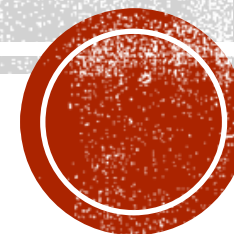


# روش های جبری برای CT

تنظیم و ارائه : معصومه رحیمی

استاد راهنما : دکتر چرمی



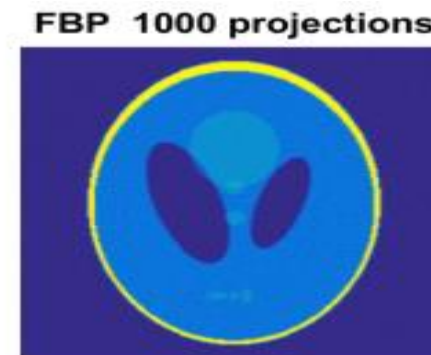
# آنچه مورد بررسی قرار می گیرد:

- فرمولاسیون جبری؛ نمایش و تفسیر ماتریسی
- روش **Kaczmarz** ( که با عنوان **ART** شناخته میشود) که روشی ترتیبی می باشد.
- فرمول بندی های جبری انعطاف پذیری بیشتری نسبت به فرمولاسیون های مبتنی بر تبدیل رادون دارند. جبر خطی چارچوبی مختصر برای فرمول بندی الگوریتم های مرتبط برای فرمول های جبری فراهم می کند.
- تحلیل همگرایی روشهای جبری تکراری:
- روش **Kaczmarz (= ART)** فقط برای مسئله های سازگار همگراست.
- روش **Cimmino** همیشه همگراست.



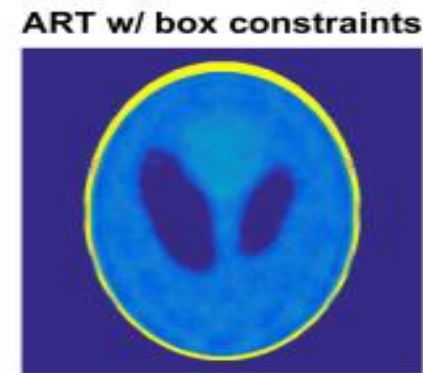
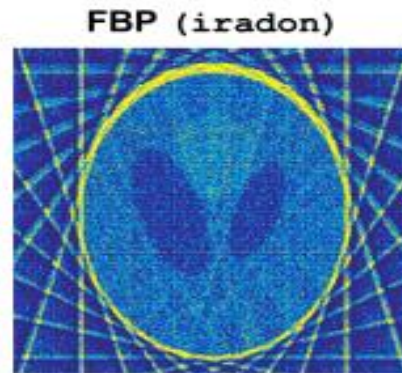
# FBP: FILTERED BACK PROJECTION

- این روش، روشی کلاسیک برای بازسازی دو بعدی است.
- روشهای مشابهی برای بازسازی سه بعدی هم وجود دارند؛ مانند روش FDK.
- سالها استفاده ← تجربه عملی زیاد.
- روش FBP روشی بسیار سریع است (چرا که از Fast Fourier Transform بهره می گیرد)
- روش FBP نیاز به حافظه کمی دارد.
- با تعداد داده های بالا ، FBP نتایج بسیار خوبی ارائه می دهد. برای مثال، با در نظر گرفتن ۳٪ نویز، داریم:



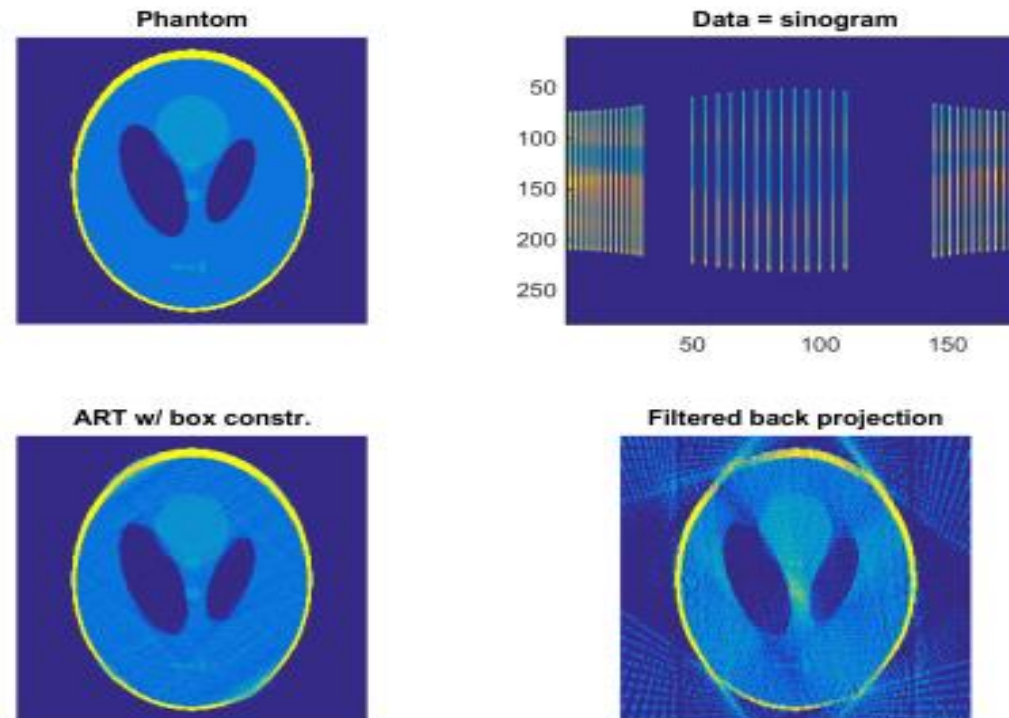
# FBP در مقابل روش های جبری

- داده های محدود یا توزیع غیر یکنواخت در زوایای افکنش یا پرتوها، موجب بروز نتایج غیر واقعی در بازسازی FBP میشود.
- ترکیب شرایط و محدودیت ها (مثل نامنفی بودن)، در FBP دشوار است.
- روش های جبری سازگارتر و انعطاف پذیرتر هستند.
- برای مثال با در نظر گرفتن ۳٪ نویز و زوایای افکنش  $15^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$  داریم:



# FBP در مقابل روش های جبری

بعنوان مثالی دیگر، میتوان از دست رفتن داده ها یاد کرد؛ به این صورت که:  
زاویه هایی با فاصله نامنظم و زوایای "missing" نیز برای FBP مشکلاتی ایجاد می کنند:



# تنظیم مدل جبری

- میرایی اشعه ایکس  $I$ ام از طریق جسم یک انتگرال خطی از ضریب تضعیف در امتداد پرتو است؛ با توجه به قانون (Lambert-Beer) به فرم زیر:

$$b_i = \int_{\text{ray}_i} \xi(s) dl, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

- فرض کنید  $\xi(s)$  برای پیکسل  $j$ ام مقداری ثابت مثل  $x_j$  تعریف شود، در اینصورت داریم:

$$b_i = \sum_{j \sim \text{ray}_i} a_{ij} x_j, \quad a_{ij} = \text{length of ray}_i \text{ in pixel } j,$$



# تنظیم مدل جبری

▪ اگر برای پیکسلی که با اشعه  $i$ ام قطع نشده باشد  $a_{ij} = 0$  تعریف کنیم ، یک جمع ساده داریم:

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad n = \text{number of pixels.}$$

