

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# موضوع ارائه: مدل مارکویتز و بهینه سازی پرتفوی

استاد محترم: خانم دکتر خواجه سعید

گردآورنده: فرشته حجّتی بناب

منبع: مدیریت سرمایه گذاری پیشرفته دکتر راعی و پویان نفر

## مفاهیم پایه برای بررسی مدل مارکویتز

- مفهوم پرتفوی: در عبارت ساده پرتفوی به ترکیبی از دارایی‌ها گفته می‌شود که توسط یک سرمایه‌گذار نگه‌داری می‌گردد.  
تا بدین جا با مفاهیم ریسک و بازده مورد انتظار پرتفوی و نحوه محاسبه آنها آشنا شدیم.

## یادآوری:

- بازده مورد انتظار پرتفوی: متوسط موزون بازده مورد انتظار تک تک دارایی‌هاست، ابتدا چگونگی محاسبه بازده مورد انتظار را یادآوری می‌کنیم.

$$r_p = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \dots + x_n r_n$$

$$r_p = \sum_{j=1}^N x_j r_j$$

$$\bar{r}_p = E(r_p) = E\left(\sum_{j=1}^N x_j r_j\right) = \sum_{j=1}^N x_j E(r_j) = \sum_{j=1}^N x_j \bar{r}_j$$

• مثال های محاسبه بازده ۲ سهم و ۳ سهم :

سهم z	بازده هر سهم $r_j$	وزن هر سهم در پرتفوی
الف	%20	%50
ب	%10	%50

$$r_p = (50\%)(20\%) + (50\%)(10\%) = 15\%$$

سهم	تعداد سهام موجود در پرتفوی	نسبت	بازده مورد انتظار هر سهم در آخر دوره	متوسط بازده مورد انتظار آخر دوره
A	100	25%	46/48	11/62
B	200	50%	43/61	21/805
C	100	25%	79/14	19/785

$$11/62 + 21/805 + 19/785 = 53/21\%$$

- ریسک پرتفوی: با توجه به رویکرد نظریه نوین پرتفوی لازمه درک ریسک پرتفوی دانستن مفاهیمی چون انحراف معیار پرتفوی و کوواریانس و ضریب همبستگی است.

- واریانس پرتفوی:

واریانس پرتفوی را با  $\sigma_p^2$  نشان می‌دهیم که عبارتست از ارزش مورد انتظار مجذور انحرافات بازده پرتفوی

از میانگین بازده مورد انتظار پرتفوی.

$$\sigma_p^2 = E(r_p - \bar{r}_p)^2$$

- با جایگذاری بازده پرتفوی و متوسط بازده مورد انتظار پرتفوی در عبارت فوق برای دو سهم A, B خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= E(r_p - \bar{r}_p)^2 = E\left[x_A r_A + x_B r_B - (x_A \bar{r}_A + x_B \bar{r}_B)\right]^2 \\ &= E\left[x_A (r_A - \bar{r}_A) + x_B (r_B - \bar{r}_B)\right]^2\end{aligned}$$

- با توجه به اینکه ارزش مورد انتظار مجموع چند بازده برابر است با "مجموع ارزش مورد انتظار هر بازده" و ارزش مورد انتظار ضرب یک عدد ثابت در بازده برابر است با "حاصلضرب عدد ثابت در بازده مورد انتظار"

$$\sigma_p^2 = E\left[x_A^2 (r_A - \bar{r}_A)^2\right] + 2x_A x_B E[(r_A - \bar{r}_A)(r_B - \bar{r}_B)] + E\left[x_B^2 (r_B - \bar{r}_B)^2\right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= x_A^2 E\left[(r_A - \bar{r}_A)^2\right] + 2x_A x_B E\left[(r_A - \bar{r}_A)(r_B - \bar{r}_B)\right] + x_B^2 E\left[(r_B - \bar{r}_B)^2\right] \\ &= x_A^2 \sigma_A^2 + 2x_A x_B \left[ E\left[(r_A - \bar{r}_A)(r_B - \bar{r}_B)\right] \right] + x_B^2 \sigma_B^2 \end{aligned}$$

- عبارت  $E[(r_A - \bar{r}_A)(r_B - \bar{r}_B)]$  در آمار کوواریانس نامیده می شود.

