

## راهنمای تدوین مقاله کامل

### پایدارسازی سراسری سیستم های تاخیر زمانی غیرخطی فیدفوروارد با استفاده از کنترل های کران دار

سیده مریم عارف زاده<sup>\*</sup>

۱- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گروه کنترل دانشگاه آزاد اسلامی بوشهر

\*نویسنده مسئول: maryam.arezadeh@gmail.com

#### خلاصه

در این مقاله، مسئله پایدارسازی سراسری برای خانواده سیستم های تاخیر زمانی غیرخطی فیدفوروارد با استفاده از کنترل های کران دار مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین دو نوع قانون کنترل غیرخطی جدید بر اساس فرم کانونیک خاصی از سیستم غیرخطی تحت بررسی برای دستیابی به پایداری سراسری پیشنهاد شده است. فرم کانونیک ویژه و جدید مورد استفاده در این مقاله شامل تاخیر زمانی در ورودی و همچنین تاخیرهای زمانی در حالت می باشد که منجر به حذف طبیعی در طراحی بازگشتی می شود. علاوه بر این، تعدادی پارامتر آزاد نیز در این کنترل کننده ها به کار برده شده است. این مزایا می تواند باعث تسهیل اثبات پایداری سراسری سیستم حلقه بسته شود و عملکرد گذرای سیستم حلقه بسته را به طور قابل توجهی بهبود ببخشد. برای نشان دادن کارایی روش های پیشنهادی، یک مثال کاربردی نیز ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** سیستم های فیدفوروارد، سیستم های تاخیر زمانی، پایداری سراسری، کنترل های کران دار، فیدبک غیرخطی.

#### ۱- مقدمه

وجود تاخیر زمانی می تواند باعث افت عملکرد و حتی ناپایداری سیستم کنترل شود (Hale, ۱۹۷۷). بنابراین کنترل سیستم های تاخیر زمانی، موضوع پژوهشی رایجی به مدت چندین دهه بوده و روش های موثر زیادی نیز برای رسیدگی به مسائل مختلف مطرح شده است (به مراجع Du, Lam و Shu, ۲۰۱۰؛ Koo و Choi, ۲۰۱۵، ۲۰۱۶؛ Krstic, ۲۰۱۰؛ Meng, Lam, Du و Gao, ۲۰۱۰ و مراجع موجود در آنها رجوع نمایید). از طرف دیگر، سیستم های کنترل کاربردی تحت تاثیر اشباع ورودی هستند. نادیده گرفتن خاصیت غیرخطی اشباع در طراحی کنترل کننده می تواند باعث افت عملکرد سیستم حلقه بسته حاصل هنگام اشباع شده و حتی ممکن است منجر به ناپایداری نیز شود. بنابراین تحقیقات زیادی برای رسیدگی به خاصیت غیرخطی اشباع به دلیل تأثیر قابل توجه آن انجام شده است (Marchand و Hably, ۲۰۰۵؛

\* Corresponding author: سیده مریم عارف زاده

Email: maryam.arezadeh@gmail.com

Sussmann, Sontag و Yang، ۱۹۹۴؛ Teel، ۱۹۹۲؛ Xue، Wang و Lu، ۲۰۱۵؛ Zhou و Duan، ۲۰۰۹ و مراجع موجود در آنها). در نتیجه بررسی مسئله پایدارسازی سیستم های کنترل با استفاده از کنترل های کران دار و تأخیری امری طبیعی است و همانطور که می توان انتظار داشت، دشوارتر از مسائل پایدارسازی سیستم های کنترل با استفاده از کنترل های کران دار یا تأخیری بوده و نتایج معدودی در این زمینه در منابع علمی موجود می باشد (به مراجع Mazenc، Mondié و Niculescu، ۲۰۰۳؛ Chitour و Yakoubi، ۲۰۰۷؛ Lin، Duan، Zhou، ۲۰۱۰ و مراجع موجود در آنها رجوع نمایید).

بخش های اصلی این مقاله و اهمیت نتایج حاصل را می تواند بدین شرح بیان کرد. اولاً همانطور که در (Yang و Zhou، ۲۰۱۶) اشاره شد، فرم کانونیک خاص برای دینامیک اسمی سیستم های غیرخطی فیدفوروارد تحت بررسی، شامل تاخیر زمانی در حالت آن می باشد که به دلیل وجود تاخیر زمانی در ورودی، این امکان را به ما می دهد که سایر مولفه های حالت را در هر مرحله از طراحی بازگشتی حذف کنیم تا در هر مرحله تنها یک سیستم اسکالر مجزا از سایر مولفه های حالت مورد رسیدگی قرار گیرد. این طراحی متفاوت از طراحی ارائه شده در (Mazenc و همکاران، ۲۰۰۴) می باشد چرا که در آن در هر مرحله از طراحی بازگشتی نیاز به بررسی سیستم تاخیر زمانی اسکالر همراه با مولفه های حالت قبلی وجود دارد. علاوه بر این، کنترل کننده های پیشنهادی دارای تعدادی پارامتر آزاد نیز می باشند که می توان آنها را طوری طراحی کرد که عملکرد کنترل بهبود یابد. ثانیاً روش طراحی پیشنهادی در این مقاله را می توان در سیستم های غیرخطی فیدفوروارد که خاصیت غیرخطی آنها شامل حالت های فعلی و همچنین حالت های تاخیری می باشد نیز اعمال کرد که کلی تر از سیستم های در نظر گرفته شده در (Mazenc و همکاران، ۲۰۰۴) و (Ye و همکاران، ۲۰۱۲) هستند. نهایتاً اینکه اگرچه تبدیل حالت وارون پذیر مورد استفاده در این مقاله مشابه (Yang و Zhou، ۲۰۱۶) می باشد، اما به دلیل وجود ویژگی های غیرخطی نامعلوم همچنان مشکلاتی وجود دارد. به عنوان مثال، به خاطر مشخصه خاص تبدیل وارون پذیر، محدودیت های اعمال شده بر روی ویژگی های غیرخطی سیستم تبدیل شده وابسته به بردارهای حالت تاخیری می باشند (معادله ۱۲) را ببینید)، این باعث دشوارتر شدن تحلیل نسبت به (Yang و Zhou، ۲۰۱۶) می شود. علاوه بر این، طراحی بازگشتی در این مقاله در مقایسه با (Yang و Zhou، ۲۰۱۶) چالش برانگیزتر است زیرا دینامیک حالت  $y_j$  به دلیل وجود ویژگی های غیرخطی، وابسته به سایر حالت های  $y_j$  ( $j \geq i$ ) در مرحله  $i$  می باشد که تحلیل را بسیار پیچیده می کند. در نتیجه، سیستم حلقه بسته حاصل همچنان یک سیستم تاخیر زمانی غیرخطی است و پایداری آن باید با دقت مورد بررسی قرار گیرد.

**نمادگذاری:** نمادهای مورد استفاده در این مقاله نسبتاً استاندارد هستند. نماد  $\mathbb{I}[p, q]$  برای دو عدد صحیح  $p$  و  $q$  ( $p \leq q$ ) اشاره به مجموعه  $\{p, p+1, \dots, q\}$  دارد. فرض کنید  $X_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_{n+1})^T$  ( $i \in \mathbb{I}[1, n+1]$ ) که در آن  $x_{n+1} = u$  می باشد.  $\sigma_\varepsilon(x) \triangleq \varepsilon \text{sign}(x) \min\{|x/\varepsilon|, 1\}$  برای مقدار ثابت و مثبت  $\varepsilon$  نشان دهنده تابع اشباع استاندارد است. علامت  $|\cdot|$  اشاره به نرم اقلیدسی عادی برای بردارها و نرم ۲ القایی برای ماتریس ها دارد. برای دو عدد صحیح  $p$  و  $q$  و توابع  $g_i$  ( $i \in \mathbb{I}[1, n+1]$ ) در صورتی که  $q < p$  باشد،  $\sum_{i=p}^q g_i = 0$  خواهد بود. در نهایت برای ثابت های  $a$  و  $b$  ( $b \geq a$ )، فرض می کنیم  $y_{[a,b]} = y(s)$  ( $s \in [a, b]$ ) و  $\|y\|_{[a,b]} \triangleq \sup_{s \in [a,b]} |y(s)|$

## ۲- فرمول بندی مسئله و مباحث مقدماتی

در این مقاله، سیستم غیرخطی فیدفورارد زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_2 x_2(t - h_2) + \mathcal{L}_1((X_3)_{[t-h, t]}) + f_1, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = a_n x_n(t - h_n) + \mathcal{L}_{n-1}((X_{n+1})_{[t-h, t]}) + f_{n-1}, \\ \dot{x}_n(t) = a_{n+1} x_{n+1}(t - h_{n+1}) + f_n, \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $(i \in \mathbf{I}[1, n])$   $f_i = f_i((X_{i+1})_{[t-r, t]})$  می باشد و  $(k \in \mathbf{I}[1, n-1])$   $\mathcal{L}_k(\cdot)$  عملگرهای خطی هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\mathcal{L}_k((X_{k+2})_{[t-h, t]}) = \sum_{j=k+2}^{n+1} \sum_{i=1}^{m_{kj}} a_{kji} x_j(t - h_{kji})$$

که در آن  $n \geq 2$  می باشد و  $m_{kj} \geq 1$  اعداد صحیح هستند،  $a_i$  و  $a_{kji}$  ( $a_i \neq 0$ ) ثابت های معلوم می باشند، اعداد غیرمنفی معلوم هستند،  $\{h_i, h_{kji}\}$  و  $h = \max\{h_{kji}\}$  بردار  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  حالت است،  $x_{n+1} = u \in \mathbf{R}$  ورودی کنترل می باشد و  $r$  یک ثابت غیرمنفی است که می تواند نامعلوم باشد. توابع  $(i \in \mathbf{I}[1, n])$   $f_i(\cdot)$  پیوسته هستند و در فرض زیر صدق می کنند.

