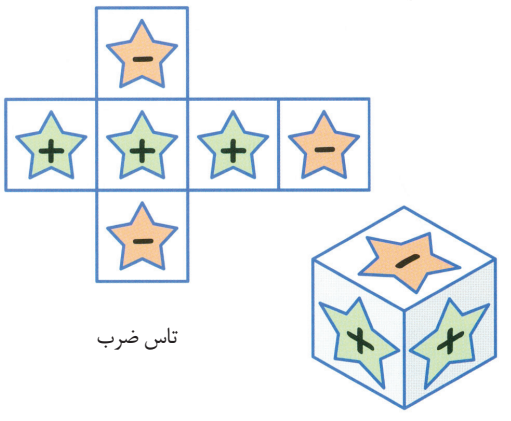
ضرب اعداد صحیح

تاس	حرکت شاخص	شرح ریاضی
تاسِ ضرب علامت مثبت و تاس دیگر عدد ۳ را نشان می‌دهد.	دو بار در جهت عدد تاس. در نتیجه، شش خانه به‌سمت راست.	۲ × ۳ = ۶
تاسِ ضرب علامت منفی و تاس دیگر عدد ۳ را نشان می‌دهد.	دو بار در جهت مخالف عدد تاس. در نتیجه، شش خانه به‌سمت چپ.	(−۲) × ۳ = −۶
تاسِ ضرب علامت مثبت و تاس دیگر ۳− را نشان می‌دهد.	دو بار در جهت عدد تاس. در نتیجه، شش خانه به‌سمت چپ.	(+۲) × (−۳) = −۶
تاسِ ضرب علامت منفی و تاس دیگر عدد ۳− را نشان می‌دهد.	دو بار در جهت مخالف عدد تاس. در نتیجه، شش خانه به‌سمت راست.	(−۲) × (−۳) = +۶

بیایید بازی صفحه قبل را ادامه دهیم، اما این بار یک تاس جدید درست می‌کنیم و آن را تاس ضرب می‌نامیم. بر روی سه طرف تاس ستاره‌ای با علامت منفی و روی سه طرف دیگر آن ستاره‌ای با علامت مثبت می‌کشیم. این تاس حرکت شماره تاس را دو برابر می‌کند.

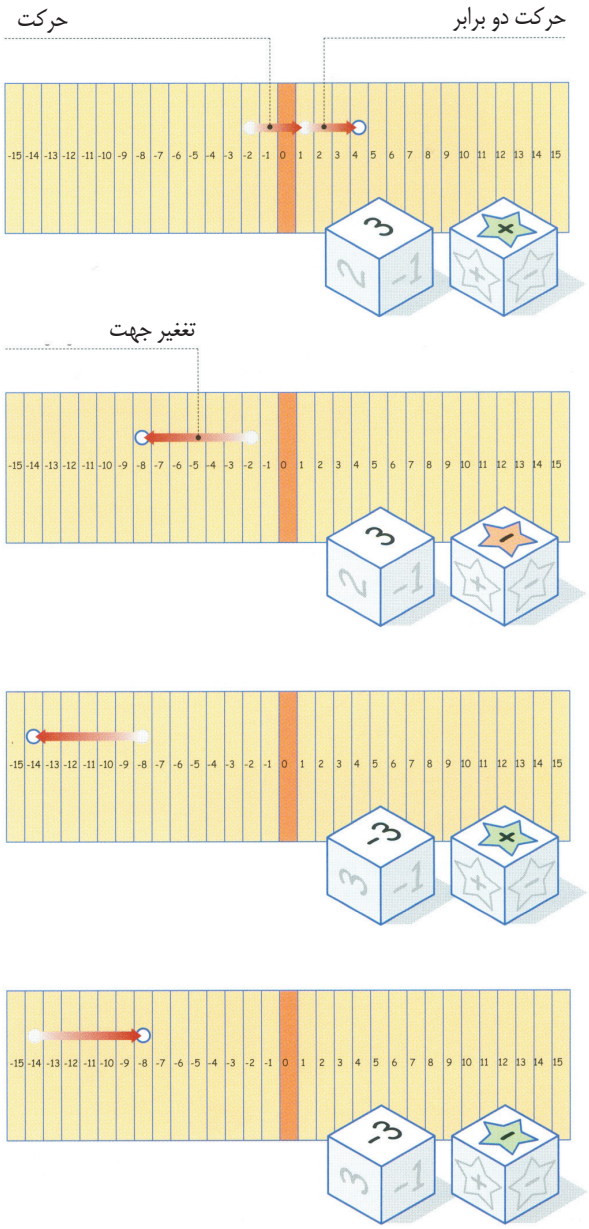
شاخص را روی ۲− قرار دهید، و هر دو تاس را بیندازید. اگر موارد ممکن را تجزیه و تحلیل کنیم، به این نتیجه می‌رسیم: در ضرب دو عدد صحیح، قدرمطلق اعداد را در هم ضرب می‌کنیم. اگر دو عدد هم‌علامت باشند، علامت عدد نهایی مثبت است. از سوی دیگر، اگر علامت‌ها متفاوت باشند، علامت عدد نهایی منفی است.



تاس ضرب

جدول ضرب علامت‌ها

·	+	−
+	+	−
−	−	+



مقدمه
جادوی اعداد
اعداد طبیعی
اعداد صحیح
اعداد گویا
اعداد حقیقی
سیستم متریک
معادلات
قاعده طرفین وسطین
توابع
هندسه
مثلثات
آمار
احتمال
چالش‌های جدید برای ریاضیات
واژه‌نامه
نمایه

تقسیم اعداد صحیح

چهار برادر باید بدهی پدر پیرشان را به مبلغ ۸۰۰۰ دلار بپردازند. برای تسویه بدهی، هر برادر چه مقدار باید بپردازد؟

$$\frac{-۸۰۰۰}{۴} = -۲۰۰۰ \text{ دلار}$$

هرکدام باید ۲۰۰۰ دلار بپردازند. در این مثال، می‌گوییم تقسیم **کامل**[1] (بدون باقی‌مانده) است.

اگر قرض ۸۰۳۰ دلار بود چه اتفاقی می‌افتاد؟ این عملیات فقط با استفاده از اعداد صحیح قابل انجام نیست، زیرا اگر هر برادر ۲۰۰۷ دلار بگذارد، هنوز مقداری از بدهی باقی می‌ماند: ۲ دلار. در این مورد، می‌گوییم تقسیم **درست**[2] است.

در اندازه‌گیری ارتفاع زمین، سطح دریا صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین برای اندازه‌گیری عمق زیر آب، به اعداد منفی نیاز داریم.

علامت باقی‌مانده یک تقسیم درست همان علامت مقسوم را دارد.

نقطه انجماد آب $۳۲^\circ F$ درجه فارنهایت (۰ درجه سلسیوس) است. در مناطق خیلی سرد، ممکن است دما تا ۴۰ درجه زیر صفر پایین بیاید. این دما با اعداد منفی نمایش داده می‌شود: ۴۰- درجه (C یا F).

÷	+	−
+	+	−
−	−	+

جدول تقسیم

برای تعیین علامت خارج‌قسمت، می‌توانیم از جدول علایمی مشابه جدول ضرب استفاده کنیم.