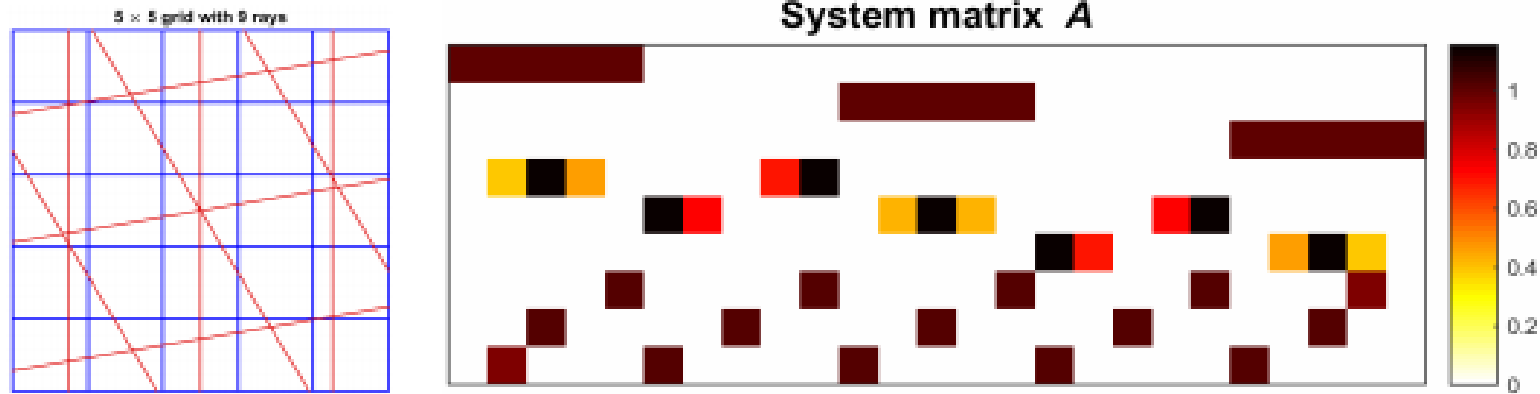
▪ اگر همه  $m$  معادله را جمع آوری کنیم ، به یک سیستم معادلات خطی می رسیم:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

▪ که  $\mathbf{A}$  ماتریس سیستم است که ماتریسی بسیار پراکنده می باشد. برای مثال یک برای یک تصویر  $5*5$  با ۹ اشعه:



# تنظیم مدل جبری



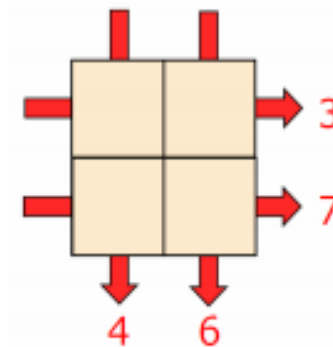
- مزیت مهم سیستم های جبری این است که معادلات فقط برای داده هایی که واقعا وجود دارند، تنظیم میشوند. در صورت از دست رفتن داده ها ، به عنوان مثال ، برای برخی از زوایای افکنش یا اشعه های خاص در یک افکنش ، فقط موارد مربوطه، در سیستم خطی حذف می شوند.





# مسئله سودوکو (SUDOKU=)

- برای درک بهتر از سیستم معادلات خطی، این مثال را بررسی می کنیم:
- به ازای چهار مجهول و چهار اشعه داده شده، سیستم معادلات خطی را مطابق رابطه  $Ax = b$  تشکیل می دهیم:



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

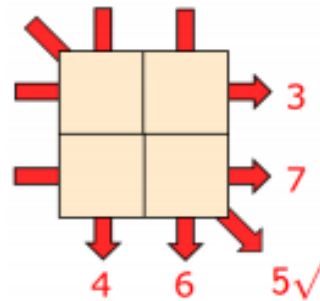
$$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + k \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- به ازای مقادیر  $k \in \mathbb{R}$  بینهایت حل برای معادله وجود دارد.



# مسئله سودوکو (=SUDOKU)

- داده های بیشتر منجر به یک راه حل منحصر به فرد می گردد. با تعداد اشعه کافی مشکل یک راه حل منحصر به فرد دارد. در اینجا ، یک پرتوی دیگر برای اطمینان از اینکه ماتریس  $A$  تبدیل به یک ماتریس "full\_rank" شود، کافی است. داریم:


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \\ 6 \\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



# روش های بازسازی جبری

- در اصل ، تمام کاری که ما باید در فرمول جبری انجام دهیم حل سیستم بزرگ خطی پراکنده  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  است:

$$\text{Math: } \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

$$\text{MATLAB: } \mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}.$$

- این موضوع چقد میتواند سخت باشد؟

▪ در واقع ، اگر سعی کنیم از روش های سنتی مثل **Gaussian elimination** استفاده کنیم ، می تواند بسیار دشوار باشد. بنابراین محققان در توموگرافی بر استفاده از راه حل های تکراری - آنها بسیاری از روش های کشف شده توسط ریاضیدانان را توسعه داده اند- در توموگرافی آنها را **روشهای بازسازی جبری** می نامند. انعطاف پذیری این روشها، بسیار بیشتر از **FBP** است ، اما با هزینه محاسباتی بالاتر!

- برخی از این روش های بازسازی جبری عبارتند از:

- **Fully Sequential Methods**

- **Fully Simultaneous Methods**

- **Block Methods**

- در اینجا تنها به بررسی دسته اول این روشها خواهیم پرداخت. از این مجموعه میتوان روش **Kaczmarz** و انواع آن را نام برد که متدهایی **row\_action** هستند؛ یعنی در هر زمان، تنها با استفاده از یک سطر ماتریس **A** حل را بروزرسانی میکنند. از ویژگی های این روشها، میتوان از همگرایی سریع یاد کرد.



# نماد و تفسیر ماتریسی

▪ نماد

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & & \mathbf{c}_n \\ | & | & & | \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} \text{---} & \mathbf{r}_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{r}_m & \text{---} \end{array} \right),$$

ماتریس  $\mathbf{A}$  ضرایب جذب گسسته (بردار  $\mathbf{x}$ ) را به داده های موجود در پیکسل های آشکارساز (عناصر بردار  $\mathbf{b}$ ) نگاشت می کند، از طریق:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{x} = \underbrace{x_1 \mathbf{c}_1 + x_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + x_n \mathbf{c}_n}_{\text{linear combination of columns}} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

سطر  $i$ ام ماتریس  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{x}$  را با ضرب داخلی به المان  $i$ ام آشکارساز، به وسیله اشعه  $i$ ام، نگاشت می کند:

$$b_i = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$



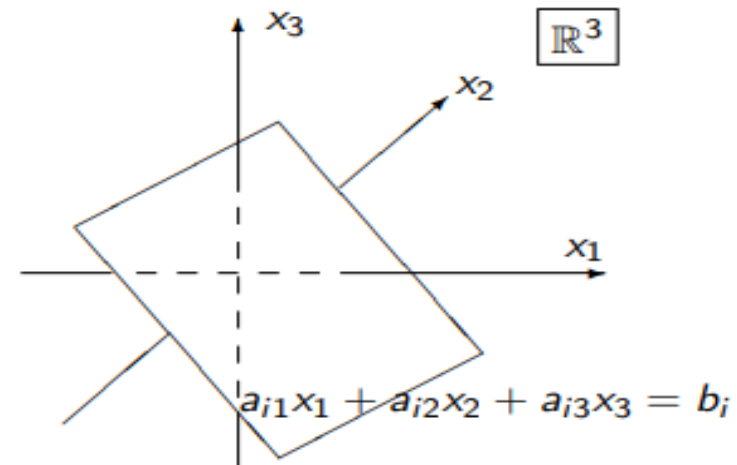
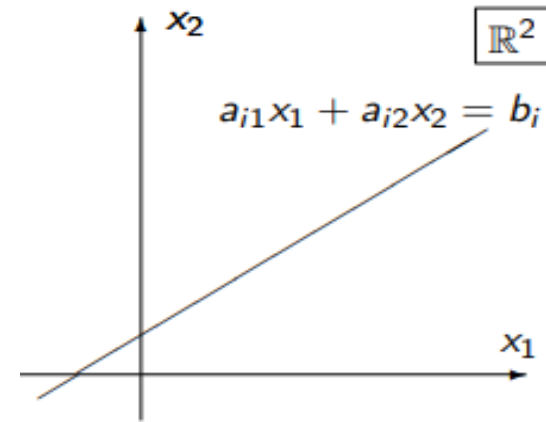
# تفسیر هندسی $\mathbf{A X} = \mathbf{B}$

$$r_1 \cdot \mathbf{X} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$r_2 \cdot \mathbf{X} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