فرض ۱: اسکالرهایی مثبتی به صورت  $(i \in \mathbf{I}[1, n])$   $\phi_i$  وجود دارند به طوری که:

$$|f_i((X_{i+1})_{[t-r, t]})| \leq \phi_i |x_{i+1}|_{[t-r, t]}^2, \quad (2)$$

مشروط به اینکه  $|x_{i+1}|_{[t-r, t]} \leq 1$  باشد.

کار اصلی ما در اینجا، حل مسئله زیر می باشد:

مسئله ۱: کنترل فیدبک حالت  $u$  در محدوده  $|u| \leq 1$  را به دست آورید به طوری که سیستم حلقه بسته در مبداء، پایدار جانبی سراسری و پایدار نمایی محلی باشد.

تبصره ۱: کران بالای "۱" در فرض ۱ و مسئله ۱ را می توان با هر ثابت مثبت  $\rho$  معلومی جایگزین کرد. برای مثال، اگر مسئله ۱ را با در نظر گرفتن  $|u| \leq \rho$  برای سیستم (۱) مطابق فرض ۱ مورد بررسی قرار دهیم، در این صورت با تغییر متغیر  $v = u/\rho$ ، سیستم همچنان فرض ۱ را برآورده خواهد کرد و اسکالرهایی  $\phi_i$  متناسب با آن به روز خواهند شد.

سیستم غیرخطی (۱) بدون تأخیر حالت و با  $a_i = 1$  و  $a_{kji} = 0$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) + f_i(x_{i+1}(t)), \quad i \in \mathbf{I}[1, n-1], \\ \dot{x}_n(t) = u(t - h_{n+1}), \end{cases}$$

در این حالت، هرگاه  $|x_{i+1}(t)| \leq 1$  باشد، شرط (۲) به  $|f_i(x_{i+1}(t))| \leq M |x_{i+1}(t)|^2$  تقلیل می یابد که در آن  $\underline{x}_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)^T$  و  $M$  یک ثابت معلوم می باشد. مسئله ۱ برای این سیستم در (Mazenc و همکاران، ۲۰۰۴) حل شده است، قانون کنترل غیرخطی شامل توابع اشباع توزیع شده در این مرجع ارائه شده است. کنترل کننده ساخته شده در (Mazenc و همکاران، ۲۰۰۴)، مطابق

$$|u| \leq \varepsilon^* \quad \text{می باشد} \quad \varepsilon^* = 1/(20 \cdot (kh_{n+1})^n) \quad \text{و}$$

$$k = \max\{16n^3[\varepsilon\sqrt{n}(1+n^2)^{n-1}], \varepsilon(20)^{n+1}n(n+2)\}$$

اشباع با افزایش  $n$  به شدت کاهش می یابد ( $h_{n+1}$  ثابت است)، این نشان می دهد که اگر  $n$  نسبتاً بزرگ باشد، ظرفیت محرک به طور کامل مورد استفاده قرار نمی گیرد. اخیراً در (Ye و همکاران، ۲۰۱۰) قانون کنترل غیرخطی جدیدی شامل توابع اشباع آبخاری بر اساس فرم کانونیک مطرح شده در (Mazenc و همکاران، ۲۰۰۴) ارائه شده است. به منظور تضمین پایداری سیستم حلقه بسته، سطح اشباع کنترل کننده ساخته شده در آنجا باید به اندازه کافی پایین باشد.

ما در این مقاله دو قانون کنترل غیرخطی جدید برای حل مسئله ۱ با الهام از نتایج اخیر خود در (Zhou و Yang، ۲۰۱۶) و (Yang و همکاران، ۲۰۱۷) و براساس فرم کانونیک جدید برای سیستم غیرخطی فیدفوروارد (۱) ارائه می دهیم. فرم کانونیک مورد استفاده در این مقاله برخلاف فرم کانونیک مطرح شده در (Mazenc و همکاران، ۲۰۰۴) شامل تاخیر زمانی در ورودی و همچنین تاخیرهای زمانی در حالت می باشد که برای طراحی بازگشتی ضروری هستند زیرا منجر به حذف طبیعی می شوند. در نتیجه بررسی پایداری سیستم حلقه بسته در اینجا آسان تر از (Mazenc و همکاران، ۲۰۰۴) می باشد. همچنین این فرم کانونیک جدید این امکان را به ما می دهند که به راحتی بتوانیم به ویژگی های غیرخطی از جمله حالت های تاخیری رسیدگی نماییم. این وضعیت در (Mazenc و همکاران، ۲۰۰۴) و (Ye و همکاران، ۲۰۱۲) در نظر گرفته نشده است. علاوه بر این، کنترل کننده های پیشنهادی دارای تعدادی پارامتر آزاد نیز می باشند که می توان آنها را طوری طراحی کرد که عملکرد کنترل بهبود یابد.

این بخش را با ارائه لم زیر به پایان می رسانیم که برای دستیابی به نتایج اصلی ما بسیار مهم است. لم ۱ (Zhou و Yang، ۲۰۱۶): فرض کنید  $\lambda > 0$ ،  $\varepsilon > 0$ ،  $\varepsilon_1 \geq 0$  و  $\varepsilon_2 \geq 0$  چهار عدد معلوم باشند. سیستم اسکالر زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = u(t) - e_2(t), \quad u(t) = -\sigma_\varepsilon(\lambda x(t) + e_1(t)), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

که در آن  $e_i(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  می باشد به گونه ای که  $|e_i| \leq \varepsilon_i, i = 1, 2, \forall t \geq 0$ . اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon, \quad (4)$$

در این صورت یک عدد متنهایی  $T > 0$  وجود دارد به طوری که  $|\lambda x(t) + e_1(t)| \leq \varepsilon, \forall t \geq T$ . علاوه بر این، تابع  $u(t)$  را می توان به صورت  $u(t) = -\lambda x(t) - e_1(t), \forall t \geq T$  ساده کرد.

### ۳- راه حل های مسئله پایداری سراسری

ما برای اینکه راه حل های خودمان را برای مسئله ۱ ارائه دهیم، ابتدا باید توصیف فضای حالت خاص سیستم (۱) را ارائه نماییم. برای این منظور، عبارات زیر را تعریف می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & \dots & \lambda \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \lambda \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times 1},$$

$\lambda$  عدد مثبت پیشین معلومی می باشد و

$$\tau \geq h_2 + h_3 + \dots + h_{n+1} \geq 0. \quad (6)$$

لم ۲: سیستم تاخیر زمانی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{y}(t) = Ay(t - \tau) + Bu(t - \tau). \quad (7)$$

برای این سیستم، یک تبدیل بالا مثلثی وارون پذیر به صورت  $y(t) = \mathcal{T}(x_{[t-\gamma_1, t]})$  وجود دارد تبدیل معکوس آن  $x(t) = \mathcal{G}(y_{[t-\gamma_2, t+\gamma_2]})$  می باشد به طوری که سیستم (۱) با  $f_i(\cdot) = 0$  ( $i \in \mathbf{I}[1, n]$ ) به (۷) تبدیل می شود.