باقی‌مانده + خارج قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$(-۱) + (-۲) \times ۴ = -۹$$

پایه طبیعی با توان عدد صحیح

- در ضرب دو توان با پایه‌های مساوی، یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$۳^۲ \times ۳^۳ = (۳ \times ۳) \times (۳ \times ۳ \times ۳) = ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۵ = ۳^{۲+۳}$$

- در تقسیم دو توان با پایه‌های مساوی و توان‌های طبیعی، یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$\frac{۳^۴}{۳^۲} = \frac{۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳}{۳ \times ۳} = ۳ \times ۳ = ۳^۲ = ۳^{۴-۲}$$

- اگر توان مقسوم‌علیه، بزرگ‌تر از مقسوم باشد، توان منفی ایجاد می‌شود. به عبارت دیگر، عدد یک را به همان عدد اما با توان مثبت تقسیم می‌کنیم:

$$۳^{-۲} = \frac{۳^۲}{۳^۴} = \frac{۳ \times ۳}{۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳} = \frac{۱}{۳ \times ۳} = \frac{۱}{۳^۲}$$

- اگر مقسوم و مقسوم‌علیه مساوی باشند، توان صفر ایجاد می‌شود. یعنی حاصل مساوی یک است:

$$۳^۰ = ۳^{۲-۲} = \frac{۳^۲}{۳^۲} = \frac{۳ \times ۳}{۳ \times ۳} = \frac{۹}{۹} = ۱$$

توان با پایه عدد صحیح

- اگر پایه منفی و توان زوج باشد، حاصل عددی مثبت است:

$$(-۲)^۲ = (-۲) \times (-۲) = ۴$$

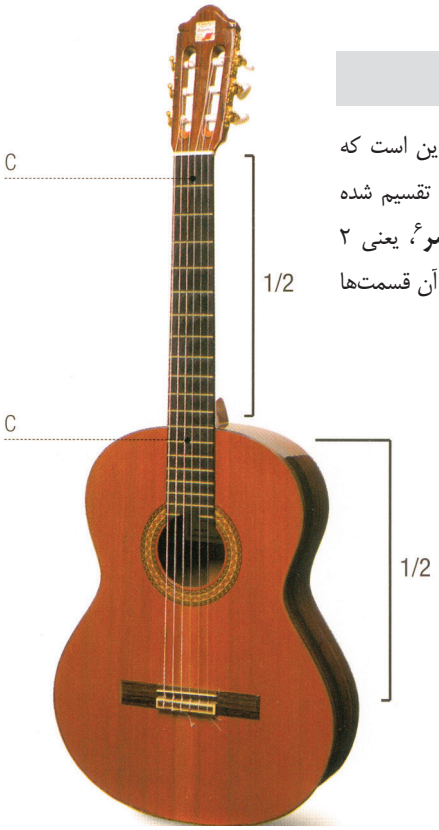
- اگر پایه منفی و توان فرد باشد، حاصل عددی منفی است:

$$(-۲)^۳ = (-۲) \times (-۲) \times (-۲) = ۴ \times (-۲) = -۸$$

1.Exact division
2. Whole division

اعداد گویا[1]

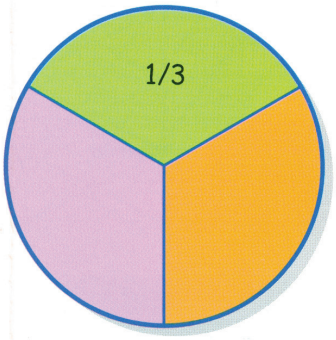
ماریا سعی دارد آهنگی بخواند که از طریق هوش مصنوعی ساخته شده است، اما کلید[2] C برایش زیادی بم است، از این رو تصمیم می‌گیرد آهنگ را به کلید A تغییر پرده بدهد. در این صورت، آیا ملودی دقیقاً همان‌طور به نظر می‌رسد، فقط با نت زیرتر؟ برای پاسخ به این سؤال، باید بررسی کنیم که آیا فاصله نت C تا نت D در اولین حامل[3] مشابه فاصله نت A تا نت B در حامل دوم است.

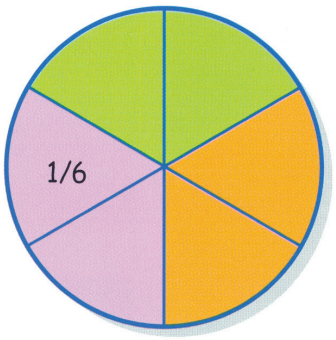


کسر[4]

قرن‌هاست که معلوم است نواک (زیروبمی) سیمی که تحت کشش قرار دارد، بستگی به طول آن دارد. هرچه سیم کوتاه‌تر باشد، نت زیرتری ایجاد می‌شود.

$\frac{۲}{۳}$ یک **کسر** است. ۳ **مخرج کسر**[5] نامیده می‌شود و نشان‌دهنده این است که واحد مورد نظر به سه قسمت تقسیم شده است، درحالی‌که **صورت کسر**[6]، یعنی ۲ نشان می‌دهد که فقط دو تا از آن قسمت‌ها داریم.





اگر صورت و مخرج یک کسر را در عددی مشابه ضرب کنیم، کسر حاصله **هم‌ارز**[7] کسر اول است.

جمع و تفریق کسرها

طول سیم‌ها	۱	$\frac{۸}{۹}$	$\frac{۶۴}{۸۱}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱۶}{۲۷}$	$\frac{۱۲۸}{۲۴۳}$	$\frac{۱}{۲}$
نت‌ها	C	D	E	F	G	A	B	C

قبل از جمع یا تفریق دو کسر، باید آن دو کسر را به کسرهایی تبدیل کنیم که هم‌ارز هستند ولی مخرج مساوی دارند. برای مثال، بیایید فاصله نت A تا نت B را محاسبه کنیم:

$$\frac{۱۶}{۲۷}-\frac{۱۲۸}{۲۴۳}=\frac{۱۶\times۹}{۲۷\times۹}-\frac{۱۲۸}{۲۴۳}=\frac{۱۴۴}{۲۴۳}-\frac{۱۲۸}{۲۴۳}=\frac{۱۶}{۲۴۳}$$

حالا بیایید فاصله نت C را تا نت D محاسبه کنیم:

$$۱-\frac{۸}{۹}=\frac{۹}{۹}-\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{۹}$$

بیایید کسر هم‌ارزی را پیدا کنیم که مخرج آن ۲۴۳ است:

$$\frac{۱}{۹}=\frac{۱\times۲۷}{۹\times۲۷}=\frac{۲۷}{۲۴۳}$$

بنابراین فاصله دو نت اول در کلید A کمتر از فاصله بین دو نت اول در کلید C است، زیرا طول سیم‌ها تفاوتی جزئی دارند:

$$\text{طول سیم}\quad \frac{۲۷}{۲۴۳}-\frac{۱۶}{۲۴۳}=\frac{۱۱}{۲۴۳}$$

وقتی کلیدها را پس و پیش می‌کنیم، نت‌ها خیلی مشابه به نظر می رسند، اما دقیقاً مثل هم نیستند. از این رو، آهنگی که با نت می‌مینور[8] نوشته شده است، غمگین به نظر می‌رسد، اما آهنگی که با نت A نوشته شده به نظر شاد است.