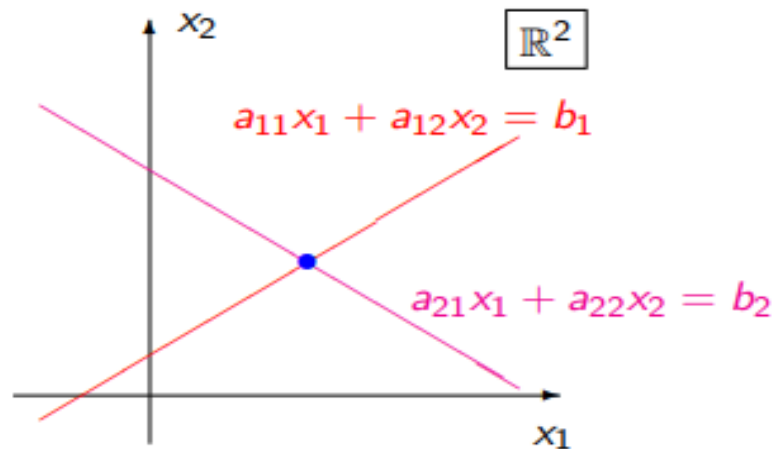
⋮

$$r_m \cdot \mathbf{X} = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.$$



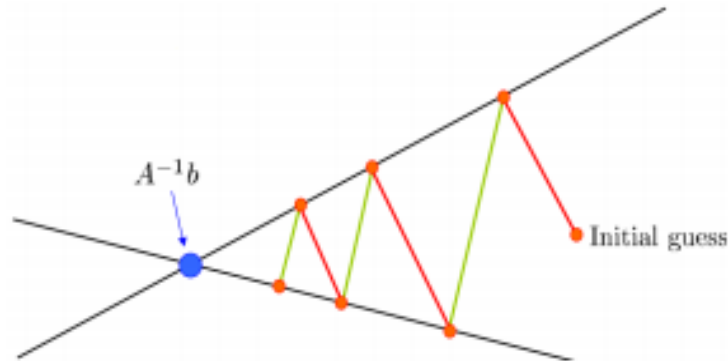
# تفسیر هندسی $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

▪ با فرض اینکه حل معادله  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$  منحصر به فرد باشد، یک نقطه در فضای  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  خواهد بود، جایی که همه زیرصفحه های **affine** همدیگر را قطع می کنند. بعنوان مثال، به ازای  $m = n = 2$  :



# روش KACZMARZ: روش بازسازی جبری

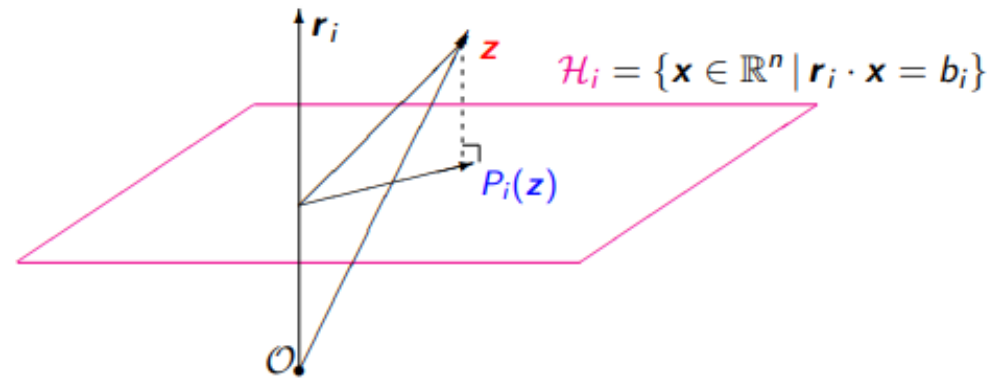
- یک روش تکراری ساده و مبتنی بر تفسیر هندسی. در هر تکرار و به صورت چرخشی، بردار تکرار جدید را محاسبه می کند تا دقیقاً یکی از معادلات برآورده شود که این کار را از طریق افکنش بردار تکرار کنونی  $\mathbf{x}$  روی یکی از زیرصفحه های  $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x} = b_i$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, m, 1, 2, \dots, m, 1, 2, \dots$  به دست می آید.
- این روش در سال ۱۹۳۷ پیشنهاد شد، و به طور مستقل تحت عنوان ART توسط Bender & Gordon و Herman در سال ۱۹۷۰ برای بازسازی توموگرافی پیشنهاد شد.



- این تصویر به وضوح همگرایی روش Kaczmarz را نشان می دهد.



# ORTHOGONAL PROJECTION ON AFFINE HYPERPLANE



▪ افکنش متعامد  $P_i(z)$  از یک نقطه دلخواه  $z$  در زیر صفحه  $H_i$  affine تعریف شده توسط  $r_i \cdot x = b_i$  توسط:

$$P_i(z) = z + \frac{b_i - r_i \cdot z}{\|r_i\|_2^2} r_i, \quad \|r_i\|_2^2 = r_i \cdot r_i.$$

به عبارت دیگر، بردارسطری  $r_i$  را با  $(b_i - r_i \cdot z) / \|r_i\|_2^2$  مقیاس بندی نموده و آن را با  $z$  جمع می کنیم.





# ORTHOGONAL PROJECTION ON AFFINE HYPERPLANE

Basic Kaczmarz algorithm

$\mathbf{x}^{(0)}$  = initial vector

for  $k = 0, 1, 2, \dots$

$i = k \pmod{m}$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = P_i(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{x}^{(k)} + \frac{b_i - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x}^{(k)}}{\|\mathbf{r}_i\|_2^2} \mathbf{r}_i$$

end

▪ بنابراین فرمول جبری مقابل را بدست می آوریم.

▪ هر بار که تکرارهای این الگوریتم را انجام شد،

یک بار رفت و برگشت را روی سطرهای ماتریس

$\mathbf{A}$  انجام میشود. از جمله روش های بازگشتی دیگر

میتوان **Symmetric Kaczmarz** و

**Randomized Kaczmarz** را نام برد.



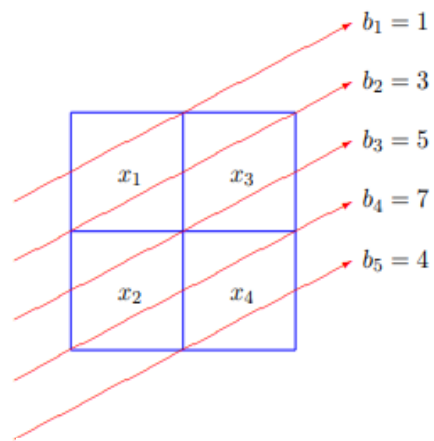
# تمرین شماره ۶

- هدف از انجام این تمرینات، نشان دادن جنبه های مختلف روش ها جبری تکراری ( تکرار شونده ) می باشد. کلید مسئله این است که بتوانیم مدل را به وسیله یک ماتریس ارائه کنیم به جای اینکه برای بیان آن از تبدیلاتی مثل تبدیل رادون بهره بگیریم. برای درک بهتر از این موضوع، به بررسی یک نمونه پرداخته و آنرا حل می کنیم.
- این تمرین شامل دو بخش اصلی می باشد :
- بخش اول : تنظیم و حل یک سیستم CT
- بخش دوم : محدودیت ها



# بخش اول: تنظیم و حل یک سیستم CT

تمرین اول: یک تصویر  $2 \times 2$  با ۵ پرتو را در نظر گرفته و دستگاه معادلات خطی متناظر را مطابق  $Ax = b$  تعریف می کنیم. می خواهیم بردار  $x$  را به کمک الگوریتم **kaczmarz** بدست آوریم.



