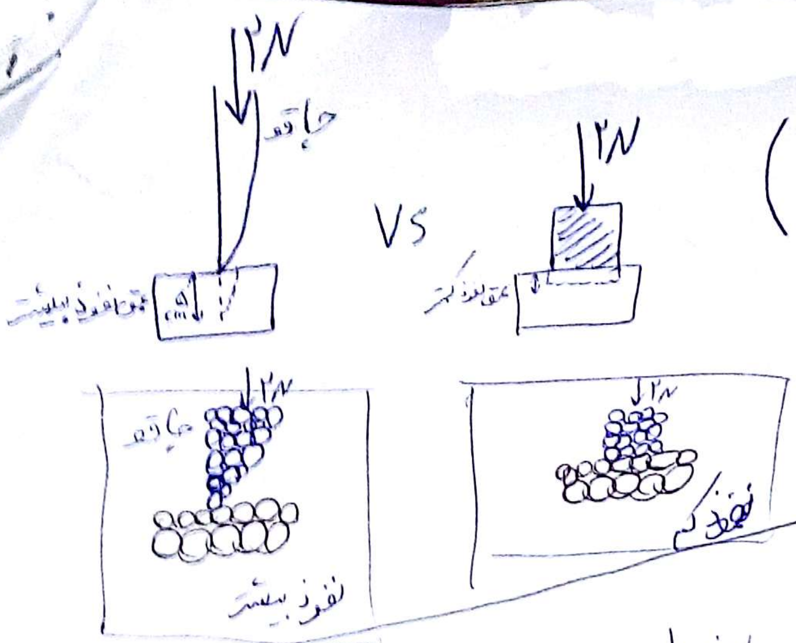
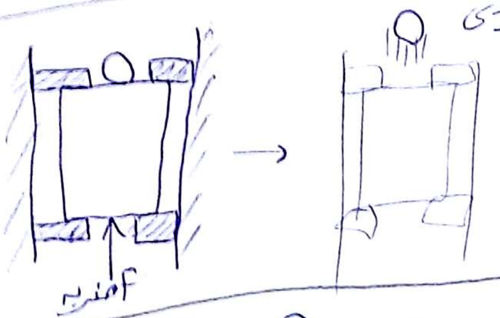
فشار (تنش) چیه؟ (میکروسکوپیک) (ابرهای الکترونی) 5 min



از کجا فهمیدیم نیرو در طول جسم منتقل میشه؟ 5 min

ریاضی | شهودی



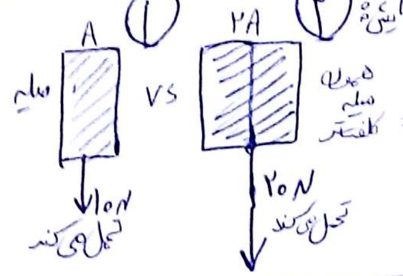
$F+\frac{\partial F}{\partial x}dx$ — المان 2D — F

جسم تغییر شکل نمی‌دهد $\Longrightarrow$ $F \rightarrow$ المان دوبعدی $\leftarrow F$

$\frac{\partial F}{\partial x}=0$

چرا به تنش علاقه‌مند شدیم؟ 10 min

آزمایش ۱ ، آزمایش ۲



$$\sigma_1=\frac{F_1}{A_1}=\frac{10}{A}$$

$$\sigma_2=\frac{F_2}{A_2}=\frac{20}{2A}=\frac{10}{A}$$

$\sigma_{\text{ماده}}=cte \longrightarrow$ بی‌نیاز از L و A میله‌ها می‌توان مقاومت آن‌ها را بسنجیم

مزیت ۱

مزیت ۲: برای هر المان کوچکی هم می‌توان نوشت

$\delta A \rightarrow \delta F$

$$\sigma_x=\sigma_1=\frac{\delta F}{\delta A}=\frac{F}{A}$$

مشتق نیست

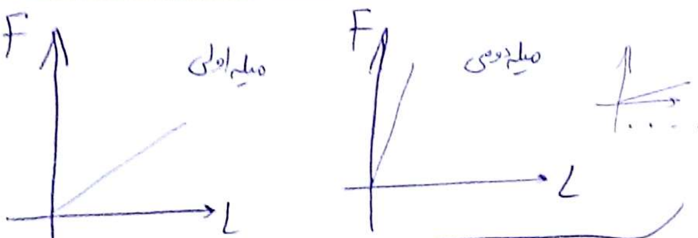
قانون هوک 10 min

$$\sigma=E\varepsilon$$

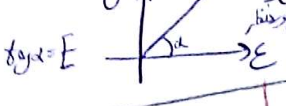
$$\Downarrow$$

$$\delta=\frac{FL}{AE}$$

(انجام آزمایش تا قبل ...)



همه این‌ها یک نمودار یکسان دارند $(\sigma-\varepsilon)$



همه شکل میله‌ها از نظر ...

مثال:

$E=2$, $A=4$, 5N, 1cm, 5N

$$\sigma=\frac{5}{4}$$

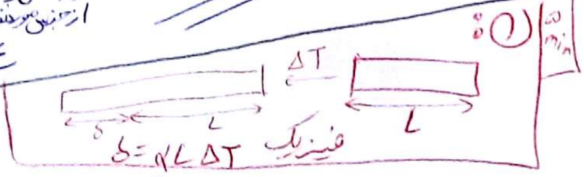
$$\delta_{\text{کل میله}}=\frac{5\times 1}{4\times 2}$$

یادآوری استاتیک 20 min

۲۰ min = بحث

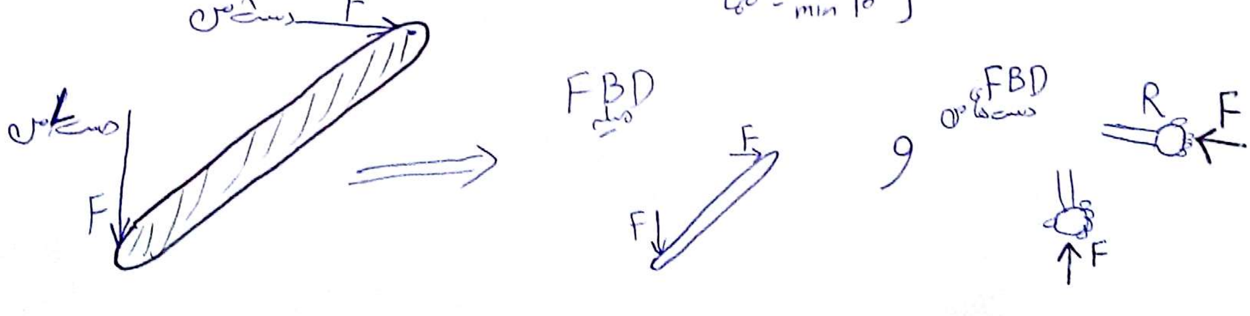
۲۰ min = حل

۵ min:



$\delta=\alpha L\Delta T$ فیزیک

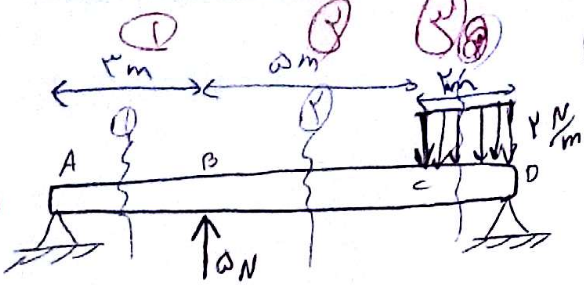
نکته اول:



۱

مثال

۳۵ min ×۲



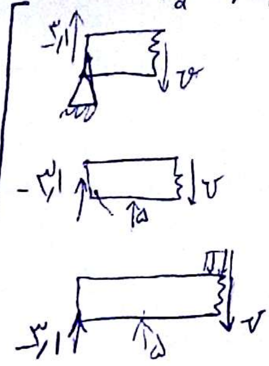
تعادل: $\Sigma F_y = 0 \rightarrow -4+5+R_{Ay}+R_{Dy}=0$

$\Sigma M_D = 0$

$10R_{Ay}+5\times5-4\times1=0$

$R_{Ay}=-3.1\ N$

V

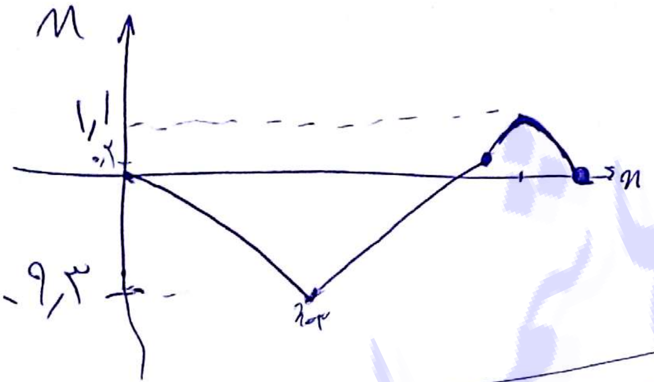


(1) $V=-3.1$

(2) $V=1.9$

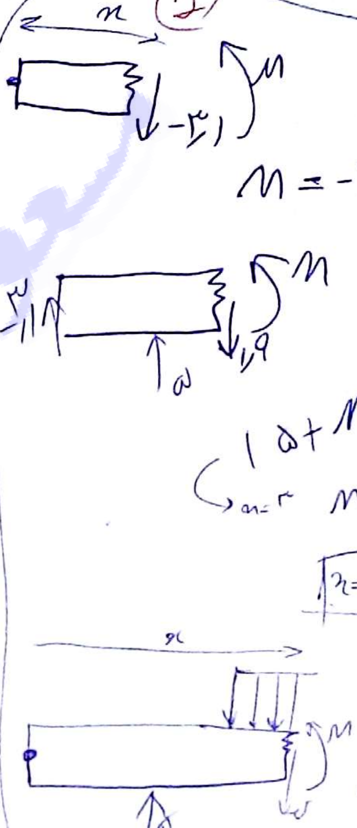
(3) $1.9 = V + 2(x-8)$

$V = 17.9 - 2x$



M

1st method



(1) $M = -3.1x$

(2) $15 + M = 1.9x$

$x=3 \rightarrow M=-9.3$

$x=8$

$15.2 - 15$

(3) $15+M=(17.9-2x)x+2(x-8)\left(8+\frac{x-8}{2}\right)$

$M=17.9x-2x^2+x^2-64-15$

$M_3 = -x^2+17.9x-79$

2nd method

گشتاور در هر نقطه = مساحت زیر نمودار $x-V$ تا آن نقطه.

$\frac{dM}{dx}=0 \rightarrow 17.9=2x \rightarrow x=8.95$

$\Rightarrow M(8.95)=1.1$

$? = M_{max}$ مثبت

نکته: بزرگ‌ترین ممان در این مثال بیشینه گشتاور وارده به جسم ۹٫۳ است

نکته: اگر بخواهیم از سمت راست عمل برش را انجام دهیم باز یک رابطه دیگر برای M می‌رسیدیم که همین جواب را به ما می‌داد

۲۰ min

ممان اینرسی چیه؟! میشه براش تعریف درست کرد ولی در واقع ما در مسائل مختلف به یک خانواده از انتگرال‌ها برمی‌خوریم. یکی گفت علی یکی حسن یکی ممان (moment) ... آخرش ممان انتخاب شد.

خانواده ممان‌ها سطح

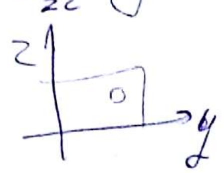
$$I_x - I_y - I_z \quad \dots \quad \underbrace{- I_{zy} - I_{xy} - I_{xx} - I_{zy}}_{\text{ممان اینرسی (ممان دوم) سطح}}$$

$I_x = \int y\,dA$ گشتاور اول (ممان اول)

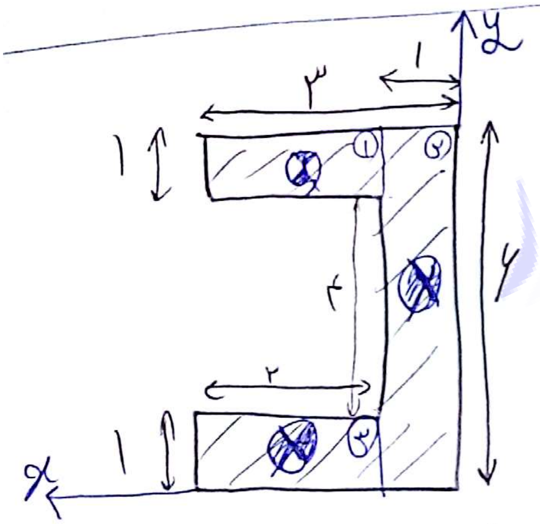
$I_{xy} = \int yx\,dA$

$I_{xx} = \int y^2\,dA$

$I_{zz} = \int x^2\,dA$



مثال) I_{xy} و I_{xy} و I_{xx} را حول مرکز سطح شکل مقابل بیابید. (optional)



ابتدا مرکز سطح

نوشته برا همین به دست آورد

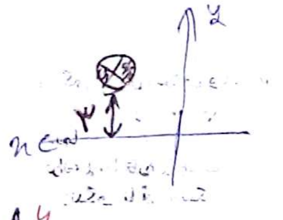
$$\bar{x} = \frac{I_{y\,\text{کل}}}{A_{\text{کل}}} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\bar{y} = \frac{I_{x\,\text{کل}}}{A_{\text{کل}}} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

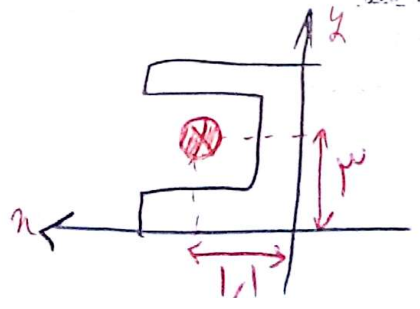
دقت کنید بسته به محورهایی که داریم $\bar{x}$ یا $\bar{y}$ هر کدام از $\bar{x}$ یا $\bar{y}$ها می‌توانند منفی باشند.

$$\bar{x} = \frac{2\times 2 + 0.5\times 6 + 2\times 2}{2 + 6 + 2} = 1.1 \Rightarrow$$

$$\bar{y} = \frac{5.5\times 2 + 3\times 6 + 0.5\times 2}{2 + 6 + 2} = 3 \Longrightarrow$$

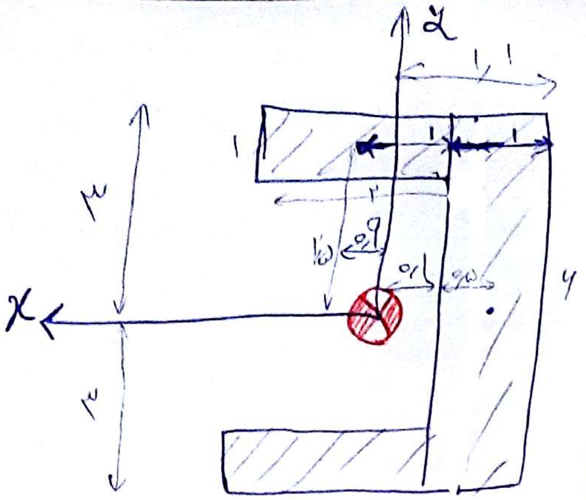


مرکز سطح $\Longrightarrow$

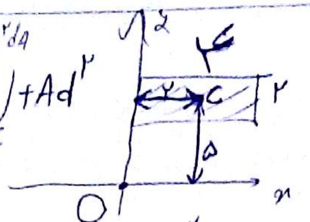


ادامه $\longrightarrow$

تغییر محورها:



نکته:



$$I_{xx/O} = \bar{I}_{xx/C} + Ad^2 \qquad \left(\int y^2 dA\right)$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12} \times 4 \times 2^3 + (2\times 4)\times 5^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} \times 2 \times 4^3 + (2\times 4)\times 2^2$$

$$I_{xx} = \int y^2 dA = \left(\frac{1}{12}\times 2\times 1^3 + (2\times 1)\times 2.5^2\right) + \left(\frac{1}{12}\times 2\times 1^3 + (2\times 1)\times(-2.5)^2\right) + \left(\frac{1}{12}\times 1\times 6^3 + (6\times 1)(0)^2\right)$$

$$= 12.7 + 12.7 + 18 = \underline{\underline{43.3}}$$

$$I_{yy} = \int x^2 dA = \left(\frac{1}{12}\times 1\times 2^3 + (2\times 1)\times 0.9^2\right) + \left(\frac{1}{12}\times 1\times 2^3 + (2\times 1)\times 0.9^2\right) + \left(\frac{1}{12}\times 6\times 1^3 + (6\times 1)(-0.6)^2\right)$$

$$= 2.29 + 2.29 + 2.66 = \underline{\underline{7.24}}$$

جسم ۱

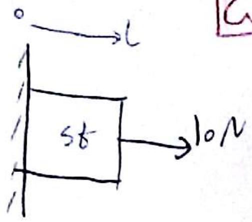
$$I_{xy} = \int xy\,dA = \sum_{i=1}^{3}\left(I_{xy_{c_i}} + A\times x_{c_i} y_{c_i}\right) = \left(0 + (2\times 1)\times(0.9)\times(2.5)\right) + \cancel{\left(0 + (6\times 1)\times(-0.6)\times(0)\right)}$$

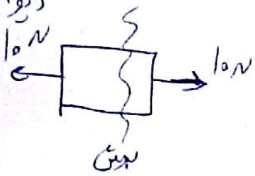
$$+ \left(0 + (2\times 1)\times(0.9)\times(-2.5)\right) = 4.5 + 0 - 4.5 = 0$$

پایان جلسه اول

جلسه دوم

$\boxed{5\ min}$

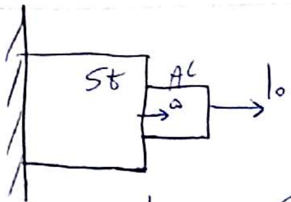




مقدار ? = δ

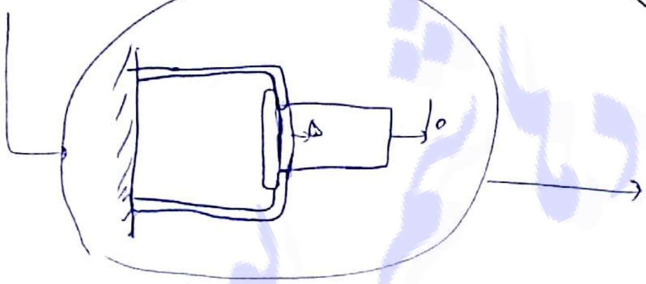
در هر برش نیروی وارد بر برش 10 خواهد بود.

فرمول کلی تغییر شکل $\delta = \int \frac{F}{EA} dL \xrightarrow{\text{این مسئله}} \delta = \frac{10}{A_{st}E_{st}} \int dL = \frac{10L}{AE}$

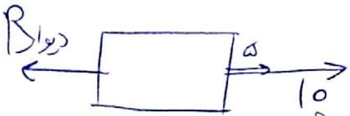


$\boxed{10 \times 2\ min}$

دوتا شفت که توی هم رفتند



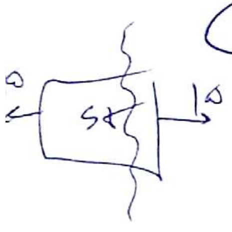
فقط میله ی st



چون 5 به میله AL چسبیده

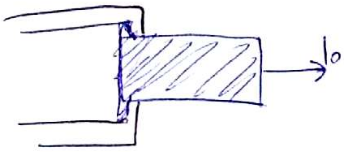
$\xRightarrow{\text{تعادل}} R_{دیوار} = 15$

پس:

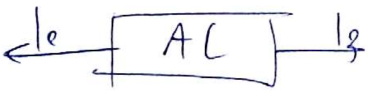


$\delta_{st} = \int \frac{15}{A_{st}E_{st}} dL = \frac{15 L_{st}}{A_{st}E_{st}}$

حال میله ی AL:



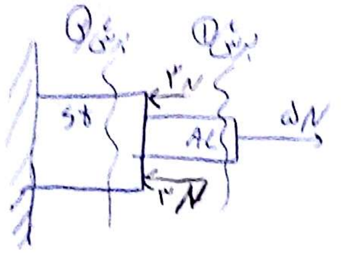
اگر بخواهد با نیروی 10 کشیده شود، میله st جلوی حرکتش را گرفته و به آن نیروی 10N وارد می کند تا از حرکت باز ایستد.

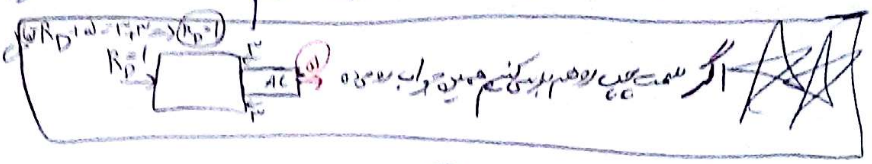


$\delta_{AL} = \int \frac{10}{A_{st}E_{st}} dl = \frac{10 L_{AL}}{A_{AL}E_{AL}}$

$\boxed{۱۲۵\ min}$

از الان به بعد برای اینکه انقدر تحلیل نکنیم اینکار را خواهیم کرد. [فرض می‌کنیم همه‌ی میله‌ها کشش داشته باشند]





برای AL: برش ①

و تمام طولش زیاد می‌شود $\delta_{AL}=\frac{5\,L_{AL}}{A_{AL}E_{AL}}$

برای St: برش ②

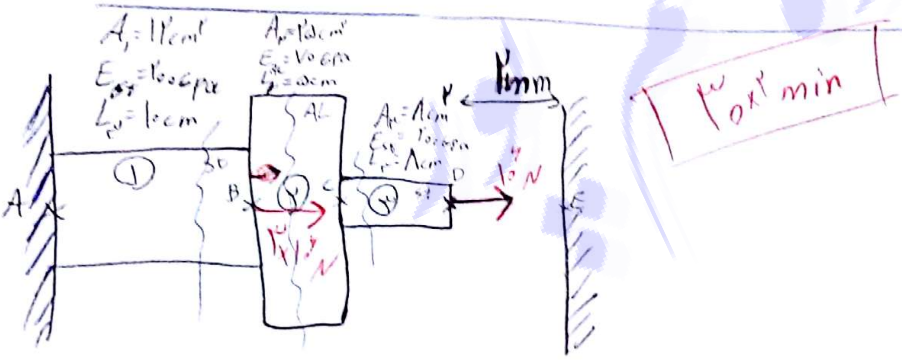
طول آن کم می‌شود $\delta_{St}=\frac{(-1)\,L_{St}}{A_{St}E_{St}}$

مثال) تنش در هر میله را بیابید.

کرنش

انحراف نقطه C نسبت به دیوار چپ.

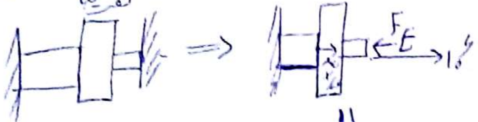
$\boxed{۳۰\times۲\ min}$



ابتدا باید دید با این نیروها تغییر طول‌ها به ۲mm می‌رسه. اگر نه که هیچی اگر رسید و بیشتر شد باید نیروی دیوار رو حساب کنیم.

$$\delta_{کل}=\delta_1+\delta_2+\delta_3=\frac{(3\times10^6+10^6)\times10\times10^{-2}}{200\times10^9\times12\times10^{-4}}+\frac{10^6\times5\times10^{-2}}{70\times10^9\times25\times10^{-4}}+\frac{10^6\times8\times10^{-2}}{200\times10^9\times8\times10^{-4}}=2.38mm$$

پس از $\boxed{2mm}$ رد می‌شه پس این معادلات کامل نیستند چون به هر میله نیروی F دیوار راست هم وارد میشه.