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} & \dots & \mathcal{T}_{1n} \\ & \mathcal{T}_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \mathcal{T}_{n-1, n} \\ & & & \mathcal{T}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \dots & \mathcal{G}_{1n} \\ & \mathcal{G}_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \mathcal{G}_{n-1, n} \\ & & & \mathcal{G}_{nn} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$\mathcal{G}_{ij}$  و  $\mathcal{T}_{ij}$  ( $j \in \mathbf{I}[i, n]$  و  $i \in \mathbf{I}[1, n]$ ) عملگرهای خطی هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{ii}((x_i)_{[t-\gamma_1, t]}) = \varphi_i(\lambda) x_i(t + \tau_i), \\ \mathcal{T}_{ij}((x_j)_{[t-\gamma_1, t]}) = \sum_{k=1}^{p_{ij}} \varphi_{ijk}(\lambda) x_j(t + \tau_{ijk}), \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{ii}((y_i)_{[t-\gamma_2, t+\gamma_2]}) = \psi_i(\lambda) y_i(t + \kappa_i), \\ \mathcal{G}_{ij}((y_j)_{[t-\gamma_2, t+\gamma_2]}) = \sum_{k=1}^{q_{ij}} \psi_{ijk}(\lambda) y_j(t + \kappa_{ijk}), \end{cases} \quad (10)$$

$\varphi_i(\lambda) \neq 0$  و  $\varphi_{ijk}(\lambda) \neq 0$  توابع چندجمله‌ای بر حسب  $\lambda$  هستند،  $p_{ij} \geq 0$  و  $q_{ij} \geq 0$  اعداد صحیح هستند،  $\psi_i(\lambda) \neq 0$  و  $\psi_{ijk}(\lambda) \neq 0$  توابع چندجمله‌ای بر حسب  $1/\lambda$  هستند،  $\kappa_i \geq 0$  و  $\tau_i \leq 0$ ،  $\tau_{ijk} \leq 0$  و  $\kappa_{ijk} \geq 0$  هستند،  $\gamma_1 = \max\{|\tau_i|, |\tau_{ijk}|\} \geq 0$  و  $\{h_i, h_{kji}\}$  توابع چندجمله‌ای بر حسب  $\lambda$  هستند و  $\gamma_2 = \max\{|\kappa_i|, |\kappa_{ijk}|\} \geq 0$  می باشند.

اثبات لم فوق در ضمیمه ارائه شده است. نحوه محاسبه این تبدیل را نیز می توانید در ضمیمه مشاهده نمایید (رابطه (۶۶)). قضیه فرعی زیر را می توان با کمک لم فوق ارائه داد که اثبات آن نیز در ضمیمه آورده شده است.

قضیه فرعی ۱: سیستم (۱) با استفاده از تبدیل  $y(t) = \mathcal{T}(x_{[t-\gamma_1, t]})$  در لم ۲ به سیستم زیر تبدیل می شود:

$$\dot{y}(t) = Ay(t - \tau) + Bu(t - \tau) + H(Y_{[t-\mu, t]}), \quad (11)$$

برای برخی از ثابت های  $H(Y_{[t-\mu, t]}) \triangleq [h_1((Y_1)_{[t-\mu, t]}), \dots, h_n((Y_{n+1})_{[t-\mu, t]})]^T$  مثبت  $d(\lambda) \leq 1$  و  $\delta_i(\lambda)$  ( $i \in \mathbf{I}[1, n]$ ) در رابطه زیر صدق می کند:





که در آن  $t \geq \mu$  می باشد. با انتگرال گیری از هر دو طرف (۱۷) از  $t - \tau$  تا  $t$  خواهیم داشت:

$$y_n(t) - y_n(t - \tau) = \int_{t-\tau}^t (-u_n(s - \tau) + h_n((Y_{n+1})_{[s-\mu, s]})) ds$$

به عبارت دیگر، برای  $t \geq \tau + \mu$  داریم:

$$y_n(t - \tau) = y_n(t) + \int_{t-\tau}^t (u_n(s - \tau) - h_n((Y_{n+1})_{[s-\mu, s]})) ds$$

با جایگذاری رابطه فوق در (۱۷) خواهیم داشت:

$$\dot{y}_n(t) = -\sigma_{\varepsilon_n} (\lambda y_n(t) + v_n(t)) + h_n((Y_{n+1})_{[t-\mu, t]}), \quad (18)$$

که در آن:

$$v_n(t) = \lambda \int_{t-\tau}^t (u_n(s - \tau) - h_n((Y_{n+1})_{[s-\mu, s]})) ds + u_{n-1}(t - \tau)$$

از (۱۵) می توان نتیجه گرفت که اگر  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، خواهیم داشت:

$$|u_i(t)| \leq \varepsilon_i \leq d(\lambda) \leq 1, \quad \forall t \geq 0, \quad i \in \mathbf{I}[1, n]. \quad (19)$$

بنابراین با استفاده از (۱۲) و (۱۹) می توان روابط زیر را به دست آورد:

$$|h_n(Y_{n+1})_{[t-\mu, t]}| \leq \delta_n(\lambda) |Y_{n+1}|_{[t-\mu, t]}^2 \leq \delta_n(\lambda) \varepsilon_n^2, \quad \forall t \geq \tau + \mu$$

$$|v_n(t)| \leq \lambda \tau (\varepsilon_n + \delta_n(\lambda) \varepsilon_n^2) + \varepsilon_{n-1}$$

توجه داشته باشید که سیستم (۱۸) دقیقاً به صورت سیستم (۳) می باشد. بنابراین اگر

$$\varepsilon_n < \varepsilon_n + \delta_n(\lambda) \varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n-1} \quad \text{یا} \quad \varepsilon_n < \varepsilon_n + \delta_n(\lambda) \varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n-1}$$

برقرار باشد، که مطابق رابطه (۱۴) می توان آن را تضمین کرد در صورتی که  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، بر اساس لم ۱ زمان محدودی به صورت  $T_n \geq \tau + \mu$  وجود

دارد به طوری که  $|\lambda y_n(t) + v_n(t)| = |\lambda y_n(t - \tau) + u_{n-1}(t - \tau)| \leq \varepsilon_n$  یا به عبارت

دیگر  $|y_n(t - \tau)| \leq \varepsilon_n$  برای  $t \geq T_n$  برقرار است. در نتیجه،  $u_n(t)$  را می توان به صورت

$$u_n(t) = \lambda y_n(t) + u_{n-1}(t), \quad \forall t \geq T_n$$

ساده کرد و سیستم (۱۱) به سیستم زیر تبدیل می

شود:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \sum_{j=2}^{n-1} \lambda y_j(t - \tau) - u_{n-1}(t - \tau) + h_1, \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1}(t) = -u_{n-1}(t - \tau) + h_{n-1}, \\ \dot{y}_n(t) = -\lambda y_n(t - \tau) - u_{n-1}(t - \tau) + h_n \end{cases} \quad (20)$$

که در آن  $h_i = h_i((Y_{i+1})_{[t-\mu, t]})$ ،  $i \in \mathbf{I}[1, n]$  می باشد. زیرسیستم  $(n-1)$  ام سیستم (۲۰) را

به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{n-1}(t) &= -u_{n-1}(t - \tau) + h_{n-1}((Y_n)_{[t-\mu, t]}) \\ &= -\sigma_{\varepsilon_{n-1}} (\lambda y_{n-1}(t - \tau) + u_{n-2}(t - \tau)) \\ &\quad + h_{n-1}((Y_n)_{[t-\mu, t]}), \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن  $t \geq T_n + \mu$  می باشد. با انتگرال گیری از هر دو طرف (۲۱) از  $t - \tau$  تا  $t$  خواهیم داشت:

$$y_{n-1}(t) - y_{n-1}(t - \tau) = \int_{t-\tau}^t (-u_{n-1}(s - \tau) + h_{n-1}((Y_n)_{[s-\mu, s]})) ds.$$

به عبارت دیگر، برای  $t \geq T_n + \tau + \mu$  داریم:

$$y_{n-1}(t - \tau) = y_{n-1}(t) + \int_{t-\tau}^t (u_{n-1}(s - \tau) - h_{n-1}((Y_n)_{[s-\mu, s]})) ds$$

با جایگذاری رابطه فوق در (۲۱) خواهیم داشت:

$$\dot{y}_{n-1}(t) = -\sigma_{\varepsilon_{n-1}}(\lambda y_{n-1}(t) + v_{n-1}(t)) + h_{n-1}((Y_n)_{[t-\mu, t]}), \forall t \geq T_n + \tau + \mu$$

که در آن

$$v_{n-1}(t) = \lambda \int_{t-\tau}^t (u_{n-1}(s - \tau) - h_{n-1}((Y_n)_{[s-\mu, s]})) ds + u_{n-2}(t - \tau)$$

اگر  $\varepsilon_n \leq d(\lambda)$  باشد، که با استفاده از (۱۲) و (۱۹) می توان آن را تضمین کرد در صورتی که  $\varepsilon$  به

اندازه کافی کوچک باشد، خواهیم داشت:

$$|h_{n-1}(Y_n)_{[t-\mu, t]}| \leq \delta_{n-1}(\lambda) |Y_n|_{[t-\mu, t]}^2 \leq 2\delta_{n-1}(\lambda)(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^2), t \geq T_n + \tau + \mu$$

$$|v_{n-1}(t)| \leq \lambda \tau (\varepsilon_{n-1} + 2\delta_{n-1}(\lambda)(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^2)) + \varepsilon_{n-2}$$