## • کوواریانس چیست؟

کوواریانس شاخصی برای تغییرات یک متغیر با متغیر دیگر است. کوواریانس مشابه واریانس است ولی در کوواریانس انحراف از میانگین را به طور همزمان برای دو متغیر  $X, Y$  محاسبه می کنیم.

اندازه کوواریانس چیزی بیشتر از رابطه بین بازده های ۲ سهم نمی باشد و مقیاسی از چگونگی حرکت بازدهی داراییها با یکدیگر است.

$$\sigma_{A,B} = \text{COV}_{A,B} = \frac{\sum_{t=1}^N [(r_{At} - \bar{r}_A)(r_{Bt} - \bar{r}_B)]}{N - 1}$$

## • مثال:

نرخ بازده دو سهم A و B در یک دوره پنج ماهه به شرح زیر است:

ماه	1	2	3	4	5	میانگین
سهم A	4%	-2%	8%	-4%	4%	2%
سهم B	2%	3%	6%	-4%	8%	3%

ابتدا انحراف این دو بازده را نسبت به میانگین بازده شان محاسبه می کنیم

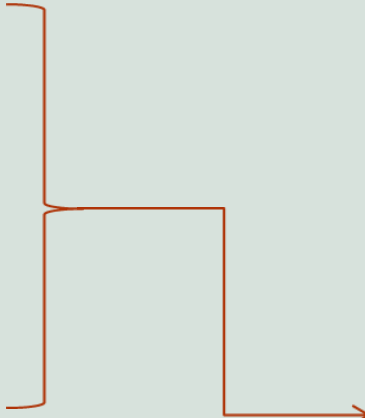
$$1) (4\% - 2\%)(2\% - 3\%) = -/0001$$

$$2) (-2\% - 2\%)(3\% - 3\%) = 0$$

$$3) (-4\% - 2\%)(6\% - 3\%) = ./0018$$

$$4) (-4\% - 2\%)(-4\% - 3\%) = ./0042$$

$$5) (4\% - 2\%)(8\% - 3\%) = ./0010$$


$$\sigma = /0068$$

$$COVA, B = ./00068 / (5 - 1) = ./0017$$



- وقتی نتایج خوب برای ۲ سهم تواما اتفاق بیفتد اندازه آن بسیار بزرگ خواهد بود و نیز وقتی نتایج بد برای هر ۲ سهم با هم اتفاق بیفتد باز حالت فوق صادق است و در نهایت کوواریانس و واریانس پرتفوی مقادیر بزرگی خواهند داشت .

- در مقابل چنانچه یک نتیجه خوب برای یک دارائی همراه با نتیجه بد برای دارائی دیگر رخ دهد کوواریانس منفی میشود کوواریانس مقیاسی از چگونگی حرکت بازدهی دارائیهها با یکدیگر است .

- کوواریانس به دلیل این که یکی از اطلاعات اساسی به منظور محاسبه واریانس پرتفوی سهم می باشد، یکی از بهترین معیارهاست . هرچند که اندازه کوواریانس ، ماهیت کامل توزیع مشترک روابط بین دوسرمایه گذاری را نمایش نمی دهد ، لیکن ، می توان با استاندارد نمودن آن ، معیار بهتری به نام «ضریب همبستگی» رابه دست آورد.