1. Rational Numbers

۲. کلید در موسیقی به منظور معنا دادن به نت‌ها و شناختن نام نت‌ها روی خطوط حامل استفاده می‌شود. (مترجم)

۳. حامل عبارت است از تعدادی خطوط افقی و موازی، با فواصل مساوی. نت‌های موسیقی روی خطوط و بین خطوط و یک نُت بالای حامل و یک نُت پایینِ حامل نوشته می‌شوند. (مترجم)

4. Fraction
5. Denominator
6. Numerator
7. Equivalent

۸. می‌مینور (E minor) با مخفف Em، یک گام مینور بر پایهٔ نت می است. (مترجم)

مقدمه
جادوی اعداد
اعداد طبیعی
اعداد صحیح
اعداد گویا
اعداد حقیقی
سیستم متریک
معادلات
قاعده طرفین وسطین
توابع
هندسه
مثلثات
آمار
احتمال
چالش‌های جدید برای ریاضیات
واژه‌نامه
نمایه

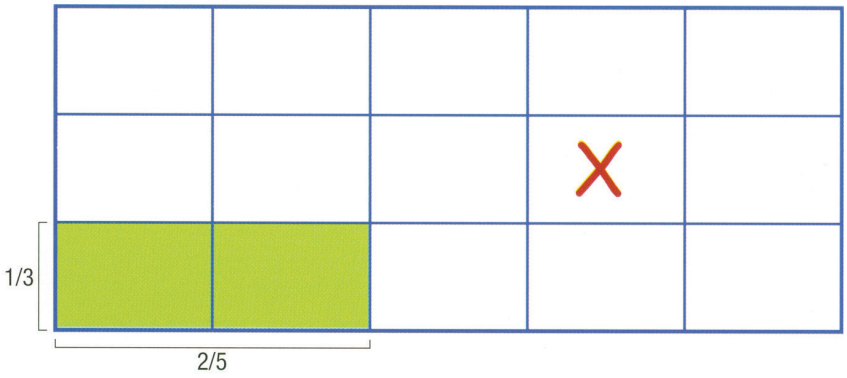
ضرب و تقسیم کسرها

در ضرب دو کسر، لازم نیست مخرج آن‌ها یکی باشد، بلکه تنها باید صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب کنیم

$$\frac{۱}{۳} \div \frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۱۵}$$

در تقسیم دو کسر، کسر اول باید در معکوس کسر دوم ضرب شود:

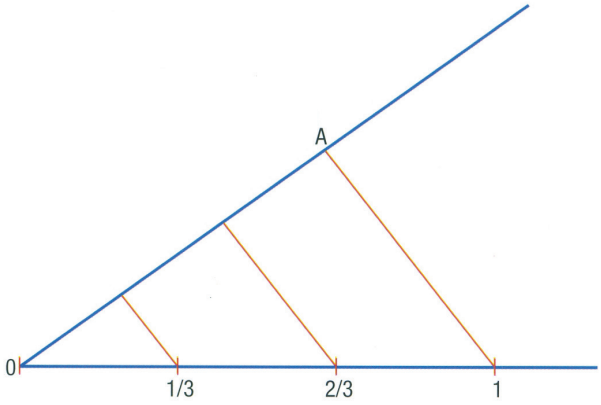
$$\frac{۲}{۱۵} \div \frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۱۵} \times \frac{۵}{۲} = \frac{۱۰}{۳۰} = \frac{۱}{۳}$$



نمایش گرافیکی کسرها

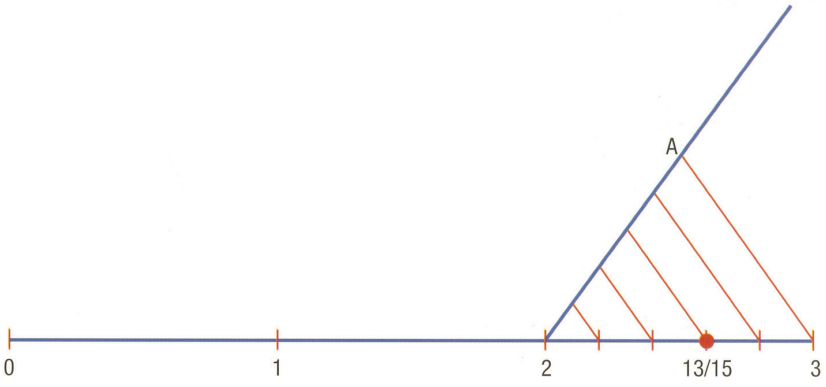
برای نشان دادن یک کسر روی یک خط مستقیم، باید عدد یک را به تمام قسمت‌هایی که مخرج نشان می‌دهد تقسیم کنیم. می‌توانیم به شرح زیر عمل کنیم:

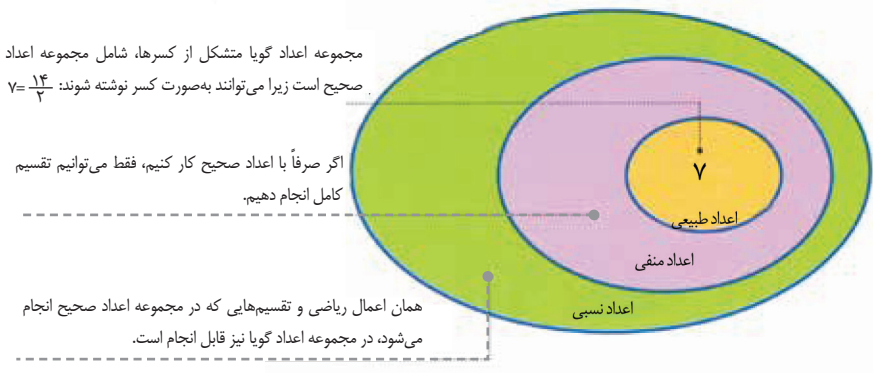
- از مبدأ صفر، یک خط راست دیگر بکشید و با زاویه دلخواه امتداد دهید.
- فاصله‌ای را انتخاب کرده و به تعدادی که مخرج نشان می‌دهد، قسمت‌هایی را علامت بزنید تا به نقطه A برسید.
- نقطه A را به عدد یک وصل کنید و نسبت به خطی که ایجاد می‌شود، خطوط موازی رسم کنید. این خطوط موازی، واحد را به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کنند.