اگر

بنابراین

$$2(\lambda \tau (\varepsilon_{n-1} + 2\delta_{n-1}(\lambda)(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^2)) + \varepsilon_{n-2}) + 2\delta_{n-1}(\lambda)(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^2) < \varepsilon_{n-1}$$

یا به عبارت دیگر  $(2\delta_{n-1}(\lambda) \varepsilon \left( \left( \frac{1-\beta}{\lambda} \right)^2 + 1 \right) < \beta(1 - (2\delta_{n-1}(\lambda) \varepsilon))$  برقرار باشد، که

مطابق رابطه (۱۴) می توان آن را تضمین کرد در صورتی که  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، بر اساس لم ۱

زمان محدودی به صورت  $T_{n-1} \geq T_n + \tau + \mu$  وجود دارد به طوری که

$$|\lambda y_{n-1}(t - \tau) + u_{n-2}(t - \tau)| = |\lambda y_{n-1}(t) + v_{n-1}(t)| \leq \varepsilon_{n-1}$$

$$|y_{n-1}(t - \tau)| \leq \varepsilon_{n-1} \quad \text{برای } t \geq T_{n-1} \quad \text{برقرار است. بنابراین}$$

$$u_{n-1}(t) = \lambda y_{n-1}(t) + u_{n-2}(t), \forall t \geq T_{n-1}$$

متناسب با آن ساده کرد. با تکرار پروسه فوق برای  $u_j(t)$  ( $j = n-2, n-3, \dots, i$ ) و

در نهایت سیستم  $y_i$  را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= -u_i(t - \tau) + h_i((Y_{i+1})_{[t-\mu, t]}) \\ &= -\sigma_{\varepsilon_i}(\lambda y_i(t - \tau) + u_{i-1}(t - \tau)) \\ &\quad + h_i((Y_{i+1})_{[t-\mu, t]}). \end{aligned} \quad (22)$$

مشابه تحلیل فوق، اگر رابطه زیر

$$\varepsilon_j \leq d(\lambda), j = n, n-1, \dots, i+1, \quad (23)$$

و

$$2(\lambda \tau (\varepsilon_i + 2\delta_i(\lambda)(\sum_{j=i+1}^n \varepsilon_j^2 + \varepsilon_n^2)) + \varepsilon_{i-1}) + 2\delta_i(\lambda)(\sum_{j=i+1}^n \varepsilon_j^2 + \varepsilon_n^2) < \varepsilon_i$$

یا به عبارت دیگر



$$(4\lambda\tau + 2) \delta_i(\lambda) \left( \sum_{j=i+1}^n \left( \frac{\beta^{n-j} - \beta^{n-j+1}}{\lambda} \right)^2 + 1 \right) \varepsilon < \beta^{n-i} (1 - (2\lambda\tau + 2\beta)), \quad (24)$$

برقرار باشند، بر اساس لم ۱ زمان محدودی به صورت  $T_i \geq T_{i+1} + \tau + \mu$  وجود دارد به طوری که  $|\lambda y_i(t - \tau) + u_{i-1}(t - \tau)| = |\lambda y_i(t) + v_i(t)| \leq \varepsilon_i$  یا به عبارت دیگر  $|y_i(t - \tau)| \leq \varepsilon_i$  برای  $t \geq T_i$  برقرار است. بنابراین  $u_i(t) = \lambda y_i(t) + u_{i-1}(t), \forall t \geq T_i$  می باشد. با توجه به روابط (۱۶) و (۱۴) واضح است که اگر  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، می توان (۲۳) و (۲۴) را تضمین کرد. بنابراین سیستم حلقه بسته به سیستم زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \sum_{j=2}^i \lambda y_j(t - \tau) - u_i(t - \tau) + h_1, \\ \vdots \\ \dot{y}_i(t) = -u_i(t - \tau) + h_i, \\ \dot{y}_{i+1}(t) = -\lambda y_{i+1}(t - \tau) - u_i(t - \tau) + h_{i+1}, \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = -\sum_{j=i+1}^n \lambda y_j(t - \tau) - u_i(t - \tau) + h_n. \end{cases} \quad (25)$$

با تکرار فرآیند فوق برای زیرکنترل کننده های  $u_j(t)$  ( $j = i - 1, i - 2, \dots, 1$ ) نتیجه می گیریم که عدد محدودی به صورت  $T_1 \geq T_2 + \tau + \mu$  وجود دارد به طوری که رابطه زیر برای  $t \geq T_1$  برقرار است:

$$\dot{y}(t) = \lambda A_n y(t - \tau) + H(Y_{[t-\mu, t]}). \quad (26)$$

در ادامه، پایداری سیستم حلقه بسته (۲۶) را تحلیل خواهیم کرد. فرض کنید  $P = I_n$ . بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda A_n^T P + \lambda P A_n + \lambda P = -\lambda B B^T.$$

تابع درجه دوم معین مثبت  $V(y(t)) = y^T(t) P y(t)$  را در نظر بگیرید. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(y(t)) &= -\lambda |y(t)|^2 - \lambda |B^T y(t)|^2 \\ &\quad + 2\lambda y^T(t) A_n (y(t - \tau) - y(t)) \\ &\quad + 2y^T(t) H(Y_{[t-\mu, t]}) \\ &\leq -\frac{\lambda}{2} |y(t)|^2 - \lambda |B^T y(t)|^2 \\ &\quad + 4\lambda |A_n^T A_n| |y(t - \tau) - y(t)|^2 \\ &\quad + \frac{4}{\lambda} |H(Y_{[t-\mu, t]})|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

از یک طرف، بر اساس رابطه (۱۲) و  $u = -\gamma\lambda B^T y$  می توان نتیجه گرفت که رابطه زیر برای  $t \geq T_1$  برقرار است:

$$\begin{aligned} |H(Y_{[t-\mu, t]})|^2 &= \sum_{i=1}^n |h_i((Y_{i+1})_{[t-\mu, t]})|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\delta_i(\lambda) |Y_{i+1}|_{[t-\mu, t]}^2)^2 \\ &\leq q_0(\lambda) |y|_{[t-\mu, t]}^4, \end{aligned} \quad (28)$$

$q_0(\lambda) > 0$  ثابتی است که وابسته به  $\lambda$  می باشد. از طرف دیگر، از آنجایی که:

$$\begin{aligned} &|y(t-\tau) - y(t)| \\ &\leq \int_{t-\tau}^t |\lambda A_n y(s-\tau) + H(Y_{[s-\mu, s]})| ds, \end{aligned} \quad (29)$$

با استفاده از نامساوی جنسن \* (Gu, 2000) می توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$\begin{aligned} &|y(t-\tau) - y(t)|^2 \\ &\leq \tau \int_{t-\tau}^t |\lambda A_n y(s-\tau) + H(Y_{[s-\mu, s]})|^2 ds \\ &\leq 2\tau \int_{t-\tau}^t (\lambda^2 |A_n^T A_n| |y(s-\tau)|^2 + q_0(\lambda) |y|_{[s-\mu, s]}^4) ds, \end{aligned} \quad (30)$$

در رابطه فوق از (۲۸) استفاده کرده ایم. با جایگذاری (۲۸) و (۳۰) در (۲۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(y(t)) &\leq -\frac{\lambda}{2} |y(t)|^2 - \lambda |b_n^T y(t)|^2 + \frac{4q_0(\lambda)}{\lambda} |y|_{[t-\mu, t]}^4 \\ &\quad + 8\tau\lambda |A_n^T A_n| \int_{t-\tau}^t (\lambda^2 |A_n^T A_n| |y(s-\tau)|^2 \\ &\quad + q_0(\lambda) |y|_{[s-\mu, s]}^4) ds. \end{aligned} \quad (31)$$

بنابراین در صورتی که رابطه  $V(u(t+\theta)) < pV(y(t)), \forall \theta \in [-\tau - \mu, 0]$  برقرار باشد، که

در آن  $t \geq T_1$  بوده و  $p > 1$  مقدار اسکالر معلومی می باشد، نامساوی (۳۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\dot{V}(y(t)) \\ &\leq -\frac{\lambda}{2} |y(t)|^2 - \lambda |b_n^T y(t)|^2 + 8\tau^2 \lambda^3 p |A_n^T A_n|^2 |y(t)|^2 \\ &\quad + \frac{4}{\lambda} q_0(\lambda) p^2 |y(t)|^4 + 8\tau^2 \lambda q_0(\lambda) p^2 |A_n^T A_n| |y(t)|^4 \\ &= -\rho(t) V(y(t)) - \lambda |b_n^T y(t)|^2 \end{aligned} \quad (32)$$

که در آن:

\* Jensen inequality

$$\rho(t) = \frac{\lambda}{2} - 8\tau^2 \lambda^3 p |A_n^T A_n|^2 - \left( \frac{4}{\lambda} q_0(\lambda) p^2 + 8\tau^2 \lambda q_0(\lambda) p^2 |A_n^T A_n| \right) |y(t)|^2$$

توجه داشته باشید که رابطه زیر برای  $t \geq T_1$  برقرار است:

$$|y(t)|^2 \leq \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\beta^{n-i} - \beta^{n-i+1}}{\lambda} \right)^2 \epsilon^2. \quad (33)$$

بنابراین می توان از (۳۲) و (۳۳) نتیجه گرفت که اگر  $\epsilon$  به اندازه کافی کوچک و  $\frac{\lambda}{2} - 8\tau^2 \lambda^3 p |A_n^T A_n|^2 > 0$  باشد که مطابق رابطه (۱۴) می توان آن را تضمین کرد، مقداری برای  $\gamma > 0$  وجود دارد به طوری که  $\rho(t) > \gamma, \forall t \geq T_1$  بنابراین داریم:

$$\dot{V}(y(t)) < -\gamma V(y(t)), \forall t \geq T_1. \quad (34)$$

بدین ترتیب، سیستم حلقه بسته (۲۶) مطابق نظریه پایداری رازومیکین\* (Hale, ۱۹۷۷)، پایدار نمایی یکنواخت می باشد. بنابراین اثبات به اتمام می رسد.