## ضریب همبستگی

با تقسیم کوواریانس بین دو دارائی بر حاصل ضرب واریانس ۲ دارائی متغیری با همان خواص کوواریانس اما با دامنه محدود [۱-۱] بدست می آید این مقیاس ، ضریب همبستگی است .

$$\rho_{AB} = \frac{COV_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B}$$

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$$

کوواریانس بین دو متغیر تصادفی برابر است با حاصلضرب ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی در انحراف معیارشان :

$$COV_{AB} = \sigma_{AB} = \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$$

## مقدمه ای بر مدل مارکویتز

- در سال ۱۹۵۲ هری مارکویتز مدل اساسی پرتفوی را ارائه کرد که مبنایی برای تئوری مدرن پرتفوی قرار گرفت. قبل از مارکویتز سرمایه‌گذاران با مفاهیم ریسک و بازده آشنا بودند. اگرچه آن‌ها با مفهوم ریسک آشنا بودند ولی معمولاً نمی‌توانستند آن را اندازه‌گیری کنند. سرمایه‌گذاران از قبل می‌دانستند که ایجاد تنوع مناسب است و نباید همه تخم‌مرغ‌هایشان را در یک سبد بگذارند.
- با این حال، مارکویتز اولین کسی بود که مفهوم پرتفوی و ایجاد تنوع را به صورت روش علمی بیان کرد. او به صورت کمی نشان داد که چرا و چگونه تنوع سازی پرتفوی می‌تواند باعث کاهش ریسک پرتفوی (مجموعه سرمایه‌گذاری) یک سرمایه‌گذار شود. چرا ایجاد تنوع در سرمایه‌گذاری برای سرمایه‌گذاران مهم است؟
- می‌توان گفت که قانون شماره یک مدیریت پرتفوی ایجاد تنوع است. از آنجا که سرمایه‌گذاران نسبت به آینده مطمئن نیستند باید برای کاهش ریسک دست به ایجاد تنوع در سرمایه‌گذاری خود بزنند. به عبارت دیگر تشکیل یک پرتفوی متنوع، میزان ریسک را تا حد زیادی کاهش می‌دهد. به عنوان مثال در بحران اقتصادی سال ۱۹۸۷ آمریکا، فقط کم‌تر از ۵ درصد صندوق‌های مشترک سرمایه‌گذاری (که اقدام به تشکیل پرتفوی می‌کردند) با ضرر و زیان مواجه نشدند.

## • بهینه سازی پرتفوی مدل مارکویتز

- از برجسته ترین نکات مورد توجه در مدل مارکویتز توجه به ریسک سرمایه گذاری نه تنها بر اساس انحراف معیار یک سهم بلکه بر اساس ریسک مجموعه سرمایه گذاری است .
- مفروضات مدل مارکویتز :
- ۱\_ سرمایه گذاران ریسک گریزند و دارای مطلوبیت مورد انتظار افزایشی و منحنی نهایی ثروت آنها کاهنده است .
- ۲\_ منحنی های بی تفاوتی سرمایه گذاران تابعی از نرخ بازده و واریانس مورد انتظار است .
- ۳\_ هرگونه سرمایه گذاری تا بینهایت قابل تقسیم است.
- ۴\_ سرمایه گذاران افق زمانی یک دوره ای داشته و این برای همه آنها مشابه است .
- ۵\_ سرمایه گذاران در یک سطح مشخصی از ریسک بازده بالاتری را ترجیح میدهند و برعکس.

- بطور مثال یک سرمایه گذار (شخص A) را در نظر بگیرید که "بازده مورد انتظار بالا" را که مطلوب و "عدم اطمینان بازده" را که نامطلوب است را به عنوان دو عامل مهم در تصمیم گیری خود در نظر دارد.

- وی  $n$  ورقه بهادار را پیش روی دارد لذا بازده ورقه  $i$  (یک متغیر تصادفی) را با میانگین  $\bar{r}_i$  و واریانس  $\sigma_i^2$  ، در نظر می گیرد.