ماتریس  $A$  و بردار  $b$  را که از تصویر حاصل شدند را به همراه تعداد تکرار به عنوان ورودی به الگوریتم می دهیم. خروجی بردار  $x$  خواهد بود. برای بررسی درستی الگوریتم میتوان حاصل ضرب ماتریس  $A$  در بردار  $x$  را بدست آورده و برابری آنرا با  $b$  بررسی نمود. ملاحظه میشود که برابری برقرار است و الگوریتم بازسازی جبری **kaczmarz** برای تصاویر با ابعاد کوچک به درستی عمل می کند.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

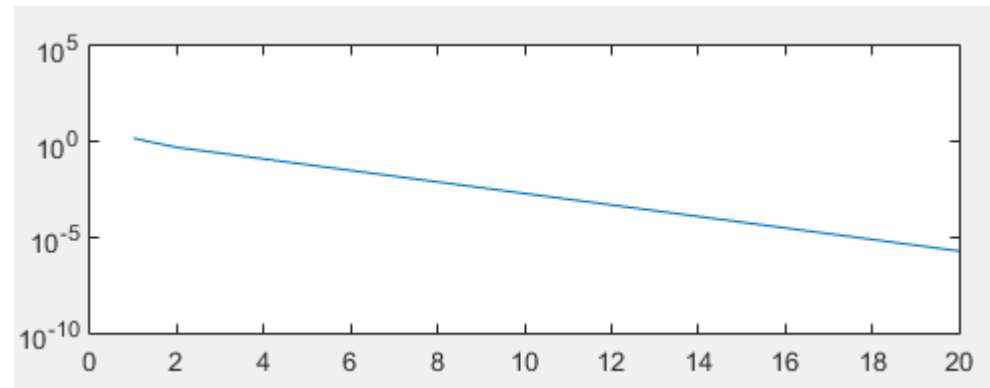
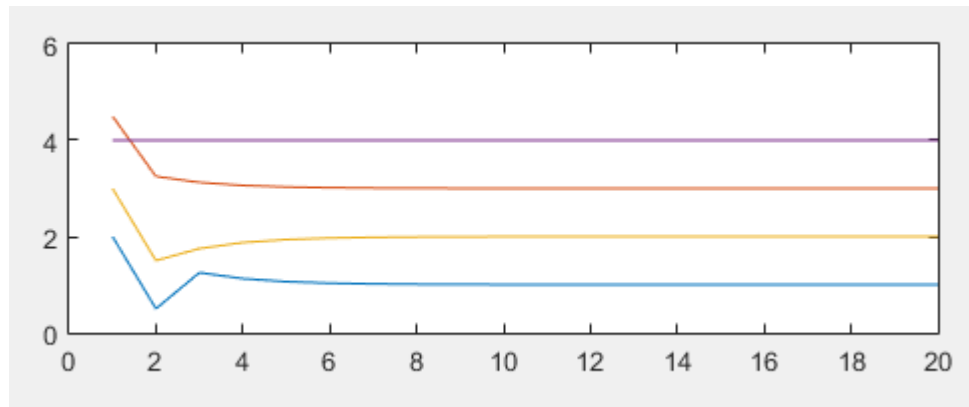


# بخش اول: تنظیم و حل یک سیستم CT

تمرین دوم: در ادامه تمرین قبل، با معلوم شدن بردار  $\mathbf{x}$  حال میتوان سرعت همگرایی الگوریتم را بررسی کرد. برای این منظور تابع خطایی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$e_k = \max_{1 \leq j \leq 4} |\bar{x}_j - x_j^{(k)}|, \quad k = 1, 2, \dots, 20.$$

که  $k$  تعداد تکرارها را نشان می دهد. با پیاده سازی این تابع در **matlab**، مقادیر خطا را یافته و سپس مقادیر  $\mathbf{x}$  و لگاریتم خطا را به صورت شماتیکی نمایش می دهیم. به صورت زیر:



# بخش اول: تنظیم و حل یک سیستم CT

- از این نمودار این نتیجه به وضوح قابل درک است هر چه تعداد تکرار بیشتر میشود، مقدار ماکزیمم خطا با سرعت بیشتری همگرا میشود؛ یعنی با افزایش تکرارها، خطای الگوریتم کمتر میشود.
- بعد از چندین تکرار از برنامه بالا، میتوان رابطه ای بازگشتی برای ماکزیمم خطا به فرم زیر تعریف نمود:

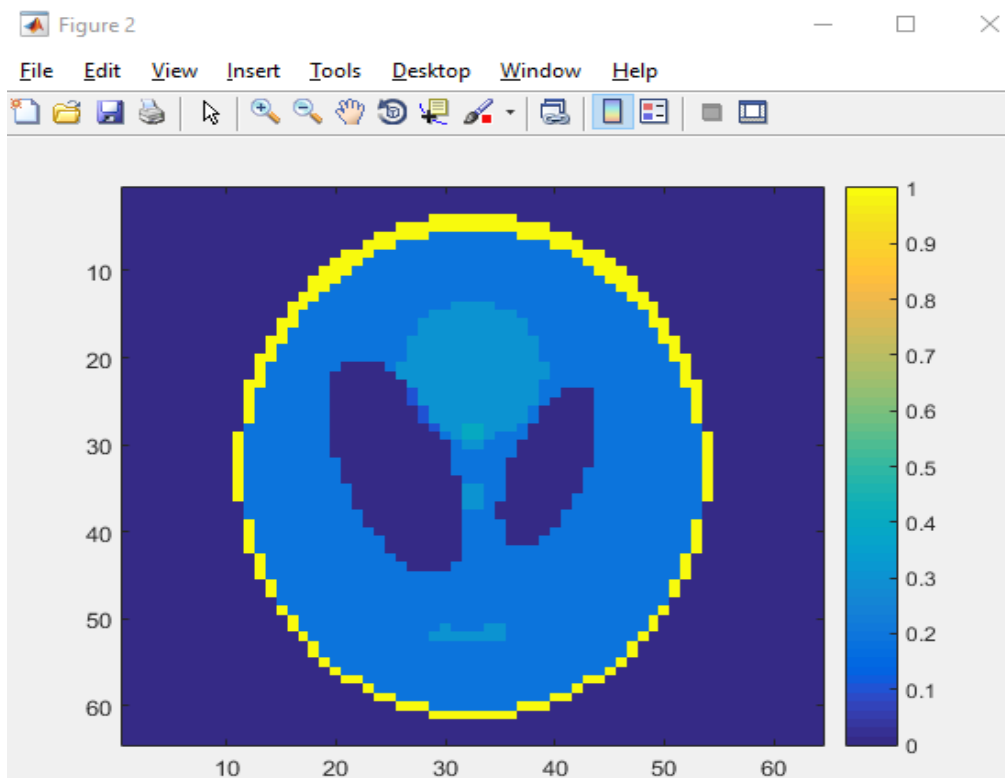
$$e_k = C e_{k-1}, \quad k = 3, 4, \dots, 20,$$

- همانطور که مشخص شده است، این خطا برای تعداد تکرار بالاتر از ۳ جوابگو است. C مقداری ثابت بوده که آنرا با شبیه سازی برابر با  $C=0.5$  محاسبه نموده ایم.



# بخش اول: تنظیم و حل یک سیستم CT

تمرین سوم: حال میخواهیم الگوریتم **kaczmarz** را در مسائل نزدیک به واقعیت مورد بررسی قرار دهیم. برای بررسی واقع بینانه تر رابطه جبری  $Ax = b$  از تابع **parallel\_tomo** برای تولید این رابطه می پردازیم. تابع **parallel\_tomo** با گرفتن مقادیر  $N$  بعنوان ابعاد تصویر و  $\theta$  بعنوان زوایای افکنش ها، ماتریس های  $A, b, x$  را محاسبه کرده و آنها را به فرم یک **phantom** ترسیم می کند. تصویر حاصل تصویری است که افکنش بر آن اعمال شده است.