اگر صورت کسر بزرگ‌تر از مخرج آن باشد، کسر بزرگ‌تر از یک است؛ از همان ساختار استفاده می‌کنیم، ولی براساس عدد صحیح مناسب:

$$\frac{۱۳}{۵} = \frac{۱۰}{۵} + \frac{۳}{۵} = ۲ + \frac{۳}{۵}$$





اعداد حقیقی[1]

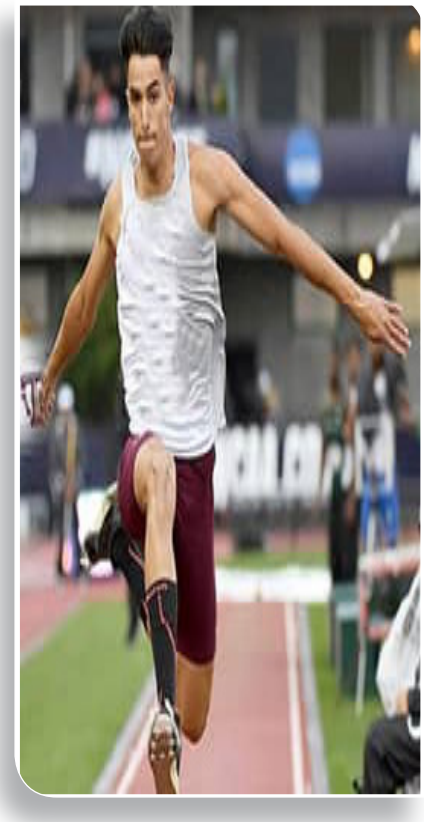
یک ویولن‌زن معروف دو پسر داشت که آن‌ها هم ویولن‌زن بودند. پسر بزرگ‌تر کنسرت اجرا می‌کرد و پسر جوان‌تر در شرف اتمام تحصیلاتش در موسیقی بود. وقتی پدر بازنشسته شد، تصمیم گرفت ویولن‌هایش را بین پسرهایش تقسیم کند: نصف ویولن‌هایش را به‌علاوه یک نصفه ویولن به پسر بزرگش داد، و پسر کوچک‌تر نصف دیگر ویولن‌ها را به‌علاوه نیمی از یک ویولن دریافت کرد. پدر برای خودش فقط یک ویولن نگه داشت، ویولن مورد علاقه‌اش را. پسرها فکر کردند پدرشان شوخی می‌کند. آن‌ها با نصف یک ویولن چه کار می‌توانستند بکنند؟

پرش ماریا

ماریا بیست و یک پا و هفت و نیم اینچ پرید (۶/۵۹ متر). این یعنی بیشتر از بیست و یک پا (حدود شش متر) پریده است. به بیان دقیق‌تر، می توانیم بیست و دومین پا (هفتمین متر) را به قسمت‌های زوج تقسیم کنیم، و می‌بینیم که پرش، بلندتر از نقطه میانی در امتداد این زیربخش‌هاست. همچنان می‌توانیم آخرین پا (متر) را به قسمت‌های زوج کوچک‌تر تقسیم کنیم؛ بنابراین می‌بینیم که پرش برابر است با مجموع بیست و یک پا به علاوه هفت اینچ به علاوه نیم اینچ (شش متر به اضافه پنج دهم به اضافه نه صدم).

کسرهای اعشاری[2]

اعداد اعشاری پدیده‌ای گروهی هستند که هزاران سال در حال شکل‌گیری بوده‌اند؛ نقطه اوج آن‌ها در قرن شانزدهم شکل گرفت که استیون[3] کسرهای اعشاری را معرفی کرد، یعنی کسرهایی که در مخرج خود توانی از ده دارند.



معادله	نتیجه	در تقسیم یک واحد به
$\frac{۱}{۱۰}$	یک‌دهم	ده قسمت مساوی
$\frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰^۲}$	یک‌صدم	صد قسمت مساوی
$\frac{۱}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰^۳}$	یک‌هزارم	هزار قسمت مساوی

و به همین ترتیب، **یک ده‌هزارم**، **یک صدهزارم**، **یک میلیونیوم** و... خواهیم داشت.

1. Real numbers
2. Decimal fractions
2. Stevin

مقدمه
جادوی اعداد
اعداد طبیعی
اعداد صحیح
اعداد گویا
اعداد حقیقی
سیستم متریک
معادلات
قاعده طرفین وسطین
توابع
هندسه
مثلثات
آمار
احتمال
چالش‌های جدید برای ریاضیات
واژه‌نامه
نمایه

جمع و تفریق اعداد اعشاری

بیایید به معمای پدر ویولنیست برگردیم. اگر دقیق به آن فکر کنیم، می‌بینیم که او شوخی نکرده و هفت ویولن داشته است. بنابراین، نصف آن‌ها می‌شود ۳/۵ (یا سه تا و نصفی) ویولن.

پسر بزرگ‌تر ۴ = ۰/۵ + ۳/۵ ویولن می‌گیرد. پسر کوچک‌تر ۲ = ۰/۵ + ۱/۵ ویولن را به ارث می‌برد. پدر یک ویولن را برای خودش نگه می‌دارد. بنابراین، ۷ = ۱ + ۲ + ۴ می‌شود.

$$\begin{array}{r} 3.5 \\ +\ 0.5 \\ \hline 4.0 \end{array}$$

برای جمع یا تفریق اعداد اعشاری، باید اعداد را طوری زیر هم بنویسیم که ممیزها زیر هم قرار بگیرند.

برای ضرب یک عدد اعشاری در عددی با چند صفر، به سادگی ممیز را به ازای هریک از صفرها به‌طرف راست جابه‌جا می‌کنیم. اگر اعشار تمام شود، در سمت راست، صفر اضافه می‌کنیم.

برای ضرب هر دو عدد اعشاری، عملیات را طوری انجام می‌دهیم که انگار اعداد صحیح هستند و سپس تعداد اعشارهای دو عدد را جمع کرده و در حاصل‌ضرب، اعمال می‌کنیم.

انجام اعمال ریاضی اعداد اعشاری با ماشین حساب خیلی ساده است.

ضرب اعداد اعشاری

یک شرکت تجاری–وارداتی ۱۰۰۰ تلویزیون خرید و برای هر کدام از آن‌ها ۷۱۷/۳۲ دلار پرداخت کرد. برای محاسبه هزینه کل تلویزیون‌ها، ضرب زیر را انجام می‌دهیم:

۷۱۷/۳۲ دلار × ۱۰۰۰ = ۷۱۷۳۲۰ دلار

تقسیم اعداد اعشاری

در شهری با یک میلیون سکنه، روزانه ۹۸۳۴۵ لیتر شیر مصرف می‌شود. برای محاسبه میانگین مقدار شیری که هر نفر می‌نوشد، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{۹۸۳۴۵}{۱۰۰۰۰۰۰} = ۰/۰۹۸۳۴۵ \text{ لیتر}$$

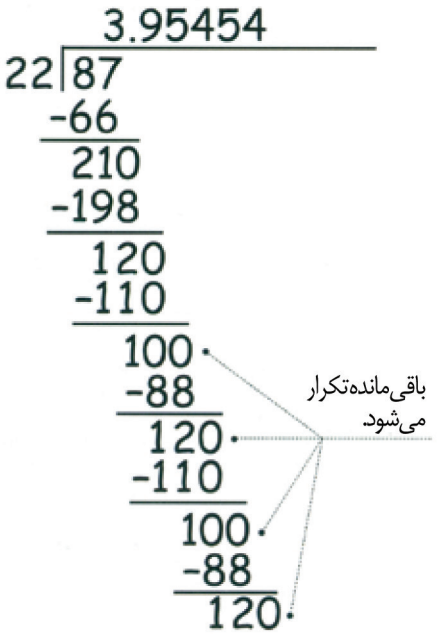
برای تقسیم یک عدد اعشاری در عددی با چند صفر، به سادگی ممیز را به ازای هریک از صفرها به‌طرف چپ جابه‌جا می‌کنیم. اگر تعداد صفرهای مخرج از اعداد صورت بیشتر شد، به تعداد صفرهای اضافه‌تر، در سمت چپ مقسوم‌علیه (صورت کسر) صفر اضافه می‌کنیم.