**تبصره ۲:** در اینجا توضیحاتی در مورد اثبات قضیه ۱ ارائه می دهیم. اولاً به وضوح مشاهده می شود که سیستم (۱) در زمان محدود نمی تواند به بی نهایت برسد. بنابراین برای تحلیل پایداری سراسری نیازی به تحلیل خاصی از اولین فاصله زمانی تاخیر وجود ندارد، اما برای تحلیل پایداری محلی بسیار دارای اهمیت می باشد (Fridman, ۲۰۱۴؛ Liu و Fridman, ۲۰۱۴). دوما مشاهده می شود که اندیس "۲" در سمت راست نامساوی (۲) را می توان با ثابت  $q > 1$  جایگزین کرد. سوماً نامساوی (۲) را می توان با نامساوی زیر جایگزین کرد:

$$|f_i((X_{i+1})_{[t-r,t]})| \leq \phi_i |X_{i+1}|_{[t-r,t]}^2 + \epsilon |X_{i+1}|_{[t-r,t]}, \quad (35)$$

مشروط به اینکه  $|X_{i+1}|_{[t-r,t]} \leq 1$  باشد،  $t \geq T_i^*$  است و  $\epsilon > 0$  می تواند به صورت دلخواه کوچک باشد. در این حالت، نامساوی متناظر با (۱۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$|h_i((Y_{i+1})_{[t-\mu,t]})| \leq \delta_i(\lambda) (|Y_{i+1}|_{[t-\mu,t]}^2 + \epsilon |Y_{i+1}|_{[t-\mu,t]})$$

مشروط به اینکه  $|Y_{i+1}|_{[t-\mu,t]} \leq d(\lambda) \leq 1$  باشد. بنابراین در بخش اول اثبات قضیه ۱، تابع متناظر

$$|h_i((Y_{i+1})_{[t-\mu,t]})| \leq \delta_i^*(\lambda) \epsilon^\gamma$$

صدق می کند، به عبارت دیگر تابع متناظر  $h_i((Y_{i+1})_{[t-\mu,t]})$  نیز از مرتبه  $\epsilon^\gamma$  می باشد. بنابراین هنگامی که  $\epsilon$  به

اندازه کافی کوچک است، (۲۶) را می توان برای  $t \geq T_1$  نیز به دست آورد. از طرف دیگر، تابع متناظر

$$H(Y_{[t-\mu,t]}) \quad \text{برای} \quad q(\lambda) > 0$$

رابطه در

$$|H(Y_{[t-\mu,t]})|^\gamma \leq q(\lambda) (|y|_{[t-\mu,t]}^\gamma + \epsilon |y|_{[t-\mu,t]}^\gamma + \epsilon^\gamma |y|_{[t-\mu,t]}^\gamma)$$

صدق می کند

(رابطه (۲۸) را ببینید). در بخش دوم اثبات قضیه ۱، نامساوی (۳۲) در نهایت به دست می آید که در آن  $|y(t)|^\gamma$  در  $\rho(t)$  با  $|y(t)|^\gamma + \epsilon |y(t)|^\gamma + \epsilon^\gamma$  جایگزین شده است. بنابراین اگر  $\epsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، می توان (۳۴) را نیز به دست آورد که پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را تضمین می کند.

\* Razumikhin stability theorem

۲-۳- قوانین کنترل متشکل از توابع اشباع آبخاری

در این زیربخش، راه حل دیگری برای مسئله ۱ ارائه می دهیم.

قضیه ۲: فرض کنید  $\beta \in (0, 1)$  در رابطه زیر صدق می کند:

$$2\beta - \beta^n - 1 < 0, \quad (36)$$

و  $\lambda$  نیز ثابت مثبت معلومی است که در رابطه زیر صدق می کند:

$$\lambda < \min \left\{ \frac{2\beta - \beta^n - 1}{2\tau(\beta^n - 1)}, \frac{1}{4\tau |A_n^T A_n|} \right\}. \quad (37)$$

در این صورت ثابت مثبتی به صورت  $\varepsilon^\dagger = \varepsilon^\dagger(\beta, \lambda) \in (0, 1)$  وجود دارد به طوری که مسئله ۱

توسط کنترل کننده  $u(t) = -u_n(t)$  حل می شود، که در آن:

$$\begin{cases} u_i(t) = \sigma_{\varepsilon_i}(\lambda y_i(t)) + u_{i-1}(t), & i \in \mathbf{I}[2, n], \\ u_1(t) = \sigma_{\varepsilon_1}(\lambda y_1(t)), \end{cases} \quad (38)$$

$\varepsilon_i$  ( $i \in \mathbf{I}[1, n]$ ) اسکالری است که در رابطه زیر صدق می کند:

$$\varepsilon_i = \beta^{n-i} \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^\dagger), \quad i \in \mathbf{I}[1, n]. \quad (39)$$

اثبات: برای سادگی کار در این اثبات، عبارات  $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^j \varepsilon_i$  و  $\eta_j = \sum_{i=1}^j \beta^{n-i}$  ( $j \in \mathbf{I}[1, n]$ )

تعریف می کنیم. ابتدا زیرسیستم  $n$  ام (۱۱) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{y}_n(t) &= -u_n(t - \tau) + h_n((Y_{n+1})_{[t-\mu, t]}) \\ &= -\sigma_{\varepsilon_n}(\lambda y_n(t - \tau)) - u_{n-1}(t - \tau) \\ &\quad + h_n((Y_{n+1})_{[t-\mu, t]}), \end{aligned} \quad (40)$$

که در آن  $t \geq \mu$  می باشد. مشابه اثبات قضیه ۱، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$y_n(t - \tau) = y_n(t) + \int_{t-\tau}^t (u_n(s - \tau) - h_n((Y_{n+1})_{[s-\mu, s]})) ds$$

با جایگذاری رابطه فوق در (۴۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{y}_n(t) &= -\sigma_{\varepsilon_n}(\lambda y_n(t) + v_n(t)) - u_{n-1}(t - \tau) \\ &\quad + h_n((Y_{n+1})_{[t-\mu, t]}), \quad \forall t \geq \tau + \mu, \end{aligned} \quad (41)$$

که در آن:

$$v_n(t) = \lambda \int_{t-\tau}^t (u_n(s - \tau) - h_n((Y_{n+1})_{[s-\mu, s]})) ds$$

اگر  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، از (۳۸) و (۳۹) می توان نتیجه گرفت که:

$$|u_i(t)| \leq \varepsilon_i \leq d(\lambda) \leq 1, \quad \forall t \geq 0, \quad i \in \mathbf{I}[1, n]. \quad (42)$$

بنابراین با استفاده از (۱۲) و (۴۲) می توان روابط زیر را به دست آورد:

$$|h_n((Y_{n+1})_{[t-\mu, t]})| \leq \delta_n(\lambda) \varepsilon_n^2$$

$$|v_n(t)| \leq \lambda \tau (\varepsilon_n + \delta_n(\lambda) \varepsilon_n^2)$$

با استفاده از لم ۱، اگر رابطه زیر

$$2\lambda\tau(\epsilon_n + \delta_n(\lambda)\epsilon_n^2) + (\epsilon_n + \delta_n(\lambda)\epsilon_n^2) < \epsilon_n$$

یا به عبارت دیگر

$$(2\lambda\tau + 1)\delta_n(\lambda)\eta_n^2\epsilon < 1 - \eta_{n-1} - 2\lambda\tau\eta_n$$

برقرار باشد که مطابق رابطه زیر می توان آن را تضمین کرد:

$$\lambda < \frac{1 - \eta_{n-1}}{2\tau\eta_n}, \quad (43)$$

و در صورتی که  $\epsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، زمان محدودی به صورت  $T_n \geq \tau + \mu$  وجود دارد به طوری که  $|\lambda y_n(t - \tau)| = |\lambda y_n(t) + v_n(t)| \leq \epsilon_n$  یا به عبارت دیگر  $|y_n(t - \tau)| \leq \epsilon_n/\lambda$  و  $u_n(t) = \lambda y_n(t) + u_{n-1}(t)$  برای  $t \geq T_n$  برقرار هستند. در نتیجه سیستم (۱۱) به (۲۰) تبدیل می شود که در آن  $u_{n-1}(t)$  در رابطه (۳۸) صدق می کند.