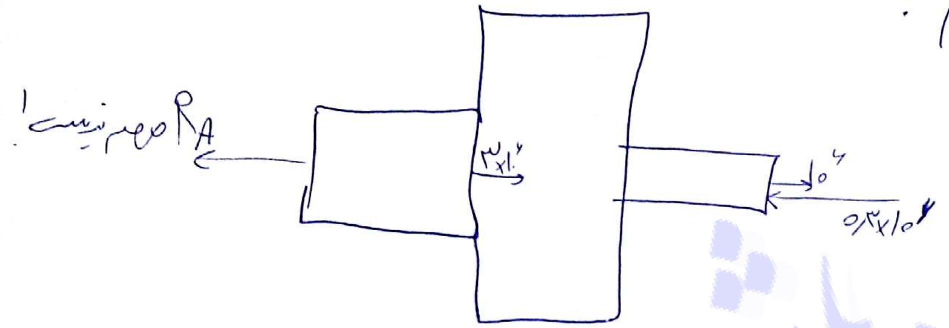
$$\frac{(10^6-F_E)L_3}{A_3E_3}+\frac{(10^6-F_E)L_2}{A_2E_2}+\frac{(3\times10^6+10^6-F_E)L_1}{A_3E_3}=\delta_0$$

از این رابطه F_E بدست می‌آید ⟵

$$\frac{(10^6 - F_E)\times 8\times 10^{-2}}{200\times 10^9 \times 8\times 10^{-4}} + \frac{(10^6 - F_E)\times 5\times 10^{-2}}{70\times 10^9 \times 25\times 10^{-4}} + \frac{(3\times 10^6 - F_E)\times 15\times 10^{-2}}{200\times 10^9 \times 12\times 10^{-4}} = 2\times 10^{-3}$$

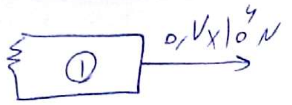
$$\Longrightarrow F_E = 0.3\times 10^6$$

پس ما چنین شکلی داریم :

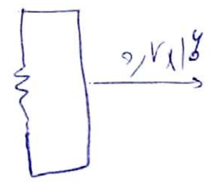


الف) تنش‌ها

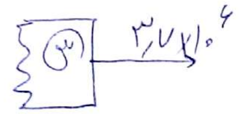
$$\sigma_1 = \frac{0.7\times 10^6}{8\times 10^{-4}} = 0.9\ Gpa$$ کششی



$$\sigma_2 = \frac{0.7\times 10^6}{25\times 10^{-4}} = 0.3\ Gpa$$ کششی



$$\sigma_3 = \frac{3.7\times 10^6}{12\times 10^{-4}} = 3\ Gpa$$ کششی



ب) کرنش‌ها $\varepsilon = \frac{\delta_i}{L_{0i}}$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{0.9\times 10^9}{200\times 10^9} = 0.0045$$ بدون واحد

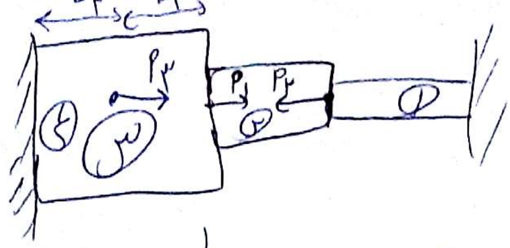
$$\varepsilon_2 = \frac{0.3\times 10^9}{70\times 10^9} = 0.0043$$

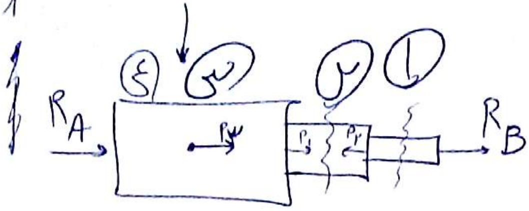
$$\varepsilon_3 = \frac{3\times 10^9}{200\times 10^9} = 0.015$$

ج) $\delta_{C/A} = ?$

$$= \delta_{C/B} + \delta_{B/A} = \delta_2 + \delta_1 = \dots$$

مثال) تنش ها را بیابید. $\boxed{25\ min}$





$$\frac{+R_B L_1}{A_1E_1} + \frac{(R_B-P_2)L_2}{A_2E_2} + \frac{(R_B+P_1-P_2)L_3}{A_3E_3} + \frac{(R_B+P_1+P_3-P_2)L_4}{A_4E_4} \longrightarrow R_B \checkmark \longrightarrow \begin{cases}\sigma_1 \checkmark\\ \sigma_2 \checkmark\\ \sigma_3 \checkmark\end{cases}$$

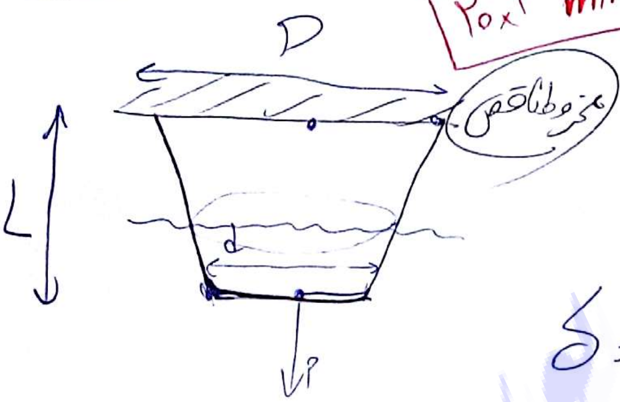
حل به عهده
آخر کوییز

$\boxed{20\times 2\ min}$

افزایش طول را برای دو حالت زیر بیابید

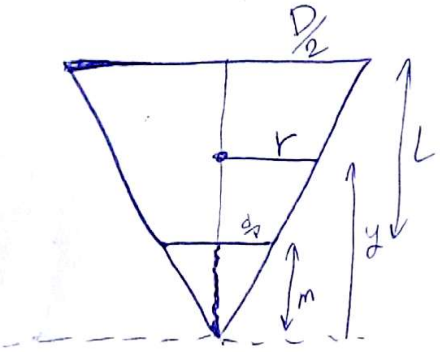
الف) فقط تحت P

ب) هم تحت اثر P و هم وزن سازه.



$$\delta = \int \frac{F}{AE}\, dl$$

الف) P و E ثابت $\delta = \frac{P}{E}\int \frac{dL}{A} = \frac{P}{E}\int \frac{dy}{A}$



$$A_i = \pi r^2$$

$$\frac{r}{y} = \frac{d/2}{m}$$

$$\frac{d/2}{m} = \frac{D/2}{m+L}$$

$$m\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right) = \frac{L}{D}$$

$$m = \frac{Ld}{D-d}$$

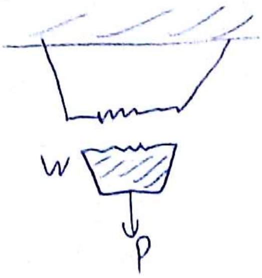
$$r = \frac{yd}{2} \times \frac{1}{\frac{Ld}{D-d}} = \frac{(D-d)}{2L} \times y$$

$$A = \frac{\pi (D-d)^2}{4L^2} y^2 = H y^2$$

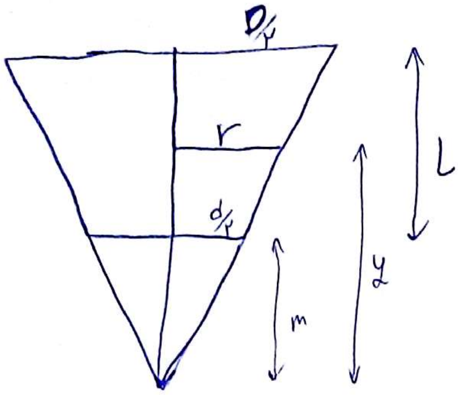
$$\delta = \frac{P}{E}\int \frac{dy}{Hy^2} = \frac{4PL^2}{E\pi(D-d)^2}\left(-\frac{1}{y}\right)\Big]_m^{m+L} = \checkmark$$

ادامه

ب) هر برشی از مادون هم P را تحمل می‌کند هم وزن زیرش را

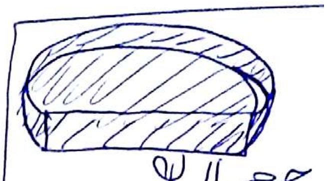


$$W(y) = ? \qquad \delta = \int_m^{L+m} \frac{P+W}{AE}\, dy$$



$$W = mg = \rho V_{(y)} g = \rho g V$$

$$V(y) = \int_m^y A\, dy$$



$$= \int_m^y \pi r^2\, dy$$

$$V = \pi \int \frac{(D-d)^2}{4L^2} y^2\, dy = \left(\text{مثلاً } \tfrac{11}{30}\right) \times \frac{y^3}{3}\Big]_m^y = \boxed{10y^3 - 7 = V(y)} \text{ مثلاً}$$

اعداد فرضی است!

$$W(y) = \rho g V(y) = \rho g (10y^3 - 7) = 17y^3 - 16 \quad \text{مثلاً}$$

$$\delta = \int_m^{L+m} \frac{P + 17y^3 - 16}{\frac{E}{4}\left(\pi \frac{(D-d)^2}{4L^2} y^2\right)}\, dy = \int_m^{L+m} \frac{-13\, dy}{4 \times 30\, y^2} + \int_m^{L+m} \frac{17\, y^3}{4 \times 30\, y^2}\, dy =$$

$$-0.1\left(-\frac{1}{y}\Big]_m^{L+m}\right) + 0.14\, \frac{y^2}{2}\Big]_m^{L+m}$$

$$= -0.1\left(-\left[\frac{1}{L+m} - \frac{1}{m}\right]\right) + 0.14\, \frac{(L+m)^2 - m^2}{2} = \underline{\qquad}$$

20×2

ویلیام (ایزو)

$A_1 = 0/5\ m^2$

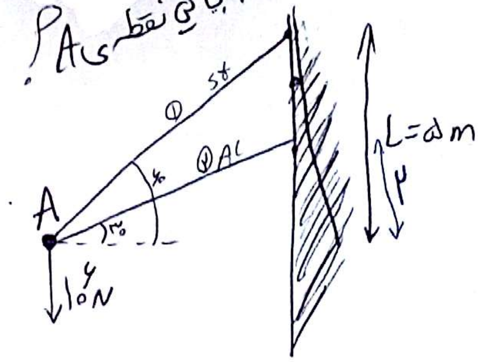
$A_2 = 0/4\ m^2$

$E_1 = 200\ GPa$

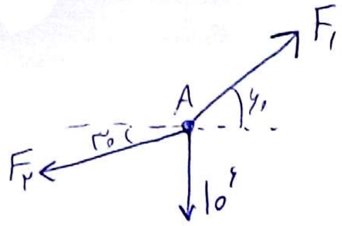
$E_2 = 70\ GPa$

باید با توجه به حس خود بفهمیم کدام کشیده و کدام فشرده می‌شود: دست‌ها

مثال) جابجایی نقطه‌ی A؟



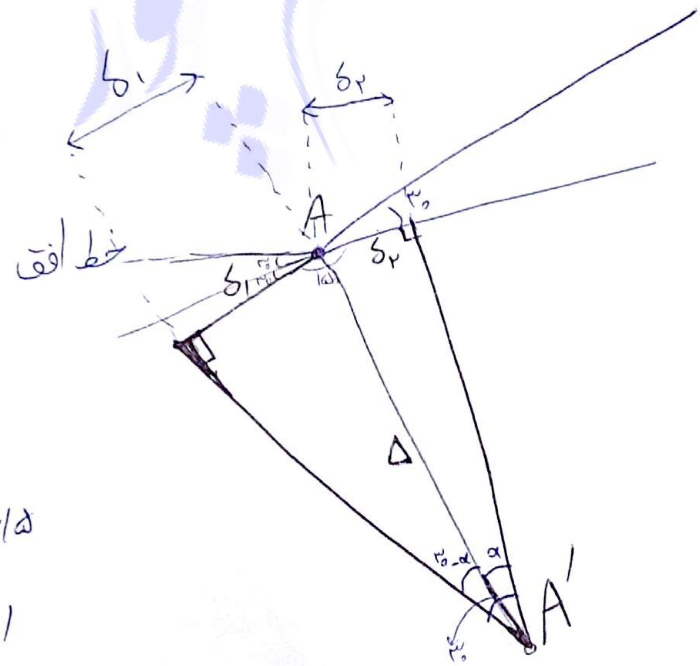
$$\begin{cases} F_1 \sin 40 = F_2 \sin 30 + 10^6 \\ F_1 \cos 40 = F_2 \cos 30 \Longrightarrow F_1 = 1/7 F_2 \end{cases}$$



$$1/7 F_2 (0/64) - 0/5 F_2 = 10^6 \Longrightarrow \begin{cases} F_2 = 1028549 \\ \downarrow \\ F_1 = 1/7 F_2 = 1748533 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = \frac{5}{\sin 40} = 5/8 \\ L_2 = \frac{2}{\sin 30} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} = 0/10\ mm \\ \delta_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} = 0/15\ mm \end{cases}$$



$\Delta \sin \alpha = \delta_2 = 0/15$

$\Delta \sin (30-\alpha) = \delta_1 = 0/1$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(30-\alpha)} = 1/5 \longrightarrow \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = 1/5 \longrightarrow \frac{tg\,\alpha}{0/5 - 0/87\,tg\,\alpha} = 1/5 \Longrightarrow tg\,\alpha = 0/32$$

$$\boxed{\alpha = 18}$$

10

$$\Longrightarrow \Delta \sin 18 = \delta_2 = 0/15 \Longrightarrow \boxed{\Delta = 0/49\ mm}$$

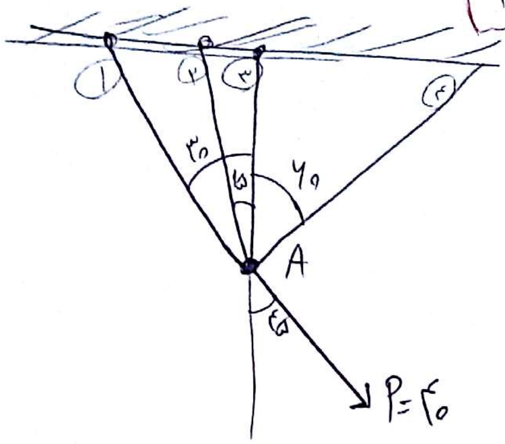
جلسه چهارم

15×2

(پاسخ‌ها)

الف) تنش هر میله

ب) جابجایی نقطه A



$E_1 = 2 \quad A_1 = 4$

$E_2 = 3 \quad A_2 = 6$

$E_3 = 4 \quad A_3 = 8$

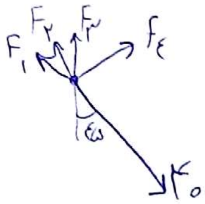
$E_4 = 5 \quad A_4 = 10$

$L_1 = 7.5$

$L_2 = 6.7$

$L_3 = L_4 \cos 60 = 6.5$

$L_4 = 13$

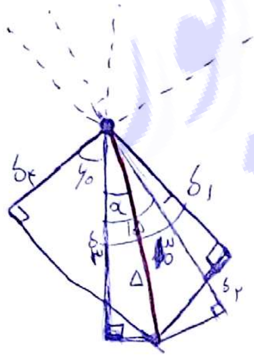


$\Sigma F_x = 0 \qquad F_4 \sin 60 + 40 \sin 45 = F_2 \sin 15 + F_1 \sin 30$

$\Sigma F_y = 0 \qquad 40 \sin 45 = F_4 \cos 60 + F_3 + F_2 \cos 15 + F_1 \cos 30$

۲ معادله کم داریم

می‌دانیم که میله‌ها فشرده شده ولی چون دیگه کششی گرفتیم مشکلی نیست خود α مشکل را حل خواهد کرد



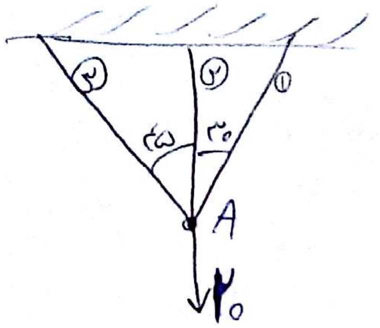
$$\begin{cases} \Delta \cos\alpha = \delta_3 = \dfrac{F_3 \times 7.5}{2 \times 4} \\ \Delta \cos(15-\alpha) = \delta_2 = \dfrac{F_2 \times 6.7}{3 \times 6} \\ \Delta \cos(30-\alpha) = \delta_1 = \dfrac{F_1 \times 6.5}{4 \times 8} \\ \Delta \cos(60+\alpha) = \delta_4 = \dfrac{F_4 \times 13}{5 \times 10} \end{cases}$$

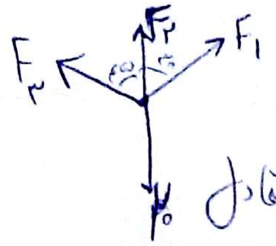
با تقسیم دو به دو این چهار معادله Δ حذف می‌شود و روابطی بین Fها بدست می‌آید و

می‌توان همه را برحسب α و F_1 نوشت. سپس همه را در معادلات تعادل گذاشت و حل کرد!

مثال تنش میله ۲؟

$\boxed{20 \times 2}$



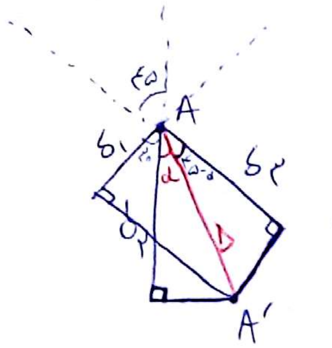


تعادل
$$\begin{cases} F_1 \sin 30 = F_3 \sin 45 \to \boxed{F_1 = 1.4 F_3} \\ F_2 + F_1 \cos 30 + F_3 \cos 45 = 20 \end{cases}$$

شاید فکر کنیم کافیست رابطه‌ی دیگری بین F_2 و F_3 بیابیم تا هر ۳ نیروی مشخص شوند.

$$F_2 = 20 - 1.93 F_3 \qquad \text{I}$$

اما در این مسائل α هم مجهول است.



① $\Delta \cos(30+\alpha) = \delta_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} = 0.5 F_1$ مثلاً

② $\Delta \cos(45-\alpha) = \delta_3 = \frac{F_3 L_3}{A_3 E_3} = 0.3 F_3$ مثلاً!!

③ $\Delta \cos\alpha = \delta_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} = \frac{1}{4} F_2$ فرضی!!

$$\frac{\frac{\sqrt2}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt2}{2}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos(45-\alpha)}{\cos\alpha} = 1.2\frac{F_3}{F_2} \Longleftarrow ② \text{ و } ③$$

$$\frac{\sqrt2}{2}(1 + tg\alpha) = 1.2\frac{F_3}{F_2} \Longrightarrow \boxed{F_3 = 0.6(1+tg\alpha)F_2} \qquad \text{II}$$

$$\frac{\cos(30+\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{2F_1}{F_2} = \frac{\overset{0.87}{\cos 30}\cos\alpha - \overset{0.5}{\sin 30}\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0.87 - 0.5\, tg\alpha \Longleftarrow ① \text{ و } ③$$

$$\boxed{F_1 = (0.43 - 0.25\, tg)F_2} \qquad \text{III}$$

تعادل $F_1 = 1.4 F_3 \Longrightarrow$ II و III $\Longrightarrow$ $1.4 F_3 = (0.43 - 0.25\, tg)F_2$

$$1.4\left((0.6 + 0.6\, tg\alpha)\cancel{F_2}\right) = (0.43 - 0.25\, tg\alpha)\cancel{F_2}$$

$1.1 \quad tg\alpha = -0.41 \Longrightarrow \alpha = -20.4$ مشکلی نیست $\overset{\text{II}}{\Longrightarrow} F_3 = 0.38 F_2 \overset{\text{I}}{\Longrightarrow} \boxed{F_2 = 11.6}$ جواب

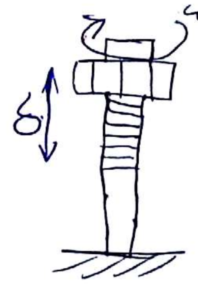
یعنی α در واقعیت به سمت چپ خط عمود بازشده است.

$\boxed{25\times2\ min}$

پیچ و مهره)

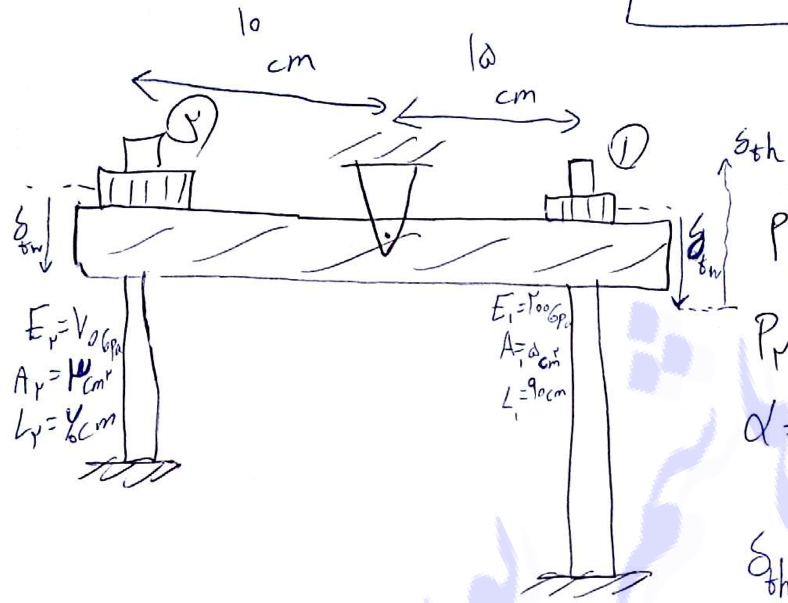
ب: اگر جسم صلب نباشد، در اثر افزایش دما، افزایش طول خواهیم داشت: $\delta_{th}=\alpha L \Delta T$

ت)



$$\boxed{\delta_{twist} = n\,p}$$

n: تعداد چرخش — p: گام



مثال) تنش حرارتی؟

$P_1 = 0.5\,mm$

$P_2 = 1.2\,mm$

$\alpha = \frac{1}{8}\times10^{-4}$

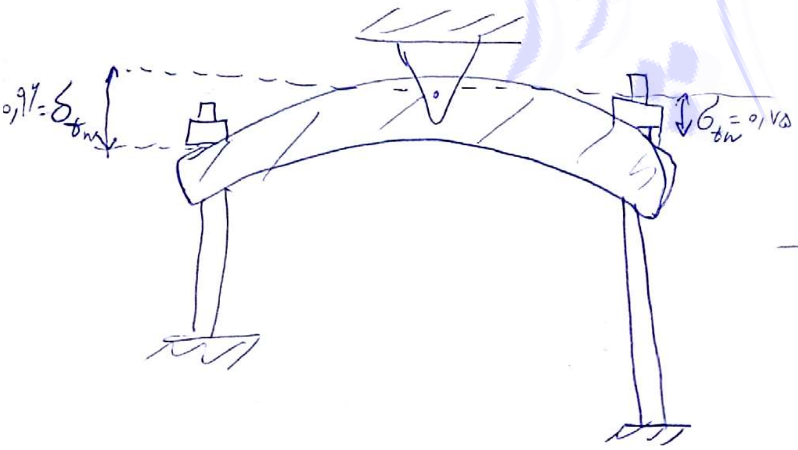
اگر مهره‌ی ① را ۱.۵ دور و مهره ② را ۰.۸ دور بچرخانیم و به میله ① گرما بدهیم تا $\Delta T = 40^\circ$ شود.

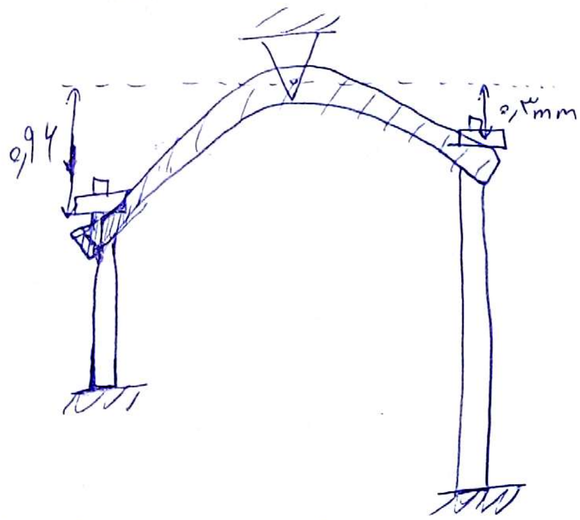
$\delta_{th_1} = \alpha L_1 \Delta T = \frac{1}{8}10^{-4}\times 90\times10^{-2}\times 40 = 0.45\,mm$ به بالا

$\delta_{tw_1} = n_1 P_1 = 1.5\times 0.5\,mm = 0.75\,mm$ به پایین

$\delta_{tw_2} = n_2 P_2 = 0.8\times 1.2\,mm = 0.96\,mm$

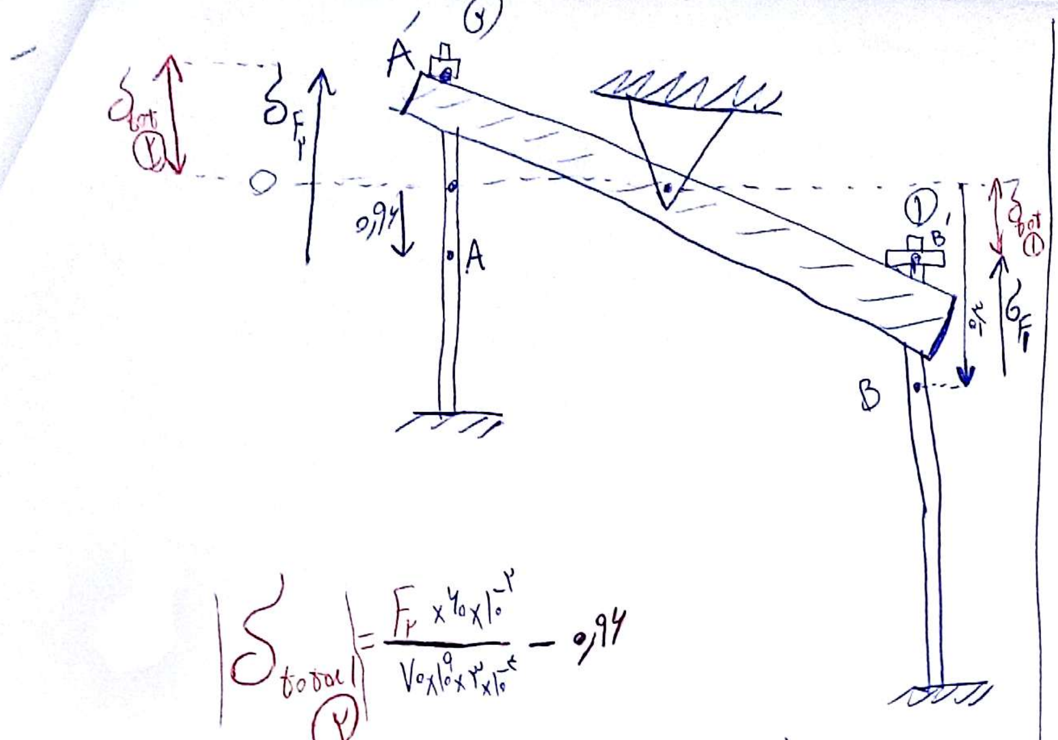
$\delta_{total_1} = 0.3$ پایین





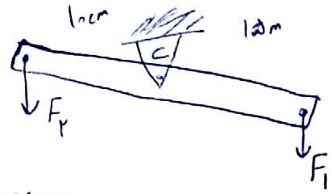
حال برای آنکه جسم صلب به حالت اول برگردد باید به دو میله نیروهای F_1 و F_2 وارد کند.