برای تقسیم هر عدد اعشاری، با ضرب مقسوم و مقسوم‌علیه در عدد یک به همراه چند صفر شروع می‌کنیم و باید مقسوم‌علیه را به عددی صحیح تبدیل کنیم. سپس، تقسیم را انجام می‌دهیم و اولین عدد اعشاری از مقسوم را پایین آورده و علامت اعشار را در خارج قسمت قرار می‌دهیم.

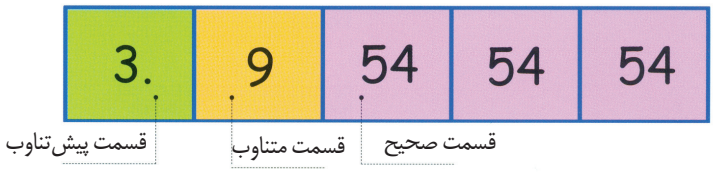
اعداد اعشاری متناوب یا دوره‌ای [1]

فرض کنید اندازه یک زمین فوتبال ۸۷ دکامترمربع است (۱ دکامتر برابر ده متر است). همین‌طور فرض کنید که هریک از بیست و دو بازیکن، از یک بخش مساوی از زمین دفاع می‌کنند. برای محاسبه اینکه هرکس مسئول دفاع از چه مقدار زمین است، باید از تقسیم استفاده کنیم. توجه کنید که عدد باقی‌مانده و خارج قسمت تکرار می‌شوند. بنابراین نتیجه می‌شود ...۳/۹۵۴۵۴۵۴، که معمولاً با یک خط کوچک روی اعدادی که تکرار می‌شوند نوشته می‌شود: $۳/\overline{۹۵۴}$

این نوع اعداد، **اعداد متناوب مرکب** [2] نامیده می‌شوند که شامل یک قسمت صحیح، یک قسمت پیش‌تناوب و یک قسمت متناوب هستند.



عدد اعشاری متناوب



معادل کسری یک عدد اعشاری [3]

این اصطلاح برای کسرهایی به کار می‌رود که وقتی صورت به مخرج تقسیم می‌شود، حاصل عددی اعشاری است.

برای پیدا کردن معادل کسری: الف) قسمت صحیح همراه با قسمت پیش‌تناوب را از قسمت صحیح همراه با قسمت پیش‌تناوب و قسمت متناوب، کسر می‌کنیم، ب) در مخرج به تعداد اعدادی که در تناوب تکرار می‌شوند ۹ می‌گذاریم و به تعداد اعداد قبل از دوره تناوب صفر قرار می‌دهیم. برای مثال،

$$۳/۹۵۴ = \frac{۳/۹۵۴ - ۳۹}{۹۹۰} = \frac{۳/۹۱۵}{۹۹۰} = \frac{۸۷}{۲۲}$$

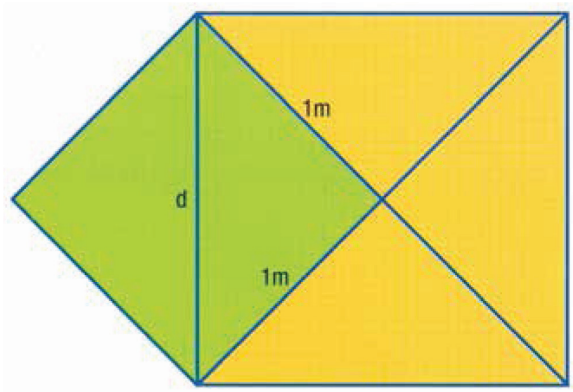
اگر عدد فاقد قسمت پیش‌تناوب باشد، آن را **عدد متناوب خالص** [4] می‌نامند. کسر مولد با حذف بخشی که پیش‌تناوب نامیده می‌شود، محاسبه می‌شود:

$$۷/\overline{۲} = \frac{۷۲ - ۷}{۹} = \frac{۶۶}{۹}$$

اگر باقی‌مانده تقسیم صفر شود، عدد اعشاری قسمت متناوب ندارد و به آن عدد، **عدد اعشاری کامل** [5] گفته می‌شود. در این حالت دوره تناوب صفر در نظر گرفته می‌شود و کسری که از آن عدد ساخته می‌شود معادل آن است:

$$۵/۳ = ۵/۳۰۰... = ۵/\overline{۳۰} = \frac{۵۳۰ - ۵۳}{۹۰} = \frac{۴۷۷}{۹۰} = \frac{۵۳}{۱۰}$$

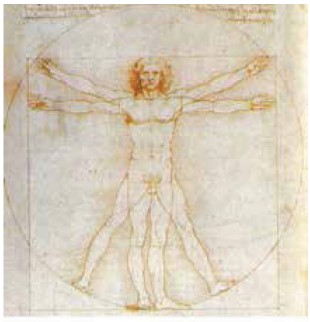
1. Repeating or Periodic Decimal Numbers
2. Mixed Periodic Numbers
3. Equivalent Fraction of a Decimal Number
4. Pure Periodic Number
5. Exact Decimal Number



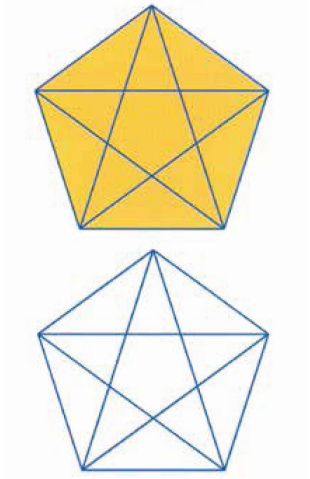
ترسیم مربع C۲ که دو برابر مساحت مربع C است. ضلع مربع C۲ برابر با قطر مربع C است. یک مربع شامل دو مثلث قائم‌الزاویه هم‌اندازه و مربع دیگر شامل چهار مثلث است. بنابراین، مساحت مربع C۲ دو برابر مساحت مربع C است.

بیایید فرض کنیم که ضلع مربع کوچک ۳ فوت (۱ متر) است. اگر از قضیه فیثاغورث برای هر مثلث قائم‌الزاویه استفاده کنیم، عدد گنگ $\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید. در حقیقت:

$$d = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}$$



میانگین طلایی در جهان هنر و طراحی بارها مورد استفاده قرار گرفته است، زیرا نسبت‌ها براساس میانگین، به‌طور خاصی هماهنگ هستند. تصویر، مرد ویترویوسی[1]، نقاشی معروف لئوناردو داوینچی را نشان می‌دهد. او در این تصویر، نسبت‌های ایدئال بدن انسان را مطالعه کرده است.



ستاره پنج‌پر نماد مدرسه فیثاغورث بود. این نماد یک پنج‌ضلعی است که با کشیدن همه قطرهای آن، یک ستاره در آن محاط شده است.

اعداد گنگ[2]

بیایید اعداد زیر را در نظر بگیریم:

- ... ۳/۰۳۰۰۳۰۰۰۳۰۰۰۰۳، این عددی با اعشار نامتناهی است، اما یک عدد متناوب نیست!
- نتیجه انجام جذر تقریبی، از قبیل $\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲$ ؛ اعداد اعشار تکرار می‌شوند، نه به‌صورت متناوب بلکه به‌صورت تصادفی.
- نتیجه تقسیم محیط دایره به قطر آن. معمولاً این عدد را با حرف یونانی π نشان می‌دهیم که مقدار عددی آن ...۳/۱۴۱۵۹ است.