- بعلاوه اگر  $\sigma_{ij}$  کوواریانس بین بازدهی هر دو سهم باشد . اگر سرمایه گذار مقداری پول برای سرمایه گذاری بین  $n$  سهم داشته باشد ، سوال اینست که "مبلغ سرمایه گذاری چگونه بین  $n$  ورقه تخصیص یابد تا پرتفوی حاصله حداکثر مطلوبیت مورد انتظار را داشته باشد؟"

ماکویتز پیشنهاد داد پاسخ سوال فوق باید در دو مرحله انجام گیرد:  
(۱) تعیین مجموعه پرتفوی کارا

(۲) انتخاب از مجموعه کارا

- **تعیین مجموعه پرتفوی کارا:** پرتفوی کارا به معنای ترکیب مطلوب اوراق بهادار به نحوی است که ریسک آن پرتفوی در ازای نرخ بازده معین به حداقل رسیده باشد. سرمایه‌گذاران می‌توانند از طریق مشخص کردن نرخ بازده مورد انتظار پرتفوی و حداقل کردن ریسک پرتفوی در این سطح بازده، پرتفوی کارا را مشخص کنند. سرمایه‌گذاران منطقی به دنبال پرتفوی‌های کارا هستند زیرا این گونه پرتفوی‌ها باعث حداکثر شدن بازده مورد انتظار برای سطح معینی از ریسک، یا حداقل ریسک برای بازده مورد انتظار معینی می‌شود. با توجه به اهمیت این موارد، به چگونگی برآورد ریسک و بازده پرتفوی خواهیم پرداخت. برای تعیین یک پرتفوی کارا، لازم است بازده مورد انتظار و انحراف معیار بازده برای هر پرتفوی را مشخص کنیم. به همین منظور و برای محاسبه بازده مورد انتظار و انحراف معیار آن باید از مدل مارکوویتز استفاده کنیم.

- پرتفوی کارا، پرتفویی است با کمترین واریانس بازده در بین تمامی پرتفویها با بازده مورد انتظار یکسان و یا بیشترین بازده مورد انتظار در بین تمامی آنهايي که واریانس یکسان دارند.

- به منظور ایجاد پرتفوی کارا مارکوویتز بازده کل پرتفوی را به صورت میانگین موزون بیان میکند.

$$r_p = \sum_{i=1}^n x_i r_i$$

$x_i$  کسری از کل منابع سرمایه گذاری شده در سهم  $i$  و  $r_i$  بازده سهم  $i$  است، ارزش انتظاری و واریانس معادله

$$\bar{r}_p = \sum_i x_i \bar{r}_i$$

فوق به شرح زیر خواهد بود.

$$\sigma_p = \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij}$$

## ترکیبات دو دارایی ریسک دار:

از آنجا که فرض بر این است که سرمایه گذار تمامی وجوه خود را سرمایه گذاری نماید، بازده مورد انتظار پرتفوی دو سهمی بدین صورت خواهد بود:

توجه نمایید بازده مورد انتظار پرتفوی، برابر متوسط موزون بازده مورد انتظار تک تک اوراق بهادار است که مجموع وزن آنها در پرتفوی برابر یک است.

$$r_p = x_A E(r_A) + x_B E(r_B)$$

یا

$$\bar{r}_p = x_A \bar{r}_A + x_B \bar{r}_B \quad (4-7)$$

که در آن:

$x_A$  = نسبتی از کل بودجه صرف شده در دارایی A؛

$x_B$  = نسبتی از کل بودجه صرف شده در دارایی B؛

$\bar{r}_p$  = بازده مورد انتظار پرتفوی؛

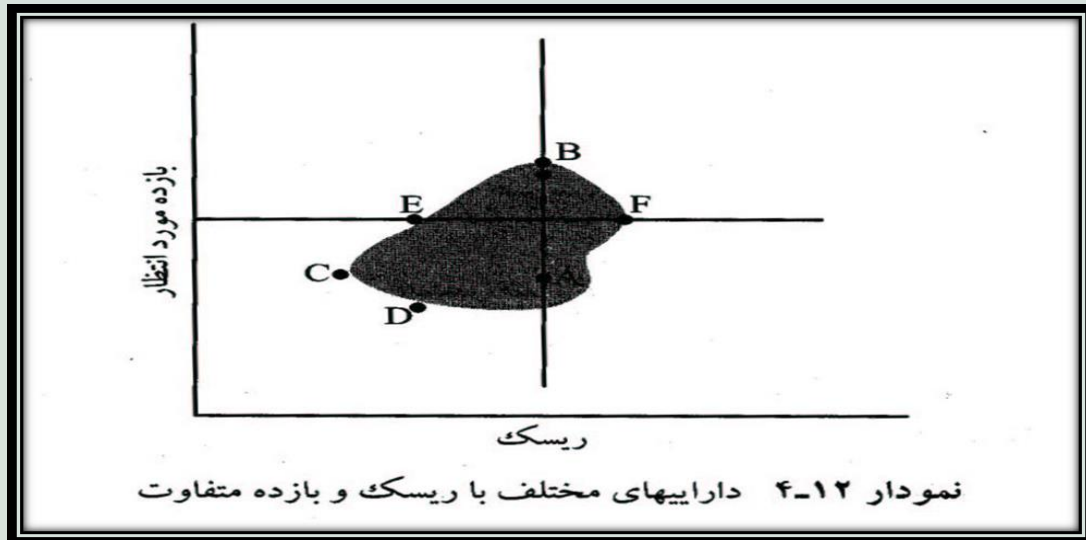
$E(r_A)$  یا  $\bar{r}_A$  = بازده مورد انتظار سهام A؛ و

$E(r_B)$  یا  $\bar{r}_B$  = بازده مورد انتظار سهام B می باشند.

$$\bar{r}_p = x_A \bar{r}_A + (1 - x_A) \bar{r}_B$$

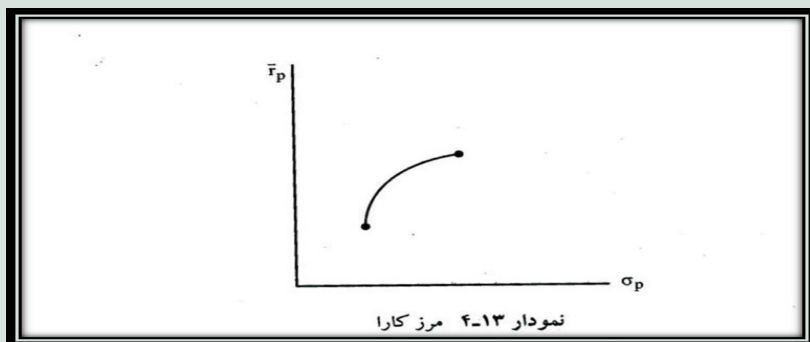
• اگر تمامی حالات ممکن ترکیبات مختلف پرتفویها را در فضای ریسک- بازده ترسیم نماییم، نموداری شبیه به نمودار زیر خواهیم داشت:

یک سرمایه گذار، بازده بیشتر را به کمتر، و ریسک کمتر را به بیشتر ترجیح می دهد. بنابراین، اگر پرتفوهایی را بیابیم که:



۱- بازده بیشتر را به ازاء ریسک یکسان ارائه نماید و یا  
 ۲- ریسک کمتری را به ازاء بازده یکسان نماید،  
 خواهیم توانست تمامی پرتفوهایی را که سرمایه گذار، متمایل به نگهداری آن است تعیین نماییم.

بنابراین مرز کارا شامل منحنی محاط تمامی پرتفوهایی است که بین پرتفوی حداقل واریانس کلی (نقطه C) و پرتفوی حداکثر بازده مورد انتظار (نقطه B) قرار می گیرند. این مجموعه مرز کارا نامیده می شود.





با کمال تشکر و قدردانی از توجه شما

همواره سلامت و سربلند باشید