اما در واقعیت جسم صلب خم نمی‌شه. حالا باید حدس بزنیم کدام طرف کم میشه که فقط کافیه که فرض کنیم به صورت دلخواه چپ میره یا راست.



تعادل

وقتی جسم صلب میله ی ۲ را به بالا بکشد میله ی ۱ آن را به سمت پایین می کشد



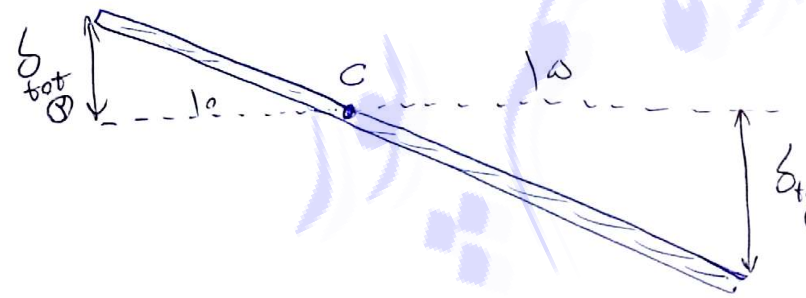
$\Sigma M_C = 0$

$10F_2 = 15F_1$

$\boxed{F_2 = 1.5F_1}$ I

$$\left|\delta_{total}\right|_{(2)} = \frac{F_2 \times 60 \times 10^{-2}}{70\times10^{9}\times 3\times10^{-4}} - 0.96$$

$$\left|\delta_{total}\right|_{(1)} = 0.3 - \frac{F_1 \times 90 \times 10^{-2}}{200\times10^{9}\times 5\times10^{-4}}$$



سازگاری :

$$\frac{\delta_{tot(1)}}{15} = \frac{\delta_{tot(2)}}{10}$$

$\boxed{\delta_{tot(1)} = 1.5\,\delta_{tot(2)}}$ II

: II و I $\Leftarrow$

$$0.3 - 0.09\times10^{-7}F_1 = 1.5\left((1.5F_1)\times0.3\times10^{-7} - 0.96\right)$$

$\Longrightarrow$ $F_1 = 22.4$ MN $\Longrightarrow$ $F_2 = 33.9$ MN

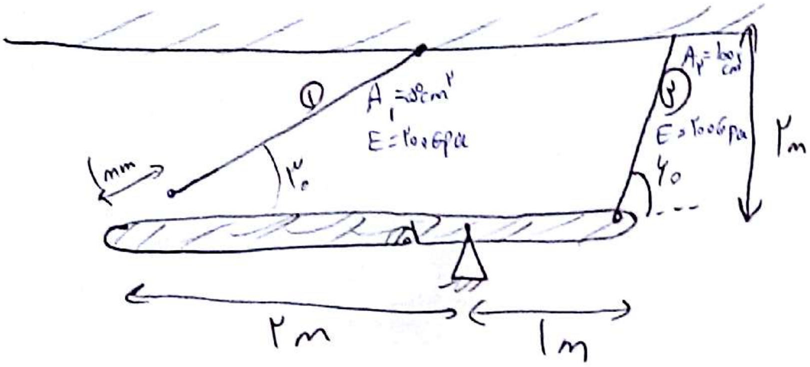
$$\Longrightarrow \sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{22.4\ \text{MN}}{5\times10^{-4}} = 45.2\ \text{GPa} \quad / \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{33.9\ \text{MN}}{3\times10^{-4}} = 11.3\ \text{GPa}$$

(ادامه مطلب‌ها)

جلسه پنجم

$\boxed{30 \times 2}$

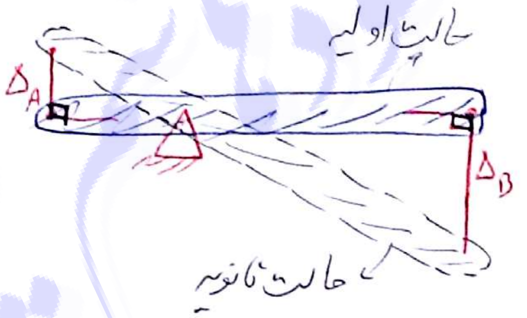
مثال) میله‌ی ① را به جسم صلب وصل می‌کنیم. تنش در میله ② و ① ؟



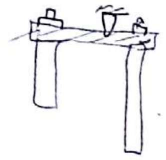
آخر جلسه دبکر؟ پیشتیبانی

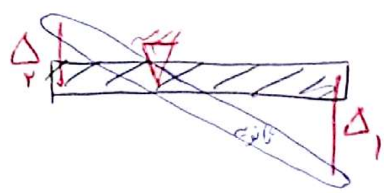
نکته‌ی بسیار مهم: تغییر نقاط انتهایی اجسام صلب همواره بر حالت اول عمود است. (چون لولاها کوچک‌اند)

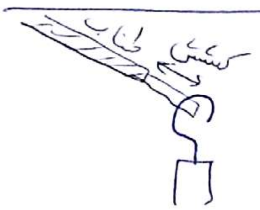
یعنی



اگر یادتان باشد در مثال پیچ و مهره هم، تغییر جهت‌های جسم صلب اینگونه بود.







همانطور که اگر طناب به قلابی بسته شود کشیده می‌شود (نیرو کمان)

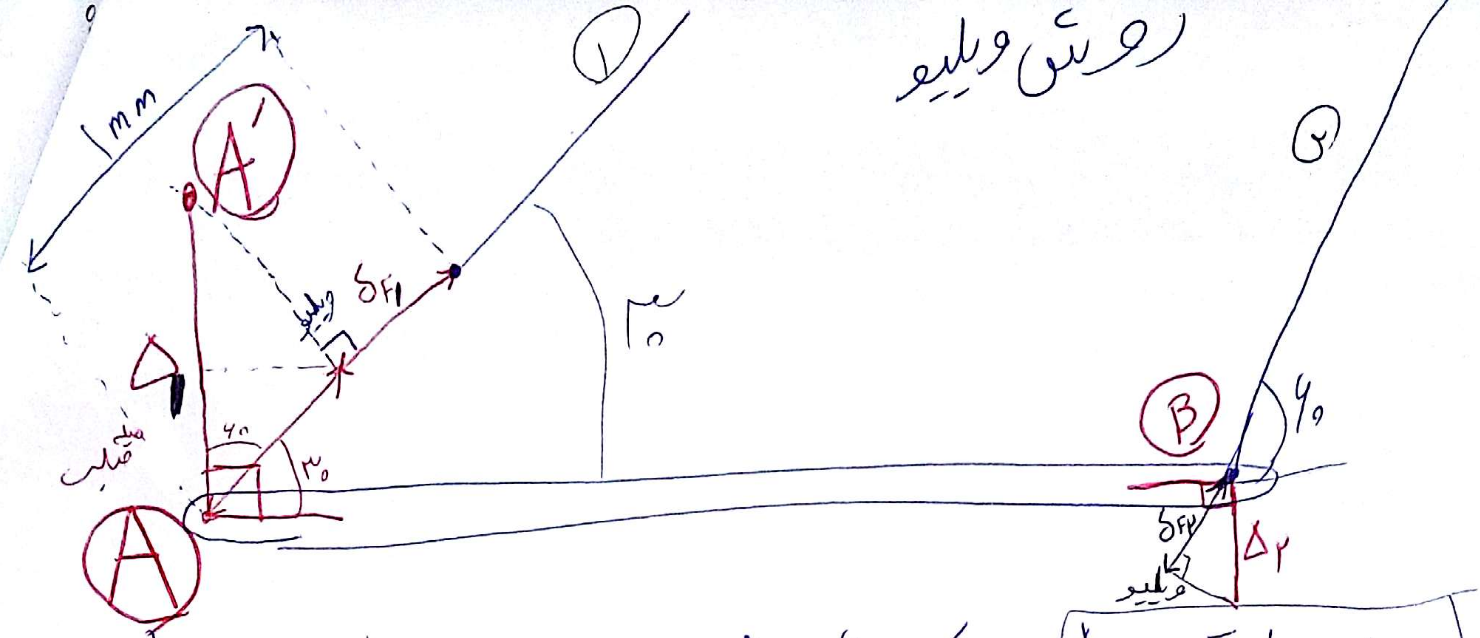
اگر جسم صلب را برسانیم به میله ① و کشش بدهیم، جسم صلب میله ① را خواهد کشید. پس میله ① هم جسم صلب را می‌کشد.

تعادل نیرو نمی‌نویسیم چون R_x و R_y مجهول‌اند

$$\sum M_c = 0 \longrightarrow (F_1 \sin 30) \times 2 = 1 \times (F_2 \sin 60)$$

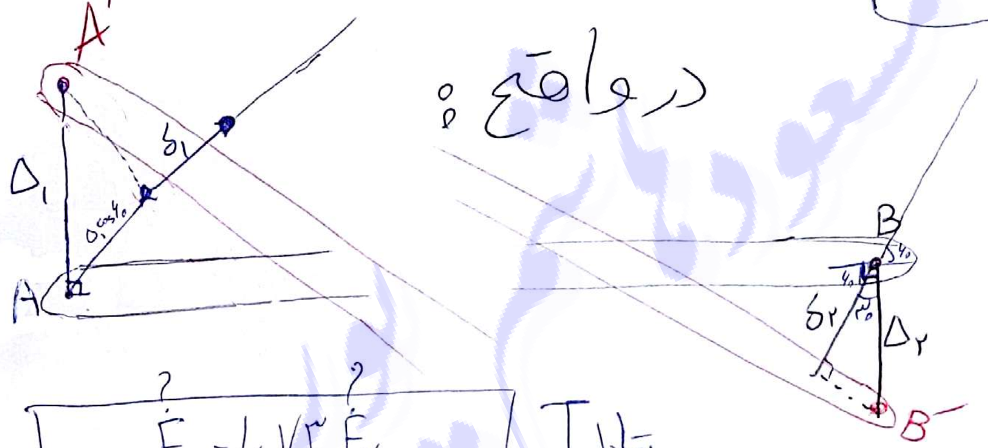
$$\boxed{F_1 = 1.73\,F_2} \quad \text{I}$$

روش ویلیو



در واقع: $1mm = x + y = \Delta_1 \cos 60 + \delta_{F_1} = \boxed{\frac{\Delta_1}{2} + \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} = 1mm}$

در واقع:

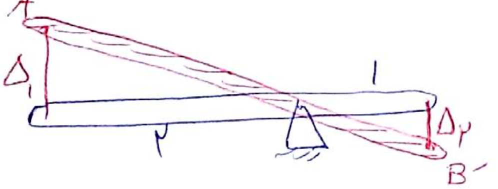


$$\boxed{\Delta_2 \sin 30 = \delta_2}$$

$$\boxed{\overset{?}{F_1} = 1.73\, \overset{?}{F_2}} \quad \text{تعادل I}$$

پس اولاً: $\boxed{1mm = \frac{\overset{?}{\Delta_1}}{2} + \frac{F_1 \times \frac{2}{\sin 30}}{200\times10^{9}\times 50\times10^{-6}}}$ II

و ثانیاً:



$$\frac{\Delta_2}{1} = \frac{\Delta_1}{2}$$

$$\boxed{\Delta_1 = 2\Delta_2} \quad \text{III}$$

و ثالثاً: $\Delta_2 \sin 30 = \delta_2 = \frac{F_2 \times \frac{2}{\sin 60}}{200\times10^{9}\times100\times10^{-6}}$

$$\boxed{\Delta_2 = 2.31\times10^{-9}\times F_2} \quad \text{IV}$$

III و IV:

$$\Delta_1 = 4.62\times10^{-9} F_2$$

II

$$\boxed{10^6 = 2.3 F_2 + 4 F_1} \Longleftarrow 1mm = \frac{4.62\times10^{-9} F_2}{2} + \frac{F_1 \frac{2}{\sin 30}}{200\times10^{9}\times50\times10^{-6}}$$

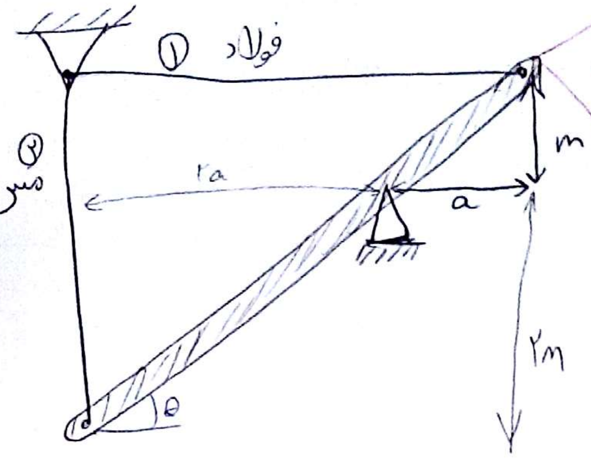
و تعادل I $\longrightarrow 10^6 = 2.3F_2 + 6.92F_2 \longrightarrow F_2 = 108.5\,kN$ و $F_1 = 187.6\,kN \longrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 37.53\,MPa \\ \sigma_2 = 10.85\,MPa \end{cases}$

مثال) دو میله ① و ② را به اندازه ΔT گرم می‌کنیم. تنش در هر یک؟

۲۰×۲

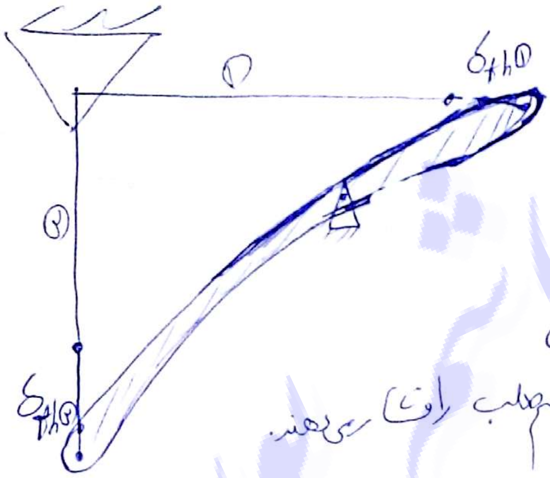
ΔT

α_1 و α_2



$\delta_{th_1} = \alpha_1 L_1 \Delta T$

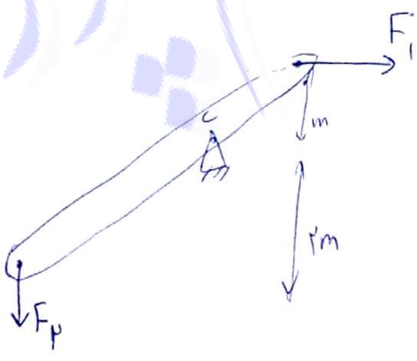
$\delta_{th_2} = \alpha_2 L_2 \Delta T$



ولی جسم صلب که خم نمی‌شود

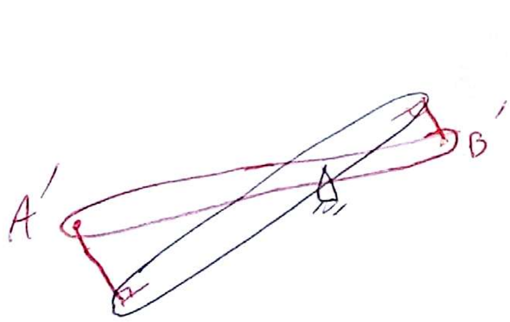
پس به هر دو میله نیروی فشاری

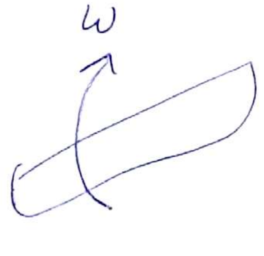
وارد خواهد کرد. پس آن دو میله هم جسم صلب را فشار می‌دهند.



$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow \boxed{mF_1 = 2aF_2}$ I

حالا فرض می‌کنیم که میله صلب به یک طرف بچرخد (حالا مهم نیست کدام طرف)

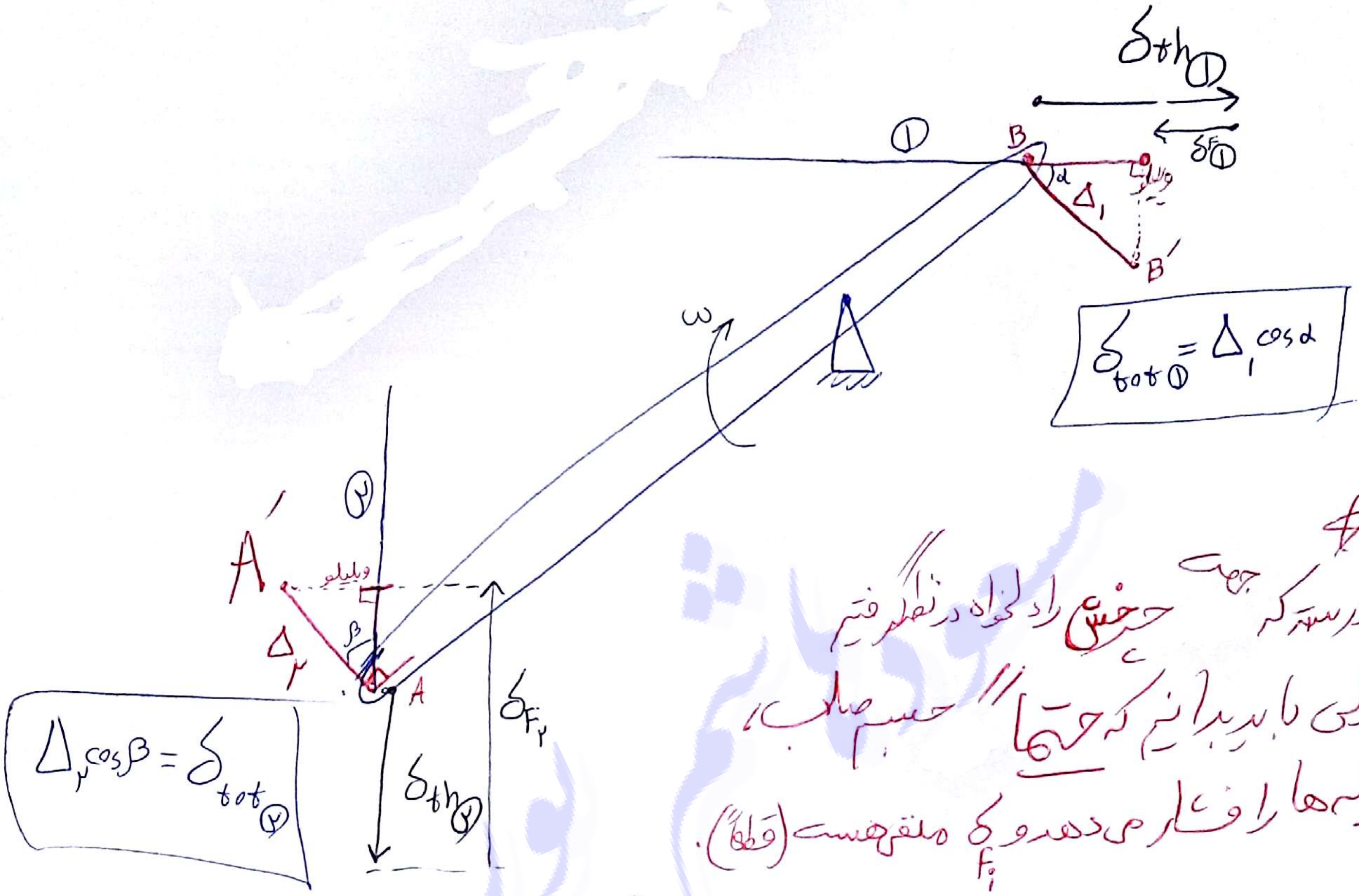




فرضا

Scanned by CamScanner

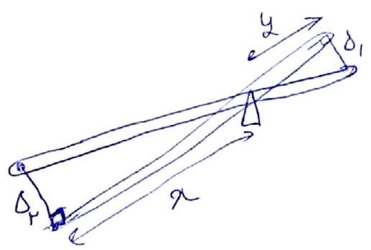
$$\boxed{F_1 = \frac{2a_1}{m} F_2}$$ تعادل I



$$\boxed{\delta_{tot_{①}} = \Delta_1 \cos\alpha}$$

$$\boxed{\Delta_2 \cos\beta = \delta_{tot_{②}}}$$

ن) در سیستم که جهت چرخش را دلخواه در نظر گرفتیم ولی باید بدانیم که حتماً «جسم صلب» میله‌ها را فشار می‌دهد و که F_1 ملقی هست (قطعاً).



$$\boxed{\frac{\Delta_2}{x} = \frac{\Delta_1}{y}} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \Delta_1 \cos\alpha = \alpha_1 L_1 \Delta T - \dfrac{\overset{?}{F_1} L_1}{A_1 E_1} \\ \Delta_2 \cos\beta = \dfrac{\overset{?}{F_2} L_2}{A_2 E_2} - \alpha_2 L_2 \Delta T \end{cases}$$

$$\frac{1}{\cos\beta}\left(\frac{L_2}{A_2E_2}\overset{?}{F_2} - \alpha_2 L_2 \Delta T\right) = \frac{x}{y\cos\alpha}\left(\alpha_1 L_1 \Delta T - \frac{L_1}{A_1E_1} F_1\right) \quad \text{II}$$

$$\Longrightarrow \quad F_1 \to \sigma_1, \quad F_2 \to \sigma_2$$

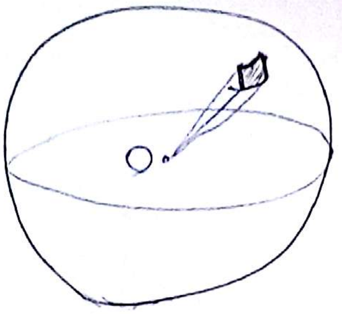
مجهول‌ها به قرمز

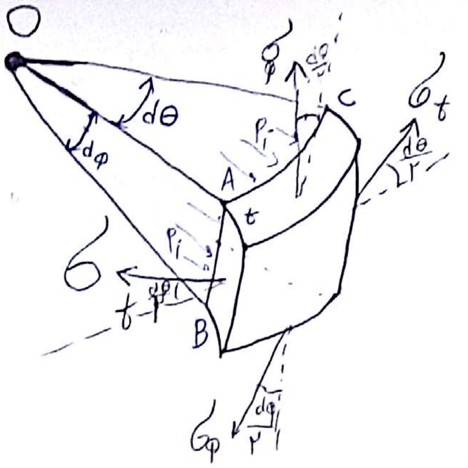
$$F_1 = \frac{2a}{m} F_2 \quad \text{I}$$

جلسه ششم

$۱۵^{۲}$ min

مخزن تحت فشار
با ضخامت t

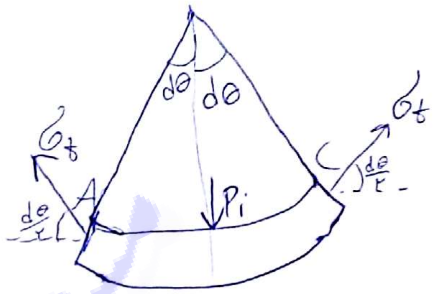




→ Optional: اثبات

$$\overset{\frown}{AB} = r_\varphi d_\varphi$$

$$\overset{\frown}{AC} = r_t d\theta$$



$$\sum F_r = 0 \qquad 0 = P_i(\overset{\frown}{AC} \times \overset{\frown}{AB}) - ۲\sigma_t \sin\left(\frac{d\theta}{۲}\right) \times (t\overset{\frown}{AB}) - ۲\sigma_\varphi \sin\left(\frac{d\varphi}{۲}\right) \times (t\overset{\frown}{AC})$$

$$\div t\overset{\frown}{AC}\overset{\frown}{AB}$$

$$\frac{P_i}{t} = \frac{۲\sigma_t \sin\left(\frac{d\theta}{۲}\right)}{\overset{\frown}{AC}} + \frac{۲\sigma_\varphi \sin\left(\frac{d\varphi}{۲}\right)}{\overset{\frown}{AB}}$$

$$\frac{P_i}{t} = \frac{\sigma_t\, d\theta}{ds_t} + \frac{\sigma_\varphi\, d\varphi}{ds_\varphi} = \frac{\sigma_\varphi}{r_\varphi} + \frac{\sigma_t}{r_t}$$

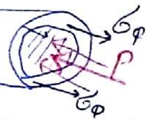
$$\frac{P}{t} = \frac{\sigma_\varphi}{r_\varphi} + \frac{\sigma_t}{r_t}$$

معادله لاپلاس

مثال: مخزنی به ضخامت t=5mm شامل گازی با فشار ۱۵۰ atm است. تنش ماکزیمم را بیابید.