زیرسیستم  $(n-1)$  ام سیستم (۲۰) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{n-1}(t) &= -u_{n-1}(t - \tau) + h_{n-1}((Y_n)_{[t-\mu, t]}) \\ &= -\sigma_{\epsilon_{n-1}}(\lambda y_{n-1}(t - \tau)) - u_{n-2}(t - \tau) \\ &\quad + h_{n-1}((Y_n)_{[t-\mu, t]}), \end{aligned} \quad (44)$$

که در آن  $t \geq T_n + \mu$  می باشد. مشابه اثبات قضیه ۱، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$y_{n-1}(t - \tau) = y_{n-1}(t) + \int_{t-\tau}^t (u_{n-1}(s - \tau) - h_{n-1}((Y_n)_{[s-\mu, s]})) ds$$

با جایگذاری رابطه فوق در (۴۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{n-1}(t) &= -\sigma_{\epsilon_{n-1}}(\lambda y_{n-1}(t) + v_{n-1}(t)) - u_{n-2}(t - \tau) \\ &\quad + h_{n-1}((Y_n)_{[t-\mu, t]}), \quad \forall t \geq T_n + \tau + \mu, \end{aligned}$$

که در آن:

$$v_{n-1}(t) = \lambda \int_{t-\tau}^t (u_{n-1}(s - \tau) - h_{n-1}((Y_n)_{[s-\mu, s]})) ds$$

در صورتی که  $d(\lambda) \leq \epsilon_n/\lambda$  باشد، که می توان آن را تضمین کرد اگر  $\epsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، مشابه اثبات قضیه ۱ با استفاده از (۱۲) و (۴۲) خواهیم داشت:

$$|v_{n-1}(t)| \leq \lambda\tau(\epsilon_{n-1} + 2\delta_{n-1}(\lambda)((\epsilon_n/\lambda)^2 + \epsilon_n^2))$$

$$|u_{n-2}(t - \tau) - h_{n-1}| \leq \epsilon_{n-2} + 2\delta_{n-1}(\lambda)((\epsilon_n/\lambda)^2 + \epsilon_n^2).$$

با استفاده از لم ۱، اگر رابطه زیر

$$2\lambda\tau(\epsilon_{n-1} + 2\delta_{n-1}(\lambda)(\epsilon_n^2/\lambda^2 + \epsilon_n^2)) + \epsilon_{n-2} + 2\delta_{n-1}(\lambda)(\epsilon_n^2/\lambda^2 + \epsilon_n^2) < \epsilon_{n-1}$$

یا به عبارت دیگر

$$(4\lambda\tau + 2)\delta_{n-1}(\lambda)((1/\lambda)^2 + \eta_n^2)\epsilon < \beta - \eta_{n-2} - 2\lambda\tau\eta_{n-1}$$

برقرار باشد که مطابق رابطه زیر می توان آن را تضمین کرد:

$$\lambda < \frac{\beta - \eta_{n-2}}{2\tau\eta_{n-1}}, \quad (45)$$



و در صورتی که  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، زمان محدودی به صورت  $T_{n-1} \geq T_n + \tau + \mu$  وجود دارد به طوری که  $|\lambda y_{n-1}(t - \tau)| = |\lambda y_{n-1}(t) + v_n(t)| \leq \varepsilon_{n-1}$  یا به عبارت دیگر  $|\lambda y_{n-1}(t - \tau)| \leq \varepsilon_{n-1}/\lambda$  و  $u_{n-1}(t) = \lambda y_{n-1}(t) + u_{n-2}(t)$  برای  $t \geq T_{n-1}$  برقرار هستند. سیستم حلقه بسته را می توان بر این اساس ساده کرد. با تکرار پروسه فوق برای  $u_j(t)$  ( $j = n-2, n-3, \dots, i$ ) و  $i \in \mathbb{I}[1, n-2]$ ، در نهایت سیستم  $y_i$  را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= -u_i(t - \tau) + h_i((Y_{i+1})_{[t-\mu, t]}) \\ &= -\sigma_{\varepsilon_i}(\lambda y_i(t - \tau)) - u_{i-1}(t - \tau) \\ &\quad + h_i((Y_{i+1})_{[t-\mu, t]}). \end{aligned} \quad (46)$$

مشابه تحلیل فوق، اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\varepsilon_j/\lambda \leq d(\lambda), \quad j = n, n-1, \dots, i+1$$

که با توجه به رابطه (۳۹) می توان آن را تضمین کرد در صورتی که  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، و همچنین اگر رابطه زیر

$$2\lambda\tau(\varepsilon_i + 2\delta_i(\lambda)(\sum_{j=i+1}^n (\varepsilon_j/\lambda)^2 + \varepsilon_n^2)) + \varepsilon_{i-1} + 2\delta_i(\lambda)(\sum_{j=i+1}^n (\varepsilon_j/\lambda)^2 + \varepsilon_n^2) < \varepsilon_i$$

یا به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} &(4\lambda\tau + 2)\delta_i(\lambda) \left( \sum_{j=i+1}^n \left( \frac{\beta^{n-j}}{\lambda} \right)^2 + \eta_n^2 \right) \varepsilon \\ &< \beta^{n-i} - \eta_{i-1} - 2\lambda\tau\eta_i, \end{aligned} \quad (47)$$

برقرار باشد، آنگاه زمان محدودی به صورت  $T_i \geq T_{i+1} + \tau + \mu$  وجود دارد به طوری که  $|\lambda y_i(t - \tau)| = |\lambda y_i(t) + v_i(t)| \leq \varepsilon_i$  یا به عبارت دیگر  $|\lambda y_i(t - \tau)| \leq \varepsilon_i/\lambda$  و  $u_i(t) = \lambda y_i(t) + u_{i-1}(t)$  برای  $t \geq T_i$  برقرار هستند. در نتیجه، سیستم حلقه بسته به (۲۵) تبدیل می شود که در آن  $u_{i-1}(t)$  در رابطه (۳۸) صدق می کند. توجه داشته باشید که اگر  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، می توان (۴۷) را تضمین کرد و:

$$\lambda < \frac{\beta^{n-i} - \eta_{i-1}}{2\tau\eta_i}. \quad (48)$$

مشابه اثبات قضیه ۱، با تکرار فرآیند فوق برای کنترل کننده های  $u_j(t)$  ( $j = i-1, i-2, \dots, 1$ ) می توان ادعا کرد که اگر  $\lambda$  در رابطه زیر صدق کند:

$$\lambda < \min_{i \in \mathbb{I}[2, n]} \left\{ \frac{1}{2\tau}, \frac{\beta^{n-i} - \eta_{i-1}}{2\tau\eta_i} \right\}, \quad (49)$$

عدد محدودی به صورت  $T_1 \geq T_2 + \tau + \mu$  وجود دارد به طوری که برای  $t \geq T_1$  سیستم حلقه بسته به سیستم (۲۶) تبدیل می شود. با این حال، (۴۹) را می توان مطابق رابطه (۳۷) تضمین کرد. ادامه اثبات مشابه اثبات قضیه ۱ می باشد و به همین دلیل ذکر نشده است. بنابراین اثبات در اینجا به اتمام می رسد.

قضیه های ۱ و ۲ برای تکرارهای دلخواه  $\{h_{ij}, h_{kji}\}$ ، دو نوع قانون کنترل غیرخطی ارائه می دهند که به ترتیب عبارتند از توابع اشباع توزیع شده و آبشاری. با توجه به فرم کانونیک جدیدی که در قضیه فرعی ۱ ارائه شد، دینامیک خطی سیستم حلقه بسته به صورت پایین مثلثی می باشد که باعث می شود بررسی پایداری سیستم حلقه بسته آسان تر شود. این متفاوت از (Mazenc و همکاران، ۲۰۰۴) می باشد چرا که در آن دینامیک خطی سیستم حلقه بسته متناظر به صورت مثلثی نیست که باعث می شود تحلیل پایداری، نسبتاً پیچیده شده و شرایط پایداری حاصل کاملاً پایستار شود. علاوه بر این، تعدادی پارامتر آزاد نیز برای بهبود عملکرد کنترل در این دو نوع کنترل کننده به کار برده شده است که با یک مثال کاربردی در بخش بعدی شرح داده خواهد شد.