در اینجا، با در نظر گرفتن مقدار  $N \times N$  بعنوان ابعاد تصویر

و اختیار کردن  $N = 64$  و همین طور  $\theta = 3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, \dots, 180^\circ$ ،

به پیاده سازی و اجرای برنامه می پردازیم.

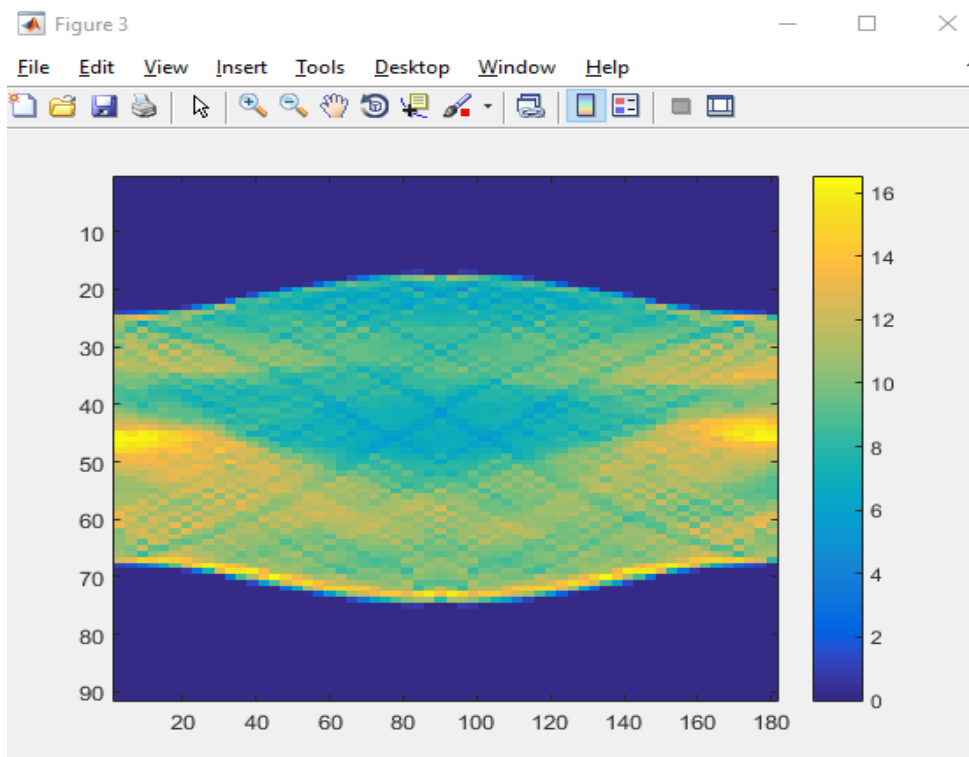
با تولید  $A, b, x$ ، میتوان بردار  $x$  را نمایش داد که

حاصل یک **phantom** است که به صورت مقابل خواهد بود:



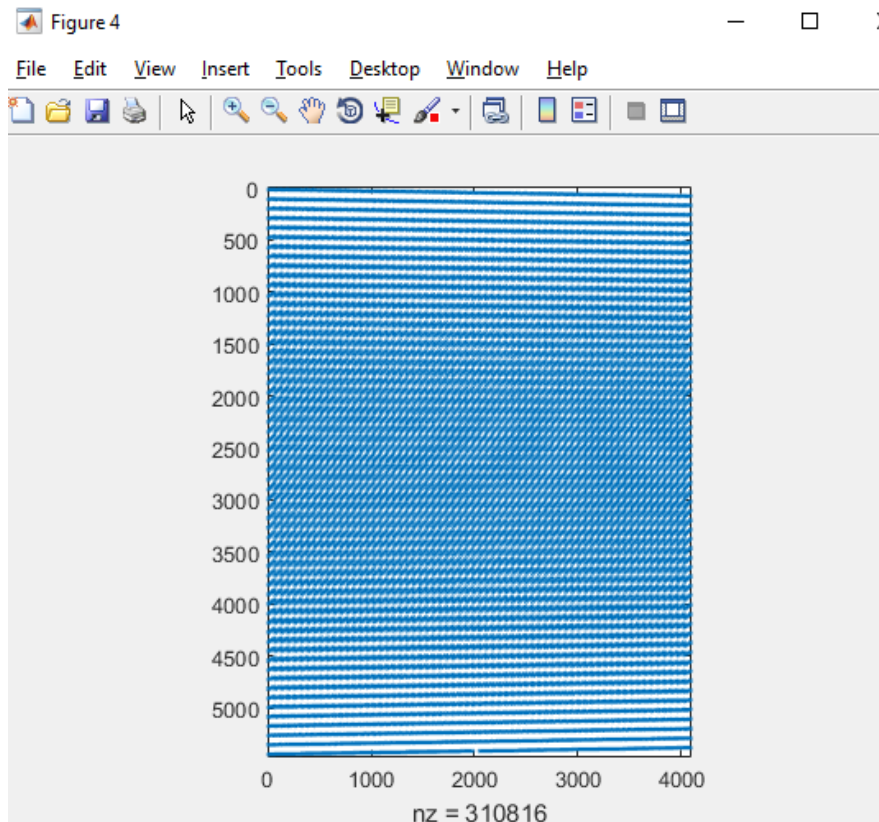
# بخش اول: تنظیم و حل یک سیستم CT

- با تعیین تعداد اشعه ها از رابطه  $p = \frac{length(b)}{length(\theta)}$  میتوان بردار  $\mathbf{b}$  را نیز ترسیم نمود. ملاحظه میشود که نشاندهنده **sinogram** می باشد.



# بخش اول: تنظیم و حل یک سیستم CT

■ مقادیر غیر صفر ماتریس  $\bar{A}$  را نیز به فرم زیر میتوان نمایش داد:



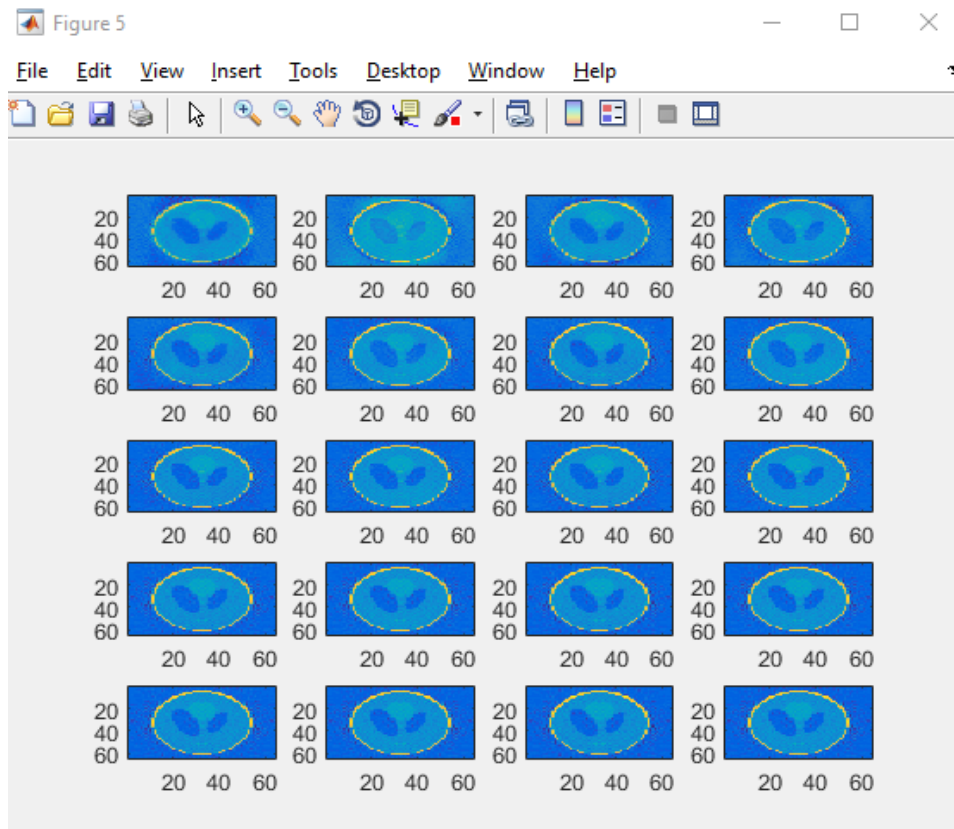


# بخش اول: تنظیم و حل یک سیستم CT

تمرین چهارم: می خواهیم از روش **kaczmarz** برای بازسازی تصویر استفاده کنیم. برای این منظور، از **A, b** تولید شده در تمرین قبل استفاده می کنیم تا **x** را با این روش بدست آوریم.