لاپلاس $\frac{P}{t} = \frac{\sigma_\varphi}{\cancel{r_\varphi}_{\infty}} + \frac{\sigma_t}{r_t} \Longrightarrow \frac{۱۵۰\times۱۰^{۵}}{۵\times۱۰^{-۳}} = \frac{\sigma_t}{۸\times۱۰^{-۲}} \rightarrow \sigma_t = ۲۴\times۱۰^{۷}\ pa = ۲۴۰۰\ atm$ ← max

$\sigma_\varphi = ?$

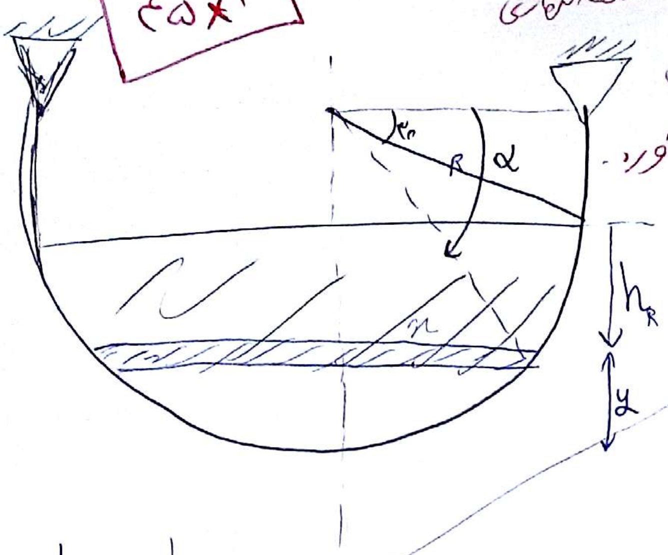


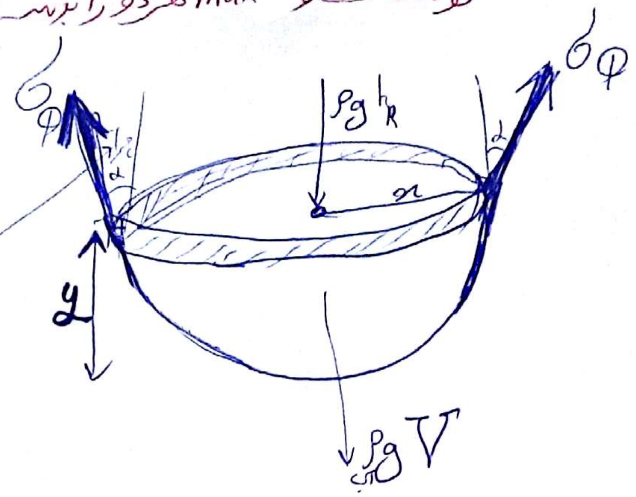
$\sigma_\varphi(۲\pi R t) = P(\pi R^{۲}) \rightarrow \sigma_\varphi = \frac{PR}{۲t} = ۱۲۰۰\ atm$

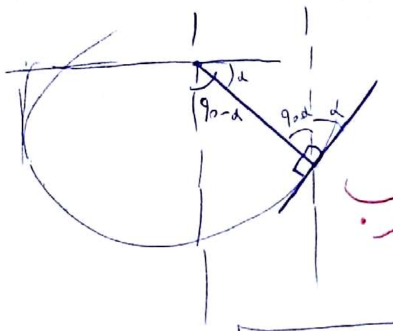
مثال) زاویه‌ی α را پیدا کنید درجایی که تنش نصف النهاری max شود.

45×2

باید σ_φ را در دو قسمت بالای آب و زیر آب نوشت و max هر دو را بدست آورد.

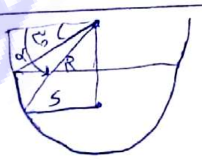






زیر آب: $(\sigma_\varphi \cos\alpha)\left(t(2\pi \overset{R\cos\alpha}{x})\right) = \rho g\left(R\sin\alpha - R\sin 30\right) + \rho g V_x$

یافتن V_x:



$$V=\int_0^y A(y)\,dy = \pi\int_0^\alpha s^2\,dy$$

اولاً $s=R\sin(90-\alpha)=R\cos\alpha$ ثانیاً $y=R-R\sin\alpha \rightarrow dy=-R\cos\alpha\,d\alpha$

$$V=-\pi R^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\cos^2\alpha(\cos\alpha)\,d\alpha = -\pi R^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)\,d\alpha = \pi R^3\sin\alpha\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} + \pi R^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\sin^2\alpha\cos\alpha\,d\alpha$$

$\sin\alpha=u$, $\int u^2\,du=\frac{u^3}{3}\Big]_{\sin 90}^{\sin\alpha} = \frac{1}{3}(\sin^3\alpha-1)$

$$=\pi R^3-\pi R^3\sin\alpha+\frac{\pi R^3}{3}\left(\sin^3\alpha-1\right)$$

$$V=\frac{2}{3}\pi R^3+\frac{\pi R^3}{3}\left(\sin^3\alpha-3\sin\alpha\right)$$

$$\sigma_\varphi\times 2\pi t\times\cos^2\alpha=\rho g\left(R\sin\alpha-\frac{R}{2}+\frac{2}{3}\pi R^3+\frac{\pi R^3}{3}\sin^3\alpha-\pi R^3\sin\alpha\right)$$

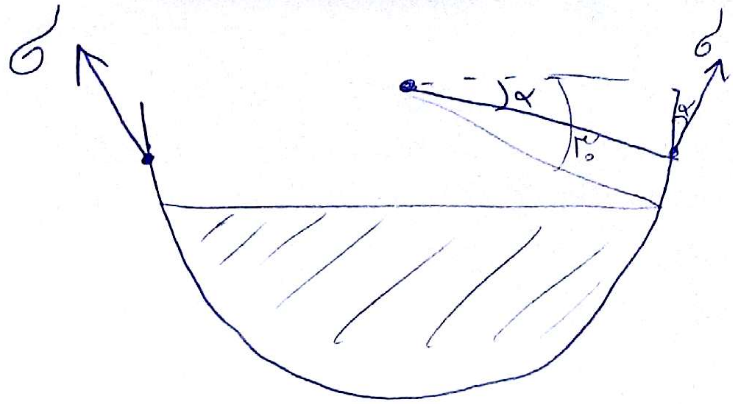
(!) لازم نیست مشتق را بگیریم تا همینجا بنویسیم کافیه.

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\alpha}=0 \longrightarrow \alpha\checkmark \longrightarrow \sigma_{\varphi\,max}\checkmark$$

حال برای بالای آب

np

حالا با آب



$$\sigma_\varphi\, 2\pi x\, t = \text{وزن کل آبی} = \rho g V_{\text{کل}}$$

$$\boxed{V_{\text{روی دالشتم}} = \frac{2\pi R^3}{3} + \frac{\pi R^3}{3}\left(\sin^3\alpha - 3\sin\alpha\right) \xrightarrow{\ \alpha = 30\ } = \frac{2\pi R^3}{3} + \frac{\pi R^3}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{2}\right) = 0/21\,\pi R^3}$$

۴۶-۶

$$\sigma_\varphi = \frac{0/21\,\rho g \cancel{\pi} R^{\cancel{3}\,2}}{t\, 2\cancel{\pi} \cancel{R} \cos\alpha} = \text{کلابی} \times \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\alpha} = 0 \Longrightarrow \text{کلابی}\,\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0} \longrightarrow \sigma_{\varphi_{max}} = \text{کلابی} \\ \alpha = 90 \longrightarrow \sigma_{\varphi_{min}} = 0 \end{cases}$$

$\boxed{5\times 2}$

۰) نخ در سی X . فرق $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{\partial y}{\partial x}$ و $\frac{\delta y}{\delta x}$ ؟

$\frac{\delta y}{\delta x}$ مشتق نیست تقسیم است

$\frac{dy}{dt}$ مثلا رفتار آمریکا تابعی از رفتار ایران و اسرائیل است
تابع (مشتق) تغییرات رفتار آمریکا.

فقط نسبت به ایران

$$(1)\quad \frac{d(\text{رفتار آمریکا})}{dt} = \left[\frac{\partial(\text{رفتار آمریکا})}{\partial(\text{رفتار ایران})} \times \frac{d(\text{رفتار ایران})}{dt}\right] + \left[\frac{\partial(\text{رفتار آمریکا})}{\partial(\text{رفتار اسرائیل})} \times \frac{d(\text{رفتار اسرائیل})}{dt}\right]$$

$$(2) \Rightarrow \underbrace{\Delta(\text{ر.آمریکا})}_{\text{تغییرات رفتار آمریکا}} = \frac{\partial(\text{ر.آمریکا})}{\partial(\text{ر.ایران})} \times \Delta(\text{ر.ایران}) + \frac{\partial(\text{ر.آمریکا})}{\partial(\text{ر.اسرائیل})} \times \Delta(\text{ر.اسرائیل})$$

$\boxed{6\times 2}$ اثبات

$$(1)\quad \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$(2)\quad \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$(3)\quad \tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$(1)\quad \left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2\cos^2 2\theta + \tau_{xy}^2\sin^2 2\theta + (\sigma_x-\sigma_y)\tau_{xy}\cos 2\theta\sin 2\theta$$

$$(3)\quad \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2\sin^2 2\theta + \tau_{xy}^2\cos^2 2\theta - (\sigma_x-\sigma_y)\tau_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta$$

جمع

$$\underbrace{\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2}_{(x-c)^2} + \underbrace{\tau_{x'y'}^2}_{y^2} = \underbrace{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}_{R^2}$$

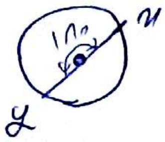
$$(x-c)^2 + y^2 = R^2$$

معادله ی دایره ی مور → این معادله رو آقای مور پیدا کرد

بعد این اثبات از $\cos 2\theta$ و $\sin 2\theta$ استفاده شده پس هرچه از دایره خارج شود باید برحسب θ باشد و هرچه وارد شود باید 2θ باشد

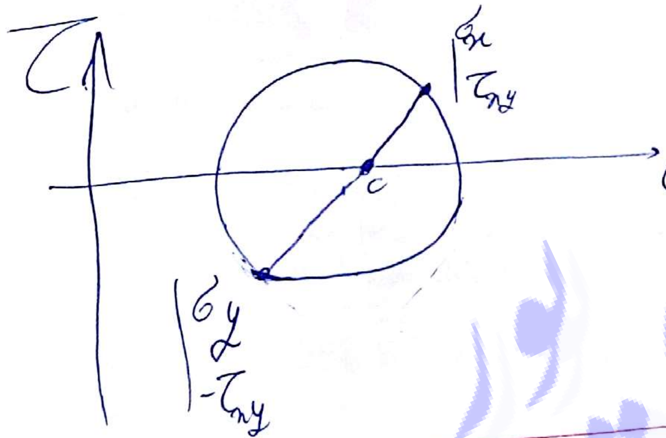
** پس به یک دایره رسیدیم که زاویه اش 2θ است. یعنی اگر مثلاً زاویه بین دو محور x و y در واقعیت 90° باشد در دایره مور 180 است.

5×2



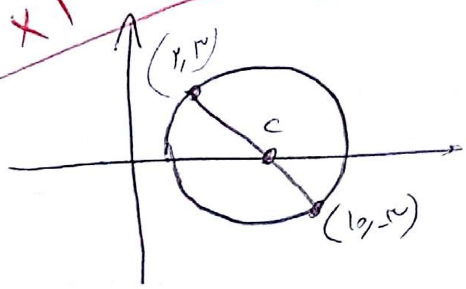
* از این به بعد عمودی ها را روی محور x و تصویر عکس و عدد τ را روی محور y

پس ما دو نقطه به مختصات $\begin{vmatrix}\sigma_x\\ \tau\end{vmatrix}$ ① و $\begin{vmatrix}\sigma_y\\ -\tau\end{vmatrix}$ ② داریم خط واصل این ها از $\begin{vmatrix}\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\\ 0\end{vmatrix}$ می‌گذرد و طول این خط (که قطر دایره مور است) برابر $2R$ است.



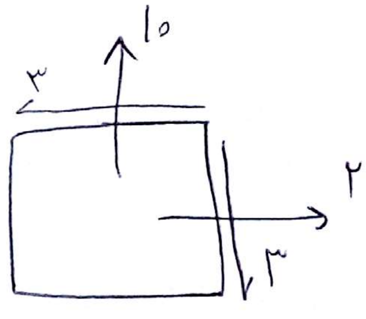
می رسیم به مهمترین بخش دایره مور [تعیین علامت τ]

20×2

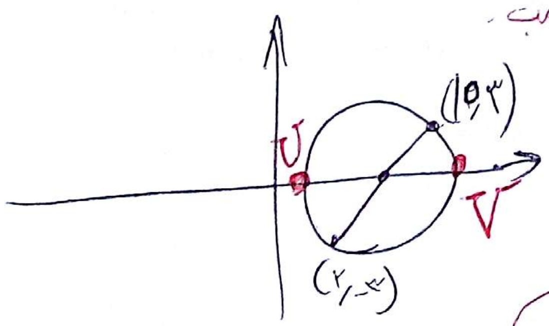


کدام؟

یا بهتر بگوییم τ_{xy} تنش برشی ساعتگرد منفی است یا مثبت؟



یا



نقطه‌ی ∇، تنش نرمال ماکزیمم است

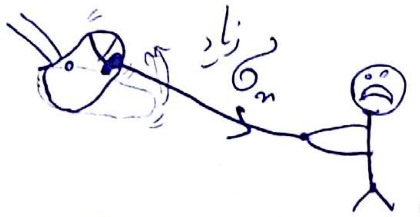
نقطه U ، ، ، ، مینیمم //

ادامه

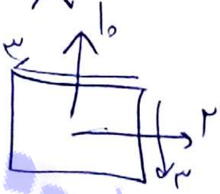
فرض کنید با طنابی گاوی را گرفته اید.

اگر گاو مستقیم به سمت شما بیاید، نیازی نیست نیروی σ_x زیادی وارد کنیم!

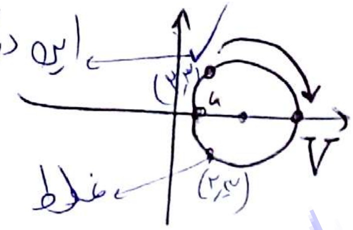
اما اگر گاو سر خود را در راستای τ وارده، حرکت دهد شما نیروی σ_x بیشتری را در خواهید کرد که گاو را کنترل کنید!

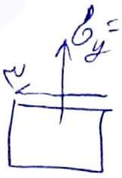


در دایره مور هم همین است.

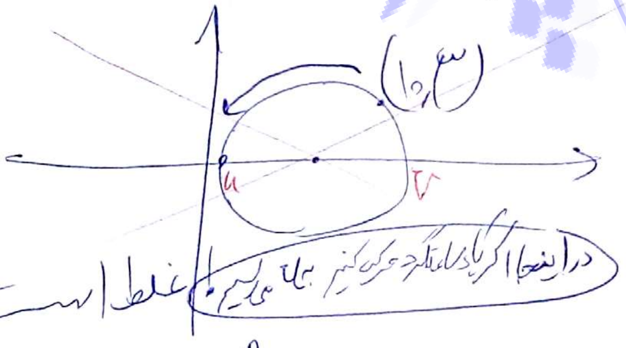


اگر برای فرضاً $\sigma_x = 2$ در راستای ساعتگرد ($\tau = 3$ وارده) حرکت کنیم، σ_x ما زیاد می‌شود یعنی بیشتر از ۲ می‌شود (ساعتگرد مثل ۳) به نقطه‌ی V برسیم

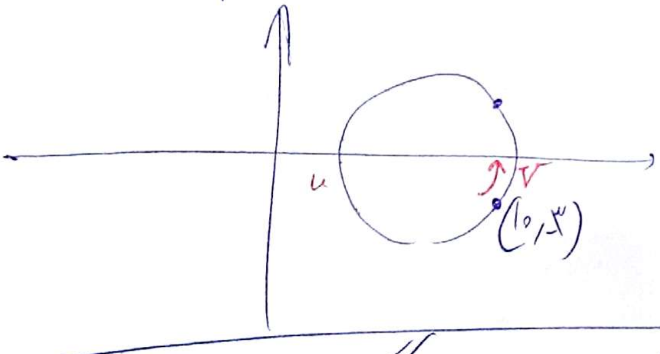




حالا اگر برای σ_y هم بنویسیم، اگر در جهت $\tau = 3$ یعنی پادساعتگرد حرکت کنیم تا σ_y ما زیاد شود. به V برسیم



غلط است.



نتیجه

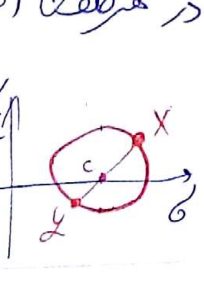
= مهمترین نکته‌ی دایره مور: در هر صفحه اگر تنش برشی ساعتگرد بود، در دایره مور مثبت است.

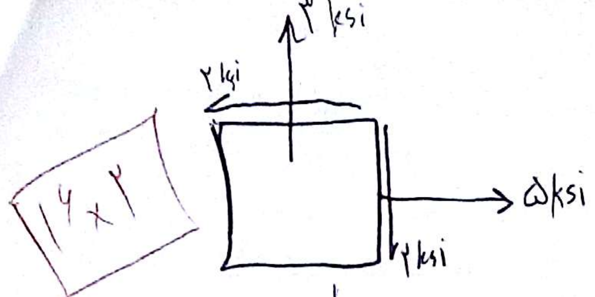
″ ″ ″ ccw بود، ″ ″ ″ منفی است

مثال: $\sigma_x = 4$

برای σ_x، $\tau = 2$ ساعتگرد است

مثال:





الف) تنش‌های اصلی و صفحه‌های اصلی؟

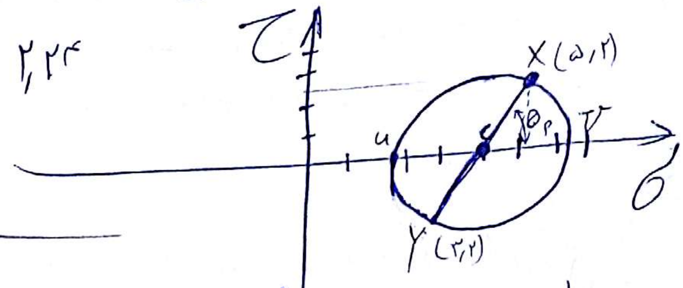
σ_v و σ_u — صفحه‌های V و U

ب) اگر صفحه‌ی uv را با اندازه ۳۵° ccw دوران دهیم، تنش‌ها؟
نرمال و برشی

برای $\sigma_x = ۵$، ۲ ساعتگرد دارد پس مثبت است.

$$R = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = 2.24$$

$$C = \frac{5+3}{2} = 4$$

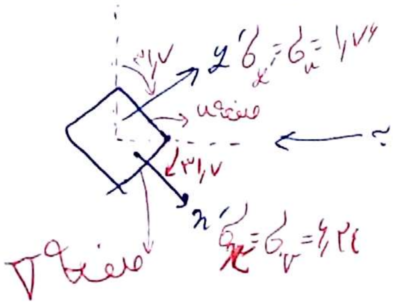


تنش‌های اصلی
$\sigma_v = C+R = 6.24$ ksi
$\sigma_u = C-R = 1.76$ ksi

$$tg\,2\theta_p = \frac{\tau}{5-4} = \frac{2}{1}$$

دایره مور $2\theta_p = 63.4$

واقعی $\theta'_p = 31.7$ CW



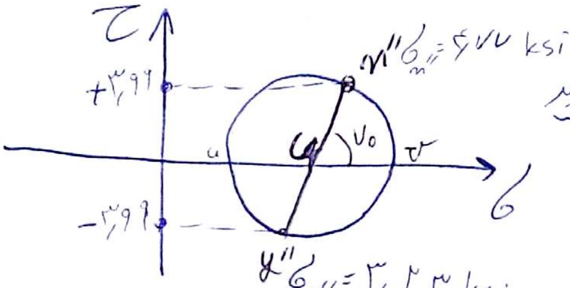
یعنی [element] تبدیل می‌شود به

ب) حالا باید [element] را ۳۵° ccw بچرخانیم

۷۰ در دایره مور — $2\times 35 = 70$ ccw

دایره مور جدید

$\sigma_{x''} = C + R\cos 70 = 4.77$ ksi
$\sigma_{y''} = C - R\cos 70 = 3.23$ ksi
$\tau_{x''y''} = R\sin 70 = 3.99$ ksi



پایان جلسه هفتم

۲۰×۲

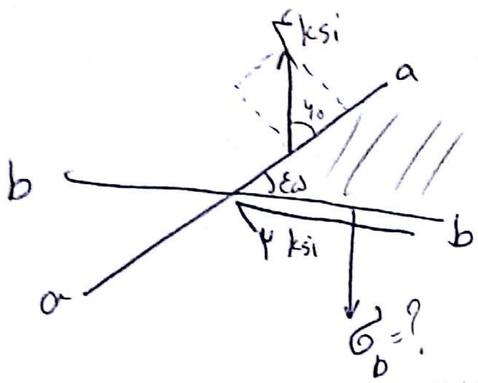
(واحد = A_i (مساحت)) (با فرض

مثال) مطابق شکل:

a) σ_b در این نقطه عمود بر صفحه‌ی b-b ؟

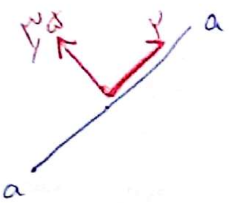
b) اندازه و جهت تنش‌های اصلی؟ (σ_1 و σ_2 و θ_p)

c) تنش در صفحه‌ای با چرخش ۲۰ ccw نسبت به b-b ؟

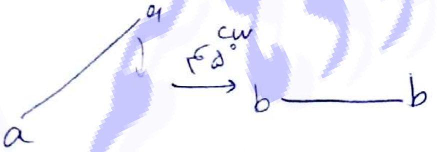


$\sigma_a = \frac{1}{A}\left[(A\times 4)\sin 60\right]$ و $\tau = \frac{1}{A}\left[\overbrace{(A\times 4)\cos 60}^{F \text{ برشی}}\right] = 2$ ksi

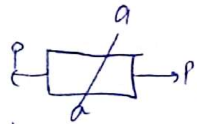
$= 3/5$ ksi



و



خب ما گفتیم که اگر در شکل

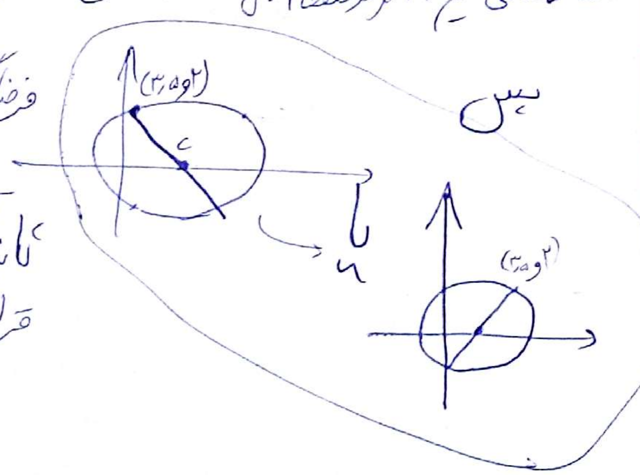


بخواهیم تنش‌ها در صفحه‌ی a-a را بیابیم، می‌توانیم از دایره‌ی مور کمک بگیریم. اینجا هم می‌توانیم از صفحه‌ها با دایره‌ی مور حرکت کنیم. توجه داشته باشیم تنش ۱ و ۲ برابر تنش‌های نرمال و برشی است.