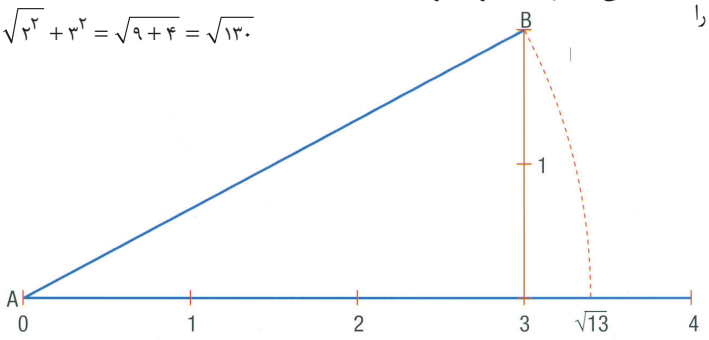
نتیجه واضح است: اگر بخواهیم اعمال ریاضی عادی، خصوصاً جذر را انجام دهیم، اعداد گویا کافی نیستند. لازم است مجموعه جدیدی از اعداد با اعشار نامتناهی را معرفی کنیم که متناوب نیستند؛ به این **اعداد گنگ** گفته می‌شود.

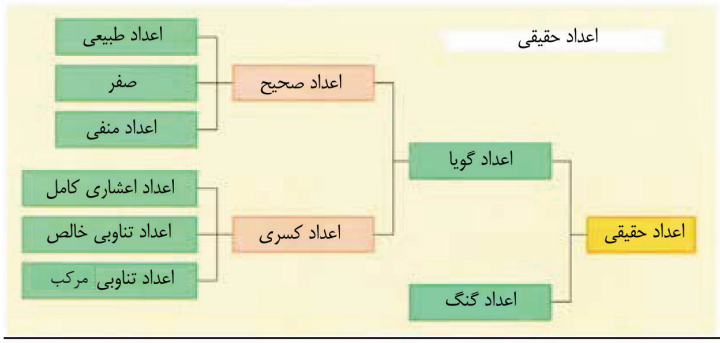
نسبت طلایی[3]

به لحاظ تاریخی، نخستین عدد گنگ شناخته شده، عدد $\varphi = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است، که مقدار عددی آن ...۱/۶۱۸۰۳۳۹ است. این عدد با تقسیم قطر بر ظلع یک پنج‌ضلعی منتظم به دست می‌آید.
میانگین طلایی در جهان هنر و طراحی بارها مورد استفاده قرار گرفته است، زیرا نسبت‌ها بر اساس میانگین، به‌طور خاصی هماهنگ هستند.

قضیه فیثاغورث[4] تعیین موقعیت بعضی از اعداد گنگ روی خط راست را امکان‌پذیر می‌کند. برای مثال، به‌منظور نشان دادن عدد $\sqrt{۱۳}$ ، سه واحد را معین و بعد دو واحد را روی خط عمودی جدا می‌کنیم. در آخر، سوزن پرگار را در نقطه A می‌گذاریم و دهانه پرگار را به اندازه AB باز می‌کنیم و کمان می‌زنیم. محل تقاطع کمان با محور افقی، مقدار $\sqrt{۱۳}$ خواهد بود:

$$\sqrt{۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳۰}$$





1. Vitruvian man
2. Irrational numbers
3. The golden ration
4. Pythagorean theorem

سیستم اندازه‌گیری جهانی

می‌توانید تصور کنید اگر هر کشور در هر منطقه‌ای از جهان واحد اندازه‌گیری متفاوتی را استفاده می‌کرد، چه می‌شد؟ چه آشوبی! اما تا کمی بیش از دویست سال پیش، به همین صورت بود. در برخی مناطق، واحد اندازه‌گیری دست بود؛ در مناطق دیگر یارد؛ جایی دیگر پا، و غیره. تا سال ۱۷۹۲ که آکادمی علوم در پاریس به دلامبر[1] و مِشِن[2] مسئولیت داد یک واحد اندازه‌گیری تعیین کنند و بدین صورت، **سیستم اندازه‌گیری متریک**[3] به وجود آمد که واحد پایه‌ای آن متر است و امروزه تقریباً در همه جای دنیا استفاده می‌شود.

واحدهای طول

آلیس دومیدانی کار می‌کند. یکشنبه هفته آینده، ۷/۵ مایل (۱۲/۳ کیلومتر) را مسابقه می‌دهد. اگر متوسط گام‌های او ۳۱/۵ اینچ (۸۰ سانتی‌متر) باشد، باید چند گام در مسابقه بردارد؟

برای پاسخ به این سؤال، اول مایل را به اینچ تبدیل می‌کنیم:

(اینچ در هر مایل) ۶۳۳۶۰ = (اینچ) ۱۲ × (یک مایل = فوت) ۵۲۸۰

طول زمین مسابقه (اینچ) ۴۷۵۳۹۰ = (مایل) ۷/۵ × ۶۳۳۶۰

که این عدد باید بر طول گام‌های آلیس تقسیم شود:

۴۷۵۳۹۰ ÷ ۳۱/۵ =۱۵/۰۹۲

آلیس باید ۱۵۰۹۲ گام تا انتهای مسابقه بدود.

پیش از آنکه سیستم متریک ابداع شود، واحدها و مبناهای بی‌شماری برای اندازه‌گیری در سراسر دنیا استفاده‌می‌شدند.

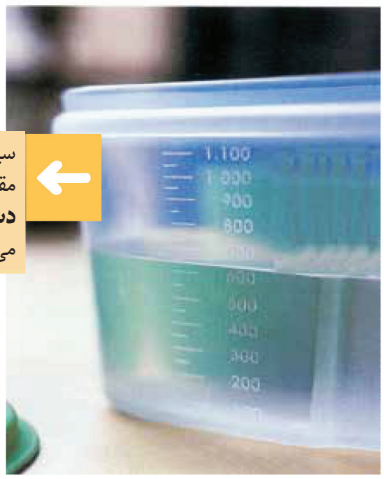
شکل سمت چپ، نیم فانگا[4] (حدود ۱۱ لیتر) را نشان می‌دهد که واحد اندازه‌گیری حجم است که در اسپانیا برای دانه‌ها و بنشن‌ها استفاده می‌شد؛ در شکل زیر، آروبا[5] نشان داده می‌شود که وزنه ای معادل ۱۱/۵۰۲ کیلوگرم یا ۲۵ پوند بود، که در اروپا استفاده می‌شد.

اندازه‌گیری یعنی چه؟

برای اندازه‌گیری چیزها، اولین کاری که باید انجام دهیم تعیین مقدار اولیه ایست که به آن واحد می‌گوییم. سپس، می‌توانیم هر مقداری را در مقایسه با واحد، اندازه بگیریم و ببینیم چقدر است.