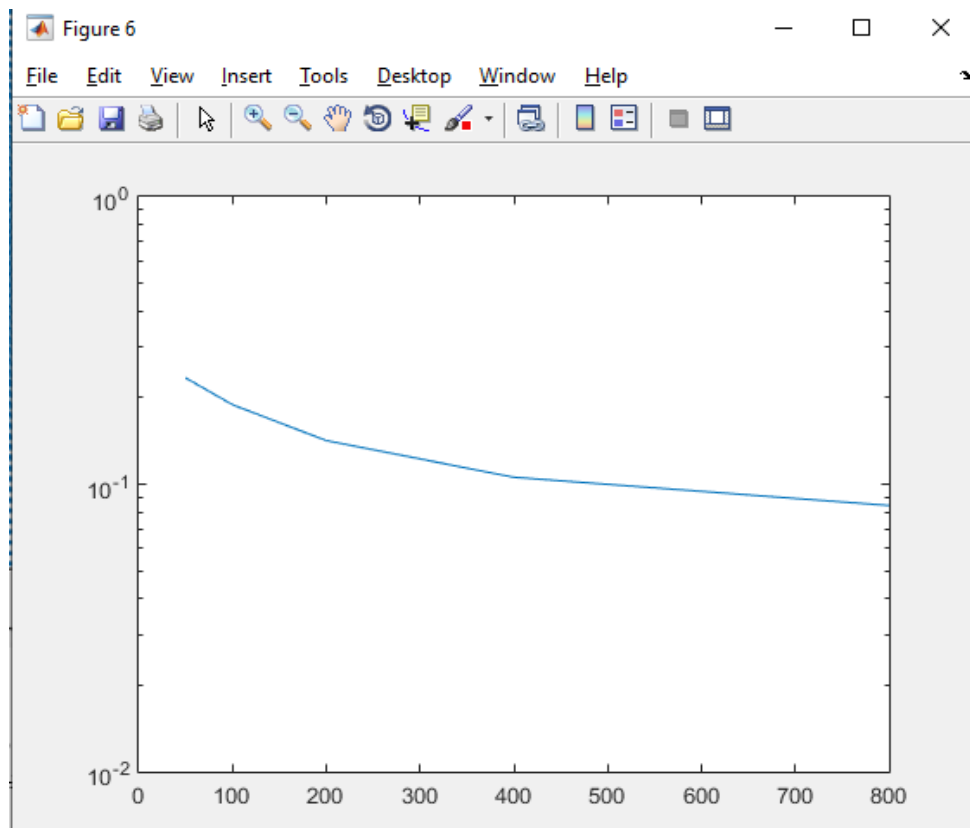
به ازای هر بار تکرار برنامه، خروجی را به صورت شماتیک

نشان می دهیم. به ازای ۲۰ تکرار داریم:



# بخش اول: تنظیم و حل یک سیستم CT

▪ الگوریتم kacmarz را به ازای ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۴۰۰ و ۸۰۰ مرتبه تکرار، محاسبه و مقدار خطای ماکزیمم متناظر هر تکرار را نیز بدست می آوریم.



مقادیر خطا را به صورت لگاریتمی مقابل نمایش می دهیم.  
ملاحظه میشود که هرچه تعداد تکرار برنامه بیشتر شود، خطا کاهش پیدا می کند.



# بخش اول: تنظیم و حل یک سیستم CT

▪ تمرین پنجم: برای بررسی همگرایی مسئله پیشین، ماکزیمم خطا به صورت زیر تعریف میشود:

$$e_k = C e_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

که نشاندهنده خطا در  $k$ امین تکرار است.  $C$  نیز مقداری ثابت بوده و وابسته به روش حل مسئله است. در اینجا فرض می کنیم که مقدار خطا برای دو تکرار  $k$  و  $K$  که  $K > k$  است، معلوم باشد؛ مقدار  $C$  را به فرم زیر محاسبه می کنیم:

$$C = \exp\left(\frac{\log(e_K/e_k)}{K - k}\right)$$

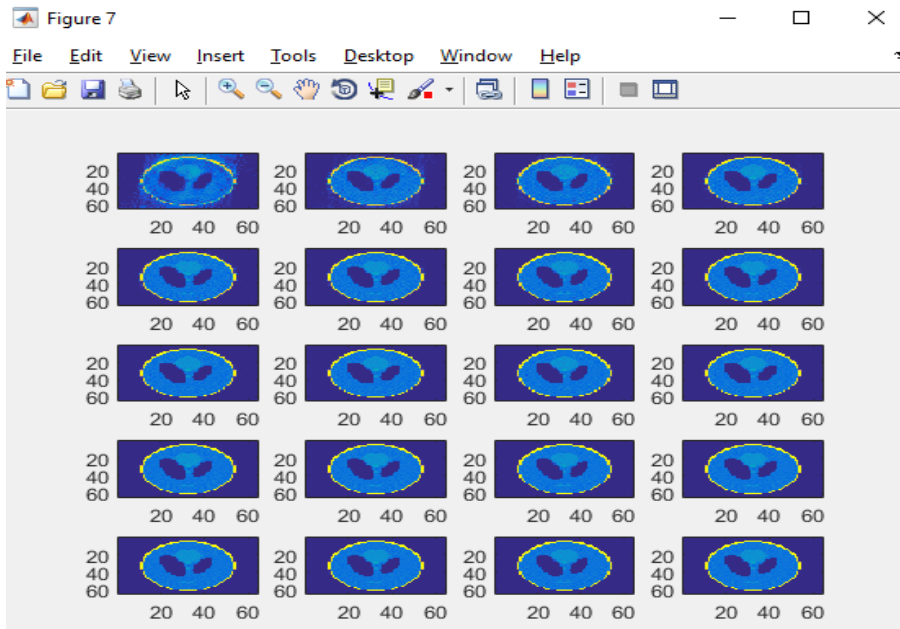
به ازای تکرارهای مرحله ۴۰۰ و ۸۰۰، این مقدار برابر  $C = 0.9994$  بدست می آید. مطابق مقادیر خطا، ملاحظه میشود که با افزایش تعداد تکرار، خطا کاهش یافته و الگوریتم همگرا خواهد بود.



# بخش دوم: محدودیت ها

- تمرین ششم: با توجه به فیزیک مسئله، می دانیم که مقادیر ضرایب تضعیف یا همان المان های بردار  $x$  که محاسبه میشود، نامنفی هستند که اغلب باند بالای این مقدار را می شناسیم، لذا اعمال محدودیت هایی در روند بازسازی منطقی است. محدودیتی مطابق زیر را روی تمرین های ۳ و ۴ بررسی شده در بخش اول اعمال می کنیم؛ تا دیتا مربوط به بردار  $x$  را به بازه  $[0, 1]$  محدود کنیم:

$$x \in \mathcal{C} = [0, 1]^n \Leftrightarrow 0 \leq x_i \leq 1 \text{ for } i = 1, 2, \dots, n.$$



- شبه سازی متناظر انجام شده و خروجی مقابل حاصل میشود. در این حالت، پراکندگی داده ها کمتر شده و خروجی مطلوب تری حاصل میشود که از لحاظ تحلیلی دید مناسب تری را ارائه می کند.