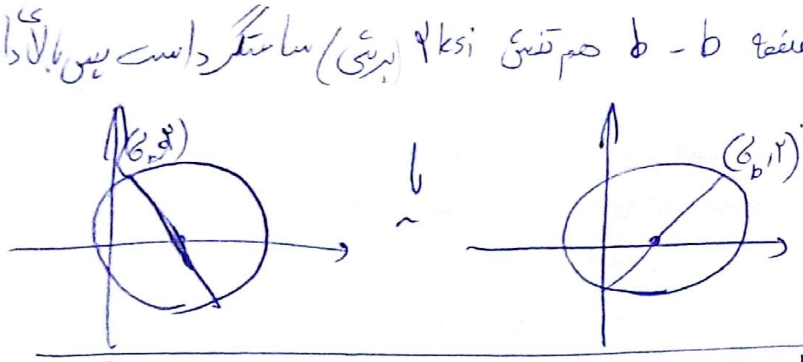
روش حل این سؤال پیچیده است.

اولاً ما می‌دانیم که اگر در صفحه‌ای مثل a-a، τ ساعتگرد باشد، در قسمت بالای دایره‌ی مور است. و در اینجا در a-a، ۲ksi ساعتگرد است پس

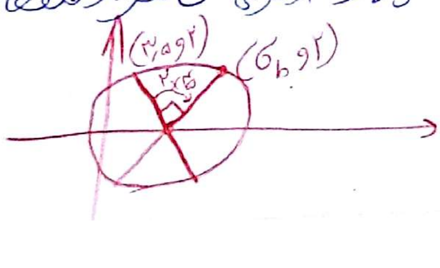
فرضاً دایره اینطور است.



ثانیاً در صفحه‌ی b-b هم تنش ۲ksi (برشی) ساعتگرد است پس بالای دایره قرار دارد.

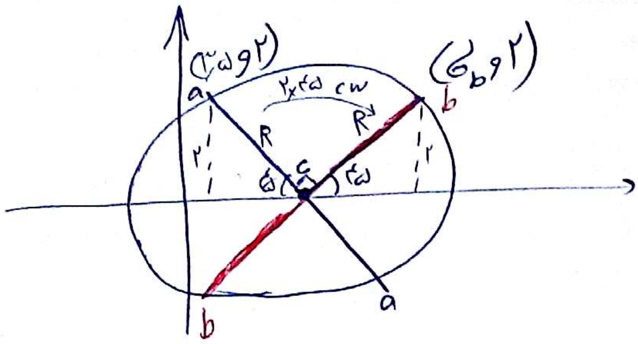


ثالثاً می‌دانیم که a-a با ۴۵ درجه دوران cw به b-b می‌رسد. از طرفی τ هر دو صفحه ۲ksi است پس تنها احتمال ممکن:



ادامه

به این دایره رسیدیم



اولاً $R\sin 45 = 2\ ksi$

$\boxed{R = 2.8\ ksi}$

و $3.5 = c - \underbrace{R\cos 45}_{2} \Longrightarrow \boxed{c = 5.5}$

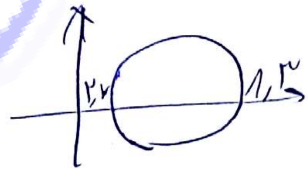
$\Longrightarrow \sigma_b = c + R\cos 45 = 7.5\ ksi$ (الف)

ب) از $\underbrace{22.5}_{\text{واقعی}} = \frac{45}{2}$ چرخاندن صفحه b رو به صفحه‌ی u و v می‌رسیم. (اصلی)

$\boxed{\theta_p = 22.5}$

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma_v = c + R = 8.3\ ksi \\ \sigma_{min} = \sigma_u = c - R = 2.7\ ksi \end{cases}$$

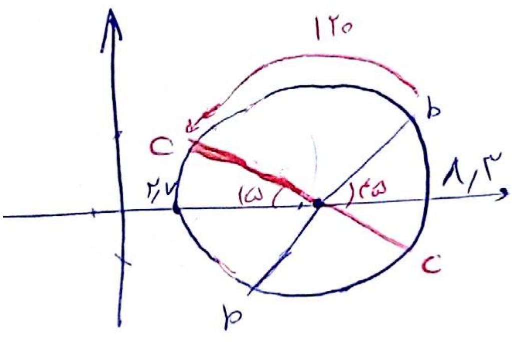
$\xrightarrow{\text{دایره واقعی}}$



---

c) b - b $\xrightarrow[\text{واقعی}]{240^{ccw}}$ $\boxed{c - c}$

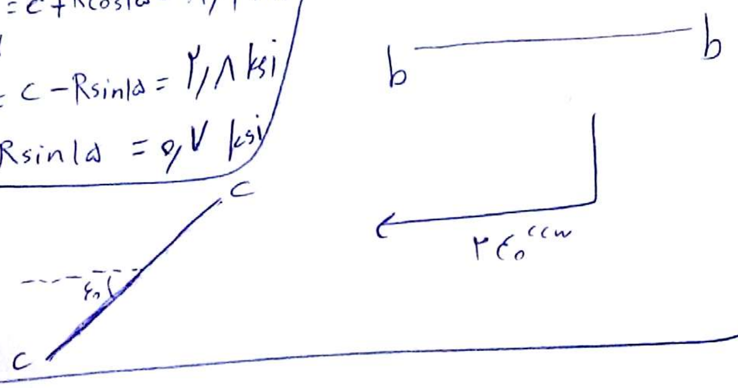
$\left[\underset{\text{دایره مور}}{\theta} = 240 \times 2 = 480 = \underbrace{360}_{\text{بی‌تاثیر}} + 120^{ccw}\right]$



$\sigma_{c_1} = c + R\cos 15 = 8.2\ ksi$

$\sigma_{c_2} = c - R\sin 15 = 2.8\ ksi$

$\tau_{cc} = R\sin 15 = 0.7\ ksi$



۱۵×۲

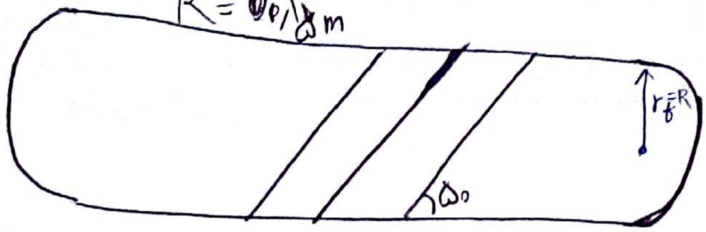
$P = 100\ kpa$

$t = 10\ mm$

$R = 0.25\ m$

مثال) تنش‌های محیطی و طولی؟ نرمال و τ روی خط جوش

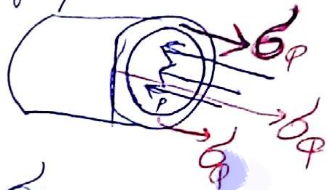
axial — circumferential



اولاً لاپلاس:

$$\frac{\sigma_t}{r_t} + \frac{\sigma_\varphi}{r_\varphi \to \infty} = \frac{P}{t} \rightarrow \sigma_t = \frac{PR}{t} = \frac{100\times10^3 \times 0.25}{10\times10^{-3}} = 25\times10^5\ pa$$

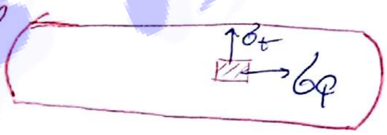
$$P \times \pi R^2 = \sigma_\varphi \times 2\pi R \times t \rightarrow \sigma_\varphi = \frac{PR}{2t} = 12.5\times10^5\ pa$$



۱) : تنش‌های σ_t و σ_φ همان تنش‌های max و min هستند چون τ ندارند (σ_v ، σ_u)

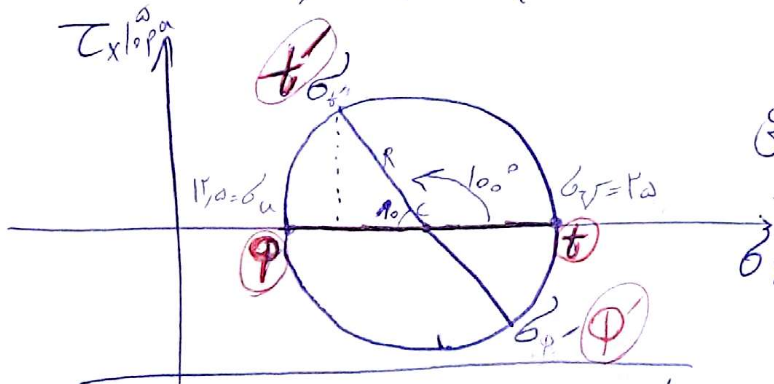
به این شکل

[چون t بسیار کم است !!!!!!]

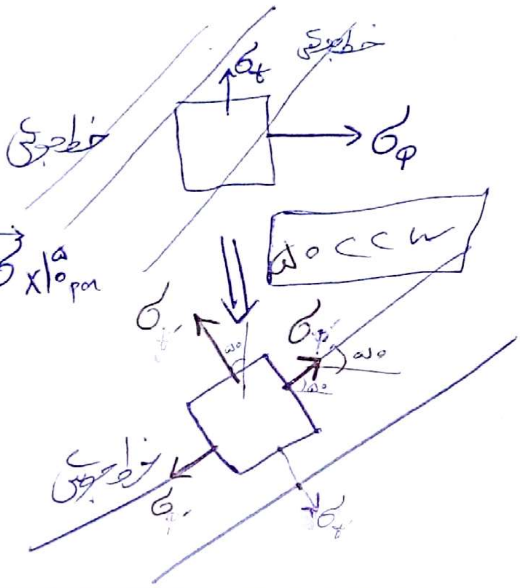


دایره مور $\sigma_v = 25$ ، $\sigma_u = 12.5$ $\rightarrow$ $R = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma_v - \sigma_u}{2}\right)^2} = 6.25$

$C = \frac{12.5 + 25}{2} = \frac{37.5}{2} = 18.75$



۵۰ ccw واقعی در دایره مور می‌شود ۱۰۰°



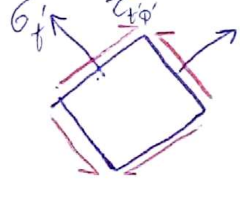
$\sigma_{t'} = C - R\cos 80 = 17.66 \times 10^5\ pa$

$\sigma_{\varphi'} = C + R\cos 80 = 19.84 \times 10^5\ pa$

$\tau_{t'\varphi'} = R\sin 80 = 6.16 \times 10^5\ pa$

جهت τ در صفحه‌ی t' در دایره مثبت است پس باید آنجا ساعتگرد بوده باشد

المان جدید:



مهرزاد

ضریب پواسون:　　$\boxed{۱۳ \times ۲}$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

ε_2 → کرنش عرضی

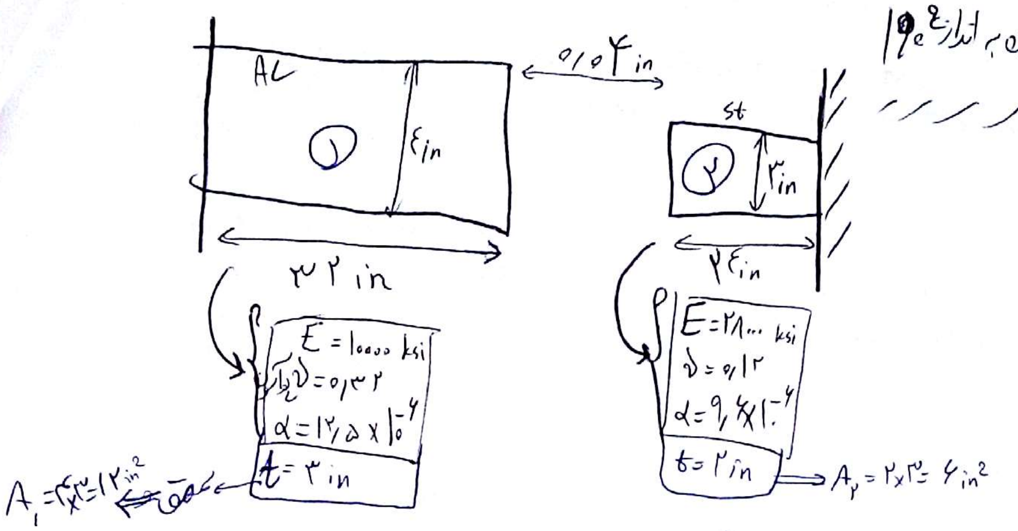
ε_1 → در راستای اعمال نیرو

سوال ۶) الف) تغییرات دما چقدر باشد تا دو سازه به هم برسند

ب) تنش نرمال در دو سازه وقتی به اندازه 190° گرم شوند

ج) کرنش نرمال بعد از گرم کردن به اندازه 190°

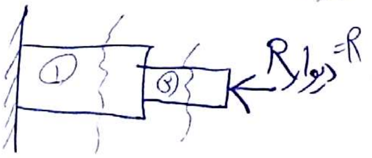
د) تغییر پهنای سازه ها



الف)

$$\alpha_1 L_1 \Delta T + \alpha_2 L_2 \Delta T = 0.04 \quad \longrightarrow \quad \Delta T = 63.5^\circ$$

ب) وقتی $\Delta T = 190$، آنگاه این دو میله به قدری کش می‌آیند که به هم برخورد و دیگری را فشار دهند. آنگاه



$$\longrightarrow \left(\alpha_1 L_1 \Delta T - \frac{R L_1}{A_1 E_1}\right) + \left(\alpha_2 L_2 \Delta T - \frac{R L_2}{A_2 E_2}\right) = 0.04$$

$$\longrightarrow \boxed{R = 194.8}$$

منفی درآمد یعنی جهت درست ... پس فشاری است

$$\sigma_1 = \frac{194.8}{A_1} = 16.2 \qquad \sigma_2 = \frac{194.8}{A_2} = 32.5$$

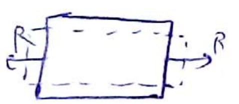
ج)

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{L_0}$$

$$75.2 \times 10^{-5} = \varepsilon_{x_1} = \frac{\alpha_1 L_1 190 - \frac{(194.8) L}{A E_1}}{32}$$

$$46.4 \times 10^{-5} = \varepsilon_{x_2} = \frac{\alpha L \Delta T - \frac{R L}{A E}}{24}$$

د) تغییر ارتفاع هر میله فقط ناشی از تغییرات پواسون است چون نیرو در راستای y نداریم.



$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

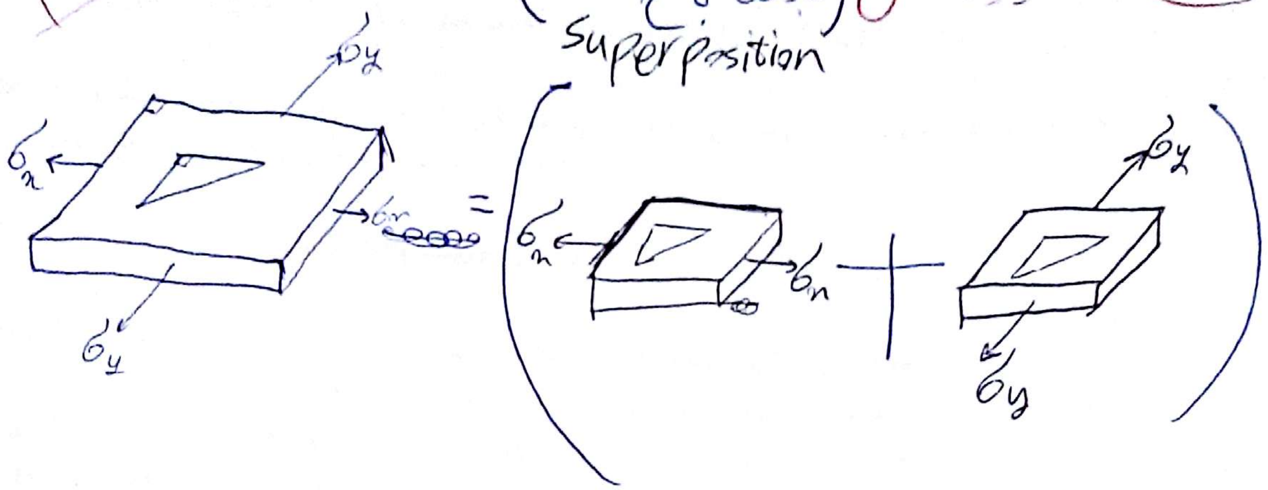
$$\varepsilon_{y_1} = -\nu_1 \varepsilon_{x_1} = -0.32\,(\varepsilon_{x_1}) = -24.1 \times 10^{-5} \Longrightarrow \Delta y_1 = y_1 \varepsilon_{y_1} = 96.3 \times 10^{-5}\ \text{in}$$

$$\varepsilon_{y_2} = 0.12\,\varepsilon_{x_2} = \ \Longrightarrow \qquad \Delta y_2 = y_2 \varepsilon_{y_2} = 23.9 \times 10^{-5}\ \text{in}$$

۳۵:۴۲ min

(جلسه نهم) تغییرات شکل (حادمی جمع آثار!)

Superposition

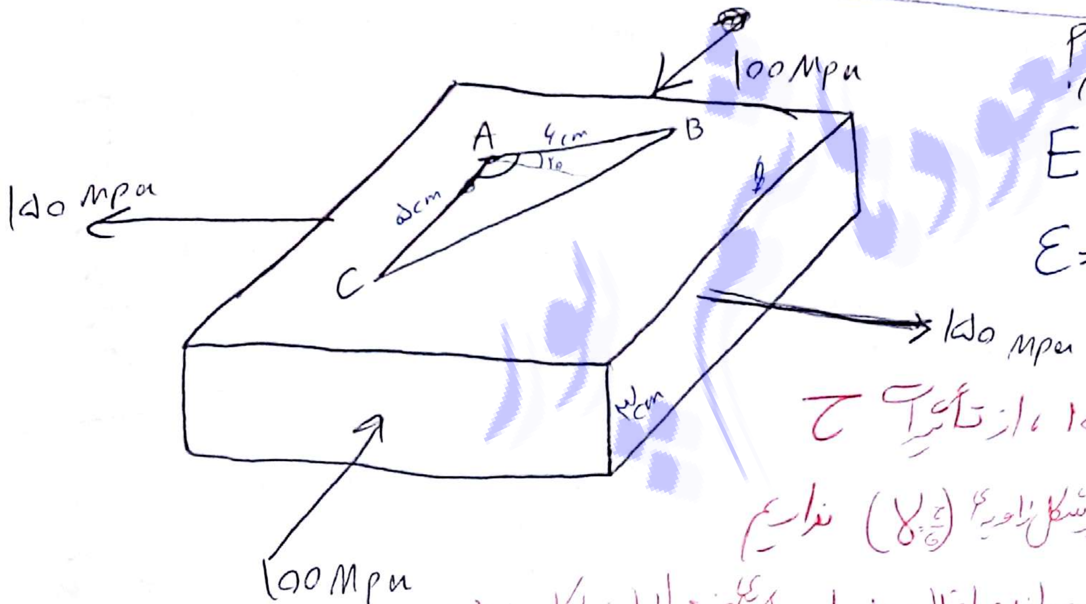


پس می‌توان تأثیرات را جدا جدا نوشت و سپس باهم ادغام کرد.

مثال) تغییرات مساحت و حجم؟

$E = 10^5$

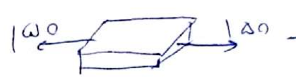
$\nu = 0.3$



نکته مهم: ما در مقاومت ۱ از تأثیرات τ صرف نظر می‌کنیم پس تغییر شکل زاویه‌ای (γ) نداریم

پس زاویه‌های مثلث ثابت اند و اضلاع فقط در راستای خود افزایش یا کاهش طول می‌دهند

Superposition

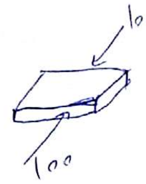


$$\varepsilon_{x_1} = \frac{\sigma_x}{E} = 15 \times 10^{-4} = 150 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{y_1} = -\nu\, \varepsilon_{x_1} = -0.3 \times 15 \times 10^{-4} = -45 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{z_1} = -\nu\, \varepsilon_{x_1} = -45 \times 10^{-5}$$

+



$$\varepsilon_{y_2} = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{-100}{10^5} = -10^{-3} = -100 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{x_2} = -\nu\, \varepsilon_{y_2} = +3 \times 10^{-4} = 30 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{z_2} = -\nu\, \varepsilon_{y_2} = +3 \times 10^{-4} = 30 \times 10^{-5}$$

فرمولی که استاد گفت

$$\varepsilon_{x_{کل}} = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2} = \frac{\sigma_x}{E} + \left(-\nu \frac{\sigma_y}{E}\right) = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu \sigma_y\right) = 180 \times 10^{-5}$$

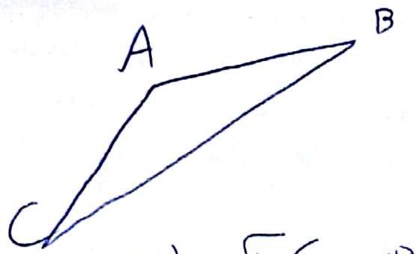
فرمول مهم

$$\varepsilon_{y_{کل}} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu \sigma_x\right) = -145 \times 10^{-5}$$

پس فرمول مهم

$$\varepsilon_{z_{کل}} = \varepsilon_{z_1} + \varepsilon_{z_2} = \frac{1}{E}\left(\cancel{\sigma_z} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right) = -15 \times 10^{-5}$$

خب حالا بریم سراغ مثلث

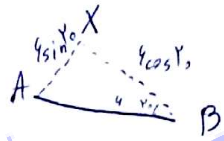


برای AC:

تغییر طول AC آسانه چون موازی محور yهاست پس ε آن همان ε_y هست

$$\delta_{AC} = L_0\, \varepsilon_{y} = 5 \times -145 \times 10^{-5} = -0.073\ \text{mm}$$

برای AB:



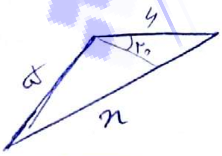
دیفرانسیل

$$AB^2 = AX^2 + XB^2$$

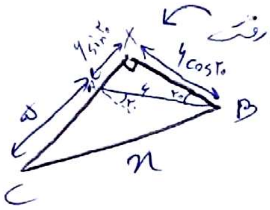
$$\cancel{2}AB\,\Delta_{AB} = \cancel{2}AX\,\Delta_{AX} + \cancel{2}XB\,\Delta_{XB}$$

$$\Delta_{AB} = \frac{\cancel{6}\sin 30\,(\varepsilon_y AX) + \cancel{6}\cos 30\,(\varepsilon_x XB)}{\cancel{6}} = 60\,\varepsilon_y \sin^2 30 + 60\,\varepsilon_x \cos^2 30 = +0.085\ \text{mm}$$

برای BC : ابتدا طول BC را یابیم



میبریم از این مثلث رفت



$$x = \sqrt{(6\cos 30)^2 + (5 + 6\sin 30)^2} = 9$$

یا

$$x = \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(90+30)} = 9$$

$$BC^2 = CX^2 + BX^2$$

$$\Delta_{BC} = \frac{\cancel{2}CX(\varepsilon_y \times XC) + \cancel{2}XB(\varepsilon_x \times XB)}{BC} = \frac{-145(7.05)^2 + 180(5.96)^2}{9} \times 10^{-5} = -0.017\ \text{mm}$$

تغییرات مساحت $=$ $S_{جدید} - S_{قبلی} = \frac{1}{2}(XB)_{ج}(AC)_{ج} - \frac{1}{2}(XB)_{ق}(AC)_{ق} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(50+(-0.073))}_{AC_ج}\underbrace{((\underbrace{60+0.085}_{AB_ج})\cos 30)}_{XB_ج} - (51.96)(50)\Big) = -0.5\ \text{mm}^2$

مساحت کاهش می‌یابد

$t_{ج} = (1+\varepsilon_z)t_{ق}$ ← باید حساب کنیم

تغییرات حجم

$$V' - V = t_{ج} \times \left(\tfrac{1}{2} \times XB_{ج} \times AC_{ج}\right) - t \times \left(\tfrac{1}{2} \times XB_{ق} \times AC_{ق}\right) = \dots$$

یا

اثبات کرده‌ایم

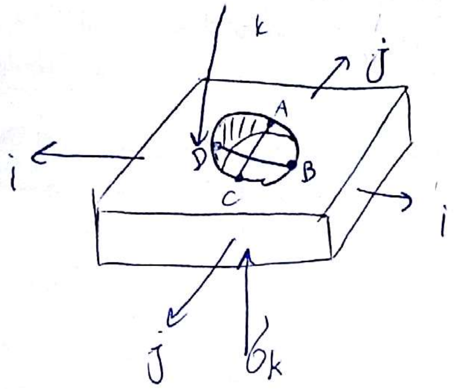
$$V' - V = (1+e)V_{ق} - V_{ق} = eV_{ق} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\, t_{ق} \left(\frac{XB_{ق} \times AC_{ق}}{2}\right) = 0.00846\ \text{cm}^3$$

$3 \times 2 \min$

پس ما اثبات کردیم که

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E}\left(\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)\right)$$

مثال) تغییر مساحت این شکل و حجم



$\varepsilon_x \checkmark \Rightarrow$ ، $\varepsilon_y \checkmark \Rightarrow$ ، $\varepsilon_z \checkmark \Rightarrow$

$t_{ج} = (1+\varepsilon_z)\, t_{ق}$ ✓

$AC_{ج} = (1+\varepsilon_y) AC_{ق}$ ✓

$DB_{ج} = (1+\varepsilon_x) DB_{ق}$ ✓

یک بیضی به مساحت $\pi (AC_{ج})(DB_{ج})$ می‌شود

حجم ج $= S_{ج} \times t_{ج}$

$4 \times 2 \min$

پیچش

$T \sim F$

$\alpha \sim a$

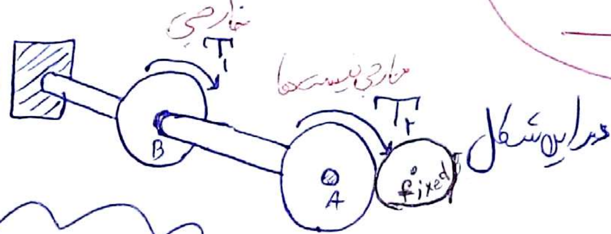
$\omega \sim v$

$\theta \sim x$

همانطور که در این شکل ، به جسم (2) نیرویی به اندازه‌ی $[F_0 + F_s]$ وارد می‌شود ، چون (2) نسبت به (1) تغییر مکان پیدا می‌کند.