سیستم متریک برای نشان دادن مضرب‌های یک واحد، از پیشوندهای **دکا-**، **هکتو-** و **کیلو-** استفاده می‌کند

سیستم متریک برای نشان دادن مقسوم‌علیه‌های یک واحد، از پسوندهای **دسی-**، **سانتی-** و **میلی-** استفاده می‌کند



ضرب در ۱۰۰							
تقسیم بر ۱۰۰							
نام	میلی‌متر	سانتی‌متر	دسی‌متر	متر	دکامتر	هکتومتر	کیلومتر
نماد	mm	cm	dm	m	dam	hm	km

1. Delambre
2. Mechain
3. Metric System
4. Fanega
5. Arroba

ضرب در ۱۰۰							
تقسیم بر ۱۰۰							
نام	کیلومتر مربع	هکتومترمربع	دکا متر مربع	متر مربع	دسی‌مترمربع	سانتی‌مترمربع	میلی‌مترمربع
نماد	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
نام		هکتار	مساحت	سنتیر[1]			
نماد		ha	a	ca			

واحدهای حجم، گنجایش و جرم

لَری دوست دارد مقایسه انجام دهد و تمام روز را به محاسبه چیزها در سرش می‌گذراند. وقتی زیر آفتاب، کنار استخر دراز کشیده بود (گنجایش استخر ۸۱۳ مترمکعب بود)، ۲ سؤال به ذهنش آمد:

گنجایش استخر چند برابر حجم یک بطری آب میوه ۷۵ سانتی‌لیتری است؟ آب استخر چند تن وزن دارد؟

او به راحتی به این سؤالات پاسخ داد:

$$۸۱۳\ m^۳ = ۸۱۳ \times ۱۰۰۰\ dm^۳$$

$$۸۱۳۰۰۰\ dm^۳ = ۸۱۳.... = ۸۱۳۰۰۰ l \times ۱۰۰\ cl = ۸۱۳۰۰۰۰۰\ cl$$

بنابراین: $\frac{۸۱۳۰۰۰۰۰}{۷۵} = ۱۰۸۴۰۰۰$

می‌توانیم نتیجه بگیریم که ظرفیت استخر ۱۰۸۴۰۰۰ بار بیشتر از ظرفیت بطری است.

یک لیتر آب تقطیر شده یک کیلوگرم وزن دارد. وزن یک لیتر آب استخر کمی بیشتر است، زیرا علاوه بر آب، شامل چیزهای دیگری مثل نمک و کلر است.

در نتیجه، می‌توانیم نتیجه بگیریم که وزن آب استخر حدود ۸۱۳۰۰۰ کیلوگرم است، یعنی:

$\frac{۸۱۳۰۰}{۱۰۰۰} = ۸۱۳\ t$ (تن)

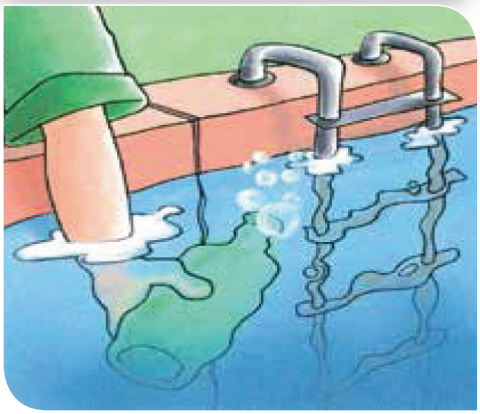
در علوم کامپیوتر، از یک مبنای دو استفاده می‌شود، و نزدیک‌ترین توان دو به یک هزار، $۲^{۱۰}$ است که می‌شود ۱۰۲۴. یک کیلوبایت معادل ۱۰۰۰ بایت نیست، بلکه معادل ۱۰۲۴ بایت است؛ یک مگابایت معادل ۱۰۴۸۵۷۶ = ۱۰۲۴ × ۱۰۲۴ بایت و به همین ترتیب.

ضرب در ۱۰۰ / تقسیم بر ۱۰۰	حجم		ظرفیت		جرم (آب مقطر)		ضرب در ۱۰۰ / تقسیم بر ۱۰۰
	نام	نماد	نام	نماد	نام	نماد	
	کیلومترمکعب	km^3					
	هکتومترمکعب	hm^3					
	دکامترمکعب	dam^3					
	مترمکعب	m^3	کیلولیتر	kl	تن	t	
			هکتولیتر	hl	کوینتال	q	
			دکالیتر	dal			
	دسی‌مترمکعب	dm^3	لیتر	l	کیلوگرم	kg	
			دسی‌لیتر	dl	هکتوگرم	hg	
			سانتی‌لیتر	cl	دکاگرم	dag	
	سانتی‌مترمکعب	cm^3	میلی‌لیتر	ml	گرم	g	
					دسی‌گرم	dg	
					سانتی‌گرم	cg	
	میلی‌مترمکعب	mm^3			میلی‌گرم	mg	

واحدهای مساحت سطح

لوسی و جان در مزرعه‌ای به مساحت ۷۰ جریب (۲۸ هکتار) کار می‌کنند. اما تصمیم گرفته‌اند آن را به یک شرکت ساختمانی بفروشند که ۱۲ جریب را به‌عنوان مساحت مشترک کنار گذاشته و بقیه را به قسمت‌های ۶۰۰ یارد مربعی (۵۰۱ متر مربع) تقسیم می‌کند تا برای ساختن کلبه‌های ییلاقی استفاده کند. (یک جریب معادل ۴۸۴۰ یارد مربع است.) چند کلبه در این مساحت ساخته خواهد شد؟

مساحت قابل استفاده برای ساخت و ساز ۵۸ = ۱۲ − ۷۰ جریب است. این مساحت برابر است با: (یاردمربع) ۲۸۰۷۲۰ = ۴۸۴۰ × ۵۸. با تقسیم ۲۸۰۷۲۰ به ۶۰۰، می‌بینیم که ۴۶۸ کلبه ییلاقی قابل ساخت است.



برای اندازه‌گیری مقادیر زیاد، از پیشوندهای **مگا** (M) که معادل یک میلیون است، **گیگا** (G) که معادل یک بیلیون است و **ترا** (T) که معادل یک تریلیون است، استفاده می‌کنیم.

این واحدها در علم کامپیوتر متداولند. برای مثال، می‌گوییم مگاهرتز و گیگابایت.

1. Centiare

معادلات

مارسل ۱۰درصد روی قیمت یک پرینتر تخفیف گرفت، اما وقتی برای پرداخت پول رفت، ۱۰درصد برای مالیات از او خواستند. او در کل، ۱۹۸ دلار پرداخت کرد. چطور قیمت واقعی پرینتر را محاسبه می‌کنید؟

پیدا کردن مجهولات

در حل یک مسئله، انجام مراحل زیر مفید است:

۱. مسئله را آهسته و هر چند بار که نیاز دارید بخوانید، تا کاملاً آن را بفهمید.

۲. بفهمید مسئله از شما چه خواسته است. معمولاً سؤال‌ها در جهت پیدا کردن جواب مسئله هستند. در مسئله‌ای که مطرح شد، فقط یک سؤال داریم: قیمت واقعی پرینتر.

۳. برای نشان دادن **مجهولات**، از حروف استفاده کنید. در مسئله فوق، x برابر است با قیمت واقعی پرینتر.

تشکیل معادله

وقتی مجهولات را شناسایی کردید، باید به اول مسئله برگردید و جملات را از هم جدا کنید. در مثال ما، ۳ قسمت اصلی وجود دارد.