#### ۴- مثال کاربردی

در این بخش از سیستم کنترل هواپیمای PVTOL به عنوان نمونه برای توضیح تئوری ارائه شده در این مقاله استفاده خواهیم کرد. سیستم PVTOL با حضور تاخیر زمانی را می توان به صورت زیر بیان کرد (به (Lozano و Fantoni, Zavalario, ۲۰۰۳) مراجعه نمایید):

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = -u_1 (t - v_1) \sin(\theta_p (t - v_2)), \\ \ddot{z}_p = u_1 (t - v_1) \cos(\theta_p (t - v_2)) - 1, \\ \ddot{\theta}_p = u_2 (t - v_3), \end{cases} \quad (50)$$

$x_p$  و  $z_p$  به ترتیب نشان دهنده موقعیت های افقی و عمودی هستند،  $\theta_p$  زاویه رول هواپیما با افق می باشد،  $u_1$  و  $u_2$  به ترتیب نشان دهنده شتاب رانش و زاویه ای هستند و  $v_1 \geq 0$ ،  $v_2 \geq 0$  و  $v_3 \geq 0$  نیز تاخیر می باشند (ضریب تزویج ضعیف در این معادله در نظر گرفته نشده است زیرا معمولاً بسیار کوچک می باشد. به (Zavalario و همکاران، ۲۰۰۳) مراجعه نمایید). در اینجا  $(x_p, z_p, \theta_p)$  متغیرهای حالت و  $(u_1, u_2)$  متغیرهای کنترل هستند. فرض کنید  $x_1 = -x_p$ ،  $x_2 = -\dot{x}_p$ ،  $x_3 = \theta_p$ ،  $x_4 = \dot{\theta}_p$ ،  $x_5 = z_p$  و  $z_1 = z_p$ ،  $z_2 = \dot{z}_p$  باشند. بنابراین (۵۰) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t - v_1) \sin(x_3(t - v_2)), \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = u_2(t - v_3), \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = u_1(t - v_1) \cos(x_3(t - v_2)) - 1. \end{cases} \quad (53)$$

رابطه  $v = v_2 + v_3$  را تعریف کرده و فرض می کنیم  $v \geq v_1$ . در اینجا فقط روش ارائه شده در قضیه ۱ را شرح می دهیم. طراحی ما شامل چهار مرحله زیر می باشد.

**مرحله ۱:** طراحی زیرسیستم (۵۲): از آنجایی که این زیرسیستم به صورت سیستم (۱) می باشد، قانون کنترل  $u_2$  را می توان به صورت زیر طراحی کرد:

$$u_2(t) = -\sigma_{\varepsilon_{24}} (\lambda_2 y_4(t) + \sigma_{\varepsilon_{23}} (\lambda_2 y_3(t) + \sigma_{\varepsilon_{22}} (U_2(t)))) \quad (54)$$

که در آن  $\beta_2 \in (0, 1/2)$  می باشد،  $U_2(t)$  باید تعیین شود و:

$$\begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 x_3(t - r_3) + x_4(t - r_4) \\ x_4(t - r_4) \end{bmatrix}, \quad (55)$$

که در آن  $r_4 = v_2$  و  $r_3 = 2v_2 + v_3$  می باشد. مشابه تحلیل قضیه ۱، برای سیستم حلقه بسته متشکل از (۵۲) و (۵۴) اگر  $\varepsilon_{22}$  به اندازه کافی کوچک باشد، زمان محدودی به صورت  $T \geq 2v$  وجود دارد به طوری که:

$$|x_3(t)| \leq \frac{\pi}{4}, \quad \forall t \geq T. \quad (56)$$

مرحله ۲: ساده سازی سیستم  $\Sigma$ : مشابه روش مورد استفاده در (Francisco و همکاران، ۲۰۰۷)، رابطه زیر را تعریف می کنیم:

$$u_1(t) = \frac{1 + U_1(t)}{\cos(\sigma_1(\chi_3(t - (v - v_1))))}, \quad (57)$$

که در آن:

$$\chi_3(t) = x_3(t) + v_3 x_4(t) + \int_{t-v_3}^t \int_{t-v_3}^s u_2(l) dl ds = x_3(t) + v_3 x_4(t) + \int_{t-v_3}^t (t-l) u_2(l) dl$$

و  $U_1(t)$  نیز باید تعیین شود. با استفاده از معادله دوم در (۵۲) داریم:

$$x_4(s) = x_4(t) + \int_t^s u_2(l - v_3) dl$$

همچنین با استفاده از رابطه فوق و معادله اول در (۵۲) برای  $t \geq 2v_3$  داریم (Francisco و همکاران، ۲۰۰۷):

$$x_3(t + v_3) = x_3(t) + \int_t^{t+v_3} x_4(s) ds = \chi_3(t). \quad (58)$$

بنابراین از (۵۶) و (۵۸) و همچنین تعریف  $\sigma_1(\cdot)$  می توان نتیجه گرفت که برای  $t \geq T + 2v_3$

$$u_1(t - v_1) = \frac{1 + U_1(t - v_1)}{\cos(\chi_3(t - v_2))}, \quad (59)$$

این بدین معنی است که سیستم (۵۳) را می توان برای  $t \geq T + 2v_3$  به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = U_1(t - v_1). \end{cases} \quad (60)$$

مرحله ۳: طراحی  $U_1(t)$  برای سیستم  $\Sigma$  از آنجایی که (۶۰) به صورت سیستم (۱) می باشد، کنترل کننده پایدارساز سراسری  $U_1(t)$  برای (۶۰) را می توان با استفاده از قضیه ۱ به صورت زیر طراحی کرد:

$$U_1(t) = -\sigma_{\varepsilon_{12}}(\lambda_1 w_2(t) + \sigma_{\varepsilon_{11}}(\lambda_1 w_1(t))), \quad (61)$$

که در آن:

$$\lambda_1 < \min\{(1 - 2\beta_1)/2v_1, 1/(4v_1|A_2^T A_2|)\}, \quad \varepsilon_{11} = \beta_1 \varepsilon_{12},$$

$$\beta_1 \in (0, 1/2), \quad \varepsilon_{11} \leq \varepsilon^h = \varepsilon^h(\beta_1, \lambda_1) \in (0, 1),$$

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1(t - v_1) + z_2(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}.$$

مرحله ۴: تکمیل طراحی سیستم  $x$ : سیستم های (۵۱) و (۵۲) را می توان برای  $t \geq T + 2v_3$  با در نظر گرفتن (۵۹) به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t - v_2) + f_2((x_3)_{[t-v_2, t]}), \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = x_5(t - v_3), \end{cases} \quad (62)$$

سیستم فوق به صورت سیستم (۱) می باشد که در آن:

$$x_5 = u_2$$

$$f_2((x_3)_{[t-v_2, t]}) = x_3(t - v_2) - \tan(x_3(t - v_2)) - U_1(t - v_1) \tan(x_3(t - v_2))$$

برای  $x_3 \in [-1, 1]$  (که مطابق (۵۶) می توان آن را تضمین کرد) (Francisco و همکاران، ۲۰۰۷)، داریم:

$$|\tan(x_3) - x_3| \leq 0.6x_3^2$$

با توجه به مرحله ۳، می دانیم که  $|z_1(t)|$  و  $|z_2(t)|$  به صفر همگرا می شوند. بنابراین از  $|\tan(x_3(t))| \leq 1, \forall t \geq T$  می توان نتیجه گرفت که  $|U_1(t - v_1) \tan(x_3(t - v_2))|$  به صفر همگرا می شود. در نتیجه برای  $\varepsilon_0 > 0$  عددی به صورت  $T_1 = T_1(\varepsilon_0) \geq T + 2v_3$  وجود دارد به طوری که رابطه  $|f_2((x_3)_{[t-v_2, t]})| \leq \varepsilon \cdot |x_3(t - v_2)|$  برای  $t \geq T_1$  برقرار می باشد، این بدین معنی است که در (۳۵) صدق می کند. بنابراین با توجه به قضیه ۱ و تبصره ۲ می توان قانون کنترل  $u_2$  را به صورت زیر طراحی کرد:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= -\sigma_{\varepsilon 24} (\lambda_2 y_4(t) + \sigma_{\varepsilon 23} (\lambda_2 y_3(t) + \sigma_{\varepsilon 22} (U_2(t)))) \\ &= -\sigma_{\varepsilon 24} (\lambda_2 y_4(t) + \sigma_{\varepsilon 23} (\lambda_2 y_3(t) + \sigma_{\varepsilon 22} (\lambda_2 y_2(t) \\ &\quad + \sigma_{\varepsilon 21} (\lambda_2 y_1(t))))), \end{aligned} \quad (63)$$

که در آن  $\varepsilon_{21} = \beta_2 \varepsilon_{22}$  می باشد و

$$\begin{cases} y_1(t) = \lambda_2^3 x_1(t - r_1) + 3\lambda_2^2 x_2(t - r_2) \\ \quad + 3\lambda_2 x_3(t - r_3) + x_4(t - r_4), \\ y_2(t) = \lambda_2^2 x_2(t - r_2) + 2\lambda_2 x_3(t - r_3) \\ \quad + x_4(t - r_4), \end{cases}$$

در روابط فوق،  $r_2 = 2v$  و  $r_1 = 3v$  می باشد.