$\uparrow F_0$

1

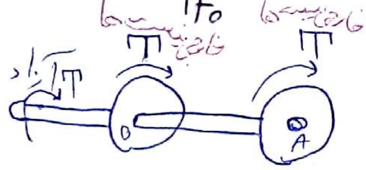


در این شکل هم $T_1 \neq T_2$ است چون نقطه‌ی A نسبت به B تفاوت پیدا می‌کند.

اما در این شکل به جسم (2) نیروی F_0 وارد می‌شود چون تفاوت مکانی نسبت به جسم (1) پیدا نمی‌کند.

$\uparrow F_0$

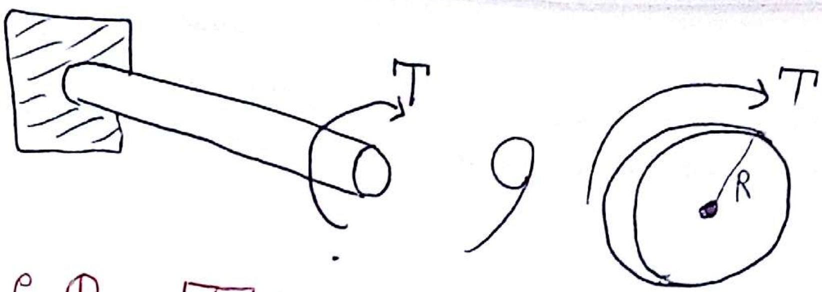
2



پس اگر ، $T_B = T_A$ چون آزاده هر خود A نسبت به B تفاوت زاویه‌ی پیدا نمی‌کند.

$\boxed{۵ \times ۲_{min}}$

۵)

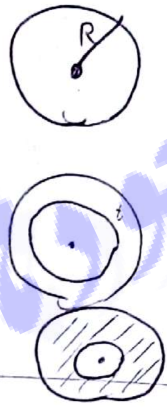


$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{TL}{GJ} \\ \varphi = \displaystyle\int \dfrac{T_{(x)}\,dx}{G_{(x)} J_{(x)}} \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} \tau_{max} = \dfrac{TR}{J} \\ \tau = \dfrac{T\rho}{J} \quad و \ \rho < R \end{cases}$$

---

۵) توپر

$$J_{دایره} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{\pi}{۲} R^{۴}$$



جدار نازک

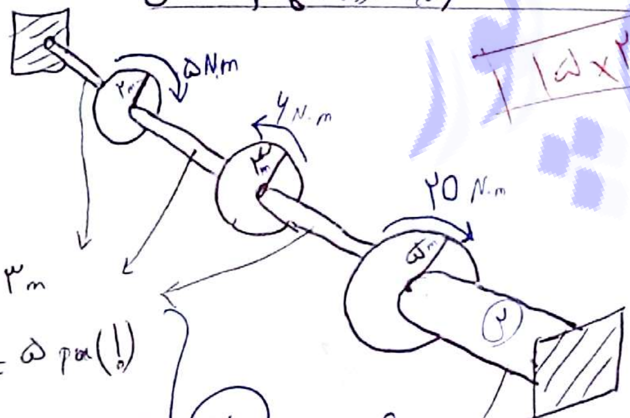
$$J = ۲\pi R^{۳} t$$

جدار غیرنازک

$$J = \frac{\pi}{۲}\left(R^{۴}_{بزرگ} - R^{۴}_{کوچک}\right)$$

$\boxed{۱۵ \times ۲}$

مثال) تنش برشی در هر قسمت از میله؟ ($\frac{TR}{J} = \tau_{max}$ ماکزیمم)



$L_{هر بخش} = ۳_m$

$E = ۵\ pa\,(!)$

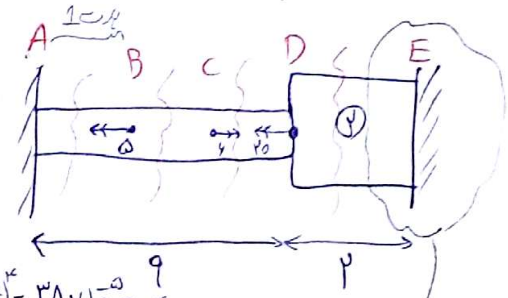
$G = ۳\ pa\ (1)$

$d_{قطر} = \frac{1}{۴} m$

(1)

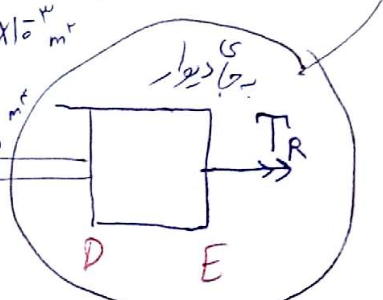
(۲)
$$\begin{cases} d = ۲_m \\ G = ۴pa\,(!) \\ E = ۳pa\,(!) \\ L = ۲m \end{cases}$$

$\approx$



$\varphi_{میله افقی} \begin{cases} J_1 = \frac{\pi}{۲}R^{۴} = \frac{\pi}{۲}\left(\frac{d_1}{۲}\right)^{۴} = ۳۸ \times 10^{-۵}\ m^{۴} \\ A_1 = \pi R^{۲} = ۲۵ \times 10^{-۳}\ m^{۲} \end{cases}$

$\begin{cases} J_۲ = \frac{\pi}{۲}\left(\frac{d}{۲}\right)^{۴} = ۱{,}۵۷\ m^{۴} \\ A_۲ = \pi\left(\frac{d}{۲}\right)^{۲} = ۳{,}۱۴\ m^{۲} \end{cases}$



یه نقطه را انتخاب می‌کنیم (مثلاً B) و φ آنرا از دو راه بدست می‌آوریم:

$$\varphi_{B/A} = \varphi_{B/E} = \frac{TL}{GJ}$$

(1) بارت جیب

$$\left|\frac{(T_R - ۲۰ + ۶ - ۵) \times ۳}{۳ \times ۳۸ \times 10^{-۵}}\right| = \varphi_{B/C} + \varphi_{C/D} + \varphi_{D/E} = \left|\frac{(T_R - ۲۰ + ۶) \times ۳}{۳ \times ۳۸ \times 10^{-۵}} + \frac{(T_R - ۲۰) \times ۳}{۳ \times ۳۸ \times 10^{-۵}} + \frac{T_R \times ۲}{۴ \times ۱{,}۵۷}\right| \Longrightarrow \boxed{T_R \simeq ۱۵\ N.m}$$

ادامه $\longrightarrow$

ادامه

$$\frac{T R}{J} = \tau_{max_{AB}} = \left|\frac{(15-20+6-5)\left(\frac{1}{8}\right)}{38\times10^{-5}}\right| = 1315.8 \text{ pa}$$

$$\tau_{max_{BC}} = \left|\frac{(15-20+6)\left(\frac{1}{8}\right)}{38\times10^{-5}}\right| = 328.9 \text{ pa}$$

اعداد عجیب ⟸ d عجیب

$$\tau_{max_{CD}} = 1644.5 \text{ pa}$$

$$\tau_{max_{DE}} = \left|\frac{(15)(1)}{1.57}\right| = 9.6 \text{ pa}$$

جلسه بعد (دهم) توجه

دستمال کاغذی جعبه

جلسه دهم

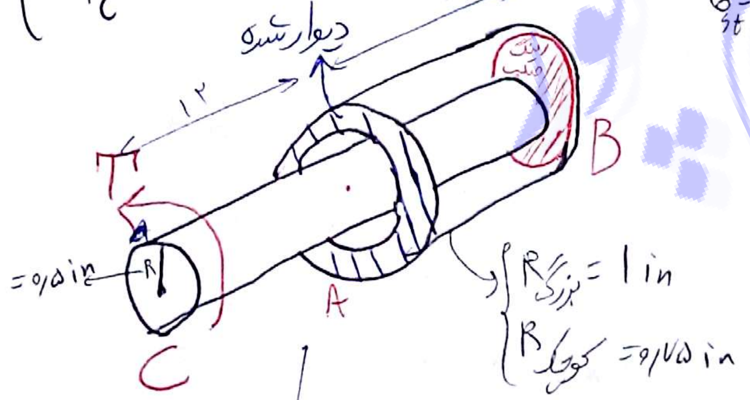
مثال پایان ترم ۹۸: شفت توپر BC (فولادی) به وسیله رینگ صلب B به لوله‌ی AB وصل شده. با فرض

$$\begin{cases} \tau_{allowable} = 12 \text{ ksi} \\ \varphi_C = 3^\circ \end{cases}$$

$\boxed{16\times2 \text{ min}}$

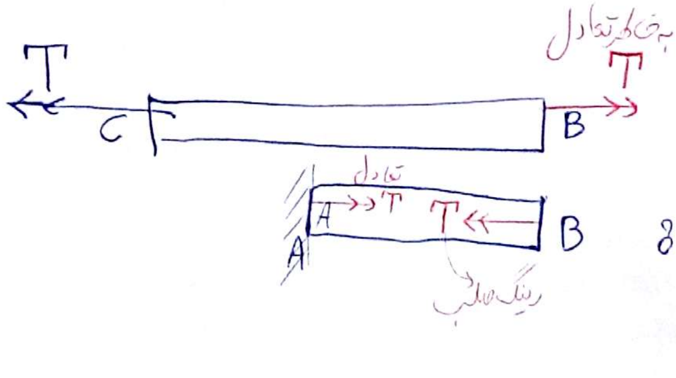
a) بیشترین مقدار ترک T که می‌توان به BC وارد کرد؟

b) زاویه پیچش انتهای B در شفت AB اگر $G_{st} = 11$ ksi ماکزیمم



$$\begin{cases} R_{بزرگ} = 1 \text{ in} \\ R_{کوچک} = 0.75 \text{ in} \end{cases}$$

$$\tau_{allowable} = \frac{TR}{J} \qquad \varphi = \frac{TL}{GJ}$$



$$\tau_{allo}: \quad 12 = \frac{T\,(0.5)}{\frac{\pi}{2}(0.5)^4} \longrightarrow \boxed{T_{ممکن} = 2.36 \text{ kip.in}}$$

ممکنه باشه یا نباشه!

$$\tau_{allo}: \quad 12 = \frac{T\,(1)}{\frac{\pi}{2}(1^4-0.75^4)} \longrightarrow \boxed{T_{ممکن} = 12.89 \text{ kip.in}} \times$$

مرجع

چون R مهم نیست توخالی یا توپر باشد.

نیاز دور! چون اول مقدم بر کار ۲٫۳۶ بیشتر بشه میله‌ی BC از بین می‌ره !!

ادامه

تا اینجا فهمیدیم که $T = ۲,۳۶$ می‌تونه باشه

$$\varphi_{C_{max}} = ۳^\circ = \varphi_{C/B} + \varphi_B = \varphi_{C/B} + \big(\varphi_{B/A} + \cancel{\varphi_A}^{\,۰\ \text{دیوار شده}}\big) = \underbrace{\frac{T(۲۴)}{GJ_{BC}} + \frac{T(۱۲)}{GJ_{AB}}}_{\text{جمع می‌کنیم چون هر دو چرخش C را زیاد می‌کنند در یک جهت}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} T_{max} = ۱,۲۵\ \text{kip.in} \\ \text{قسمت قبل یافته بودیم}\quad T_{max} = ۲,۳۶ \end{cases} \longrightarrow \boxed{T_{max} = ۱,۲۵ \times ۱۰^۳\ \text{lb.in}}$$

موافقی

جواب الف

$$۲,۳^\circ = \frac{۱,۲۵ \times ۱۲}{۱۱\times ۱۰^۳\ \frac{\pi}{۲}(۱-۰,۷۵^۴)} = \frac{T_{max} L_{AB}}{G J_{AB}} = \varphi_{B/A} + \cancel{\varphi_A} = \varphi_B = ?$$ (ب

(واحدها: lb.in ، in ، lb/in^2 ، in^4)

مثال) پایانترم ۹۴ (۳۵×۲)

در سیستم روبرو اگر

$d_{AB} = ۲۰\,mm$ قطر

$d_{CD} = ۲۵\,mm$

$d_{EF} = ۴۰\,mm$

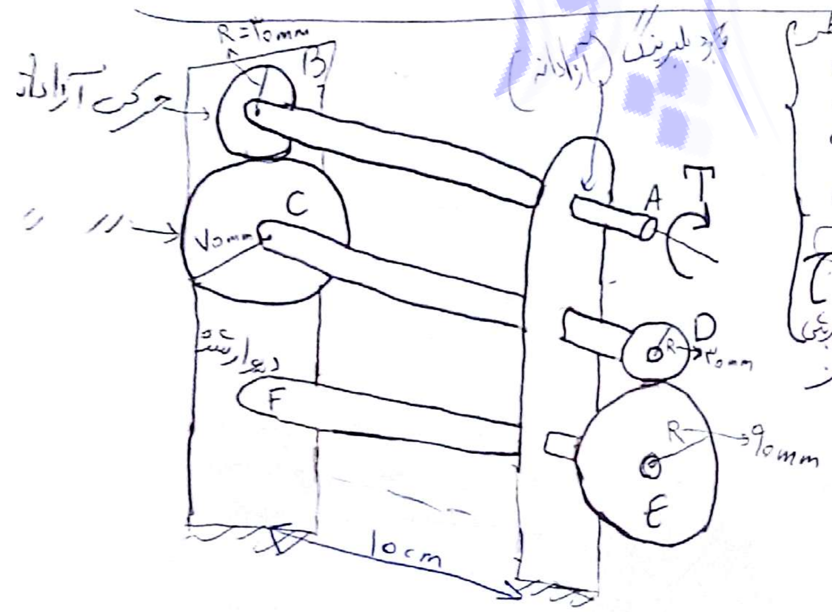
$G = ۷۵\ GPa$

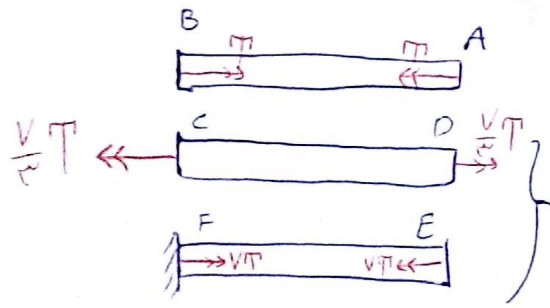
$\tau_{allow} = ۴۰\ MPa$ تنش برشی مجاز

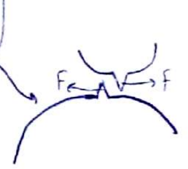
چرخ‌دنده‌ها صلب اند

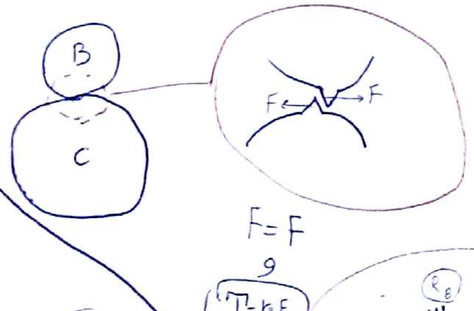
الف) بیشترین مقدار T ؟

ب) زاویه پیچش A ؟









$F = F$

و

$\boxed{T = r_1 F}$

R_B: $۳۰\,mm \times F = T_B = T$

R_C: $\frac{۷}{۳}T = ۷۰\,mm \times F = T_C$

R_D: $۳۰ \times F = T_D = \frac{۷}{۳}T$

R_E: $۹۰ \times F = T_E$

$\boxed{T_E = ۷T}$

ادامه

$$\tau_{allowable} = \frac{T_{max} R_{max}}{J}$$ صورت سوال مفهوم بیشترین مقدار T حقیقی است. فقط به ما تنش مجاز را داده

اگر $\tau_{AB} = \tau_{al} = 60 \times 10^{6} = \dfrac{T \; \frac{20}{2} \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{20}{2}\right)^{4} \times (10^{-3})^{4}} \longrightarrow T_{max} = 94.25 \; N.m$ ممکن

اگر $\tau_{CD} = \tau_{al} = 60 \times 10^{6} = \dfrac{\frac{7}{3} T \; \frac{25}{2} \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{25}{2}\right)^{4} \times (10^{-3})^{4}} \longrightarrow T_{max} = 78.89 \; N.m$ ممکن

اگر $\tau_{ED} = \tau_{al} = 60 \times 10^{6} = \dfrac{7T\left(\frac{40}{2}\right) \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{40}{2}\right)^{4} \times (10^{-3})^{4}} \longrightarrow T_{max} = 107.71 \; N.m$ ممکن

ج الف

از این مقدار بیشتر نباید باشد و گرنه میله CD می‌شکند

ب)

نکته:

$s_1 = s_2 \longrightarrow \boxed{R_1 \alpha_1 = R_2 \alpha_2}$

$\varphi_A = ?$ مرحله‌ای

1st

$$\varphi_E = \varphi_F + \varphi_{E/F} = \frac{TL}{G J_{EF}}$$

$$= \frac{7 \times 78.89 \times (10 \times 10^{-2})}{70 \times 10^{9} \times \frac{\pi}{2}\left(\frac{40}{2}\right)^{4} \times (10^{-3})^{4}} = 0.00315^{\circ}$$

2nd

$$R_E \varphi_E = R_D \varphi_D$$

$$\varphi_D = \frac{90 \; mm}{30 \; mm} \times 0.00315 = 0.00945^{\circ}$$

3rd

$$\varphi_C = \varphi_D + \varphi_{C/D}$$

$$= 0.00945 + \frac{\frac{7}{3} \times 78.89 \times (10 \times 10^{-2})}{70 \times 10^{9} \times \frac{\pi}{2}\left(\frac{25}{2}\right)^{4} \times 10^{-12}} =$$

$$= 0.016^{\circ}$$

4th

$$R_C \varphi_C = R_B \varphi_B$$

$$\varphi_B = \frac{70 \; mm}{35 \; mm} \times 0.016 = 0.037^{\circ}$$

5th

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_{A/B}$$

$$= 0.037 + \frac{78.89 \times (10 \times 10^{-2})}{70 \times 10^{9} \times \frac{\pi}{2}\left(\frac{20}{2}\right)^{4} \times 10^{-12}} = 0.044^{\circ}$$

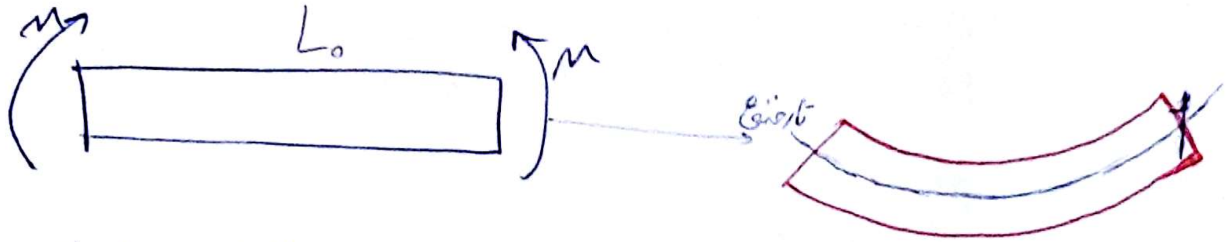
ج ب

خمش

$8\,min$

در بحث خمش ما محاسباتی در مورد I هایی کنیم که جلسه بعد مفصل خواهیم گفت

خمش در واقع باعث ایجاد تنش های نرمالی می شود که بسته به نقاط مختلف روی تیر، مقادیر مختلف دارند.



$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_0 - L_0}{L_0} = 0}$$

تار خنثی: قسمتی است که طی خمیده کردن تیر، تغییر طول نمی دهد یعنی همان L_0 می ماند. پس کرنش آن $= 0$

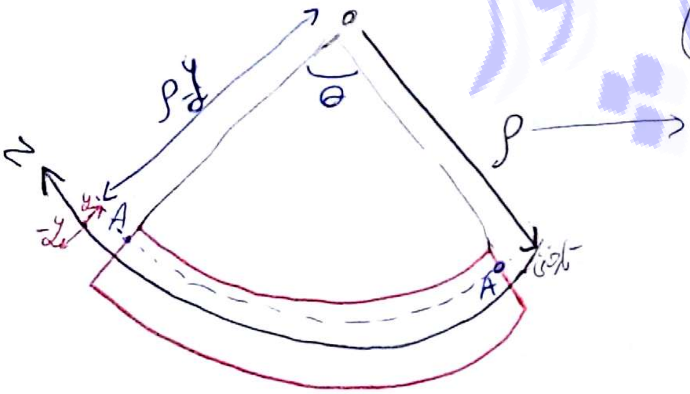
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon = 0}$$

پس تنش نرمال هم تحمل نمی کند

۱) قسمت زیر تار خنثی کشیده می شود و قسمت بالایی فشرده.

۲) تنش خطی در نقاط مختلف تیر تغییر می کند (در یک مقطع معین)



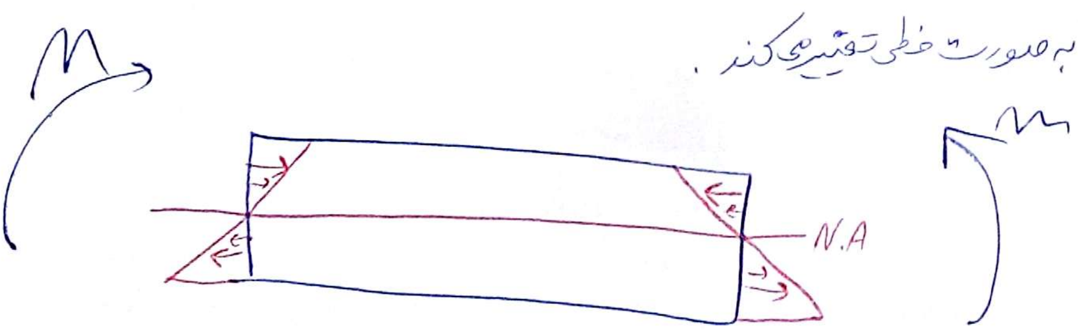
$\rho\theta = L_0$ تار خنثی تغییر طول نمی دهد

اثبات

$$\varepsilon_{AA'\,\text{خطی}} = \frac{L_{AA'}^{\text{جدید}} - L_{AA'}^{\text{قدیم}}}{L_{AA'}^{\text{قدیم}}} = \frac{(\rho - y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\sigma_{AA'} = E\varepsilon = -\frac{E}{\rho}y$$

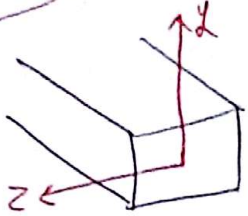
پس σ با y به صورت خطی تغییر می کند.