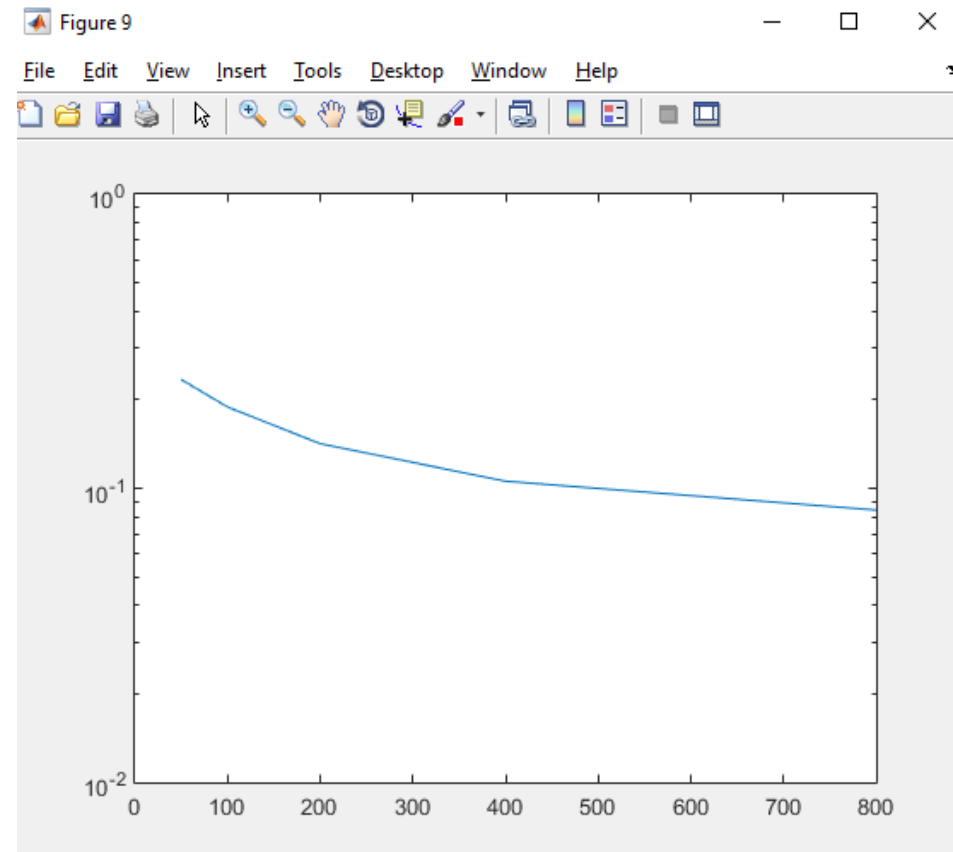
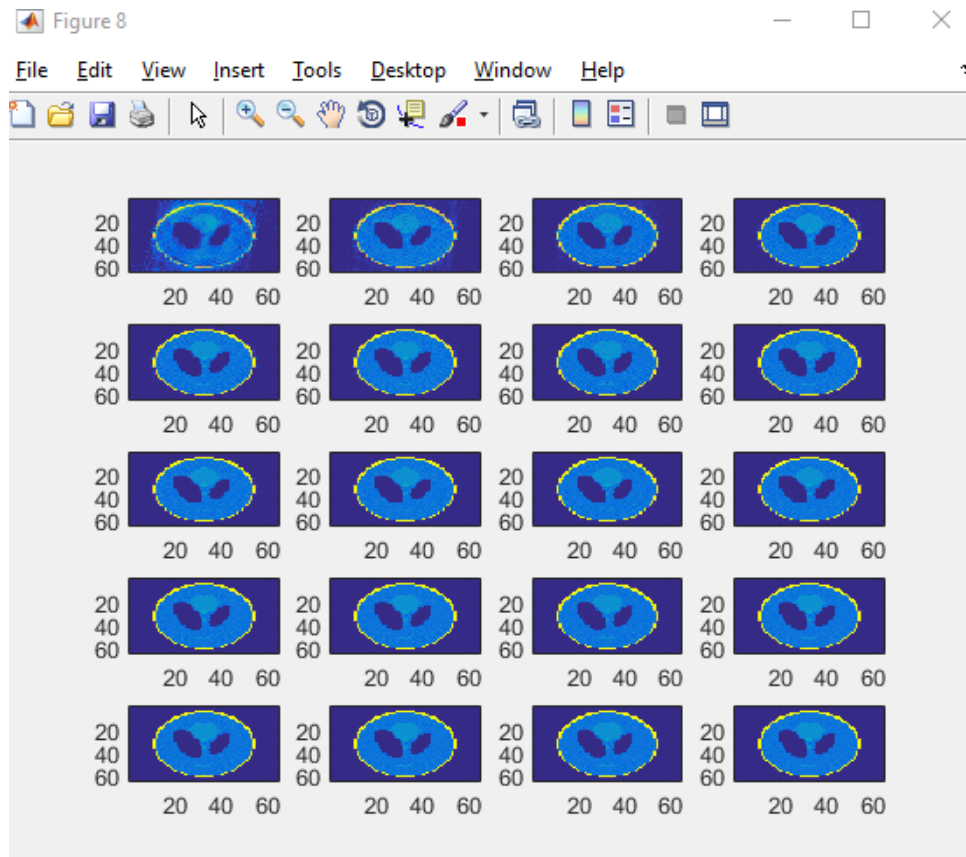


# بخش دوم: محدودیت ها

- تمرین هفتم: میخواهیم با اعمال محدودیت ذکر شده روی تمارین ۴ و ۵، مقدار  $C$  را دوباره محاسبه کرده و همگرایی را مورد بررسی قرار دهیم. مقدار  $C$  چنین خواهد بود:
- $C1 = 0.9977$
- ملاحظه میشود که  $C$  مقدار کمتری نسبت به حالت محدود نشده دارد، به این معنا که الگوریتم سریعتر همگرا شده و رفتار مناسب تری دارد.