- مارسل ۱۰درصد تخفیف گرفت. یعنی، ۹۰درصد قیمت اولیه را پرداخت کرد. به عبارت دیگر، او $\frac{۹x}{۱۰}$ پرداخت کرد.
- آن‌ها ۱۰درصد برای مالیات اضافه کردند. یعنی: $\frac{۹x}{۱۰} \div ۱۰$

که معادل است با $\frac{۹x}{۱۰۰}$

- در آخر، او ۱۹۸دلار پرداخت کرد:

$$\frac{۹x}{۱۰} + \frac{۹x}{۱۰۰} = ۱۹۸$$

هریک از اعداد افزوده در یک معادله، **جمله**[1] نام دارند. در مثال فوق، اولین طرف تساوی، دو جمله و دومین طرف تساوی، یک جمله دارد.

معادله، **دو طرف تساوی**[2] دارد، یکی در سمت چپ علامت مساوی و دیگری در سمت راست آن قرار دارد.

در مصر و در بین‌النهرین باستان، دانش ریاضی بسیار پیشرفته بود. هر دو تمدن می‌توانستند مسائل را به‌صورت فرمول درآورده و معادلات را حل کنند. در تصاویر: در سمت چپ، یک هرم‌سنگ در کارناک[3] مصر نشان داده می‌شود، و در تصویر زیر، شهر ماری[4] در بین‌النهرین قدیم دیده می‌شود.

1.Term
2. Member
3. Karnak
4. Mari

درجهٔ[1] یک معادله بزرگ‌ترین توان مجهولات است. معادله در مثال فوق، یک معادله درجه اول است. اگر بزرگ‌ترین توان دو بود، می‌گفتیم معادله درجه دوم است و اگر سه بود، معادله درجه سه بود، و به همین ترتیب.

حل معادله

حل معادله شامل پیدا کردن مقادیری است که جایگزین مجهولات می‌شوند تا تساوی برقرار شود. برای این منظور، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. مخرج را با ضرب کردن کل معادله در کوچک‌ترین مقسوم‌علیه مشترک از بین می‌بریم؛ که در این مسئله ۱۰۰ است.

$$۱۰۰\times\frac{۹x}{۱۰}+۱۰۰\times\frac{۹x}{۱۰۰}=۱۰۰\times۱۹۸$$

۲.عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

$$۹x+۹x=۱۹۸۰۰$$

۳. جملاتی را که حاوی مجهول هستند تلفیق می‌کنیم:

$$۹۹x=۱۹۸۰۰$$

۴. کل معادله را به ۹۹ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۹۹x}{۹۹}=\frac{۱۹۸۰۰}{۹۹}$$

و مقدار مجهول x را به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{۱۹۸۰۰}{۹۹}=۲۰۰ \quad \text{(دلار)}$$

ممکن است فکر کرده باشیم که اگر مارسل ۱۰درصد تخفیف گرفته باشد و بعد ۱۰درصد دیگر هم پرداخت کند، قیمت اصلی و قیمت نهایی پرداخت شده مثل هم هستند: ۱۹۸ دلار. با حل مسئله به روش ریاضی، می‌بینیم که این استدلال شهودی درست نیست.

وقتی مارسل تخفیفی معادل یک دهم ۲۰۰ دلار دریافت می‌کند، مقدار تخفیف ۲۰ دلار می‌شود. اما بعد، ۱۰ درصد مالیات روی ۱۸۰ دلار حساب می‌شود که برابر ۱۸ دلار است. درنتیجه، تخفیف و اضافه مالیات برابر نیستند و قیمت نهایی ۱۹۸ = ۱۸ + ۱۸۰ می‌شود.

در سال ۲۱۳ قبل از میلاد، امپراتور کین شی هوانگدی[2] دستور داد همه کتاب‌های ریاضی را نابود کنند. در نتیجه، دقیقاً نمی‌دانیم چه زمانی چینی‌ها شروع به کار با معادلات ریاضی کردند.

در هندوستان، ریاضیات توسط کشیش‌ها ترویج می‌شد، و آن‌ها از دانش خود در زمینه هندسه برای ساختن محراب استفاده می‌کردند.

1.Degree
2. Qin Shi Huangdi

معادله چیست؟

در معادلات جبری از اعداد و حروف استفاده می‌شود. با این‌حال، هر عبارت جبری معادله نیست. با درنظر گرفتن مسئله‌ای که حل کردیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای اینکه یک عبارت جبری معادله باشد، باید شرایطی را داشته باشد:

- باید شامل گزاره تساوی باشد. بنابراین، برای مثال، عبارت $۲x + ۳a + ۵$ معادله نیست.
- باید شامل مجهولات باشد. در نتیجه، عبارت $۲ + ۳۰ - \sqrt{۹} = ۲۹$ معادله نیست.
- تساوی باید فقط با بعضی مقادیر مجهولات، که به آنها **راه حل**[۱] می‌گوییم، انجام شود. بنابراین، عبارت $۲x + ۳x = x$ معادله نیست، چون می‌تواند با هر مقداری که برای x در نظر بگیریم، انجام شود. این نوع عبارت جبری، **اتحاد**[۲] نامیده می‌شود.

ریاضی‌دانان یونانی پیش از دیوفانت اسکندرانی[۳] (قرن سوم پس از میلاد) از جبر استفاده نمی‌کردند، اما می‌توانستند از طریق روش‌های هندسی، معادلات و اتحادها را بسازند و حل کنند. برای مثال، اتحاد $(a + b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab$. تصویر، یک معبد یونانی در سلینُنت، سیسیلی[۴] را نشان می‌دهد.

معادله درجه دوم

شهرداری یک شهر می خواهد قسمتی از یک زمین را به ساختن پارکی مستطیل شکل اختصاص دهد. مساحت پارک باید ۶۰۰۰۰ یارد مربع (۵۰۱۶۷ مترمربع) و محیط (طول کلی اضلاع) آن ۱۰۰۰ یارد (۹۱۴ متر) باشد. ابعاد پارک چقدر خواهد بود؟

در حل این مسئله باید در ذهن داشته باشیم که دو ضلع متفاوت مستطیل باید برابر با ۵۰۰ یارد (۴۵۷ متر) باشد، زیرا با هم، نصف محیط را تشکیل می‌دهند. بنابراین، اگر یکی از آنها را x بنامیم، ضلع دیگر $۵۰۰ - x$ خواهد بود.

مساحت مستطیل از ضرب دو ضلع آن در هم محاسبه می‌شود. بنابراین،

$$x(۵۰۰ - x) = ۶۰,۰۰۰$$

با حذف پرانتزها، یک معادله درجه دوم خواهیم داشت:

$$۵۰۰x - x^۲ - ۶۰۰۰۰ = ۰$$

معادله درجه دوم معمولاً با جمله دوم شروع می‌شود:

$$-x^۲ + ۵۰۰x - ۶۰۰۰۰ = ۰$$

محاسبه مقدار مجهول‌ها در یک اتحاد، فایده‌ای ندارد، چون اتحاد می‌تواند با هر مقداری انجام شود. اگر سعی کنیم مقدار مجهول در اتحاد را محاسبه کنیم، چنین اتفاقی می‌افتد:

$$۲x + x = ۳x$$
$$۳x = ۳x$$
$$۳x - ۳x = ۰$$