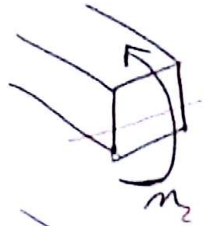
جلسه یازدهم

توضیحات
20×۲

حال می‌دستگاه مختصات را عوض می‌کنیم

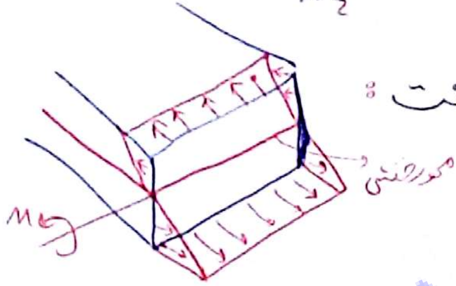


و



نکته ①: اگر

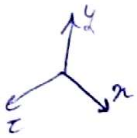
آنگاه می‌توان گفت:



می‌توان گفت اگر فقط M داشته باشیم و نیروی P نداشته باشیم:

تنش‌های فشاری و کششی همدیگر را خنثی می‌کنند

$$\sum F_x = 0$$



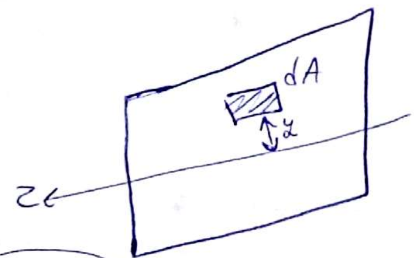
$$\sigma = -\frac{E}{\rho} y$$

$$\sum F_{\text{فشار}} + \sum F_{\text{کشش}} = 0 \Rightarrow \int \sigma \, dA = \int -\frac{E}{\rho} y \, dA = 0$$

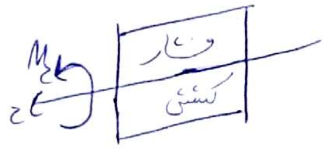
$$\Longrightarrow -\frac{E}{\rho} \int y \, dA = 0 \Longrightarrow \boxed{\int y \, dA = 0}$$

نتیجه ①

و



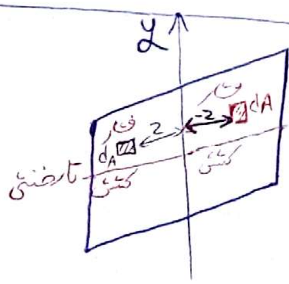
:



از طرفی می‌توان گفت

$$\int y \, dF = \int dM = \int y \sigma \, dA = \int y\left(-\frac{E}{\rho} y\right) dA = M_z \longrightarrow \boxed{-\frac{E}{\rho} I_{zz} = M_z}$$

فعلاً مهم نیست.

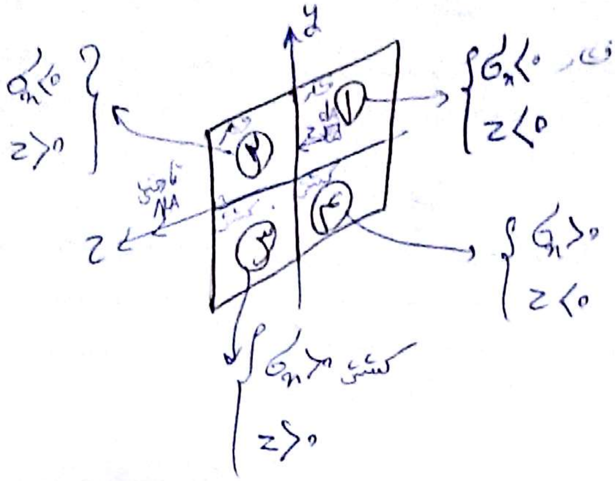


تو سؤال گفته فقط M_z

$$M_y = 0 = \sum \int z(\sigma_x \, dA)$$

n.p

پس مقطع را به چهار قسمت تقسیم کردیم.



اثبات

اثبات: $M_y = 0$

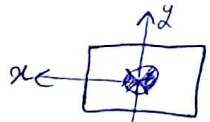
$$M_y = \int z\,dF = \int z\,\sigma_x\,dA = \left[\int_{①} z\,\sigma_x\,dA + \int_{②} z\,\sigma_x\,dA + \cancel{\int_{③} z\,\sigma_x\,dA} + \cancel{\int_{④} z\,\sigma_x\,dA}\right] = 0$$

از طرفی $M_y = \int z\left(\frac{-E}{\rho}y\right)dA = \frac{-E}{\rho}\underbrace{\int zy\,dA}_{I_{zy}} = 0$

$\Longrightarrow I_{yz} = I_{zy} = 0$ نتیجه ۲

پس به دو نتیجه مهم رسیدیم: ① $\int y\,dA = 0$ ② $I_{zy} = 0$

از استاتیک به یاد داریم در سطح



اگر دو محور x و y را در مرکز سطح بگذاریم:

$$\begin{cases}\int x\,dA = 0 \\ \int y\,dA = 0\end{cases}$$

یادآوری: چون صفحه مساحت متشکل از y مثبت و در نقطه دیگر y منفی است.

ویژگی‌های محورهای اصلی (۱ و ۲)

1 پس محل قرار دادن y ما باید در مرکز سطح مقطع باشد.

2 در سطح مقطع تیر باید دو محوری را پیدا کنیم که $I_{uv} = 0$

نتیجه ①: $\int y\,dA$

نتیجه ②: $I_{zy} = \int zy\,dA = 0$

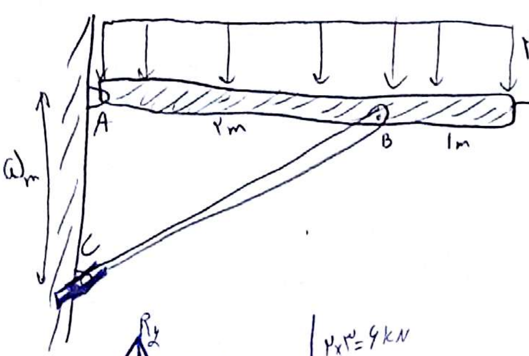
در هر سطح دو بعدی دلخواه می‌توان دو محور i و j عمود بر هم یافت که $\int ij\,dA = I_{ij}$ صفر شود.

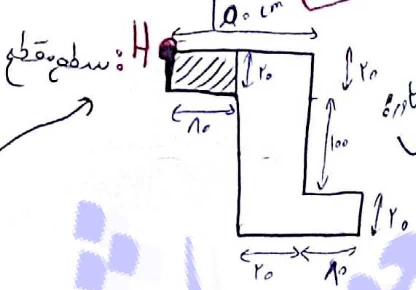
یعنی ما نیاز داریم دو محور به نام های u و v که اصطلاحاً محورهای اصلی نامیده می‌شوند انتخاب کنیم که اولاً ① (در مرکز سطح مقطع تقاطع داشته باشند)

ربطی به جهت M ندارد، ربطی به تار خنثی ندارد!

ثانیاً ② $I_{uv}=0$

مثال (کارشناسی ارشد ۹۵) ($1:30$ min)



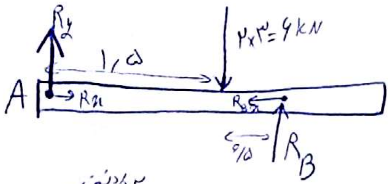


با توجه به شکل در ماکزیمم (بیشترین) گشتاور

الف) مقدار تنش در نقطه H

ب) اندازه نیروی وارد بر سطح هاشورخورده از سطح مقطع

ج) زاویه محور خنثی با افق



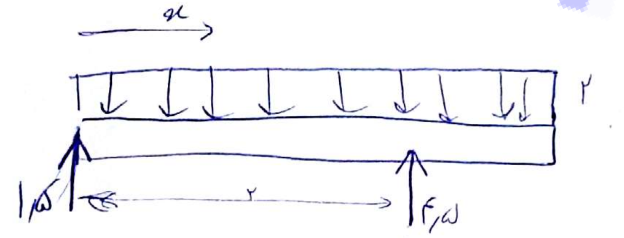
$\Sigma M=0$

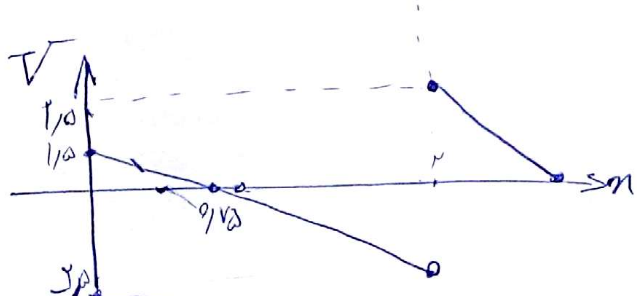
$6\times1.5=2R_B$

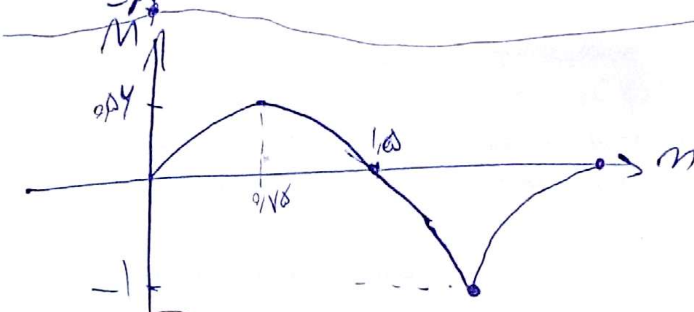
$\boxed{R_B=4.5\,kN}$

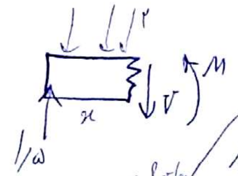
$R_y=1.5$ و $R_{Bx}=R_{Ax}$

ابتدا نمودار گشتاور را رسم می‌کنیم





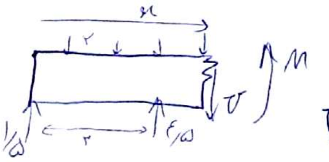




$\boxed{V=1.5-2x}$

$M=Vx+2x\left(\frac{x}{2}\right)=x^2+(1.5-2x)x$

$\boxed{M=-x^2+1.5x}$



$V=6-2x$

$M=\overbrace{(6-2x)}^{V}x-4.5\times2+2x\frac{x}{2}$

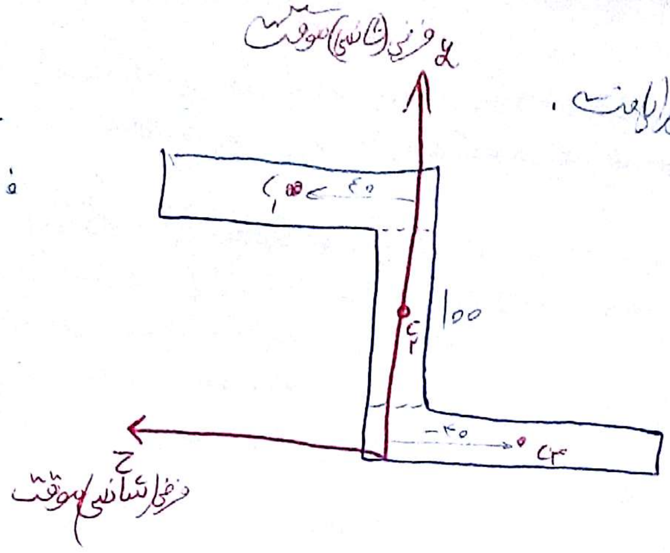
$\boxed{M=-x^2+6x-9}$

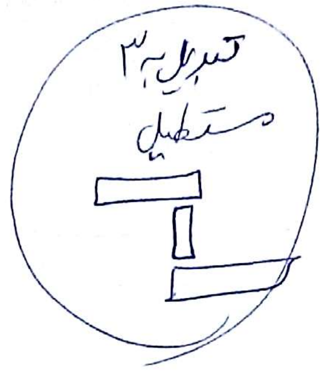
گشتاور ماکزیمم ۱ + (از لحاظ اندازه) است در $x=2$

الف) برای یافتن تنش باید محورهای اصلی را یافت.

1st ویژگی اول: از مرکز می‌گذرد سطح

مرکز یابی:



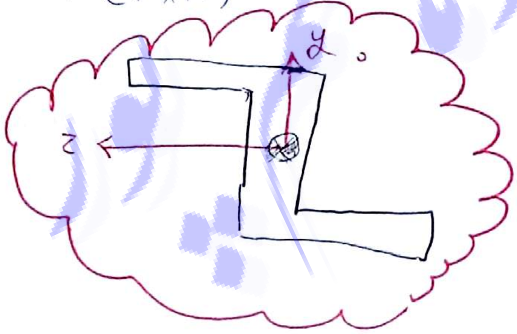


$$\bar{z} = \frac{\Sigma(\bar{z}_i A_i)}{\Sigma A_i} = \frac{(20\times100)40 + 0 + (20\times100)(-40)}{3(20\times100)} = 0$$

پس محور y فرضی درست بوده و بر مرکز منطبق است.

$$\bar{y} = \frac{(20\times100)130 + (20\times100)70 + (20\times100)10}{3(20\times100)} = 70$$

پس z فرضی باید جا بجا شود.



ممان یابی:

$$I_{yy\,\text{کل}} = \Sigma\left(I_{yy\,\text{مرکز هر ناحیه}} + A_i e_i^2\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{12}\times20\times100^3 + 20\times100\times(40)^2\right) + \left(\tfrac{1}{12}\times100\times20^3 + 100\times20\times0\right) + \left(\tfrac{1}{12}\times20\times100^3 + (20\times100 \dots\right.$$

$$= 9.8\times10^6\ mm^4$$

$I_{uv} = 0$ (ویژگی دوم) 2nd

تا اینجا
30 min

$$I_{zz\,\text{کل}} = \left(\tfrac{1}{12}\times100\times20^3 + 20\times100\times60^2\right) + \left(\tfrac{1}{12}\times20\times100^3 + 0\right) + \left(\tfrac{1}{12}\times100\times20^3 + 20\times100\times(-60)^2\right) = 16.2\times10^6\ mm^4$$

$$I_{yz\,\text{کل}} = \left(\underset{\text{به علت تقارن}}{0} + 20\times100\times60\times40\right) + \left(0 + A\times0\times0\right) + \left(0 + 20\times100\times(-40)\times(-60)\right) = 9.6\times10^6\ mm^4$$

این باید صفر شود (با کمک دایره مور)

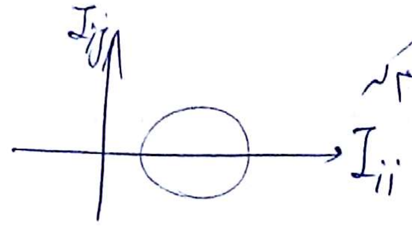
$C = \frac{I_{yy}+I_{zz}}{2} = 13\times10^6$

$R = \sqrt{\left(\frac{I_{yy}-I_{zz}}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = 10.12\times10^6$

$$\begin{cases} I_{yy} = 9.8\times10^6 \\ I_{zz} = 16.2\times10^6 \\ I_{yz} = I_{zy} = 9.6\times10^6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} I_{max} = I_v = 23.1 \ (C+R) \\ I_{min} = I_u = 2.9 \ (C-R) \end{cases}$$

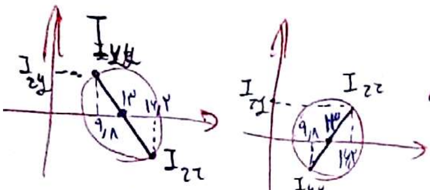
ل) همانطور که می‌بینید (و احتمالاً می‌دانستیم)، یک I_{ii} نمی‌تواند منفی باشد چون $\int i^2 dA$ است.

و دایره مور هم که I_{ii} است و I_{ii} ها همگی مثبت اند پس دایره مور همیشه سمت راست محور عمودی هست.



مرحله بعد: از بحث دایره مور یادمان هست که اگر τ_{xy} ساعتگرد بود، بالا قرار می‌گرفت

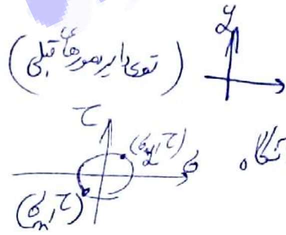
در اینجا اگر I_{xy} عدد مثبتی آمد، بالا قرار می‌گیرد؟ اما مشکل اینجاست که



به نظر شما کدوم درسته؟!

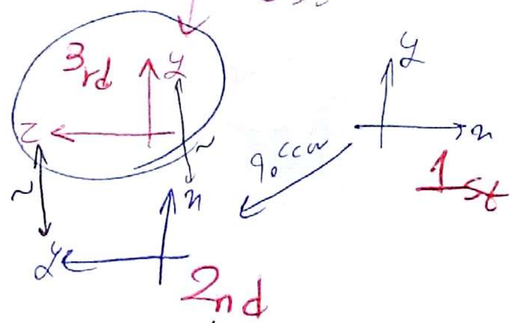
در دستگاه دکارتی داشتیم (تو دایره مورهای قبلی)

و اگر ... آنگاه



همون دستگاه دکارتی ولی با 90 ccw چرخش

پس یعنی: نقش z را y بازی می‌کند، نقش y را z بازی می‌کند



نحوه تشخیص

	ترفند: در دایره مور گفتیم اگر τ روی صفحه x ساعتگرد باشه می‌ره بالای دایره
2nd	اگر $I_{xy}>0$ ← I_{xx} می‌رفت بالای دایره
3rd	اگر $I_{yz}>0$ ← I_{yy} می‌ره بالا (نقش x رو داره) — $I_{yz}>0$: I_{yy} بالا، I_{zz} پایین

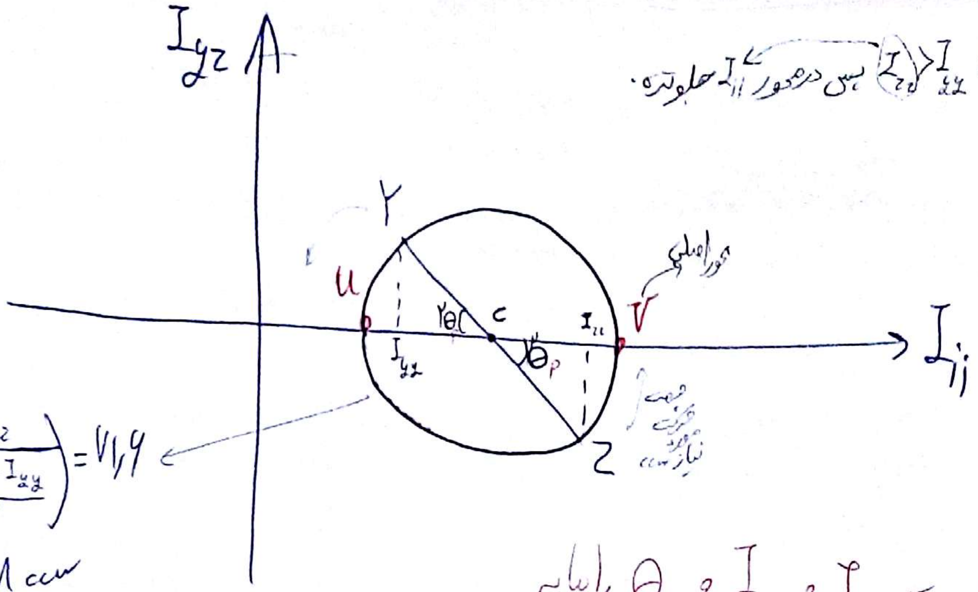
قاعده کلی:

اگر $I_{yz}>0$ ← I_{yy} بالا، I_{zz} پایین

اگر $I_{yz}<0$ ← I_{yy} پایین، I_{zz} بالا

ادامه →

در مثال ما $I_{zz} > I_{yy}$ پس در محور I_{11} جلوتره.



$$2\theta_p = tg^{-1}\left(\frac{I_{yz}}{\frac{I_{zz}-I_{yy}}{2}}\right) = 71/6$$

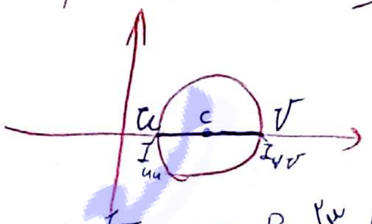
$\theta_p = 35/8$ ccw واقعی

یعنی طی ۳۵/۸ چرخش ccw،

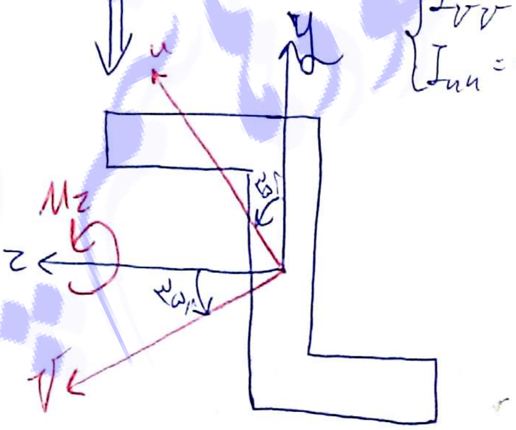
محور y به محور u تبدیل می‌شود

و محور z به محور v تبدیل می‌شود

باید I_{vv} و I_{uu} و θ_p را بیابیم



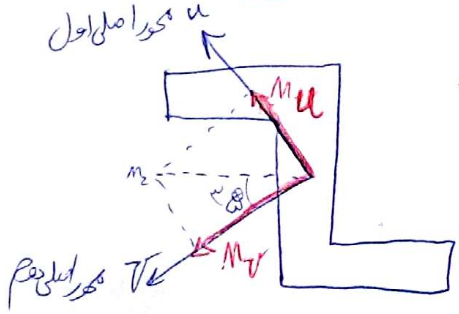
$$\begin{cases} I_{vv} = c + R = 13/1 \times 10^6 \\ I_{uu} = c - R = 2/9 \times 10^6 \end{cases}$$



در مختصات جدید دیگه M_z نداریم که بیاد روی u و v تجزیه بشود.

نکته ای که بعیده استاد امتحان بدهد

اگر M_z نداشتیم و هم M_z هم M_y داشتیم هر دو را بر u و v تجزیه کرده و با هم جمع می‌کردیم.



الان این دو محور u و v هم ویژگی اول را داشته (از مرکز می‌گذرند) هم در دوم ($I_{uv}=0$)

مهم

همونی M_z در سوال

$$\begin{cases} M_z \cos 35 = M_v = 1 \times \cos 35 = 0/8 \ kN.m \\ M_z \sin 35 = M_u = 1 \times \sin 35 = 0/6 \ kN.m \end{cases}$$

الان فرمول ناویر را پیدا می‌کنیم. $\left(\sigma_x = \pm \frac{M_z y}{I_{zz}}\right)$

$$\sigma_{x_A} = + \frac{\overset{0/6}{M_u}}{I_{uu}} V_A - \frac{\overset{0/8}{M_v}}{I_{vv}} u_A$$

نقطه مورد نظر

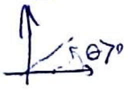
الان می‌توانیم بفهمیم کجا چه تنشی وارد می‌شه اما ادامه

نکته ی دیگری هم وجود دارد که نباید بهش توجه نکنیم:

در فرمول ناویر مختصات نقطه مورد نظر سوال (مثلاً A) باید برحسب $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ باشند!

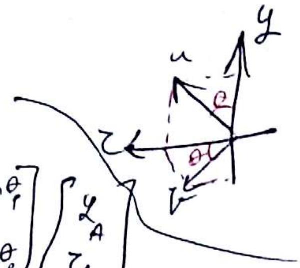
از ماتریس دوران کمک می گیریم.