در نتیجه سیستم حلقه بسته متشکل از (۵۱)، (۵۲)، (۵۳) و کنترل کننده های (۵۷)، (۶۱) و (۶۳)، پایدار مجانبی یکنواخت سراسری و پایدار نمایی محلی می باشد.

در نهایت شبیه سازی های سیستم حلقه بسته متشکل از (۵۱)، (۵۲)، (۵۳)، (۵۷) و (۶۳) را انجام می دهیم. فرض کنید  $v_1 = 1.0$ ،  $v_2 = v_3 = 0.5$ ،  $\beta_1 = 0.45$ ،  $\beta_2 = 0.45$ ،  $\lambda_1 = 0.049$ ،  $\lambda_2 = 0.049$ ،  $\varepsilon_1 = 0.50$ ،  $\varepsilon_2 = 0.40$  باشند. منحنی های شش متغیر حالت و دو ورودی کنترل برای شرایط اولیه  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0.2$  و  $z_1(0) = z_2(0) = 0.3$  به ترتیب در شکل ۱ نشان داده شده اند. مشاهده می شود که حالت ها به مبدا همگرا می شوند و ورودی ها کران دار هستند که نشان دهنده کارایی روش های پیشنهادی می باشد.

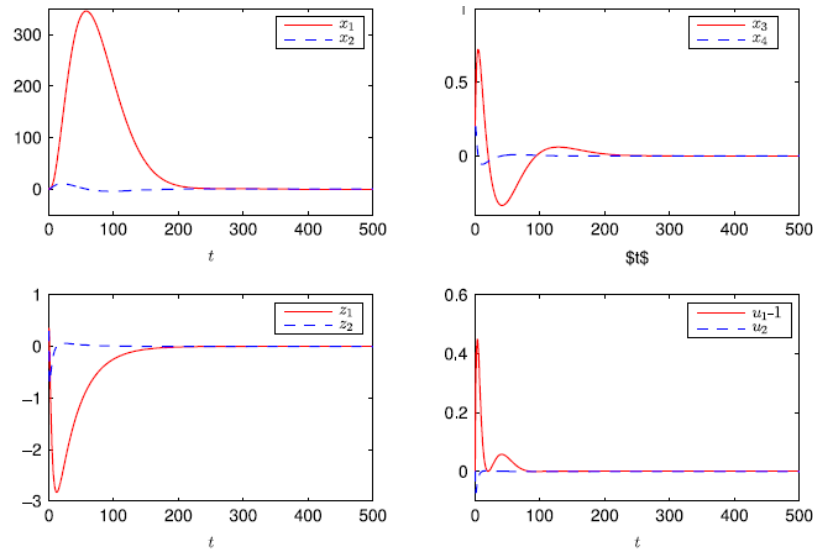


Fig. 1. The trajectories of the six state variables and the two control inputs.

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، مسئله پایدارسازی سراسری دسته ای از سیستم های تاخیر زمانی غیرخطی فیدفوروارد توسط کنترل های کران دار مورد بررسی قرار گرفت. دو نوع کنترل کننده غیرخطی با کمک فرم کانونیک خاص سیستم تحت بررسی ارائه شد که نه تنها از حالت های فعلی بلکه از حالت های تاخیری نیز استفاده می کنند. همچنین از تعدادی پارامتر آزاد در این دو نوع کنترل کننده برای بهبود عملکرد کنترل استفاده شد. کارایی روش های پیشنهادی نیز با ارائه یک مثال کاربردی نشان داده شد.

## منابع و مراجع

- Choi, H., & Lim, J. (2010). Asymptotic stabilization of an input-delayed chain of integrators with nonlinearity. *Systems & Control Letters*, 59, 374–379.
- Du, B., Lam, J., & Shu, Z. (2010). Stabilization for state/input delay systems via static and integral output feedback. *Automatica*, 46, 2000–2007.
- Francisco, R., Mazenc, F., & Mondié, S. (2007). Global asymptotic stabilization of a PVTOL aircraft model with delay in the input. In *Applications of time delay systems* (pp. 343–356). Berlin Heidelberg: Springer.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to time-delay systems: analysis and control*. Birkhauser.
- Gu, K. (2000). An integral inequality in the stability problem of time-delay systems. In *Proceedings of the 39th IEEE conference on decision and control* (pp. 2805–2810), Sydney.
- Hale, J. K. (1977). *Theory of functional differential equations*. New York: Springer.
- Jo, H., Choi, H., & Lim, J. (2014). Observer based output feedback regulation of a class of feedforward nonlinear systems with uncertain input and state delays using adaptive gain. *Systems & Control Letters*, 71, 44–53.
- Koo, M., & Choi, H. (2015). Output feedback regulation of a chain of integrators with unknown time-varying delays in states and input. *Automatica*, 58, 183–190.
- Koo, M., & Choi, H. (2016). Non-predictor controller for feedforward and nonfeedforward nonlinear systems with an unknown time-varying delay in the input. *Automatica*, 65, 27–35.
- Krstic, M. (2010). Compensation of infinite-dimensional actuator and sensor dynamics. *IEEE Control Systems Magazine*, 30, 22–41.
- Liu, K., & Fridman, E. (2014). Delay-dependent methods and the first delay interval. *Systems & Control Letters*, 64, 57–63.



- Marchand, N., & Hably, A. (2005). Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica*, 41, 2147–2152.
- Mazenc, F., Mondié, S., & Francisco, R. (2004). Global asymptotic stabilization of feedforward systems with delay in the input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49, 844–850.
- Mazenc, F., Mondié, S., & Niculescu, S.-I. (2003). Global asymptotic stabilization for chains of integrators with a delay in the input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48, 57–63.
- Meng, X., Lam, J., Du, B., & Gao, H. (2010). A delay-partitioning approach to the stability analysis of discrete-time systems. *Automatica*, 46, 610–614.
- Sussmann, H. J., Sontag, E. D., & Yang, Y. (1994). A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 2411–2425.
- Teel, A. R. (1992). Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems & Control Letters*, 18, 165–171.
- Wang, Q., Xue, A., & Lu, R. (2015). Robust global disturbance rejection of spacecraft rendezvous system via gain scheduling. In *Proc. 34th chinese control conference*, Hangzhou, China.
- Yakoubi, K., & Chitour, Y. (2007). Linear systems subject to input saturation and time delay: Global asymptotic stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52, 874–879.
- Yang, X., Zhou, B., & Lam, J. (2017). Global stabilization of multiple oscillator systems by delayed and bounded feedback. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 64, 675–679.
- Ye, X. (2003). Universal stabilization of feedforward nonlinear systems. *Automatica*, 39, 141–147.
- Ye, X. (2011). Adaptive stabilization of time-delay feedforward nonlinear systems. *Automatica*, 47, 950–955.
- Ye, H. (2014). Saturated delayed controls for feedforward nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59, 1646–1653.
- Ye, H., Jiang, Z., Gui, W., & Yang, C. (2012). Decentralized stabilization of large-scale feedforward systems using saturated delayed controls. *Automatica*, 48, 89–94.
- Ye, H., & Wang, H. (2007). Stabilization of a PVTOL aircraft and an inertia wheel pendulum using saturation technique. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15, 1143–1150.
- Zavalario, A., Fantoni, I., & Lozano, R. (2003). Global stabilization of a PVTOL aircraft model with bounded inputs. *International Journal of Control*, 76, 1833–1844.
- Zhang, X., Feng, G., & Sun, Y. (2012). Finite-time stabilization by state feedback control for a class of time-varying nonlinear systems. *Automatica*, 48, 499–504.
- Zhang, X., Liu, Q., Baron, L., & Boukas, E. (2011). Feedback stabilization for high order feedforward nonlinear time-delay systems. *Automatica*, 47, 962–967.
- Zhang, X., Liu, L., Feng, G., & Zhang, C. (2013). Output feedback control of largescale nonlinear time-delay systems in lower triangular form. *Automatica*, 49, 3476–3483.
- Zhou, B., & Duan, G. (2009). Global stabilization of linear systems via bounded controls. *Systems & Control Letters*, 58, 54–61.
- Zhou, B., Duan, G., & Lin, Z. (2010). Global stabilization of the double integrator system with saturation and delay in the input. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 57, 1371–1383.
- Zhou, B., & Yang, X. (2016). On global stabilization of the multiple integrators system by delayed and bounded controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61, 4222–4228.