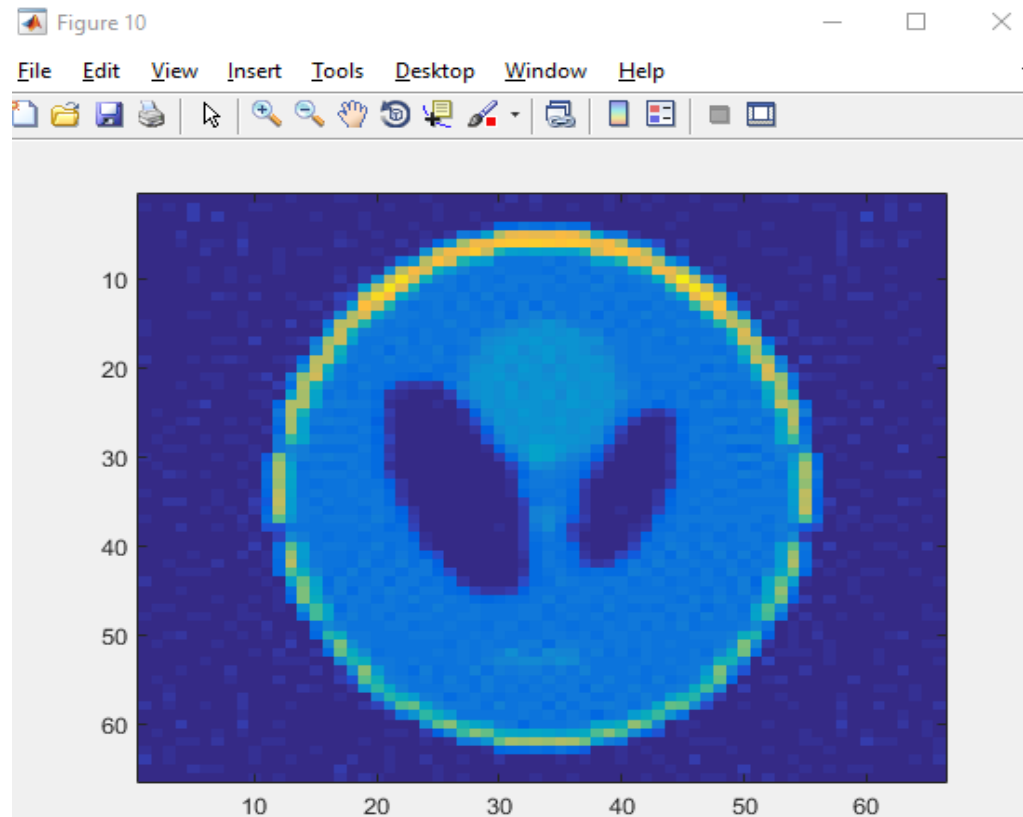


# بخش دوم: محدودیت ها



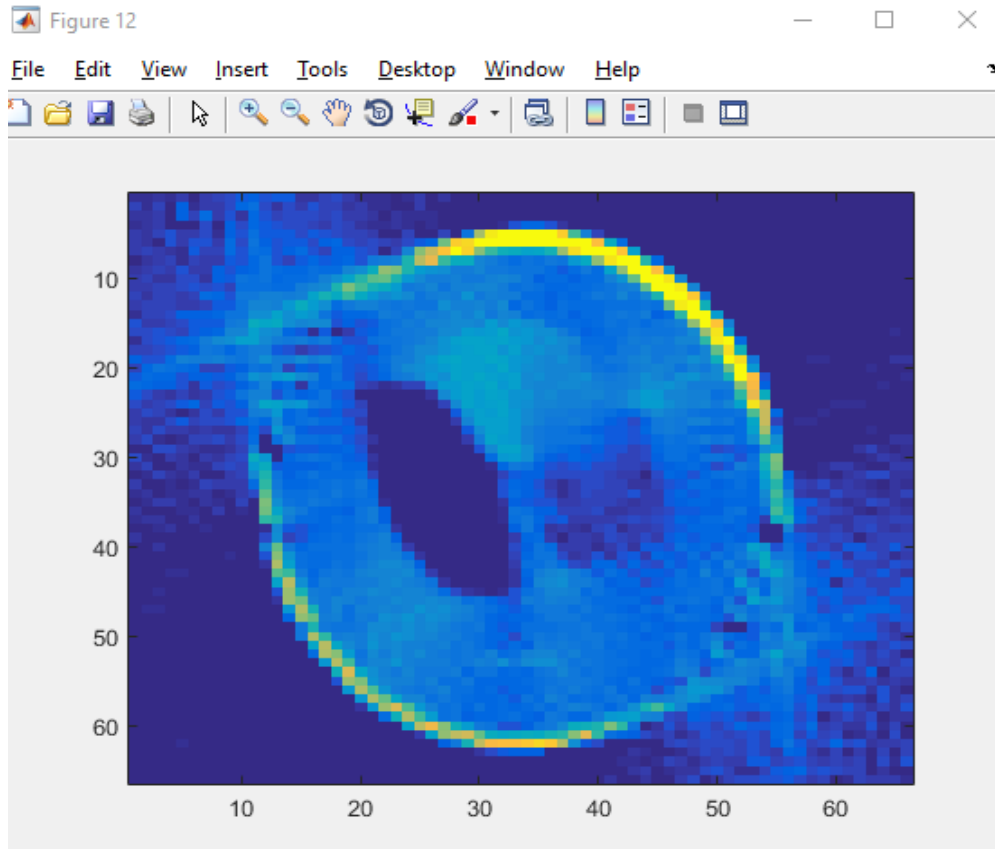
# بخش دوم: محدودیت ها

- تمرین هشتم: می خواهیم بازسازی به روش kaczmarz محدود شده به ازای ۸۰۰ مرتبه تکرار را با بازسازی به روش FBP (Filtered Back Projection) مقایسه کنیم. با اجرای کد متناظر، خروجی زیر از FBP حاصل میشود. در بازسازی به روش FBP از تبدیل رادون بهره می گیریم.



# بخش دوم: محدودیت ها

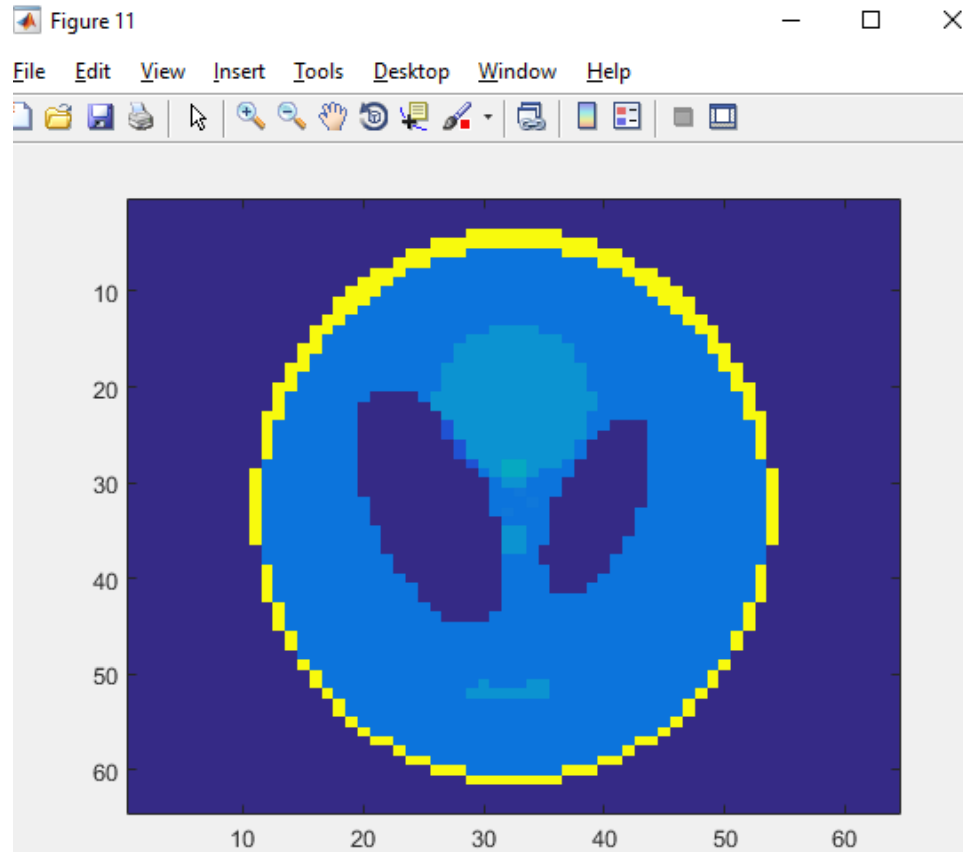
■ در ادامه، تبدیل رادون را به ازای زوایای افکنش محدود محاسبه می کنیم:





# بخش دوم: محدودیت ها

▪ برای مقایسه، روش `kaczmarz` به ازای تعداد محدود و مشخص و البته پراکنده ای از تکرارها، محاسبه و ترسیم می کنیم:



▪ نتیجه گیری: ملاحظه میشود که روش های جبری، خروجی

های دقیق تر و مطلوب تری را نسبت به روش `FBP` ارائه می کنند، همین طور همگرا بوده و خطای کمتری نیز دارند. البته پیچیدگی محاسباتی کمتری نیز دارند. لذا این روش از دید محاسباتی و هم از دید تحلیلی، مناسب تر هستند.