ماتریس دوران دستگاه های ایرودی: $\begin{bmatrix}\cos & \sin\\ -\sin & \cos\end{bmatrix}$



ماتریس دوران دستگاه های اول مدلی؟ دبیرستان

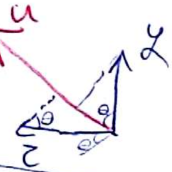
$\begin{bmatrix}\cos & -\sin\\ \sin & \cos\end{bmatrix}$

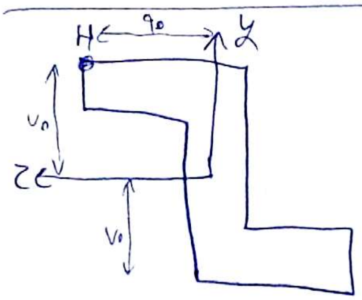


$$\begin{bmatrix}u_A\\ v_A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta_p & \sin\theta_p\\ -\sin\theta_p & \cos\theta_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_A\\ z_A\end{bmatrix}$$

نیازی نیست حفظ کنیم. با تصویر کردن محورها به کمک sin و cos به راحتی ماتریس دوران بدست می آید مثلاً

$$u_A = y_A\cos\theta + z_A\sin\theta$$





حالا الف سوال) تنش وارد بر H به مختصات $\begin{pmatrix}y=70\\ z=90\end{pmatrix}$

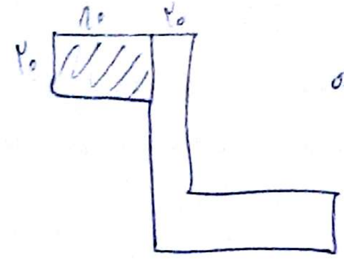
اولاً $\begin{bmatrix}u_H\\ v_H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 35 & \sin 35\\ -\sin 35 & \cos 35\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overset{70}{y_A}\\ \overset{90}{z_A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}109\\ 34\end{bmatrix}$

$$\sigma_{x_H}=+\frac{M_u}{I_{uu}}v_H-\frac{M_v}{I_{vv}}u_H=$$

$$\sigma_{x_H}=\frac{[0.6\times10^{3}\,N.m]\times[34\times10^{-3}\,m]}{2.9\times10^{6}\times(10^{-3})^{4}\,m^{4}}-\frac{[0.8\times10^{3}\,N.m]\times[109\times10^{-3}\,m]}{23.1\times10^{6}\times(10^{-3})^{4}\,m^{4}}=70.35\,Mpa-377.85\,Mpa=-307.5$$

جواب الف $\boxed{\sigma_{x_H}=-307.5\,Mpa}$ فشار تحمل می کند H

ادامه



قسمت ب) نیروی وارده بر قسمت هاشور خورده

چونکه $\Sigma F=\int \sigma\, dA$ یا $\Sigma F=\overset{\text{میانگین}}{\bar{\sigma}} A$

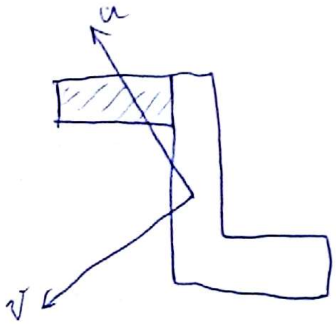
پس باید σ_{avg} را یافت یعنی $\sigma_{avg}=\frac{\sigma_{x\,min}+\sigma_{x\,max}}{2}$

M ها در فلان مقطع مورد نظر سوال ثابت اند دیگر

$$\sigma_x=\frac{M_u}{I_{uu}}v_i-\frac{M_v}{I_{vv}}u_i=20.9\,v-36.6\,u \quad (MPa)$$

$u_{min},\ v_{max} \Rightarrow \sigma_{max}$

$u_{max},\ v_{min} \Rightarrow \sigma_{min}$



$\sigma_{avg}=\frac{\sigma_{min}+\sigma_{max}}{2}$

$\Rightarrow F_{\text{کل وارد بر سطح}}=\sigma_{avg}\times 20\times 80 \quad (MPa\times m^2\times 10^{-6})$

$=16\,\sigma_{avg}\times 10^{2}\ N$

تا همینجا بنویسید اساتید قبول می‌کنن

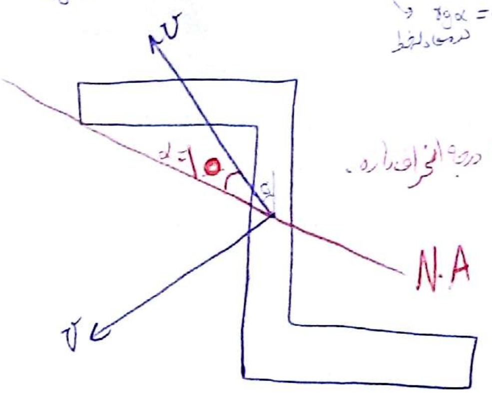
قسمت ج) یافتن معادله تار خنثی: بر تار خنثی تنش وارد نمی‌شود $\sigma_x=0$

$$\frac{M_u}{I_{uu}}v=\frac{M_v}{I_{vv}}u \Longrightarrow \frac{M_z\sin\theta_p}{I_{uu}}v=\frac{M_z\cos\theta_p}{I_{vv}}u \Longrightarrow \frac{v}{u}=\frac{I_{uu}}{I_{vv}}\times\frac{1}{tg\,\theta_p}$$

$$\Longrightarrow \frac{v}{u}=\frac{c-R}{c+R}\times\frac{1}{tg\,\theta_p}=0.18 \Longrightarrow v=0.18\,u$$

معادله خط N.A

$\to tg\,\alpha=0.18 \to \alpha=10.2$ درجه با خط



پس تار خنثی از محور عمود مثلاً ۱۰+۳۵ درجه انحراف داره.

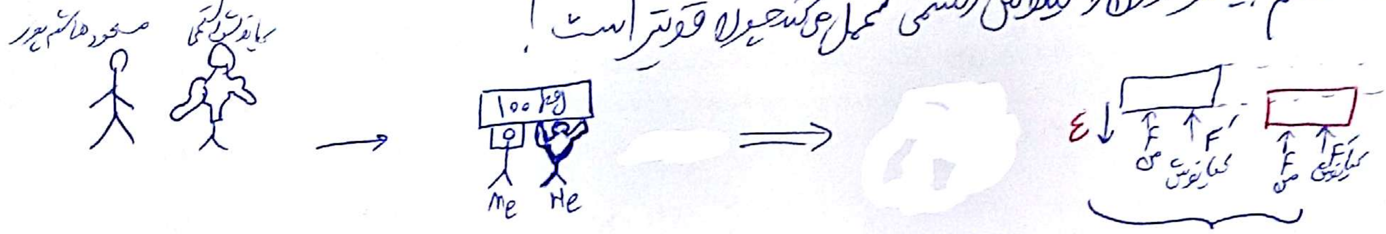
Scanned by CamScanner

خمش کامپوزیت

۱۵ × ۲

فرض کنید مسعود هاشم پور در کنار کیانوش رستمی ایستاده است و هر دو دستشان را بالا گرفته‌اند تا جعبه‌ای به وزن ۱۰۰ kg را با دستان خود نگه دارند. وقتی جعبه روی دستان این دو قرار می‌گیرد هر دو به یک اندازه دستانشان فشرده می‌شود

اما قسم بیشتر وزن را کیانوش رستمی تحمل می‌کند چون او قویتر است!



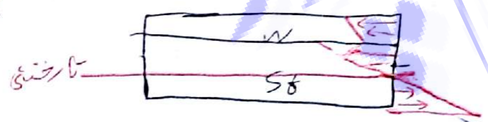
ε ها و متعاقباً Δy ها یکسان است ولی قدرت کیانوش بیشتر است (E بیشتر) پس نیروی بیشتری را تحمل می‌کند و همچنین تنش بیشتری را.

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2 \xrightarrow[E_{\text{مسعود}} \ll E_{\text{کیانوش}}]{\sigma=E\varepsilon} \sigma_{\text{کیانوش}} \gg \sigma_{\text{مسعود}}$$

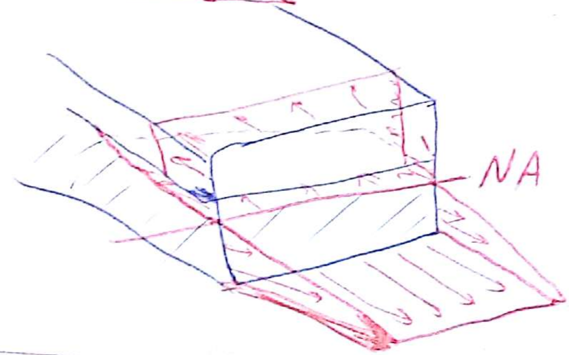
پس اگر تیری از این جنس داشته باشیم: سطح چوب = ۲ × سطح فولاد

$A_{st} = 2A_{\text{چوب}}$

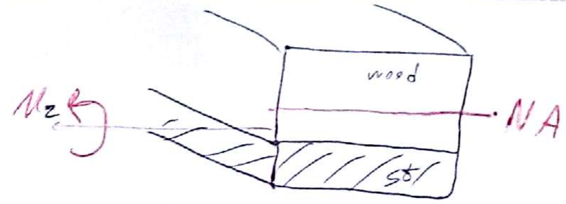
نمودار تنش به شکل دوبعدی اینگونه می‌شود.

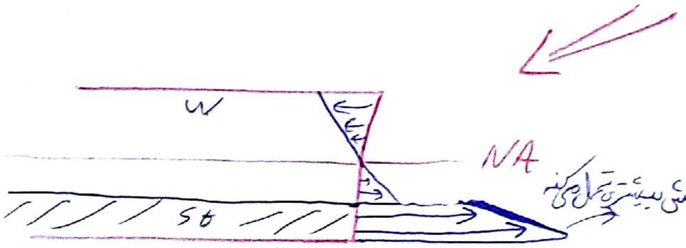


در 3D:



حال در چنین شکلی



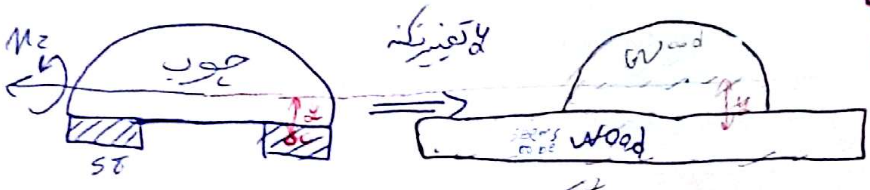


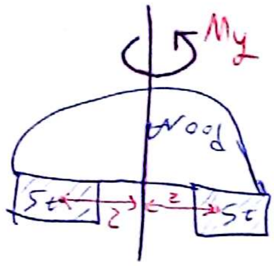
۱۵) باید مساحت قسمت قوی‌تر رو زیاد کنیم.

[اگر M_z در راستای z داریم مساحت را طوری زیاد کنیم که y (مرکز سطح) آن تغییر نکند.]

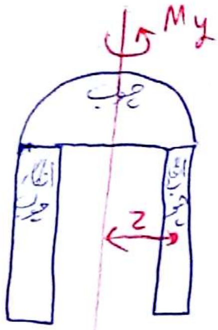
★ مورد علاقه از جنس ضعیف‌تر ★

[اگر M_y داریم، مساحت طوری زیاد شود که z (مرکز سطح) تغییر نکند]





z تغییر نکنه

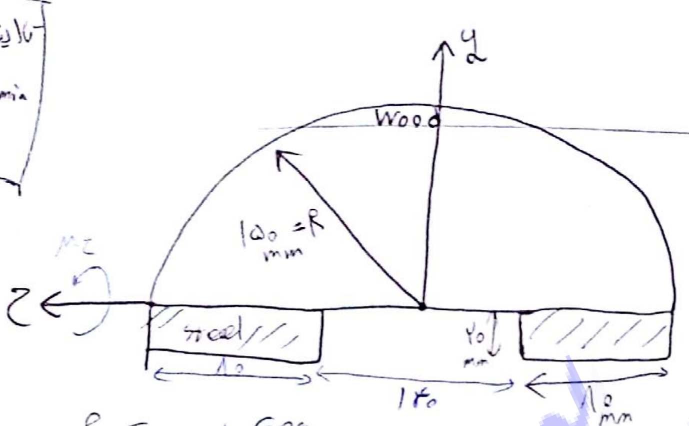


چقدر اضافه کنیم سطح را؟

$\frac{E_w}{E_{st}} = \frac{1}{20}$

مساحت st باید ۲۰ برابر شود.

تا اینجا ۱۵min



1x2hour

[پایانترم ۹۴]

مثال) اگر گشتاور حول محور افقی (z) $12^{kN.m}$ باشد:

الف) تنش حداکثر در فولاد

ب) « « در چوب

ج) رسم نمودار تنش روی مقطع (2D و 3D)

$$\begin{cases} E_{wood} = 10^{GPa} \\ E_{st} = 200^{GPa} \end{cases}$$

چون M_z داریم پس باید طوری مساحت فولاد را زیاد کنیم که y آن تغییر نکند ($\updownarrow y$ مرکز سطح)

$$\frac{E_{st}}{E_{wood}} = \frac{200}{10} = 20$$

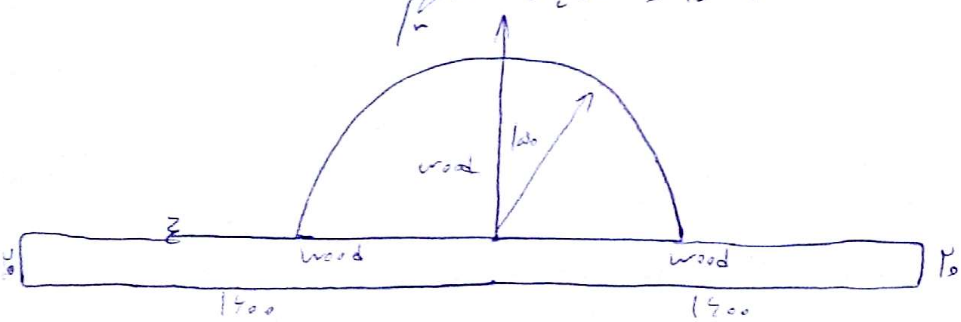
مساحت فولاد باید ۲۰ برابر شود تا بتوانیم آن را از جنس چوب در نظر بگیریم.

اگر بخواهیم y تغییر نکند باید مساحت افقی زیاد گردد. پس عرض آن ثابت می‌ماند.

$A' = 20A = 20(\overset{\text{عرض}}{20} \times 80)$

عرض ثابت

$= (\overset{\text{عرض}}{20} \times \overset{\text{طول جدید}}{1600})$



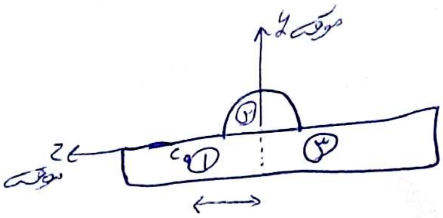
حالا مراحل

۱) مرکز سطح

۲) محورهای y و z ($I_{yz} = 0$)

۳) رابطه‌ی σ

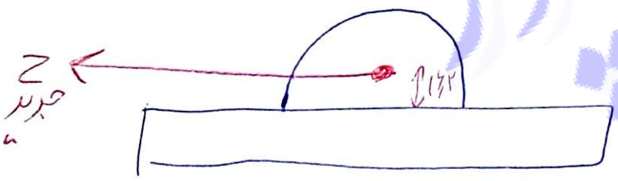
$$\bar{y} = \frac{\sum_1^3 \bar{x}_i A_i}{\sum_1^3 A_i} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma \bar{z} A}{\Sigma A}$$



$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\pi(0/15)^2 \bar{y}_2^{\,?} + (0/02 \times 1/6 \times (-10 \times 10^{-3})) + (0/02 \times 1/6 \times (10 \times 10^{-3}))}{\underbrace{\frac{1}{2}\pi(0/15)^2}_{\text{نیم دایره}} + 2 \times (0/02 \times 1/6)} =$$

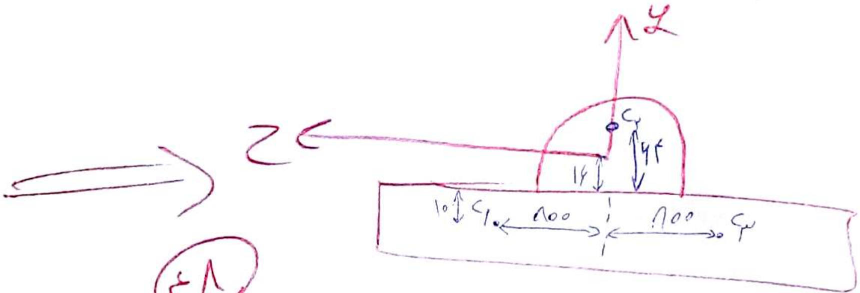
$$\bar{y} = \frac{0/0353\left(\frac{4}{3}\frac{0/15}{\pi}\right) - 0/0064}{0/0994} = 0/0162\ m = 16/2\ mm$$

پس محور موقت ما باید $16/2\ mm$ برود بالا



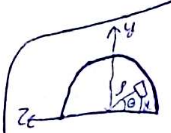
$$\bar{z} = \frac{A_{\text{نیم دایره}}(0) + A_{\text{مستطیل اول}}(+z_c) + A_{\text{مستطیل دوم}}(-z_c)}{A_{\text{نیم دایره}} + 2A_{\text{مستطیل}}} = 0$$

محور y درست بوده



48

$\bar{y}_c$ و $\bar{z}_c$ نیم دایره:



$dA = ds \times d\rho$
$= \rho\, d\theta\, d\rho$

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A} = \frac{\int \rho \sin\theta (\rho\, d\theta\, d\rho)}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{\int_0^R\int_0^\pi (\rho^2 d\rho) \sin\theta\, d\theta}{\frac{\pi}{2}R^2} = \frac{\frac{R^3}{3} \times (-\cos\theta)\Big]_0^\pi}{\frac{\pi}{2}R^2}$$

می توانید حفظ کنید

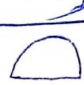
$$\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

پس محور z باید به اندازه ی $\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$ بالاتر بیاید تا به مرکز سطح برسد.

$$\bar{z} = \frac{\int z\, dA}{A} = \frac{\int \rho\cos\theta\, dA}{A} = \frac{\int_0^R \rho^2 d\rho (\cos\theta\, d\theta)}{\frac{\pi}{2}R^2} = \frac{\frac{R^3}{3}\sin\theta\Big]_0^\pi}{\frac{\pi}{2}R^2} = 0$$

پس محور y را درست گذاشتیم و روی مرکز سطح قرار دارد.

نحوه ی محاسبه ی ممان نیم دایره:



ادامه

Scanned by CamScanner

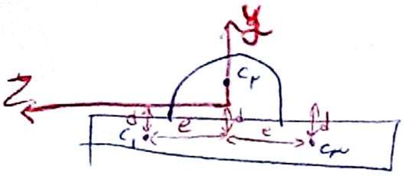
اگر $I_{yz}=0$ پس y و z ها محور اصلی هستند (محور اصلی)

مرحله دوم:

$$I_{yz} = \Sigma\left(\underset{\text{مرکزها}}{I_{y_c z_c}} + A_i d_i e_i\right) = \overbrace{\left(\overset{\text{حول مرکز}}{0} + A(d)(0)\right)}^{\text{نیم دایره}} + \overbrace{\left(\overset{\text{حول مرکز}}{0} + A(-d)(+e)\right)}^{\text{مستطیل اول}} + \overbrace{\left(0 + A(-d)(-e)\right)}^{\text{مستطیل دوم}} = 0$$

مرکز سطحی برابر است پس با آن فاصله ندارد

خنثی



پس محورها اصلی اند. $\boxed{y \text{ و } z}$

حالا فقط I_{zz} را میخواهیم چون فقط M_z داریم و در فرمول داریم (این فرمول) $\sigma_x = \frac{M_z}{I_{zz}} y$ مشخص است.

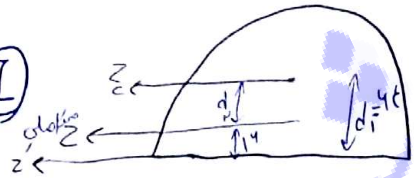
میشه راحت به دست آورد

اولاً $I_{z'z'} \overset{?}{=} I_{z_c z_c} + A d_1^2$ (I) — به دست می‌آید

نیم دایره

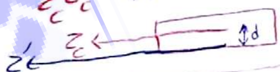
در انتها میخواهیم

ثانیاً $\overset{?}{I_{zz}} = I_{z_c z_c} + A d_2^2$



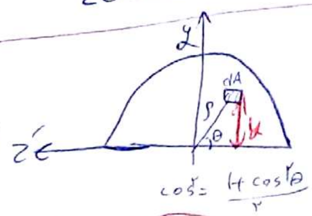
دقت: قضیه محورهای موازی فقط برای مرکز جرم صادق است

$$I_{z'z'} = I_{z_c z_c} + A d^2$$



$$\Downarrow$$

$$\underset{\text{نیم دایره}}{I_{z'z'}} = \int y^2 dA = \iint (\rho^2 \cos^2\theta)(\rho\, d\theta\, d\rho)$$



$\cos^2 = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$$= \left(\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R\right) \times \left(\frac{1}{2}\Big|_0^\pi + \cancel{\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_0^\pi}\right) = \boxed{\frac{\pi R^4}{8}}$$

می‌توانید حفظ کنید

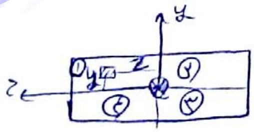
(I) $\Longrightarrow \frac{\pi R^4}{8} = I_{z_c z_c} + \left(\frac{1}{2}\pi \underset{(150)^2 mm^2}{R^2}\right)(64_{mm})^2 \Longrightarrow \boxed{I_{z_c z_c} = 54 \times 10^{-6}\, m^4}$

$\underset{\text{نیم دایره}}{I_{zz}} = 54 \times 10^{-6} + \left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)(64-16)^2 \Longrightarrow \boxed{\underset{\text{zz نیم دایره محور اصلی}}{I} = 135 \times 10^{-6}\, m^4}$

اختیاری:

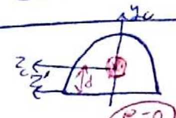
اثبات اینکه I_{yz} مستطیل و نیم دایره حول مرکز سطحشان صفر است.

برای مستطیل



$$I_{y_c z_c} = \int yz\, dA = \underset{1}{\int (+y)(+z)\, dA} + \underset{2}{\int (+y)(-z)\, dA} + \underset{3}{\int (-y)(+z)\, dA} + \underset{4}{\int (-y)(-z)\, dA} = 0$$

برای نیم دایره:

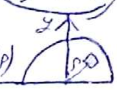


$(e=0)$

$I_{y_c z_c} = ?$

$I_{zy} = I_{z_c y_c} + A(d)(\overset{0}{e})$

$\Longrightarrow I_{z_c y_c} = I_{z'y}$ ← این رابطه همیشه پس استفاده کردیم



$$= \int yz\, dA = \iint (\rho \sin)(\rho\cos)(\rho\, d\theta\, d\rho)$$

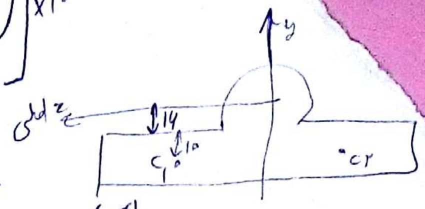
$$= \frac{R^4}{4}\left(\int \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta\right) = \frac{R^4}{4} \times \left(\frac{-\cos 2\theta}{4}\right)\Big|_0^\pi$$

$$= 0$$

هنوز I_{zz} دو مستطیل رو با $\underset{\text{نیم دایره}}{I_{zz}}$ جمع نکردیم.

$$I_{zz_{\text{کل}}} = \left(\underbrace{1305\times10^{-6}}_{\text{نیم دایره}}\right) + \left[\left(\underbrace{\frac{1}{12}\times20^{3}\times1600}_{\text{مستطیل اول}} + (20\times1600)\left(-(16+10)\right)^{2}\right)\right]\times10^{-12}\ (m^4)$$

$$+\left[\frac{1}{12}\times20^{3}\times1600 + (20\times1600)\left(-(16+10)\right)^{2}\right]\times10^{-12}\ (m^4)$$



$$I_{zz_{\text{کل}}} = 185\times10^{-6}\ m^4$$

$$\sigma_x = \frac{-\overset{12\times10^{3}\ N.m}{M_z}}{185\times10^{-6}\ m^4}\, y_A = -0.0667\times10^{+9}\times y_A$$

هر کجا که چوبی باشد

نقطه مورد نظر

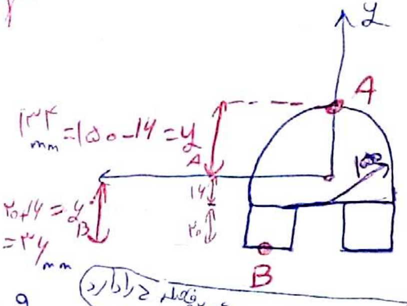
الف) حداکثر تنش در چوب و فولاد.

$$\frac{E_2}{E_1} = n = 20$$

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_{zz}}\, y \quad \text{چوبی}$$

$$\sigma_x = n\times\frac{-M_z}{I_{zz}}\, y \quad \text{فولادی}$$

چون که فولاد قوی تره پس نیرو و تنش بیشتری تحمل می کنه.



$\rightarrow \sigma_{x_{max}} \xrightarrow{\text{اندازه } \cancel{\text{نه مثبت و منفی}}} |y|_{max}$

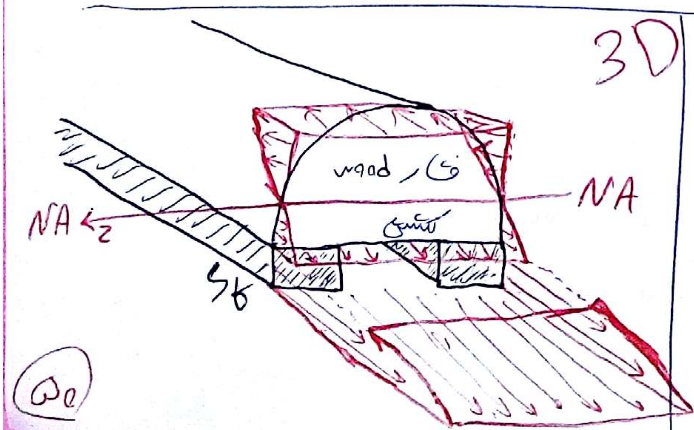
$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_{x_{max,\ wood}} = -0.0667\times10^{9}\times \underset{+134\times10^{-3}\,m}{y_A} = \boxed{-8.94\ MPa} \quad \text{فشار} \\ \sigma_{x_{max,\ \text{فولاد}}} = -0.0667\times20\times \underset{-36\times10^{-3}\,m}{y_B} = \boxed{+48.02\ MPa} \quad \text{کشش} \end{cases}$$

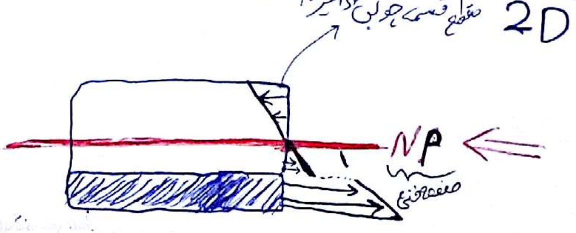
در قسمت چوبی بیشترین فاصله از z را دارد A

B در قسمت فولادی بیشترین فاصله از z را دارد.

الف و ب ⇐

ج)





تار خنثی

$$\sigma = \frac{M}{I_{zz}}\, y = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ روی خط z است